فصل پنجم

انتگرال نامعین

۵ . ۱ ضد مشتق و انتگرال نامعین

در بخش ۲ از فصل چهارم مسأله زیر را مورد بررسی قرار دادیم:

تعریف: تابع $F(x)$ را یک **تابع اولیه (ضد مشتق)** تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم در صورتی که به ازای هر x از این بازه داشته باشیم $F'(x)=f(x)$.
به علاوه

قضیه ۱: اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو تابع اولیه تابع مفروض تابع $f(x)$ بر بازه I باشند، آنگاه اختلاف آن‌ها تنها در یک عدد ثابت است، یعنی، عدد ثابتی مانند C وجود دارد به طوری که

$$F_2(x)=F_1(x)+C.$$

اثبات. به قضیه ۱۴ در فصل چهارم مراجعه نمائید.

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر برای تابع مفروض $f(x)$ تنها یک تابع اولیه $F(x)$ را بتوانیم پیدا کنیم، آنگاه هر تابع اولیه دیگر به شکل $F(x)+C$، به ازای یک مقدار ثابت C، است. در حقیقت با یافتن یک تابع اولیه ما تمامی توابع اولیه را یافته‌ایم.

تعریف: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، آنگاه عبارت $F(x)+C$ را، که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است، **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ نامیده و آن را با علامت $\int f(x)\,dx$ نمایش می‌دهند.

لذا، بنابر تعریف، اگر $F'(x)=f(x)$، آنگاه

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

در اینجا، $f(x)$ **تابع زیر علامت انتگرال**، $f(x)dx$ **عنصر انتگرال‌گیری** (عبارت زیر علامت انتگرال) و $\int$ **علامت انتگرال** نامیده می‌شود. بنابراین یک انتگرال نامعین **خانواده‌ای از توابع** مانند $y=F(x)+C$ است.

از نقطه نظر هندسی، یک انتگرال نامعین خانواده‌ای از منحنی‌ها است که هر کدام از آنها با انتقال یکی از منحنی‌ها در امتداد محور Y ها، به طرف بالا یا پایین، بدست می‌آید. در شکل زیر $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$ و منحنی $y = x^3 + C$ به ازای سه مقدار $C = 0$, $C = C' > 0$ و $C = C'' < 0$ رسم شده است.

شکل ۵ . ۱

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که آیا توابع اولیه (و بنابراین انتگرال نامعین) هر تابعی مانند $f(x)$ وجود دارد؟ جواب منفی است و توابعی به شکل

$$\frac{1}{lnx},\qquad \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ (k<1),\qquad e^{\alpha x}\,(\alpha<0),\qquad \frac{\cos x}{x},\qquad \frac{\sin x}{x}$$

نمونه‌هایی از این دسته توابع هستند.

برخی از ویژگی‌های تابع اولیه(انتگرال نامعین)

از روی تعریف انتگرال نامعین دیده می‌شود که:

(1) مشتق یک انتگرال نامعین برابر است با تابع زیر علامت انتگرال، یعنی، اگر $F'(x) = f(x)$ آنگاه

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x)\,.$$

تساوی بالا بدین معنی است که مشتق هر تابع اولیه برابر با تابع زیر علامت انتگرال است.

(2)دیفرانسیل یک انتگرال نامعین مساوی با عبارت زیر علامت انتگرال است، یعنی

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

زیرا $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = \left(F(x) + C\right)' dx = f(x)dx$.

(3) انتگرال نامعین دیفرانسیل یک تابع مساوی است با این تابع به اضافه یک مقدار ثابت، یعنی

$$\int d\left(F\left(x\right)\right)=F\left(x\right)+C.$$

زیرا $d(F(x))=F'(x)dx$ و لذا

$$\int d(F(x))=\int F'(x)\,dx=F(x)+C.$$

قضیه ۲: انتگرال نامعین حاصلجمع دو تابع مساوی با حاصلجمع انتگرال هایشان است، یعنی

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)dx. \qquad (1)$$

اثبات. برای اثبات تساوی فوق، مشتق دو طرف این تساوی را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\left(\int\left(f_1(x)+f_2(x)\,dx\right)\right)'=f_1(x)+f_2(x)$$

و

$$\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'$$
$$=f_1(x)+f_2(x).$$

بنابراین مشتق‌های دو طرف تساوی (1) با هم برابر هستند و لذا اختلاف آن‌ها فقط در یک عدد ثابت است. این همان درکی است که ما از تساوی (1) داریم.

قضیه ۳ : عامل ثابت را می‌توان از علامت انتگرال بیرون آورد،یعنی، اگر α عدد ثابتی باشد، آنگاه

$$\int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx. \qquad (2)$$

اثبات. از دو طرف تساوی (2) مشتق می‌گیریم:

$$\left(\int\alpha f\left(x\right)dx\right)'=\alpha f\left(x\right)$$
$$\left(\alpha\int f\left(x\right)dx\right)'=\alpha\left(\int f\left(x\right)dx\right)'=\alpha f\left(x\right).$$

مشتق‌های طرف راست و طرف چپ مساوی هستند، بنابراین اختلاف آن‌ها تنها در یک عدد ثابت است.

وقتی انتگرال‌های نامعین را محاسبه می‌کنیم توجه به قوانین زیر سودمند خواهد بود:

(I) اگر $\int f(x)dx = F(x) + C$ آنگاه

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (3)$$

در حقیقت با مشتق‌گیری از طرفین (3) بدست می‌آوریم:

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax)$$

و

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)_{ax}' \times a = F'(ax) = f(ax).$$

مشتق‌های دو طرف راست و چپ مساوی هستند و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(II) اگر $\int f(x)dx = F(x) + C$ آنگاه

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \qquad (4)$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (5)$$

درستی تساوی‌های (4) و (5) را می‌توان با مشتق‌گیری از طرفین هر کدام ثابت نمود.

مثال ۱: انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

(1) $\int\left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx$ $\qquad$ (2) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx$

(3) $\int cos\, 7x\, dx$ $\qquad$ (4) $\int \sin(2x-6)\, dx$.

حل. (1)

$$\int\left(2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx = \int 2x^3\, dx - \int 3\sin x\, dx + \int 5\sqrt{x}\, dx$$

$$= 2\int x^3\, dx - 3\int \sin dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\left(-cos\, x\right) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3cos\, x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x}\right)dx = 3\int x^{\frac{-1}{3}}\,dx + \frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx + \int x^{\frac{5}{4}}\,dx \qquad (2)$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

$$\int cos\, 7\, xd = \frac{1}{7}\sin 7x + C\,. \qquad (3)$$

$$\int \sin\left(2x-6\right)dx = -\frac{1}{2}cos\left(2x-6\right) + C\,. \qquad (4)$$

قضیه ۴ (قاعده زنجیری برای تابع اولیه): فرض کنیم g تابعی مشتق‌پذیر از x بوده و حوزه مقادیر g بازه‌ای مانند I باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که بر I تعریف شده است و این که F یک تابع اولیه f بر I باشد.

دراین صورت اگر $u = g(x)$، آنگاه $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$

اثبات. چون $u = g(x)$ پس u در بازه I است ؛ و چون F یک تابع اولیه f بر I است، نتیجه می‌گیریم که $F'(u) = \frac{dF(u)}{du} = f(u) \quad , \quad \int f(u)du = F(u) + C$.

همچنین $\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{dx}$. با بکار بردن قاعده زنجیری برای مشتق بدست می‌آوریم $\frac{dF(g(x))}{dx} = \frac{dF(u)}{du}.\frac{du}{dx}$، و لذا $\frac{dF(g(x))}{dx} = f(u).\frac{du}{dx}$. چون $u = g(x)$ ، خواهیم داشت $\frac{dF(g(x))}{dx} = f(g(x)).g'(x)$ که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

بالاخره با استفاده از آنچه که گفته شد

$$\int f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx=\int f\left(u\right)du=F\left(u\right)+C=F\left(g\left(x\right)\right)+C$$

و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نتیجه: با استفاده از قضیه بالا، فرض کنیم که g تابعی مشتق‌پذیر باشد. در این صورت اگر $u=g(x)$، آنگاه

$$\int\left[g\left(x\right)\right]^{n}g'\left(x\right)dx=\int u^{n}\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+C=\frac{\left[g\left(x\right)\right]^{n+1}}{n+1}+C$$

که در آن $n\neq -1$.

