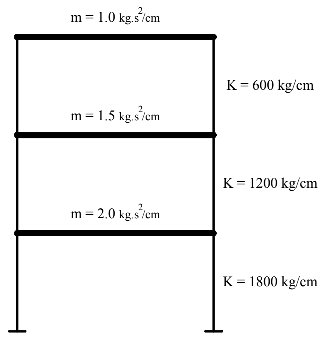
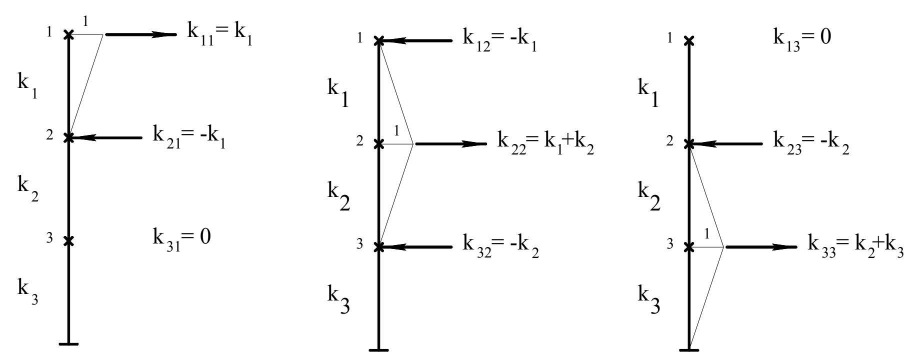
مثال ۱: الف ـ فرکانس‌های زاویه‌ای اصلی را برای سازه مطابق شکل بیابید.



حل ـ ماتریس‌های جرم و سختی برای سازه مفروض تشکیل می‌شوند. با توجه به مفهوم ماتریس سختی و مؤلفه‌های آن $k_{ij} = \dfrac{\partial P_i}{\partial \Delta_j}$ می‌دانیم در ماتریس سختی زیرنویس‌های i و j در هر مؤلفه k_{ij} به ترتیب نشان‌دهنده محل اعمال نیرو و محل ایجاد تغییر مکان می‌باشند. بنابر این برای به دست آوردن این مؤلفه‌ها کافی است کلیه درجات آزادی سازه بسته شوند و سپس تک‌تک آنها آزاد شده، نیروهای مورد نیاز برای ایجاد تغییر مکان واحد در درجه آزادی مزبور محاسبه گردند. در نتیجه با توجه به شکل، ماتریس سختی به دست خواهد آمد:

$$[m] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}$$



$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه به شکل زیر تشکیل می‌گردد:

$$\left[[k] - \omega^2 [m]\right] \{a\} = \{0\}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1800 & -1200 \\ 0 & -1200 & 3000 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{bmatrix}\right] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

دترمینان ماتریس ضرایب معادله مشخصه را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\left|\left[k\right]-\omega^2\left[m\right]\right|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}600 & -600 & 0\\ -600 & 1800 & -1200\\ 0 & -1200 & 3000\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1.0 & 0 & 0\\ 0 & 1.5 & 0\\ 0 & 0 & 2.0\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\begin{vmatrix}600-\omega^2 & -600 & 0\\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200\\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2\end{vmatrix}=0$$

با توجه به اینکه سختی‌های طبقات مضرب یکدیگر هستند، می‌توان در هر سطر از مضرب مشترک فاکتور گرفت و طرفین معادله را بر آن تقسیم نمود. البته باید توجه داشت در صورتی که چنین شرایطی برقرار نباشد، باید دترمینان بالا را به همان شکل اولیه بسط داد که منجر به تشکیل یک معادله درجه n برحسب ω^2 می‌شود. با توجه به اینکه مقادیر منفی برای ω معنی ندارد، برای ω تعداد n ریشه به دست خواهد آمد.

$$\begin{vmatrix}1-\dfrac{\omega^2}{600} & -1 & 0\\ -1 & 3-1.5\dfrac{\omega^2}{600} & -2\\ 0 & -2 & 5-\dfrac{2\omega^2}{600}\end{vmatrix}=0$$

می‌توان با تغییر متغیر $\lambda=\dfrac{\omega^2}{600}$ معادله را به شکل ساده‌تر زیر نوشت:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 3-1.5\lambda & -2\\ 0 & -2 & 5-2\lambda\end{vmatrix}=0$$

با بسط دترمینان و مرتب کردن آن معادل زیر حاصل می‌شود:

$$3\lambda^3-16.5\lambda^2+22.5\lambda-6=0$$

پاسخ‌های معادله را به ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم و در نتیجه فرکانس‌های زاویه‌ای مودهای اول تا سوم محاسبه می‌گردند.

$$\begin{cases}\lambda_1=0.35\\ \lambda_2=1.61\\ \lambda_3=3.54\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\omega_1=14.5\ (rad/s)\\ \omega_2=31.1\ (rad/s)\\ \omega_3=46.1\ (rad/s)\end{cases}$$

ب ـ ماتریس مودال (ماتریس شکل) را محاسبه کنید.