مثال ۲: انتگرال‌های زیر بسادگی محاسبه می‌شوند:

$$\int t\left(5+3t^{2}\right)^{8}dt=\frac{1}{6}\int\left(5+3t^{2}\right)^{8}6\,tdt=\frac{1}{6}.\frac{\left(5+3t^{2}\right)^{9}}{9}+C. \quad (1)$$

$$\int x^{2}\sqrt[5]{7-4x^{3}}\,dx=\frac{-1}{12}\int\left(7-4x^{3}\right)^{\frac{1}{5}}\left(-12x^{2}\right)dx \quad (2)$$

$$=\frac{-5}{72}\left(7-4x^{3}\right)^{\frac{6}{5}}+C.$$

$$\int x^{3}\sqrt{x^{4}+5}\,dx=\frac{1}{4}\int\left(4x^{3}\right)\sqrt{x^{4}+5}\,dx=\frac{1}{4}.\frac{2}{3}\left(x^{4}+5\right)^{\frac{3}{2}}+C \quad (3)$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\left(x^{4}+5\right)^{3}}++C.$$

$$\int x^{2}cos\left(x^{3}\right)dx=\int\frac{1}{3}\left(3x^{2}\right)cos\left(x^{3}\right)dx=\frac{1}{3}\sin\left(x^{3}\right)+C. \quad (4)$$

جدول انتگرال‌ها

قبل از آنکه به بیان روشهای انتگرال‌گیری بپردازیم، جدول زیر را ارائه می‌دهیم که انتگرال ساده‌ترین توابع را بدست می‌دهد. برای اطمینان از درستی هر یک از فرمول‌ها اگر از طرف راست هر تساوی نسبت به x مشتق بگیریم تابع زیر علامت انتگرال در طرف چپ آن تساوی بدست خواهد آمد.

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,(n\neq -1)$. (در اینجا و در فرمول‌های بعدی، C ثابت دلخواهی است.)

2. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

3. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

4. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-cotg\,x+C$.

7. $\int tg\,x\,dx=-\ln|\cos x|+C$.

8. $\int cotg\,x\,dx=\ln|\sin x|+C$.

9. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

10. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

برای فرمول 7 داریم $\left(-\ln|\cos x|\right)'=-\frac{-\sin x}{\cos x}=tg\,x$

در نتیجه، $\int tg\, x\, dx = -\ln|cos\, x| + C$.

برای فرمول 13 داریم

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\left[\ln|a+x| - \ln|a-x|\right]'$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

برای فرمول 16 داریم

$$\left(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

روش‌های انتگرال‌گیری

در این بخش روش‌های مختلف انتگرال‌گیری را ارائه می‌دهیم. سعی ما بر این است که، تا حد امکان کلی‌ترین صورت هر روش بیان گردد، فایده این مطلب در آن است که در مواجه شدن با هر مسأله انتگرال نامعین تشخیص ما را، مبنی بر اینکه کدام روش یا روش‌ها بهتر می‌توانند نتیجه مطلوب را

بدست دهند، آسانتر می‌سازد. پس از بحث کلی در مورد هر روش، مثال‌های مختلفی آورده خواهد شد.

۵ . ۲ روش تغییر متغیر

فرض کنیم که هدف ما یافتن انتگرال نامعین

$$\int f(x)\,dx,$$

باشد و در عین حالی که نمی‌توانیم مستقیماً تابع اولیه $f(x)$ را پیدا کنیم اما می‌دانیم این تابع اولیه وجود دارد. متغیر عبارت زیر علامت انتگرال را، با قرار دادن

$$x=\varphi(t) \qquad (1)$$

عوض می‌کنیم که در آن $\varphi(t)$ تابعی پیوسته (با مشتق پیوسته) و دارای تابع وارون است. در این صورت $dx=\varphi'(t)\,dt$ ، ثابت خواهیم کرد که در این حالت معادله زیر را داریم:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

در اینجا فرض بر این است که بعد از انتگرال‌گیری، در سمت راست، بجای t مقدار آن را بر حسب x با استفاده از (1) قرار می‌دهیم.

برای اثبات این که عبارت‌های راست و چپ یکسان هستند، لازم است نشان دهیم که مشتق‌های آن دو نسبت به x با هم مساوی هستند. مشتق طرف چپ را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

از طرف راست (2) به عنوان تابعی مرکب از x مشتق می‌گیریم، که در آن t متغیر واسطه است. بستگی t به x بوسیله (1) داده شده است، در اینجا $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ و بنابر قاعده مشتق‌گیری تابع وارون،

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

لذا داریم
$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)_x' = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)_t' \frac{dt}{dx}$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t).\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

بنابراین مشتق‌های طرف‌های راست و چپ (2) نسبت به x با هم مساوی هستند و این همان است که می‌خواستیم.

تابع $x=\varphi(t)$ بایستی طوری انتخاب شود که محاسبه انتگرال نامعین در طرف راست (2) امکانپذیر باشد.

نکته: در هنگام انتگرال‌گیری، گاهی بهتر است که تغییر متغیر را به شکل $t=\psi(x)$ و نه $x=\varphi(t)$ انتخاب کنیم. به عنوان توضیح، فرض کنیم محاسبه انتگرالی به صورت

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

مورد نظر باشد. در اینجا مناسب است که قرار دهیم $\psi(x)=t$ و در این صورت $\psi'(x)dx=dt$.
بنابراین داریم

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

به مثال‌های زیر توجه نمائید.

مثال ۳: (i) $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$ $\quad$ (ii) $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$ $\quad$ (iii) $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$

(iv) $\int \sec x\,dx$ $\quad$ (v) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3cos^2 x}$

حل. (i) تغییر متغیر $t=\sin x$ می‌دهیم. داریم $dt = cos\,x\,dx$ و در نتیجه،

$$\int \sqrt{\sin x}\,cos\,x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C.$$

(ii) قرار می‌دهیم $t = x^2$ در این صورت $dt = 2x\,dx$ و

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arc\,tg\, t + C = \frac{1}{2} arc\,tg\, x^2 + C.$$

(iii) قرار می دهیم $t = \ln x$؛ در این صورت $dt = \frac{dx}{x}$ و

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

(iv) می‌توان نوشت

$$\sec x = \sec x . \frac{\sec x + tg\, x}{\sec x + tg\, x} = \frac{\sec x\, tg\, x + \sec^2 x}{\sec x + tg\, x}.$$

دیده می‌شود که صورت آخرین کسر مشتق مخرجش است. پس با انتخاب $u = \sec x + tg\, x$ بدست می‌آوریم $du = \left(\sec x\, tg\, x + \sec^2 x\right) dx$ و بنابراین

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\, tg\, x + \sec^2 x}{\sec x + tg\, x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + tgx| + C.$$

(v)ابتدا صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال را بر $cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{cos^2 x}}{2tg^2 x + 3}$$

و سپس در انتگرال بدست آمده تغییر متغیر $t = tg\, x$ می‌دهیم. لذا $dt = \frac{dx}{cos^2 x}$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\int \frac{\frac{dx}{cos^2 x}}{2tg^2 x + 3} = \int \frac{dt}{2t^2 + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{3}{2} + t^2}$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} arc\,tg\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arc\,tg\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, tg\, x\right) + C.$$

مثال ۴: (i) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ $\qquad(ii)$ $\int \frac{dx}{1+e^x}$

(iii) $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)arc\,tg\frac{x^2+1}{x}}$ $\qquad(iv)$ $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

(v) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

حل. (i) تغییر متغیر $t=\ln\frac{1+x}{1-x}$ را در نظر می‌گیریم. داریم $t=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ و لذا

$$dt=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)dx=\frac{2dx}{1-x^2}.$$

بنابراین

$$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$$

(ii) تغییر متغیر $1+e^x=t$ داده و نتیجه می‌گیریم که

$$e^x=t-1,\qquad x=\ln(t-1),\qquad dx=\frac{dt}{t-1}.$$

با جایگذاری در انتگرال داریم

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=x-\ln(1+e^x)+C.$$

(iii) انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int\frac{(x^2-1)\ dx}{(x^4+3x^2+1)arc\,tg\frac{x^2+1}{x}}=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]arc\,tg\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$ را در نظر گرفته و بدست می‌آوریم $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$ که از آنجا

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+1)arc\,tg\,t}.$$

مجدداً تغییر متغیر $arc\,tg\,t = u$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $du = \frac{dt}{t^2+1}$ و

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|arc\,tgt| + C = \ln\left|arc\,tg\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| + C.$$

(iv) تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ را در نظر گرفته و بدست می‌آوریم $dx = -\frac{dt}{t^2}$. بنابراین

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\,dx = -\int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}}}{\left(\frac{1}{t^4}\right)t^2}\,dt = -\int t\sqrt{a^2\,t^2 - 1}\,dt.$$

بار دیگر تغییر متغیر می‌دهیم: $\sqrt{a^2\,t^2 - 1} = z$،در این صورت $2a^2\,td\,t = 2z\,dz$ و

$$I = \frac{-1}{a^2}\int z^2\,dz = -\frac{1}{3a^2}z^3 + C = -\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2\,x^3} + C.$$

(v) تغییر متغیر $arc\cos x = t$ می‌دهیم و داریم $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dt$. پس

$$I = \int \frac{dx}{(arc\cos x)^5\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4}t^{-4} + C = \frac{1}{4(arc\cos x)^4} + C.$$

۵ . ۳ روش جزء به جزء

فرض کنیم u و υتوابعی دیفرانسیل‌پذیر از x باشند. در این صورت دیفرانسیل حاصلضرب $u\upsilon$ از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$d(u\upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$$

که از آنجا، با انتگرال‌گیری، داریم

$$u\upsilon = \int u\,d\upsilon + \int \upsilon\,du$$

یا

$$\int u\,d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\,du. \qquad (1)$$

این فرمول به دستور **انتگرال‌گیری جزء به جزء** معروف است. بیشترین کاربرد آن در انتگرال‌گیری عبارت‌هایی است که می‌توان آن‌ها را به شکل حاصلضربی از دو عامل $u, d\upsilon$ نمایش داد به طریقی که پیدا نمودن تابع υ از روی دیفرانسیل آن $d\upsilon$، و محاسبه انتگرال $\int \upsilon\,du$، هر دو با هم، مسأله‌ای ساده‌تر از محاسبه مستقیم $\int ud\upsilon$ باشد. برای دست‌یابی به توانایی تجزیه درست عنصر انتگرال‌گیری به عامل‌های uو $d\upsilon$ بایستی به تعداد کافی مسأله حل نمود. به مثال‌های زیر می‌پردازیم.