حل ـ می‌توان معادله مشخصه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix}600-\omega^2 & -600 & 0\\ -600 & 1800-1.5\omega^2 & -1200\\ 0 & -1200 & 3000-2\omega^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_{1i}\\ a_{2i}\\ a_{3i}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

یا

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 3-1.5\lambda & -2\\ 0 & -2 & 5-2\lambda\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{Bmatrix}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

بدین ترتیب با جاگذاری هریک از ωها یا λهای به دست آمده در معادله فوق می‌توان یک دستگاه معادلات همزمان با طرف دوم صفر به دست آورد که به روش عادی حذفی گوس قابل حل نخواهند بود. از انجا که ωها یا λهای به دست آمده، دترمینان ماتریس ضرایب را صفر می‌کنند، این دستگاه‌های معادلات همزمان، بی‌نهایت دسته جواب خواهند داشت که با اختیارکردن یکی از مقادیر، می‌توان با استفاده از معادلات، بقیه را به دست آورد.

مود اول:

$$\omega=\omega_1=14.5 \quad (\lambda_1=0.351) \qquad \begin{cases} 0.649a_1-a_2=0 \\ -a_1+2.474a_2-2a_3=0 \\ -2a_2+4.298a_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \{\phi\}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.649 \\ 0.302 \end{Bmatrix}$$

مود دوم:

$$\omega=\omega_2=31.1 \quad (\lambda_2=1.61) \qquad \begin{cases} -0.61a_1-a_2=0 \\ -a_1+0.585a_2-2a_3=0 \\ -2a_2+1.78a_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \{\phi\}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.61 \\ -0.678 \end{Bmatrix}$$

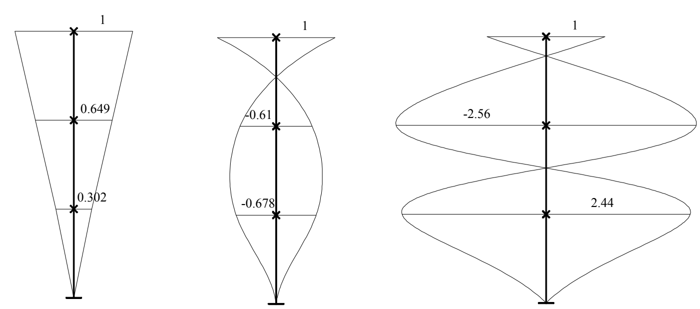
مود سوم:

$$\omega=\omega_3=46.1 \quad (\lambda_3=3.54) \qquad \begin{cases} -2.54a_1-a_2=0 \\ -a_1-2.31a_2-2a_3=0 \\ -2a_2-2.08a_3=0 \end{cases} \quad \rightarrow \{\phi\}_3=\begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.44 \end{Bmatrix}$$

در نتیجه می‌توان ماتریس مودال را به شکل زیر نوشت:

$$[\Phi]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.61 & -2.54 \\ 0.302 & -0.678 & 2.44 \end{bmatrix}$$

اشکال مودی به صورت زیر ترسیم می‌گردند.



مود اول مود دوم مود سوم

در این حالت می‌توان پاسخ سازه را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} x_{1(t)} \\ x_{2(t)} \\ x_{3(t)} \end{Bmatrix}=A_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.649 \\ 0.302 \end{Bmatrix}\sin(14.5+\theta_1)+A_2\begin{Bmatrix} 1 \\ -0.61 \\ -0.678 \end{Bmatrix}\sin(31.1+\theta_2)+A_3\begin{Bmatrix} 1 \\ -2.54 \\ 2.44 \end{Bmatrix}\sin(46.1+\theta_3)$$

که در آن A_i و θ_i پارامترهایی هستند که می‌توان آنها را با توجه به شرایط مرزی تعیین نمود.

پ ـ ماتریس جرم مودال نرمال و ماتریس سختی مودال نرمال را به دست آورید و نشان دهید

$$\left[\overline{M}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[m]\left[\overline{\Phi}\right]=[I]$$
$$\left[\overline{K}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[k]\left[\overline{\Phi}\right]=\left[\Omega^2\right]$$

که در آن $\left[\Omega^2\right]$ یک ماتریس قطری است که مولفه‌های قطر اصلی آن ω_i^2ها می‌باشند.

حل ـ ابتدا باید ماتریس جرم مودال $[M]$ را محاسبه نمود.

$$[M]=[\Phi]^T[m][\Phi]=\begin{bmatrix}1 & 0.649 & 0.302\\ 1 & -0.61 & -0.678\\ 1 & -2.54 & 2.44\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.649 & -0.61 & -2.54\\ 0.302 & -0.678 & 2.44\end{bmatrix}$$

$$[M]=\begin{bmatrix}1.814 & & \\ & 2.478 & \\ & & 22.585\end{bmatrix}$$

مولفه‌های قطر اصلی ماتریس فوق همان M_iها هستند. ملاحظه می‌شود که در محاسبه، مؤلفه‌های غیرواقع بر قطر اصلی برابر صفر به دست آمده‌اند و ماتریس، قطری می‌باشد. ماتریس مودال نرمال به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\left[\overline{\Phi}\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{1.814}} & \frac{1}{\sqrt{2.478}} & \frac{1}{\sqrt{22.585}}\\ \frac{0.649}{\sqrt{1.814}} & \frac{-0.61}{\sqrt{2.478}} & \frac{-2.54}{\sqrt{22.585}}\\ \frac{0.302}{\sqrt{1.814}} & \frac{-0.678}{\sqrt{2.478}} & \frac{2.44}{\sqrt{22.585}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.742 & 0.635 & 0.210\\ 0.482 & -0.387 & -0.534\\ 0.224 & -0.431 & 0.513\end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{M}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[m]\left[\overline{\Phi}\right]=\begin{bmatrix}0.742 & 0.482 & 0.224\\ 0.635 & -0.387 & -0.431\\ 0.210 & -0.534 & 0.513\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.742 & 0.635 & 0.210\\ 0.482 & -0.387 & -0.534\\ 0.224 & -0.431 & 0.513\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}=[I]$$

ملاحظه می‌شود که ماتریس جرم مودال نرمال برابر ماتریس همانی می‌باشد یعنی $\overline{M}_i=1$. برای محاسبه ماتریس سختی مودال نرمال باید به ترتیب زیرعمل نمود:

$$\left[\overline{K}\right]=\left[\overline{\Phi}\right]^T[k]\left[\overline{\Phi}\right]=\begin{bmatrix}0.742 & 0.482 & 0.224\\ 0.635 & -0.387 & -0.431\\ 0.210 & -0.534 & 0.513\end{bmatrix}\begin{bmatrix}600 & -600 & 0\\ -600 & 1800 & -1200\\ 0 & -1200 & 3000\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.742 & 0.635 & 0.210\\ 0.482 & -0.387 & -0.534\\ 0.224 & -0.431 & 0.513\end{bmatrix}$$

$$\left[\overline{K}\right]=\begin{bmatrix}210.6 & 0 & 0\\ 0 & 966 & 0\\ 0 & 0 & 2124\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}14.5^2 & & \\ & 31.1^2 & \\ & & 46.1^2\end{bmatrix}$$

ت ـ با فرض (cm) $\{x_0\}=\begin{Bmatrix}0.5\\0.4\\0.3\end{Bmatrix}$ و (cm/s) $\{\dot{x}_0\}=\begin{Bmatrix}0\\9\\0\end{Bmatrix}$، با استفاده از هردو تغییر متغیر $\{x\}=[\Phi]\{y\}$ و $\{x\}=\left[\overline{\Phi}\right]\{y\}$ جابجایی را در لحظه $t=0.1\ s$ به دست آورید.

حل: ابتدا مسأله را با تغییر متغیر $\{x\}=[\Phi]\{y\}$ حل می‌کنیم. باید شرایط اولیه مودال را از روابط مربوطه محاسبه نمود.

$$y_{i(0)}=\frac{1}{M_i}\{\phi\}_i^T[m]\{x_0\}$$

$$y_{1(0)}=\frac{1}{1.814}\times\begin{Bmatrix}1\\0.649\\0.302\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5\\0.4\\0.3\end{Bmatrix}=0.590$$

$$y_{2(0)}=\frac{1}{2.478}\times\begin{Bmatrix}1\\-0.61\\-0.678\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5\\0.4\\0.3\end{Bmatrix}=-0.110$$

$$y_{3(0)}=\frac{1}{22.585}\times\begin{Bmatrix}1\\-2.54\\2.44\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5\\0.4\\0.3\end{Bmatrix}=0.019$$

$$\dot{y}_{i(0)}=\frac{1}{M_i}\{\phi\}_i^T[m]\{\dot{x}_0\}$$

$$\dot{y}_{1(0)}=\frac{1}{1.814}\times\begin{Bmatrix}1\\0.649\\0.302\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\9\\0\end{Bmatrix}=4.830$$

$$\dot{y}_{2(0)}=\frac{1}{2.478}\times\begin{Bmatrix}1\\-0.61\\-0.678\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\9\\0\end{Bmatrix}=-3.323$$

$$\dot{y}_{3(0)}=\frac{1}{22.585}\times\begin{Bmatrix}1\\-2.54\\2.44\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&&\\&1.5&\\&&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\9\\0\end{Bmatrix}=-1.518$$

خلاصه نتایج به شرح زیر می‌باشد:

$$\{y_0\}=\begin{Bmatrix}0.590\\-0.110\\0.019\end{Bmatrix}\qquad\{\dot{y}_0\}=\begin{Bmatrix}4.830\\-3.323\\-1.518\end{Bmatrix}\qquad\{\omega\}=\begin{Bmatrix}14.5\\31.1\\46.1\end{Bmatrix}$$