مثال ۵: (i) $\int x\sin x dx$ (ii) $\int arc\,tg\, x dx$

(iii) $\int x^2 e^x dx$ (iv) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

(v) $I_1=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\, dx$ (vi) $I_2=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$

(vii) $I=\int (x^2-2x+5)e^{-x}\,dx$.

حل. (i) فرض کنیم $u=x$ و $d\upsilon=\sin x\,dx$، در این صورت $du=dx$, $\upsilon=-\cos x$. بنابراین

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int \cos x dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

(ii) با فرض $u=arc\,tg\,x$, $d\upsilon=dx$ داریم $du=\frac{dx}{1+x^2}$ و $\upsilon=x$. لذا

$$\int arc\,tg\,x dx=x\,arc\,tg\,x-\int\frac{x dx}{1+x^2}=x\,arc\,tg\,x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

(iii) فرض کنیم $u=x^2$, $d\upsilon=e^x dx$؛ بنابراین $du=2x\,dx$, $\upsilon=e^x$،

$$\int x^2 e^x dx=x^2 e^x-2\int xe^x dx.$$

مجدداً از روش جزء به جزء برای آخرین انتگرال استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $u_1=x$, $d\upsilon_1=e^x dx$، در این صورت $du_1=dx$, $\upsilon_1=e^x$. لذا

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C_1.$$

بالاخره بدست می‌آوریم

$$\int x^2 e^x dx=x^2 e^x-2(xe^x-e^x+C_1)=e^x(x^2-2x+2)+C.$$

(iv) با ضرب صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال در $\sqrt{a^2-x^2}$ داریم:

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=a^2\,arc\sin\frac{x}{a}-\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

آخرین انتگرال را به روش جزء به جزء محاسبه می‌نماییم. فرض کنیم $u=x\,,du=dx$

$d\upsilon=\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \upsilon=-\sqrt{a^2-x^2}$. بنا براین

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

با قرار دادن این نتیجه در عبارت بدست آمده برای انتگرال مفروض، داریم

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

یا

$$2I=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$$

و با توجه به تعریف انتگرال نامعین بالاخره بدست می‌آوریم

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(v) با استفاده از روش جزء به جزء بدست می‌آوریم

$$u=e^{\alpha x}\ ,\ du=\alpha e^{\alpha x}\,dx$$
$$d\upsilon=\cos\beta x\,dx\ ,\ \upsilon=\frac{1}{\beta}\sin\beta x$$

و لذا

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

مجددا روش جزء به جزء را برای آخرین انتگرال بکار می بریم:

$$u=e^{\alpha x}\ ,\ du=\alpha e^{\alpha x}\,dx$$
$$d\upsilon=\sin\beta x\,dx\ ,\ \upsilon=\frac{-1}{\beta}\cos\beta x.$$

با قرار دادن عبارت بدست آمده در معادله قبلی خواهیم داشت

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

از این معادله I_1 پیدا می‌کنیم

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=e^{\alpha x}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta x\right)+C\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

که از آنجا

$$I_1=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

(vi) به طریق مشابه بدست می‌آوریم

$$I_2=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

(vii) فرض کنیم $u = x^2 - 2x + 5$, $d\upsilon = e^{-x}\,dx$ که از آنجا
$\upsilon = -e^{-x}\,, du = (2x-2)dx\,.$

لذا

$$I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x-1)e^{-x}\,dx.$$

مجدداً روش جزء به جزء را برای آخرین انتگرال بکار می‌بریم. قرار می‌دهیم

$$u = x - 1 \qquad , \qquad d\upsilon = e^{-x}\,dx$$

که از آنجا

$$du = dx \qquad , \qquad \upsilon = -e^{-x}$$

و لذا

$$I_1 = 2\int (x-1)\ e^{-x}\,dx = -2e^{-x}(x-1) + 2\int e^{-x}\,dx = -2\,xe^{-x} + C.$$

بالاخره بدست می‌آوریم که

$$I = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - 2\,xe^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 5) + C.$$

نکته: به عنوان نتیجه ای از مثال (vii) در بالا، برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int P(x)e^{ax}\,dx$ که در آن $P(x)$ یک چند جمله‌ای است، جواب انتگرال را به صورت $Q(x)e^{ax}$ می‌گیریم که در آن $Q(x)$ یک چند جمله‌ای هم درجه با $P(x)$ و با ضرایب مجهول است، یعنی

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = Q(x)e^{ax} + C\,.$$

برای یافتن ضرایب مجهول از دو طرف تساوی بالا نسبت به x مشتق گرفته و ضرایب قوای متناظر از x در دو طرف را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب یک دستگاه از معادلات خطی برای ضرایب مجهول بدست می‌آوریم که با حل آن ضرایب مجهول پیدا می‌شوند. این مطلب در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۶: مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int (3x^3 - 17)e^{2x}\,dx$.

حل. قرار می‌دهیم

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + C.$$

با مشتق‌گیری از طرف‌های راست و چپ، بدست می‌آوریم

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = 2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + D).$$

با حذف e^{2x}، داریم

$$3x^3 - 17 = 2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + (2D + 2B)x + (2E + D).$$

ضرایب قوای متناظر از x در طرفین اتحاد بالا را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم

$$3=2A; \qquad 0=2B+3A$$
$$0=2D+2B; \quad -17=2E+D.$$

با حل دستگاه خواهیم داشت

$$A=\frac{3}{2}; \quad B=-\frac{9}{4}; \quad D=\frac{9}{4}; \quad E=-\frac{77}{8}.$$

بنابراین

$$\int\left(3x^3-17\right)\ e^{2x}\,dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.$$

تبصره: روش بالا را، که به **روش ضرایب نامعین** معروف است، می‌توان برای انتگرال‌هایی به شکل

$$\int P(x)\sin ax\,dx \quad \text{و} \int P(x)\cos ax\,dx$$

نیز بکار برد.

توجه: در محاسبه تعدادی از انتگرال‌ها مجبور هستیم روش انتگرال‌گیری جزء به جزء را به دفعات متوالی بکار بریم. نتیجه را می‌توان سریعتر و به شکلی خلاصه‌تر با استفاده **فرمول تعمیم یافته برای انتگرال‌گیری جزء به جزء** بدست آورد:

$$\int u(x)\upsilon(x)\,dx=u(x)\upsilon_1(x)-u'(x)\upsilon_2(x)+u''(x)\upsilon_3(x)-\dots$$
$$\dots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}\upsilon_n(x)+(-1)^n\int u^{(n)}(x)\upsilon_n(x)\,dx$$

که در آن

$$\upsilon_1(x)=\int\upsilon(x)\,dx; \qquad \upsilon_2(x)=\int\upsilon_1(x)\,dx;\dots; \qquad \upsilon_n(x)=\int\upsilon_{n-1}(x)\,dx.$$

در اینجا، البته، فرض می‌کنیم که کلیه مشتقات و انتگرال‌ها که در این فرمول ظاهر می‌شوند وجود داشته باشند.

استفاده از فرمول تعمیم یافته برای انتگرال‌گیری جزء به جزء به ویژه سودمند است وقتی که انتگرال $\int P_n(x)\varphi(x)\,dx$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n بوده و عامل $\varphi(x)$ به طریقی است که می‌توان $n+1$ بار متوالی از آن انتگرال گرفت. به عنوان مثال،

$$\int P_n(x)e^{kx}\,dx=P_n(x)\frac{e^{kx}}{k}-P_n'(x)\frac{e^{kx}}{k^2}+\dots+(-1)^nP_n^{(n)}(x)\frac{e^{kx}}{k^{n+1}}+C=$$
$$=e^{kx}\left[\frac{P_n(x)}{k}-\frac{1}{k^2}P_n'(x)+\dots+\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}P_n^{(n)}(x)\right]+C.$$

مثال ۷: با استفاده از فرمول تعمیم یافته برای انتگرال گیری جزء به جزء ، انتگرال‌های زیر را پیدا کنید:

(a) $\int\left(x^3-2x^2+3x-1\right)cox\,2x\,dx$ ،

(b) $\int\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}\,dx$.