با توجه به داده‌های مسأله، پاسخ از نوع ارتعاش آزاد بدون میرایی است، پس معادله ارتعاش به شکل زیر خواهد بود:

$$\ddot{y}_i^2+\omega_i^2 y=0\quad\Rightarrow\qquad y_i=\frac{\dot{y}_{i(0)}}{\omega_i}\sin\omega_i t+y_{i(0)}\cos\omega_i t$$

$$y_1=\frac{4.830}{14.5}\times\sin 14.5t+0.590\cos 14.5t$$

$$y_2=\frac{-3.323}{31.1}\times\sin 31.1t-0.110\cos 31.1t$$

$$y_3=\frac{-1.518}{46.1}\times\sin 46.1t+0.019\cos 46.1t$$

پاسخ مودال سیستم در لحظه $t = 0.1\ s$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\{y_{(0.1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.402 \\ 0.107 \\ 0.031 \end{Bmatrix}$$

پس پاسخ واقعی سازه یعنی تغییر مکان‌های طبقات اول تا سوم در لحظه $t = 0.1\ s$ به شرح زیر خواهد بود:

$$\{x_{(0.1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.649 & -0.61 & -2.54 \\ 0.302 & 0.649 & 2.44 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.402 \\ 0.107 \\ 0.031 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.539 \\ 0.118 \\ 0.124 \end{Bmatrix} \quad (cm)$$

اگر مسأله با تغییر متغیر $\{x\} = [\overline{\Phi}]\{y\}$ حل گردد، روند عملیات به شرح زیر می‌باشد.

$$\{y_0\} = [\overline{\Phi}]^T [m]\{x_0\}$$

$$\{y_0\} = \begin{bmatrix} 0.742 & 0.482 & 0.224 \\ 0.635 & -0.388 & -0.431 \\ 0.210 & -0.534 & 0.513 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.3 \end{Bmatrix}$$

$$\{y_0\} = \begin{Bmatrix} 0.795 \\ -0.174 \\ 0.092 \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{y}_0\} = [\overline{\Phi}]^T [m]\{\dot{x}_0\}$$

$$\{\dot{y}_0\} = \begin{bmatrix} 0.742 & 0.482 & 0.224 \\ 0.635 & -0.388 & -0.431 \\ 0.210 & -0.534 & 0.513 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1.5 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{y}_0\} = \begin{Bmatrix} 6.507 \\ -5.238 \\ -7.209 \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{y}_i^2 + \omega_i^2 y = 0 \quad \Rightarrow \qquad y_i = \frac{\dot{y}_{i(0)}}{\omega_i} \sin \omega_i t + y_{i(0)} \cos \omega_i t$$

$$\{y_0\} = \begin{Bmatrix} 0.795 \\ -0.174 \\ 0.092 \end{Bmatrix} \qquad \{\dot{y}_0\} = \begin{Bmatrix} 6.507 \\ -5.238 \\ -7.209 \end{Bmatrix} \qquad \{\omega\} = \begin{Bmatrix} 14.5 \\ 31.1 \\ 46.1 \end{Bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{6.507}{14.5} \times \sin 14.5t + 0.795 \cos 14.5t$$

$$y_2 = \frac{-5.238}{31.1} \times \sin 31.1t - 0.174 \cos 31.1t$$

$$y_3 = \frac{-7.209}{46.1} \times \sin 46.1t + 0.092 \cos 46.1t$$

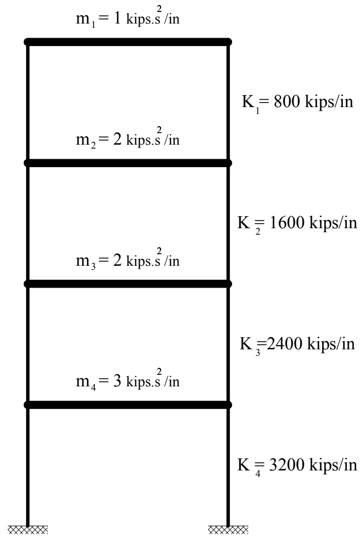
$$\{y_{(0.1)}\} = \begin{Bmatrix} 0.541 \\ 0.169 \\ 0.146 \end{Bmatrix}$$

$$\{x\}=\left[\overline{\Phi}\right]\{y\}$$

$$\left\{x_{(0.1)}\right\}=\begin{bmatrix}0.742 & 0.635 & 0.210\\ 0.482 & -0.388 & -0.534\\ 0.224 & -0.431 & 0.513\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}0.541\\ 0.169\\ 0.146\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.539\\ 0.117\\ 0.124\end{Bmatrix}\ (cm)$$

ملاحظه می‌شود انتخاب روش تأثیری بر نتایج نهایی به دست آمده ندارد.

مثال ۲: با استفاده از روش تحلیل طیفی و با فرض نسبت میرایی پنج در صد و استفاده از طیف صفحه ۳۳۴ کتاب، حداکثر جابجایی را در طبقه فوقانی به دست آورید.



$$[m]=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3\end{bmatrix}$$

$$[k]=\begin{bmatrix}800 & -800 & 0 & 0\\ -800 & 2400 & -1600 & 0\\ 0 & -1600 & 4000 & -2400\\ 0 & 0 & -2400 & 5600\end{bmatrix}$$

$$\left|[k]-\omega^2[m]\right|=0$$

$$\left|\begin{bmatrix}800 & -800 & 0 & 0\\ -800 & 2400 & -1600 & 0\\ 0 & -1600 & 4000 & -2400\\ 0 & 0 & -2400 & 5600\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3\end{bmatrix}\right|=0$$

$$\frac{\omega^2}{800}=\lambda \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\frac{\omega^2}{800} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\frac{2\omega^2}{800} & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5-\frac{2\omega^2}{800} & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7-\frac{3\omega^2}{800} \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-2\lambda & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 5-2\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7-3\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-2\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 5-2\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 7-3\lambda \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 5-2\lambda & -3 \\ 0 & -3 & 7-3\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)\times\{(3-2\lambda)\times[(5-2\lambda)\times(7-3\lambda)-9]+2\times[-2\times(7-3\lambda)]\}\\&-[(5-2\lambda)\times(7-3\lambda)-9]=0\end{aligned}$$

$$\{\lambda\}=\begin{Bmatrix}0.2209\\1.0996\\2.1093\\3.9035\end{Bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{Bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\\\omega_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}13.294\\29.660\\41.079\\55.882\end{Bmatrix}$$

$$\omega=\omega_1=13.294 \qquad \Rightarrow \qquad \{\phi\}_1=\begin{Bmatrix}1.000\\0.7791\\0.4966\\0.2351\end{Bmatrix}$$

$$\omega=\omega_2=29.660 \qquad \Rightarrow \qquad \{\phi\}_2=\begin{Bmatrix}1.0000\\-0.0996\\-0.5399\\-0.4376\end{Bmatrix}$$

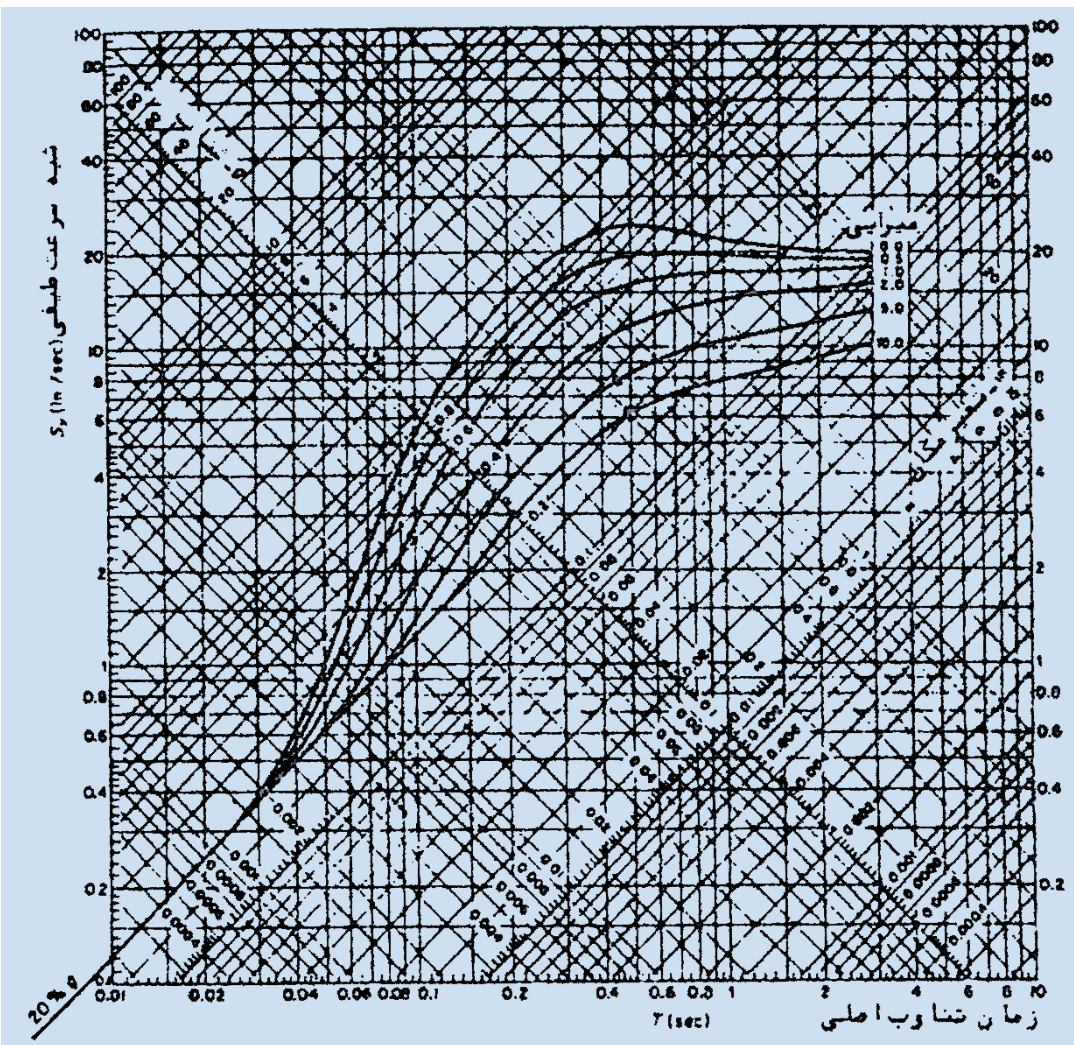
$$\omega=\omega_3=41.079 \qquad \Rightarrow \qquad \{\phi\}_3=\begin{Bmatrix}-0.9015\\1.0000\\-0.1586\\-0.7080\end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_4 = 55.882 \qquad \Rightarrow \qquad \{\phi\}_4 = \begin{Bmatrix} 0.1544 \\ -0.4482 \\ 1.0000 \\ -0.6369 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & -0.9015 & 0.1544 \\ 0.7791 & -0.0996 & 1.0000 & -0.4482 \\ 0.4966 & -0.5399 & -0.1586 & 1.0000 \\ 0.2351 & -0.4376 & -0.7080 & -0.6369 \end{bmatrix}$$