حل. (a) داریم

$$\int\left(x^3-2x^2+3x-1\right)cos\,2x\,dx=\left(x^3-2x^2+3x-1\right)\frac{\sin 2x}{2}-\left(3x^2-4x+3\right)\left(-\frac{cos\,2x}{4}\right)$$

$$+\left(6x-4\right)\left(-\frac{\sin 2x}{8}\right)-6\frac{\cos 2x}{16}+C$$
$$=\frac{\sin 2x}{4}\left(2x^3-4x^2+3x\right)+\frac{cos\,x}{8}\left(6x^2-8x+3\right)+C.$$

(b) داریم

$$\int\left(2x^3+6x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}\,dx=$$
$$=\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(6x^2+6x-8\right)\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{3.5}+$$
$$+(12x+6)\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{3.5.7}-12\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{3.5.7.9}+C=$$
$$\frac{\sqrt{2x+6}}{5.7.9}(2x+6)\left(70x^3-45x^2-399x+897\right)+C.$$

۴ . ۵ انتگرال بعضی توابع شامل سه جمله‌های درجه دوم

1. انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

ابتدا سه جمله‌ای مخرج را به صورت حاصلجمع یا تفاضل دو مربع نمایش می‌دهیم:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$
$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]$$

که در آن $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$.

علامت به اضافه یا منها بستگی به این دارد که عبارت طرف چپ مثبت یا منفی باشد، یعنی، ریشه‌های سه جمله‌ای ax^2+bx+c مختلط یا حقیقی باشند. توجه کنید که $\Delta=b^2-4ac\neq 0$ فرض می‌شود زیرا در غیر این صورت $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$ (α ریشه مضاعف) و انتگرال به سادگی قابل محاسبه است.

بنابراین، انتگرال I_1 شکل زیر را خواهد داشت:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

در این انتگرال تغییر متغیر $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ داده و بدست می‌آوریم

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

اما این‌ها انتگرال‌های 12 و 13 در جدول انتگرال‌ها هستند.

مثال ۸: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

حل. داریم

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

تغییر متغیر $x+2=t$, $dx=dt$ می‌دهیم و داریم

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. انتگرالی به شکل کلیتر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$$

سعی می‌کنیم به نوعی مشتق مخرج کسر در صورت ظاهر شود:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

انتگرال طرف راست را به صورت حاصلجمع دو انتگرال نمایش می‌دهیم

$$I_2=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

دومین انتگرال در تساوی بالا همان I_1 است که قبلاً محاسبه گردید. در اولین انتگرال تغییر متغیر

$$ax^2+bx+c=t\ ,\qquad (2ax+b)\,dx=dt$$

داده و بدست می‌آوریم

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C.$$

بالاخره خواهیم داشت

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

مثال ۹: مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$$

حل. با بکار بردن روش بالا داریم

$$\begin{aligned}I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx&=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2+6}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.\end{aligned}$$

III. انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

همانطور که در I دیدیم، $ax^2+bx+c=a\left[t^2\pm k^2\right]$. دو حالت در نظر می‌گیریم؛

اولاً اگر $a>0$ آنگاه $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{t^2\pm k^2}$

و $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ در شماره 16 جدول انتگرال‌ها آمده است. ثانیاً اگر $a<0$ آنگاه

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{\pm k^2 - t^2} = \sqrt{-a}\sqrt{k^2-t^2}$

(توجه کنید که در $\sqrt{-k^2-t^2}$ عبارت زیر رادیکال همواره منفی است و از بحث ما خارج است) و $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ در شماره 15 جدول انتگرال‌ها آمده است.

IV. انتگرالی به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

مشابه آنچه در II انجام دادیم؛

$$I_4 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,.$$

با استفاده از تغییر متغیر $ax^2+bx+c=t$, $(2ax+b)dx=dt$ در اولین انتگرال طرف راست تساوی بالا بدست می‌آوریم

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} + C = 2\sqrt{ax^2+bx+c} + C.$$

دومین انتگرال طرف راست تساوی بالا همان III است.

مثال ۱۰: مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I = \int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,.$$

حل. داریم

$$I = \int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+4) + (3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx$$
$$= \frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}}$$

$$=5\sqrt{x^2+4x+0}-7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right|+C.$$

تبصره: (1) انتگرال $\int\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ را، که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است، در نظر می‌گیریم. برای حل این انتگرال تساوی زیر را می‌نویسیم

$$\int\frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+k\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

که در آن $Q_{n-1}(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n-1$ است. اگر از دو طرف این تساوی نسبت به x مشتق گرفته و حاصل را در $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ضرب کنیم اتحاد

$$P_n(x)=Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right)+\frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b)+k$$

را بدست می‌آوریم. با مساوی قرار دادن ضرایب قوای متناظر x در دو طرف تساوی فوق یک دستگاه از $n+1$ معادله خطی برای یافتن ضرایب مجهول چند جمله‌ای $Q_{n-1}(x)$ و عامل k پیدا می‌کنیم.

(2) انتگرال $\int\frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ را در نظر می‌گیریم. برای حل این انتگرال تغییر متغیر

$$x-x_1=\frac{1}{t}$$

می‌دهیم و به انتگرالی مشابه آنچه که در این قسمت دیده‌ایم می‌رسیم.

مثال ۱۱. انتگرال‌های زیر را حل کنید:

(i) $I=\int\frac{(x^3-x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\qquad$ (ii) $I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

(iii) $I=\int\frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$ $\qquad$ (iv) $I=\int\sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$.

حل. (i) در اینجا $P_n(x)=x^3-x-1$. بنابراین $Q_{n-1}(x)=Ax^2+Bx+D$.

انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\left(Ax^2+Bx+D\right)\sqrt{x^2+2x+2}+k\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

با مشتق‌گیری از این تساوی، بدست می‌آوریم

$$I'=\frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2+2x+2}$$
$$+\left(Ax^2+Bx+D\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+\frac{k}{\sqrt{x^2+2x+2}}\quad .$$

طرفین تساوی بالا را در $\sqrt{x^2+2x+2}$ ضرب کرده و بدست می آوریم
$$x^3-x-1=(2Ax+B)(x^2+2x+2)+(Ax^2+Bx+D)(x+1)+k\,.$$

اگر ضرایب قوای متناظر از x در دو طرف تساوی فوق را مساوی هم قرار دهیم ، آنگاه داریم
$$2A+A=1\qquad,\qquad B+4A+B+A=0$$
$$2B+4A+D+B=-1\ ,\quad 2B+D+k=-1\,.$$

با حل دستگاه بدست می‌آوریم $A=\frac{1}{3},B=-\frac{5}{6},D=\frac{1}{6},k=\frac{1}{2}$.

بنابراین
$$I=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

که در آن
$$I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}}=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C\,.$$

(ii) با قرار دادن $x-1=\frac{1}{t}$ بدست می‌آوریم $x=\frac{1}{t}+1$ و $dx=\frac{-1}{t^2}\,dt$. در نتیجه،

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}=-\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}}$$
$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{-1-\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}+2+\frac{2}{t}+3}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}$$
$$=\frac{-1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}}=-\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{2}}\right|+C$$
$$=\frac{-1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+C=\frac{-1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right|+C\,.$$

(iii) داریم

$$I=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

اولین انتگرال طرف راست از نوع I_1 است و در دومین انتگرال تغییر متغیر $x+1=\frac{1}{t}$ می‌دهیم:

$$I=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}}$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C.$$

(iv) انتگرال را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم.

$$I=\int\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}dx=(Ax+B)\sqrt{4x^2-4x+3}+k\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}.$$

با استفاده از روشی که در تبصره بالا (1) بیان نمودیم بدست می‌آوریم

$$I=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|+C.$$

۵ . ۵ انتگرال‌گیری از کسرهای منطق

هر تابع منطق را می‌توان به شکل یک کسر منطق نمایش داد، یعنی، به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}.$$

بدون این که به کلیت استدلال خللی وارد می‌شود، فرض می‌کنیم که این چند جمله‌ای‌ها دارای ریشه مشترک نباشند.

اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد، آنگاه کسر را **حقیقی** نامیده و در غیر این صورت (یعنی، اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی با درجه مخرج باشد) کسر را **غیر حقیقی** می‌گویند. اگر

یک کسر غیر حقیقی داشته باشیم، آنگاه با تقسیم صورت بر مخرج می‌توان کسر را به صورت حاصلجمع یک چند جمله‌ای و یک کسر حقیقی نمایش داد:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)}.$$

در اینجا $M(x)$ یک چند جمله‌ای و $\frac{F(x)}{f(x)}$ یک کسر حقیقی است. به عنوان مثال، کسر غیر حقیقی

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=\left(x^2-2x+3\right)-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

چون انتگرال‌گیری از چند جمله‌ای‌ها کار آسانی است، مسئله اساسی در انتگرال‌گیری از کسرهای منطق به انتگرال‌گیری از کسرهای منطق حقیقی بر می‌گردد.

تعریف: کسرهای حقیقی منطق به شکل:

I. $\frac{A}{x-a}$،

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است)،

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (ریشه‌های مخرج مختلط هستند، یعنی، $\frac{p^2}{4}-q<0$)،

IV. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ (k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است، ریشه‌های مخرج مختلط هستند)

کسرهای منطق جزئی از نوع‌های I, II, III و IV نامیده می‌شوند.