$$[M] = [\Phi]^T [m][\Phi] = \begin{bmatrix} 2.873 & & & \\ & 2.177 & & \\ & & 4.367 & \\ & & & 3.643 \end{bmatrix}$$

با توجه به فرکانس‌های زاویه‌ای محاسبه شده، مقادیر زمان تناوب برای مودهای مختلف محاسبه می‌شوند و از نمودار زیـر، مقـادیر طیف تغییر مکان متناظر با زمان‌تناوب‌های محاسبه شده از نمودار مربوط به میرایی پنج درصد قرائت می‌شوند.



n	ω	$T=2\pi/\omega$	S_d
1	13.294	0.47	0.60
2	29.660	0.21	0.14
3	41.079	0.15	0.07
4	55.882	0.11	0.03

ضرایب مشارکت مودها را محاسبه می‌کنیم:

$$\{L\}=[\Phi]^T[m]\{I\}$$

$$\{L\}=\begin{bmatrix} 1.000 & 1.000 & -0.9015 & 0.1544 \\ 0.7791 & -0.0996 & 1.0000 & -0.4482 \\ 0.4966 & -0.5399 & -0.1586 & 1.0000 \\ 0.2351 & -0.4376 & -0.7080 & -0.6369 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\{L\}=\begin{Bmatrix} 4.2567 \\ -1.5918 \\ -1.3427 \\ -0.6527 \end{Bmatrix}$$

$$y_{i\ \max}=\frac{L_i}{M_i}S_{d\,i}$$

$$y_{1\ \max}=\frac{4.2567}{2.873}\times 0.60=0.8890$$

$$y_{2\ \max}=\frac{-1.5918}{2.177}\times 0.14=-0.1024$$

$$y_{3\ \max}=\frac{-1.3427}{4.367}\times 0.07=-0.0215$$

$$y_{4\ \max}=\frac{-0.6527}{3.643}\times 0.03=-0.0054$$

با استفاده از روش جذر مجموع مربعات، محاسبه مطلوب مسأله که حداکثر تغییر مکان طبقه فوقانی (x_1) می‌باشد، به راحتی امکان‌پذیر است.

$$x_{1\ \max}=\left[(\phi_{11}y_{1\max})^2+(\phi_{12}y_{2\max})^2+(\phi_{13}y_{3\max})^2+(\phi_{14}y_{4\max})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

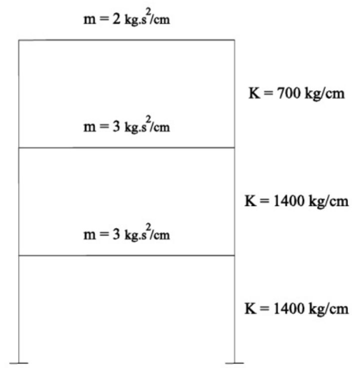
$$x_{1\ \max}=[(1\times 0.8890)^2+(1\times -.1024)^2+(-0.9015\times -0.0215)^2 \\ +(0.1544\times -0.0054)^2]^{1/2}$$

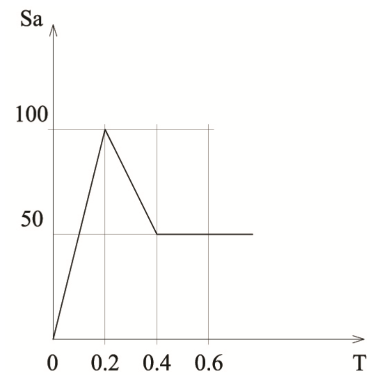
$$x_{1\ \max}=[0.7903+0.0105+0.0004+0.0000]^{1/2}=0.895\ in$$

مثال ۳: یک سازه سه طبقه با رفتار برشی به شکل زیر مفروض است:

الف ـ با فرض $\xi = 0.05$ و شرایط اولیه داده شده زیر، با استفاده از روش تحلیل مودال تغییر مکان طبقات سازه را در لحظه $t = 1\,s$ بیابید.

ب ـ با استفاده از طیف S_a داده شده $\left(cm/s^2\right)$ و با استفاده از روش تحلیل طیفی، حداکثر تغییر مکان طبقات را بیابید.





$$x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix} (cm)$$

$$\dot{x}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.4 \end{Bmatrix} (cm/s)$$

الف ـ ماتریس‌های جرم و سختی را تشکیل داده، معادله مشخصه را برای سازه داده شده می‌نویسیم.

$$[m] = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \qquad [K] = \begin{bmatrix} K_1 & -K1 & 0 \\ -K1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 + K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 & -700 & 0 \\ -700 & 2100 & -1400 \\ 0 & -1400 & 2800 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 700 - 2\omega^2 & -700 & 0 \\ -700 & 2100 - 3\omega^2 & -1400 \\ 0 & -1400 & 2800 - 3\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای داشتن جواب‌های غیر صفر، دترمینان ماتریس ضرایب را مساوی صفر قرار می‌دهیم و ω را به گونه‌ای می‌یابیم که این شرط را ارضا کند.

$$\begin{vmatrix} 700 - 2\omega^2 & -700 & 0 \\ -700 & 2100 - 3\omega^2 & -1400 \\ 0 & -1400 & 2800 - 3\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

با تغییر متغیر $\lambda = \dfrac{\omega^2}{700}$ خواهیم داشت:

$$\begin{vmatrix} 1 - 2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 3\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 4 - 3\lambda \end{vmatrix} = 0$$

با بسط دترمینان و مرتب کردن رابطه به دست آمده، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$18\lambda^3 - 51\lambda^2 + 34\lambda - 4 = 0$$

جواب‌های معادله درجه سه فوق به ترتیب صعودی به شرح زیر خواهند بود:

$$\begin{cases}\lambda_1 = 0.149336\\ \lambda_2 = 0.782634\\ \lambda_3 = 1.901363\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\omega_1 = 10.224\\ \omega_2 = 23.406 \quad rad/s\\ \omega_3 = 36.482\end{cases}$$

با جاگذاری ωهای به دست آمده در معادله مشخصه، بردارهای مودال به شرح زیر حاصل می‌شوند:

$$\omega = \omega_1 = 10.224 \rightarrow \begin{cases}490.940a_1 - 700a_2 = 0\\ -700a_1 + 1786.409a_2 - 1400a_3 = 0\\ -1400a_2 + 2486.409a_3 = 0\end{cases} \rightarrow \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix}1\\ 0.701\\ 0.395\end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_2 = 23.406 \rightarrow \begin{cases}-395.682a_1 - 700a_2 = 0\\ -700a_1 + 456.477a_2 - 1400a_3 = 0\\ -1400a_2 + 1156.477a_3 = 0\end{cases} \rightarrow \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix}1\\ -0.565\\ -0.684\end{Bmatrix}$$

$$\omega = \omega_3 = 36.482 \rightarrow \begin{cases}-1961.873a_1 - 700a_2 = 0\\ -700a_1 - 1892.809a_2 - 1400a_3 = 0\\ -1400a_2 - 1192.809a_3 = 0\end{cases} \rightarrow \{\phi\}_3 = \begin{Bmatrix}1\\ -2.803\\ 3.290\end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow [\Phi] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.701 & -0.565 & -2.803\\ 0.395 & -0.684 & 3.290\end{bmatrix}$$

ماتریس جرم مودال را به دست می‌آوریم.

$$[M] = [\Phi]^T[m][\Phi] = \begin{bmatrix}1 & 0.701 & 0.395\\ 1 & -0.565 & -0.684\\ 1 & -2.803 & 3.290\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.701 & -0.565 & -2.803\\ 0.395 & -0.684 & 3.290\end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix}3.942 & & \\ & 4.361 & \\ & & 58.043\end{bmatrix}$$

با استفاده از روابط موجود، شرایط اولیه مودال را با توجه به شرایط اولیه داده شده به دست می‌آوریم:

$$y_{i(0)} = \frac{1}{M_i}\{\phi\}_i^T[m]\{x_0\}$$

$$y_{1(0)} = \frac{1}{3.942} \times \begin{Bmatrix}1\\ 0.701\\ 0.395\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0.5\end{Bmatrix} = 0.658$$

$$y_{2(0)} = \frac{1}{4.361} \times \begin{Bmatrix}1\\ -0.565\\ -0.684\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0.5\end{Bmatrix} = 0.223$$

$$y_{3(0)} = \frac{1}{58.043} \times \begin{Bmatrix}1\\ -2.803\\ 3.290\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 0\\ 0.5\end{Bmatrix} = 0.119$$

$$\dot{y}_{i(0)}=\frac{1}{M_i}\{\phi\}_i^T[m]\{\dot{x}_0\}$$

$$\dot{y}_{1(0)}=\frac{1}{3.942}\times\begin{Bmatrix}1\\0.701\\0.395\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.4\end{Bmatrix}=0.120$$

$$\dot{y}_{2(0)}=\frac{1}{4.361}\times\begin{Bmatrix}1\\-0.565\\-0.684\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.4\end{Bmatrix}=-0.188$$

$$\dot{y}_{3(0)}=\frac{1}{58.043}\times\begin{Bmatrix}1\\-2.803\\3.290\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\0\\0.4\end{Bmatrix}=0.068$$