در ادامه مطلب ثابت خواهد شد که هر کسر منطق را می‌توان به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نوشت. بنابراین در ابتدا به بررسی انتگرال کسرهای منطق جزئی می‌پردازیم. انتگرال‌گیری از کسرهای منطق جزئی نوع I, II, III متضمن مشکلی نیستند و لذا بدون هیچ توضیحی این کار را انجام می‌دهیم:

I. $$\int\frac{A}{x-a}\,dx=A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=A\int(x-a)^{-k}\,dx=A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

$$=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C.$$

.III
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

$$=\frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\,arc\,tg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q+p^2}}+C.$$

انتگرال‌گیری از کسرهای منطق نوع IV به محاسبات بیشتری نیاز دارد. فرض کنیم انتگرالی از این نوع داشته باشیم:

.IV
$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

تبدیل‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

$$=\frac{A}{2}\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

اولین انتگرال را با استفاده از تغییر متغیر $x^2+px+q=t\,,\,(2x+p)dx=dt$ حل می‌کنیم:

$$\int\frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{dt}{t^k}=\int t^{-k}\,dt=\frac{t^{-k+1}}{1-k}+C$$

$$=\frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}}+C.$$

دومین انتگرال را (که با I_k نمایش می‌دهیم) با قرار دادن $x+\frac{p}{2}=t\,,dx=dt$,$q-\frac{p^2}{4}=m^2$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I_k=\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}=\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k}=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$$

(فرض شده است که ریشه‌های مخرج مختلط هستند، و بنابراین $q-\frac{p^2}{4}>0$).

خواهیم داشت

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt$$
$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}. \qquad (1)$$

در آخرین انتگرال تصرف نموده و می‌نویسیم:

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\int\frac{t.t\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int t\frac{d\left(t^2+m^2\right)}{\left(t^2+m^2\right)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\int td\left(\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$

با انتگرای‌گیری جزء به جزء بدست می‌آوریم

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=-\frac{1}{2(k-1)}\left[t\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right].$$

با قرار دادن این عبارت (1) داریم

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$
$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right]$$
$$=\frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\quad .$$

در طرف راست انتگرالی از همان نوع I_k، اما با توانی یک واحد کمتر در مخرج تابع زیر علامت انتگرال $(k-1)$، را داریم: بنابراین ما I_k را بر حسب I_{k-1} بیان نمودیم. اگر این روش را ادامه دهیم بالاخره به انتگرال آشنای

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arc\,tg\frac{t}{m}+C$$

می‌رسیم. پس از آن با قرار دادن مقادیر متناظر با m و t هر کجا که ظاهر شده‌اند انتگرال IV را بر حسب x و اعداد مفروض q,p,B,A بدست می‌آوریم.

مثال ۱۲: مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$.

حل. داریم

$$I=\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$

$$=\frac{-1}{2}\frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)}-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}.$$

در آخرین انتگرال تغییر متغیر $x+1=t$ می‌دهیم:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+2\right]^2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2+2\right)-t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}.$$

به حل آخرین انتگرال می‌پردازیم:

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\int t.\frac{t\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}$$

$$\begin{cases}u=t\\ dv=\dfrac{t\;dt}{\left(t^2+2\right)^2}\end{cases}\qquad,\qquad\begin{cases}du=dt\\ v=-\dfrac{1}{2\left(t^2+2\right)}.\end{cases}$$

بنابراین

$$\int t.\frac{tdt}{\left(t^2+2\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}$$

$$=-\frac{t}{2\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

در نتیجه

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

بالاخره بدست می‌آوریم

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

تجزیه یک کسر منطق به حاصلجمع کسرهای منطق جزئی

اکنون نشان می‌دهیم که هر کسر منطق حقیقی را می‌توان به حاصلجمع کسرهای منطق جزئی تجزیه نمود. فرض کنیم کسر منطق $\frac{F(x)}{f(x)}$ را داشته باشیم که در آن ضرایب چند جمله‌ای‌ها اعداد حقیقی بوده و صورت و مخرج کسر ریشه مشترک ندارند.

قضیه ۵: فرض کنیم $x=a$ یک ریشه حقیقی مکرر از مرتبه k از مخرج کسر باشد، یعنی $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$ که در آن $f_1(a)\neq 0$. در این صورت کسر حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو کسر حقیقی به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)} \qquad (1)$$

که در آن A ثابتی غیر صفر بوده و $F_1(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن کمتر از درجه مخرج $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ می‌باشد.

اثبات. اتحاد زیر را می‌نویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \qquad (2)$$

(که برای هر A درست است) و فرض کنیم ثابت A را چنان تعریف کرده باشیم که چند جمله‌ای $F(x)-Af_1(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد. برای انجام این کار، لازم و کافی است که معادله زیر برقرار باشد:

$$F(a)-A f_1(a)=0 .$$

چون $f_1(a)\neq 0$, $F(a)\neq 0$, A به صورت منحصر به فرد با $A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$ تعریف می‌گردد.

برای این مقدار A خواهیم داشت

$$F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x)$$

که در آن $F_1(x)$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر نسبت به چند جمله‌ای $(x-a)^{k-1} f_1(x)$ می‌باشد. با حذف عامل $(x-a)$ از صورت و مخرج (2) تساوی (1) را بدست می‌آوریم.

نتیجه: استدلال مشابهی را می‌توان برای کسر منطق حقیقی

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}$$

در معادله (۱) بکار برد. بنابراین، اگر مخرج کسر دارای ریشه $x=a$ مکرر از مرتبه k باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+....+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$$

که در آن $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ کسر حقیقی منطقی است که صورت و مخرج آن ریشه مشترک ندارند. برای این کسر می‌توانیم قضیه بالا را بکار ببریم به شرط آنکه $f_1(x)$ دارای ریشه‌های حقیقی دیگری باشد.

اکنون به بررسی حالت ریشه‌های مختلط مخرج می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که ریشه‌های مختلط یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی دو بدو به صورت مزدوج ظاهر می‌گردند. وقتی یک چند جمله‌ای را به عامل‌های حقیقی تجزیه می‌کنیم، به هر زوج (مزدوج) از ریشه‌های مختلط چند جمله‌ای عبارتی به شکل x^2+px+q متناظر می‌گردد. اما اگر ریشه‌های مختلط با تکرار از مرتبه μ باشند، آن‌ها با عبارت $\left(x^2+px+q\right)^\mu$ متناظر می‌گردند.

قضیه ۶: اگر $f(x)=\left(x^2+px+q\right)^\mu\varphi_1(x)$، که در آن چند جمله‌ای $\varphi_1(x)$ بر x^2+px+q بخش پذیر نیست، آنگاه کسر حقیقی منطق $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو کسر حقیقی دیگر به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\mu}+\frac{\phi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)} \quad (3)$$

که در آن $\phi_1(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن کمتر از درجه چند جمله‌ای $\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)$ می‌باشد.

اثبات. اتحاد زیر را می‌نویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{\left(x^2+px+q\right)^\mu\varphi_1(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\mu}+\frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^\mu\varphi_1(x)} \quad (4)$$

که برای هر N,M برقرار است، فرض می‌کنیم N,M را چنان تعریف کرده باشیم که چند جمله‌ای $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ بر x^2+px+q بخش‌پذیر باشد. برای این کار، لازم و کافی است که معادله

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$$

دارای ریشه‌های $\alpha\pm i\beta$، یعنی همان چند جمله‌ای x^2+px+q باشد. لذا،

$$F\left(\alpha+i\beta\right)-\left[M\left(\alpha+i\beta\right)+N\right]\varphi_1\left(\alpha+i\beta\right)=0$$

یا

$$M\left(\alpha+i\beta\right)+N=\frac{F\left(\alpha+i\beta\right)}{\varphi_1\left(\alpha+i\beta\right)}.$$

اما $\frac{F\left(\alpha+i\beta\right)}{\varphi_1\left(\alpha+i\beta\right)}$ عدد مختلط مشخصی است که می‌توان آن را به صورت $K+iL$ نوشت، که در آن L,K اعداد حقیقی معینی هستند. بنابراین،

$$M\left(\alpha+i\beta\right)+N=K+iL$$

که از آنجا

$$M\alpha+N=K\,,M\beta=L$$

یا

$$M=\frac{L}{\beta},N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}.$$

با این مقادیر برای ضرایب N,M چند جمله‌ای $F\left(x\right)-\left(Mx+N\right)\varphi_1\left(x\right)$ دارای ریشه $\alpha+i\beta$ است، بنابراین مزدوج آن $\alpha-i\beta$ نیز ریشه این چند جمله‌ای است. اما در این صورت چند جمله‌ای را می‌توان، بدون باقیمانده، بر تفاضل‌های $x-\left(\alpha+i\beta\right)$, $x-\left(\alpha-i\beta\right)$ و بنابراین بر حاصلضرب آن‌ها، که x^2+px+q می‌باشد، تقسیم نمود. خارج قسمت این تقسیم را با $\phi_1(x)$ نشان داده و بدست می‌آوریم

$$F\left(x\right)-\left(Mx+N\right)\varphi_1\left(x\right)=\left(x^2+px+q\right)\phi_1\left(x\right).$$

در آخرین کسر (4) از صورت و مخرج x^2+px+q را حذف کرده و (3) را بدست می‌آوریم و بدیهی است که درجه $\phi_1(x)$ از درجه مخرج کمتر است. بدین ترتیب قضیه ثابت شده است

اکنون برای کسر حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ نتایج قضیه های ۵ و ۶ را بطور متوالی، بکار می‌بریم و کلیه کسرهای منطق جز ئی متناظر به تمامی ریشه‌های مخرج $f(x)$ را بدست می‌آوریم. بنابراین از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که اگر

$$f\left(x\right)=\left(x-a\right)^{\alpha}...\left(x-b\right)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\mu}...\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon}$$

آنگاه کسر $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{F\left(x\right)}{f\left(x\right)}=\frac{A}{\left(x-a\right)^{\alpha}}+\frac{A_1}{\left(x-a\right)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+ \qquad (5)$$

....

$$+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+$$

....

$$+\frac{Px+Q}{\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon}}+\frac{P_1x+Q_1}{\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon-1}}+\ldots+\frac{P_{\upsilon-1}x+Q_{\upsilon-1}}{x^2+lx+s}.$$

ضرایب $A\,,A_1\,,...,B\,,B_1\,,...$ را می‌توان به روش زیر پیدا نمود:

تساوی (5)در حقیقت یک اتحاد است، و به این دلیل با ضرب طرفین آن در $f(x)$ به یک تساوی می‌رسیم که طرف‌های چپ و راست آن چند جمله‌ای‌هائی در x است. با مساوی هم قراردادن ضرایب قوای متناظر x در دو طرف تساوی، دستگاهی از معادلات خطی برای ضرایب مجهول $A\,,A_1\,...B\,,B_1\,,...$ بدست می‌آوریم. این روش پیدا کردن ضرایب به **روش ضرایب نامعین** معروف است.

علاوه بر روش ضرایب نامعین می‌توان از روش زیر هم استفاده نمود:

به دلیل آنکه چند جمله‌ای‌های بدست آمده در طرف‌های راست و چپ معادله بایستی پس از حذف مخرج‌ها به طور یکسان مساوی باشند، مقادیر آن‌ها برای هر مقدار خاص از x با هم مساوی است. با فرض مقادیر خاصی برای x (و از جمله ریشه‌های $f(x)$) معادله‌هایی برای پیدا کردن ضرایب بدست می‌آوریم.

بنابراین مشاهده می‌کنیم که هر کسر حقیقی منطق را می‌توان به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نمایش داد. اکنون هدف ما محاسبه انتگرال کسر منطق $\frac{Q(x)}{f(x)}$؛ یعنی، انتگرال

$$\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$$

است. اگر کسر داده شده غیر حقیقی باشد، آن را به صورت حاصلجمع یک چند جمله‌ای $M(x)$ و کسر منطق حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ نشان می‌دهیم. کسر اخیر را می‌توان، با استفاده از فرمول (5)، به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نوشت.

بنابراین انتگرال‌گیری از یک کسر منطق به انتگرال‌گیری از یک چند جمله‌ای و کسرهای منطق جزئی متعدد تبدیل می‌گردد. می‌دانیم که شکل کسرهای منطق بوسیله ریشه‌های مخرج آن‌ها تعیین می‌گردد. به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱۳: انتگرال‌های زیر را محاسبه نمائید:

$$(i)\quad \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx \qquad (ii)\quad \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$(iii)\quad \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+B}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

حل. (i) مخرج کسر زیر علامت انتگرال، یعنی $f(x)=(x+1)^3(x-2)$ دارای ریشه ساده 2 و ریشه مکرر مرتبه سوم -1 می‌باشد. بنابراین کسر به شکل زیر تجزیه می‌گردد:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

اگر طرفین تساوی بالا را در مخرج کسر طرف چپ ضرب کنیم، داریم

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3 \qquad (6)$$

یا

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

با مساوی هم قراردادن ضرایب x^0, x^1, x^2, x^3 (جمله ثابت) در دو طرف تساوی بالا دستگاه معادلات خطی زیر را برای تعیین ضرایب بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 0=A_2+B \\ 1=A_1+3B \\ 0=A-A_1-3A_2+3B \\ 2=-2A-2A_1-2A_2+B. \end{cases}$$

با حل این دستگاه داریم

$$A=-1; \qquad A_1=\frac{1}{3}; \qquad A_2=-\frac{2}{9}; \qquad B=\frac{2}{9}.$$

بنابراین

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx &= -\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int\frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C \\ &= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

(ii) مخرج کسر زیر علامت انتگرال از حاصلضرب دو عامل تشکیل شده است، یکی $x-1$ و دیگری عبارت x^2+1 که دارای ریشه حقیقی نیست. بنابراین تجزیه زیر را داریم:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

در نتیجه

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

قرار می‌دهیم $x=1$ و بدست می‌آوریم $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$. قرار می‌دهیم $x=0$ و بدست می‌آوریم $0=-B+C$ و لذا $B=\frac{1}{2}$. ضرایب x^2 را مساوی هم قرار داده و بدست می‌آوریم $0=A+C$، که از آنجا $A=\frac{-1}{2}$.

بنابراین

$$\begin{aligned}\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}&=\frac{-1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}\\&=-\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+\frac{1}{2}arctg\,x+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

(iii) مخرج کسر زیر علامت انتگرال از دو عامل تشکیل شده است، یکی $x+1$ که ریشه حقیقی ساده $x=-1$ را بدست می‌دهد و دیگری توان دوم سه جمله‌ای x^2+2x+3 که دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد. بنابراین تجزیه زیر را داریم:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1}$$

که از آنجا

$$\begin{aligned}&x^4+4x^3+11x^2+12x+8\\&\quad=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.\end{aligned}$$

با ترکیبی از روش‌های گفته شده برای یافتن ضرایب، خواهیم داشت

$$A=1,\qquad B=-1,\qquad C=0,\qquad D=0,\qquad E=1.$$

لذا بدست می‌آوریم

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}\,dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}\,dx+\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)} - \frac{\sqrt{2}}{4} arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + \ln|x+1| + C.$$

اولین انتگرال طرف راست همان مثال ۱۲ است. دومین انتگرال به طور مستقیم محاسبه شده است.

مثال ۱۴: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$(i) \quad \int \frac{dx}{x^5 - x^2} \qquad (ii) \quad \int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} dx$$

$$(iii) \quad \int \frac{dx}{x^4+1} \qquad (iv) \quad \int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}.$$

حل. (i) مخرج کسر زیر علامت انتگرال را تجزیه می‌کنیم:

$$x^5 - x^2 = x^2\left(x^3-1\right) = x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right).$$

بنابراین

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{1}{x^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

طرفین تساوی بالا را در $x^5 - x^2$ ضرب می‌کنیم:

$$1 = A(x-1)\left(x^2+x+1\right) + Bx(x-1)\left(x^2+x+1\right) + Cx^2\left(x^2+x+1\right) + (Dx+E)x^2(x-1).$$

ریشه‌های حقیقی مخرج اعداد $1,0$ هستند.

برای $x=0$ داریم $1=-A$، یعنی $A=-1$. برای $x=1$ داریم $1=3C$، یعنی $C=\frac{1}{3}$.

تساوی بالا را مجدداً بصورت زیر می‌نویسیم:

$$1 = A\left(x^3-1\right) + B\left(x^4-x\right) + C\left(x^4+x^3+x^2\right) + Dx^4 + Ex^3 - Dx^3 - Ex^2.$$

با مقایسه ضرایب x^2, x^3, x^4 در دو طرف تساوی اخیر به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ A+C+E-D=0 \\ C-E=0 \end{cases}$$

که از آن بدست می‌آوریم $B=0$, $D=-\frac{1}{3}$, $E=\frac{1}{3}$. بنابراین داریم

$$\frac{1}{x^5-x^2} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3\left(x^2+x+1\right)}.$$

در نتیجه

$$\int \frac{dx}{x^5-x^2} = -\int \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}\,dx\\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{\left|x^2+x+1\right|}+\frac{1}{\sqrt{3}}\,arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.
\end{aligned}$$

(ii) تابع زیر علامت انتگرال یک کسر منطق غیر حقیقی است. با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای ها داریم

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}=(x+3)+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
&\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx=\int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx\\
&=\int x\,dx+3\int dx+\int\frac{3x+1}{x^2+2}\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+2}+\int\frac{dx}{x^2+2}\\
&\qquad=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\,arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.
\end{aligned}$$

(iii) به دلیل آنکه $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)$، تجزیه کسر زیر علامت انتگرال خواهد شد:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

یا

$$1=(Ax+B)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)+(Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)$$

یا

$$1=(A+C)x^3+\left(B+D-\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C\right)x^2+\left(A+C-\sqrt{2}\,B+\sqrt{2}\,D\right)x+(B+D)$$

و پس از محاسبات لازم بدست می‌آید

$$A=\frac{\sqrt{2}}{4},\qquad C=\frac{-\sqrt{2}}{4},\qquad B=D=\frac{1}{2}.$$

بنابراین

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx+\int\frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,dx.$$

انتگرال‌های بالا بسادگی قابل حل هستند و به عنوان مثال اولین انتگرال را حل می‌کنیم.

$$\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{\frac{1}{2}\left(2x+\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|x^2+\sqrt{2}\,x+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\,arctg\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+C.$$

(iv) مخرج کسر زیر علامت انتگرال دارای دو زوج از ریشه‌های مزدوج مختلط متفاوت است، بنابراین

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4},$$

بنابراین

$$1=\left(Ax+B\right)\left(x^2+4\right)+\left(Dx+E\right)\left(x^2+1\right).$$

در اینجا مناسب است که روش مقادیر خاص را برای یافتن ضرایب بکار بریم، زیرا ریشه‌های مختلط مخرج $\left(x=\pm i\ ,\ x=\pm 2i\right)$ بقدر کافی ساده هستند.