فرکانس‌های زاویه‌ای میرا شده به شرح زیر خواهند بود:

$$\omega_{iD}=\omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_{1D}=10.224\sqrt{1-0.05^2}=10.211$$

$$\omega_{2D}=23.406\sqrt{1-0.05^2}=23.377$$

$$\omega_{2D}=36.482\sqrt{1-0.05^2}=36.436$$

با توجه با اینکه ارتعاش مورد نظر، ارتعاش آزاد با میرایی می‌باشد، با فرض میرایی ۵٪ که در مسأله داده شده است، می‌تـوان y را برای مودهای مورد نظر به دست آورد.

$$\ddot{y}_i+2\xi\omega_i\dot{y}_i+\omega_i^2y_i=0\qquad\rightarrow\qquad y_i=e^{-\xi\omega_it}\left(\frac{\dot{y}_{i(0)}+y_{i(0)}\xi\omega_i}{\omega_{iD}}\sin\omega_{iD}t+y_{i(0)}\cos\omega_{iD}t\right)$$

$$y_1=e^{-0.05\times10.224t}\left(\frac{0.120+0.658\times0.05\times10.224}{10.211}\sin10.211t+0.658\cos10.211t\right)$$

$$y_2=e^{-0.05\times23.406t}\left(\frac{-0.188+0.223\times0.05\times23.406}{23.377}\sin23.377t+0.223\cos23.377t\right)$$

$$y_3=e^{-0.05\times36.482t}\left(\frac{0.068+0.119\times0.05\times36.482}{36.436}\sin36.436t+0.119\cos36.436t\right)$$

$$y_1=e^{-0.511t}(0.045\sin10.211t+0.658\cos10.211t)$$

$$y_2=e^{-1.170t}(0.003\sin23.377t+0.223\cos23.377t)$$

$$y_3=e^{-1.824t}(0.008\sin36.436t+0.119\cos36.436t)$$

$$\{y_{(1)}\}=\begin{Bmatrix}-0.298\\-0.014\\0.005\end{Bmatrix}$$

در نتیجه تغییر مکان طبقات با ضرب ماتریسی زیر به دست می‌آید:

$$\{x\}=[\Phi]\{y\}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0.701&-0.565&-2.803\\0.395&-0.684&3.290\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.298\\-0.014\\0.005\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.307\\-0.215\\-0.092\end{Bmatrix}$$

ب ـ برای تحلیل سازه به روش طیفی، از نتایج به دست آمده در تحلیل دینامیکی استفاده می‌کنیم.

$$\{L\}=[\Phi]^T[m]\{I\}=\begin{bmatrix}1 & 0.701 & 0.395\\ 1 & -0.565 & -0.684\\ 1 & -2.803 & 3.290\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}5.289\\-1.749\\3.460\end{Bmatrix}$$

با توجه به نمودار طیف S_s ارائه شده، می‌توان معادله آن را به شکل یک تابع سه‌ضابطه‌ای بـه شـکل زیـر نوشـت (البتـه قرائـت مستقیم مقادیر از روی نمودار یا میان‌یابی برروی نمودار نیز نتایج یکسانی را دربرخواهد داشت).

$$S_a=\begin{cases}500T & 0<T<0.2\\ 150-250T & 0.2<T<0.4\\ 50 & 0.4<T\end{cases}$$

n	ω	$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$	S_a	$S_d=\dfrac{S_a}{\omega^2}$
1	10.224	0.614	50	0.478
2	23.406	0.268	83	0.152
3	36.482	0.172	86	0.065

$$y_{i\max}=\frac{L_i}{M_i}S_{di}$$

$$y_{1\max}=\frac{5.289}{3.943}\times 0.478=0.641$$

$$y_{2\max}=\frac{-1.749}{4.363}\times 0.152=-0.061$$

$$y_{3\max}=\frac{3.460}{58.027}\times 0.065=0.004$$

$$x_{i\max}=\left[\sum_{j=1}^{3}\left(\phi_{ij}y_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$x_{1\max}=\sqrt{(1\times 0.641)^2+(1\times -0.061)^2+(1\times 0.004)^2}=0.644\ cm$$

$$x_{2\max}=\sqrt{(0.701\times 0.641)^2+(-0.565\times -0.061)^2+(-2.803\times 0.004)^2}=0.451\ cm$$

$$x_{3\max}=\sqrt{(0.395\times 0.641)^2+(-0.648\times -0.061)^2+(3.290\times 0.004)^2}=0.257\ cm$$