با قراردادن $x=i$ بدست می‌آوریم

$$3B+3Ai=1$$

که از آنجا $A=0$, $B=\frac{1}{3}$. با قرار دادن $x=2i$ بدست می‌آوریم

$$-3E-6Di=1$$

که از آنجا $D=0$, $E=-\frac{1}{3}$. لذا

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{3}\,arctg\,x-\frac{1}{6}\,arctg\frac{x}{2}+C.$$

۵ . ۶ انتگرال بعضی توابع اصم

در ادامه این فصل نماد $R(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ برای نمایش یک عبارت منطق (تابع منطق) در متغیرهای $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ بکار می‌رود و بدین معنی است که روی $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ تنها اعمال حسابی انجام می‌شود.

گونه‌های معینی از انتگرال‌های توابع اصم را می‌توان با استفاده از تغییر متغیری مناسب به انتگرال توابع منطق تبدیل نمود. یک چنین تبدیلی از یک انتگرال را **عمل گویا کردن** آن می‌نامند.

I. انتگرال $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$ را در نظر می‌گیریم که در آن R تابعی منطق از متغیرهایش می‌باشد. فرض کنیم k یک مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ باشد. تغییر متغیر

$$x = t^k \, , dx = k\, t^{k-1}\, dt$$

می‌دهیم. در این صورت هر توان کسری از متغیر x به شکل توانی صحیح از متغیر t در می‌آید و بنابراین تابع زیر علامت انتگرال به تابعی منطق در متغیر t تبدیل می‌گردد.

II.انتگرالی به شکل

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right] dx$$

را در نظر می‌گیریم. این انتگرال با تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$، که در آن k یک مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ است، به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد، به دلیل آنکه از تغییر متغیر بالا بدست می‌آوریم

$$.\, dx = \frac{k\,dt^{k-1}\left(a - ct^k\right) + kct^k\left(dt^k - b\right)}{\left(a - ct^k\right)^2} dt, \; x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}\,.$$

با جایگذاری این مقادیر، انتگرال بالا به صورت $\int \overline{R}(t)\,dt$ در می‌آید که $\overline{R}(t)$ تابعی منطق از t است.

مثال ۱۵: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$(i) \quad \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)} dx \qquad\qquad (ii) \quad \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}} + 1} dx$$

$$(iii) \quad \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\, dx \qquad\qquad (iv) \quad .\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3 (x+2)^5}}$$

حل. (i) کوچکترین مضرب مشترک 3 و 6 عدد 6 است، بنابراین تغییر متغیر

$$x = t^6 \, , dx = 6t^5 \, dt$$

می‌دهیم و داریم

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx = 6\int \frac{\left(t^6+t^4+t\right)t^5}{t^6\left(1+t^2\right)}\,dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt$$
$$= 6\int t^3\,dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}t^4 + 6\,arc\,tg\,t + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 6arctgx^{\frac{1}{6}} + C\,.$$

(ii) تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از $\sqrt[6]{2x-3}$ است، بنابراین قرار می‌دهیم $2x-3=t^6$، که از آنجا

$$dx = 3t^5\,dt\,,\qquad (2x-3)^{\frac{1}{2}} = t^3\,,\qquad (2x-3)^{\frac{1}{3}} = t^2\,.$$

بنابراین

$$I = \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}\,dx = \int \frac{3t^8}{t^2+1}\,dt = 3\int \left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt + 3\int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^3}{3} - 3t + 3\,arc\,tg\,t + C\,.$$

با برگشتن به متغیر x، بدست می‌آوریم

$$I = 3\left[\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}} - (2x-3)^{\frac{1}{6}} + arc\,tg(2x-6)^{\frac{1}{6}}\right] + C\,.$$

(iii) تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از x و عبارت $\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}$ است، بنابراین تغییر متغیر

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t \qquad ; \qquad \frac{2-x}{2+x} = t^3$$

می‌دهیم که از آنجا

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}; \qquad 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}; \qquad dx = \frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}\,dt\,.$$

بنابراین

$$I = -\int \frac{2\left(1+t^3\right)^2 t.12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}\,dt = -\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C\,.$$

با برگشتن به متغیر x بدست می‌آوریم

$$I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C\,.$$

(iv) به دلیل آنکه

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از x و $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ است، بنابراین تغییر متغیر

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t, \qquad \frac{x+2}{x-1}=t^4$$

می‌دهیم که از آنجا

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1}, \qquad x-1=\frac{3}{t^4-1}, \qquad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}, \qquad dx=\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

بنابراین

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=-\int\frac{\left(t^4-1\right)\left(t^4-1\right)12t^3}{3.3t^4\,t\left(t^4-1\right)^2}dt=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C.$$

با برگشتن به متغیر x، بدست می‌آوریم

$$I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

۵ . ۷ تغییر متغیرهای اویلر

انتگرال

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (a\neq 0) \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. انتگرالی از این نوع را می‌توان به انتگرال تابعی منطق از یک متغیر جدید، بوسیله تغییر متغیرهای اویلر که در زیر بیان می‌شود، تبدیل نمود.

اولین تغییر متغیر اویلر. اگر $a>0$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t.$$

برای سهولت علامت مقابل $\sqrt{a}$ را مثبت اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2$$

که از آنجا x به صورت تابعی منطق از t بدست می‌آید:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

(لذا، dx نیز به صورت تابعی منطق از t بیان می‌شود). بنابراین

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t.$$

دومین تغییر متغیر اویلر. اگر $c>0$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=ax\pm\sqrt{c}$$

که از آنجا

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$$

(برای سهولت علامت مقابل رادیکال را مثبت اختیار می‌کنیم). در این صورت x به عنوان تابعی منطق از t بدست می‌آید:

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

به دلیل آنکه dx و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نیز به صورت عباراتی منطق از t بیان می‌شوند، با جایگذاری مقادیر x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$, dx در انتگرال $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$، این انتگرال تبدیل به انتگرال تابعی منطق از t می‌شود.

سومین تغییر متغیر اویلر. فرض کنیم β,α ریشه‌های حقیقی سه جمله‌ای ax^2+bx+c باشند. قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\;t.$$

به دلیل آنکه $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$، داریم

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$$
$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2t^2$$
$$a(x-\beta)=(x-\alpha)\;t^2$$

که از آنجا x را به صورت تابعی منطق از t بدست می‌آوریم:

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

چون dx و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نیز توابعی منطق از t هستند، انتگرال داده شده به انتگرال تابعی منطق از t تبدیل می‌شود.

مثال ۱۶: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

(i) $\quad I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\qquad$ (ii) $\quad I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

(iii) $\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

حل. (i) در اینجا $a=1>0$، بنابراین اولین تغییر متغیر اویلر را بکار می‌بریم:

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

پس از مربع نمودن طرفین این تساوی و حذف جملات مشابه، بدست می‌آوریم

$$2x+2tx=t^2-2$$

که از آنجا

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}; \qquad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt; \qquad 1+\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

این مقادیر را در انتگرال قرار داده و بدست می‌آوریم

$$I=\int\frac{2(1+t)\left(t^2+2t+2\right)}{\left(t^2+4t+4\right)2\left(1+t^2\right)^2}\,dt=\int\frac{\left(t^2+2t+2\right)dt}{(1+t)(1+2)^2}.$$

اکنون کسر منطق حقیقی بدست آمده را به صورت حاصلجمع کسرهای منطق جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین خواهیم داشت: $A=1$, $B=0$, $D=-2$. بنابراین

$$\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

و اگر بجای t مقدار آن را بر حسب x قرار دهیم، خواهیم داشت

$$I=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,\right|+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

(ii) چون در اینجا $c=1>0$، می‌توانیم دومین تغییر متغیر اویلر را بکار بریم:

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$$

که از آنجا

$$(2t-1)x=\left(t^2-1\right)x^2; \qquad x=\frac{2t-1}{t^2-1}$$

$$dx=-2\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt, \qquad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

با جایگذاری در I ، انتگرالی از یک کسر منطق بدست می‌آوریم:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt.$$

اما

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{t+1}\quad.$$

بنابر روش ضرایب نامعین دیده می‌شود که

$$A=2\,,\qquad B=-\frac{1}{2}\,,\qquad D=-3\,,\qquad E=-\frac{3}{2}\,.$$

بنابراین

$$I=2\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-3\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1}=$$
$$2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C$$

که در آن $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$.

(iii) چون $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ سومین تغییر متغیر اویلر را بکار برده و قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\ \ t\,.$$

بنابراین

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2\,t^2\,,\qquad x-1=(x+4)\,t^2$$

$$dx=\frac{10t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt\,,\qquad x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}\,,$$ و $$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

لذا می‌توان نوشت

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t\left(1-t^2\right)dt}{\left(1-t^2\right)^2 5t}=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt$$
$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C\,.$$

۵ . ۸ انتگرال دیفرانسیل دوجمله‌ای

انتگرال $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ را که در آن m، n و p اعدادی منطق هستند در نظر می‌گیریم . ثابت می‌شود که انتگرال تنها در سه حالت زیر قابل حل است:

حالت اول: p یک عدد صحیح است. در این صورت اگر $p>0$ آنگاه $\left(a+bx^{n}\right)^{p}$ همان دو جمله‌ای نیوتن بوده و بنابراین انتگرال به سادگی قابل محاسبه است. اما اگر $p<0$ آنگاه تغییر متغیر $x=t^{h}$ می‌دهیم که در آن h یک مخرج مشترک کسرهای منطق m و n است.

حالت دوم: $\frac{m+1}{n}$ یک عدد صحیح است. قرار می‌دهیم $a+bx^{n}=t^{\alpha}$ که در آن α مخرج کسر p است.

حالت سوم: $\frac{m+1}{n}+p$ یک عدد صحیح است. قرار می‌دهیم $a+bx^{n}=t^{\alpha}x^{n}$ که در آن α مخرج کسر p است.

مثال ۱۷: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$(i)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} \qquad\qquad (ii)\quad I=\int x^{-11}\left(1+x^{4}\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$(iii)\quad I=\int x^{\frac{-2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

حل. (i) در اینجا تابع زیر علامت انتگرال را به شکل $x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10}$ می‌توان نوشت، یعنی $p=-10$ عددی صحیح است. لذا حالت اول انتگرال پذیری دو جمله‌ای دیفرانسیل را داریم. بنابراین، اگر تغییر متغیر $x=t^{4}$ بدهیم آنگاه $dx=4t^{3}dt$ و انتگرال به شکل زیر درمی‌آید:

$$I=\int\frac{4t^{3}dt}{t^{2}(t+1)^{10}}=4\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}}.$$

برای حل آخرین انتگرال می‌توانیم بنویسیم

$$\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}}=\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt=\int\frac{dt}{(t+1)^{9}}-\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}$$
$$=-\frac{1}{8(t+1)^{8}}+\frac{1}{9(t+1)^{9}}+C.$$

بنابراین

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{8}}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{9}}+C.$$

(ii) در اینجا $p=-\frac{1}{2}$ یک کسر است، $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{2}$ نیز یک کسر است، اما $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3$ عددی صحیح است،یعنی در حالت سوم هستیم. قرار می‌دهیم $1+x^4=x^4t^2$. بنابراین

$$x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}\;;\qquad dx=-\frac{tdt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}\,.$$

با جایگذاری این عبارت‌ها در انتگرال بدست می‌آوریم

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C$$

و اگر t را برحسب x جایگذاری کنیم داریم

$$I=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^2}+C.$$

(iii)در اینجا $m=-\frac{2}{3}$ ، $n=\frac{1}{3}$ ، $\frac{m+1}{n}=\frac{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}{\frac{1}{3}}=1$، یعنی $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح است. لذا حالت دوم انتگرال‌پذیری دو جمله‌ای دیفرانسیل را داریم. تغییر متغیر

$$1+x^{\frac{1}{3}}=t^3\;;\qquad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2tdt$$

می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت

$$I=6\int t^2dt=2t^3+C=2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

۵ . ۹ انتگرال توابع مثلثاتی

از ابتدای فصل حاضر تا اینجا تنها به بررسی انتگرال توابع جبری (منطق و اصم) پرداخته‌ایم. در این قسمت به مطالعهٔ انتگرال توابع مثلثاتی می‌پردازیم. انتگرالی به شکل

$$\int R\left(sinx,cosx\right)\;\;dx\qquad(1)$$

را در نظر می‌گیریم . نشان می‌دهیم که این انتگرال با تغییر متغیر

$$tg\frac{x}{2}=t\qquad(2)$$

همواره به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد. توابع $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $tg\frac{x}{2}$ ، و بنابراین t بیان می‌کنیم:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

علاوه بر آن

$$x=2arctgt \quad \text{و} \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

به این طریق، $sinx$ ، $cosx$ و dx به طور منطق برحسب t بیان می‌شوند. چون یک تابع منطق از توابع منطق خود تابع منطقی است،با جایگذاری عبارت‌های بدست آمده در انتگرال (1) ما انتگرالی از یک تابع منطق بدست می‌آوریم:

$$\int R(sinx,cosx)\ \ dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

مثال ۱۸: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

(i) $\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}$ $\qquad$ (ii) $\int\frac{dx}{(a^2+b^2)-(a^2-b^2)cosx}$

(iii) $\int\frac{dx}{sinx(2+cosx-2sinx)}$.

حل: (i) با تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}$$
$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C.$$

بجای t مقدار آن را برحسب x قرار داده و بدست می‌آوریم

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

(ii) با تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$\int\frac{dx}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)cosx}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right).\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$
$$=2\int\frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)}=\int\frac{dt}{a^2t^2+b^2}$$
$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{1}{ab}arctg\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}arctg\left(\frac{a}{b}.tg\frac{x}{2}\right)+C.$$

(iii) با تغییر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{t\left(t^2-4t+3\right)}$$

کسر زیر علامت انتگرال را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{D}{t-1}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $A=\frac{1}{3}$، $B=\frac{5}{3}$، $D=-1$. بنابراین

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$
$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C\ .$$

تغییر متغیر بالا به ما این امکان را می‌دهد که از هر تابع به شکل $R\left(\sin x,cosx\right)$ انتگرال بگیریم. به این دلیل گاهی اوقات آن را یک **تغییر متغیر مثلثاتی عمومی** می‌نامند. با وجود این، در عمل این تغییر متغیر توابع منطق بسیار پیچیده‌ای را ایجاد می‌کند. بنابراین مناسب است که تغییر متغیرهای دیگری (علاوه بر ‹‹عمومی››) را بشناسیم که اغلب خیلی سریعتر به جواب می‌رسند.

(1)اگر انتگرال به شکل $\int R(\sin x) cosxdx$ باشد، تغییر متغیر $sinx = t$ ، $cosxdx = dt$ این انتگرال را به صورت $\int R(t)dt$ درمی‌آورد.

(2) اگر انتگرال به شکل $\int R(\cos x)\sin xdx$ باشد، با تغییر متغیر $cosx = t$ ، $sinxdx = -dt$ به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد.

(3) اگر تابع زیر علامت انتگرال فقط به tgx بستگی داشته باشد، آنگاه تغییر متغیر

$$tgx = t, \qquad x = arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

این انتگرال را به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌کند:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

(4) اگر تابع زیر علامت انتگرال به شکل $R(\sin x, cosx)$ بوده، اما $sinx$ و $\cos x$ تنها با توان‌های زوج ظاهر شده باشند، آنگاه همان تغییر متغیر $tgx = t$ می تواند به کار برده شود. زیرا $sin^2 x$ و $\cos^2 x$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$
$$sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

بعد از جایگذاری انتگرالی از یک تابع منطق را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۹: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}dx \qquad (i)$$
$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} \qquad (ii)$$
$$\int \frac{(\sin x+\sin^3 x)}{cos2x}dx \qquad (iii)$$
$$.\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x.cosx-cos^2 x} \qquad (iv)$$

حل. (i) این انتگرال به صورت $\int R(\sin x, cosx)\ dx$ نوشته می‌شود. در حقیقت:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}\ dx = \int \frac{\sin^2 x.\sin xdx}{2+cosx} = \int \frac{1-cos^2 x}{2+cosx}\sin xdx\ .$$

تغییر متغیر $cosx = t$ می‌دهیم. در این صورت $\sin xdx = -dt$ و

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}\ dx = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\ dt = \int \frac{t^2-1}{t+2}\ dt = \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)\ dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{cos^2 x}{2} - 2cosx + 3\ln\left(cosx+2\right) + C\ .$$

(ii) تغییر متغیر $tgx = t$ می‌دهیم:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(iii) انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)}{cos2x}dx = \int \frac{\left(1+\sin^2 x\right)}{2cos^2 x-1}sinxdx = \int \frac{\left(2-cos^2 x\right)}{2cos^2 x-1}sinxdx.$$

لذا تغییر متغیر $cosx = t$ می‌دهیم و داریم $\sin xdx = -dt$ ،

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)}{cos2x}dx = \int \frac{\left(2-t^2\right)\left(-dt\right)}{2t^2-1} = \int \frac{\left(t^2-2\right)dt}{2t^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C$$

و در نتیجه ،

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{cos2x} = \frac{1}{2}cosx - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx-1}{\sqrt{2}cosx+1}\right| + C.$$

(iv) تابع زیر علامت انتگرال نسبت به سینوس و کسینوس از توان زوج است . با قراردادن $tgx = t$ بدست می‌آوریم

$$sinx = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$x = arctgt \qquad ; \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

از این نتیجه می‌گیریم که

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x.cosx-cos^2 x}$$
$$=\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}.\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t^2+2t-1}\ .$$

اما

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1}=\int \frac{dt}{(t+1)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C\ .$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x.cosx-cos^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}}\right|+C\ .$$

(5) اکنون به بررسی یکی دیگر از انتگرال‌های به شکل $\int R\left(\sin x,cosx\right)\ dx$ می‌پردازیم، یعنی، انتگرالی که تابع زیر علامت انتگرال در آن به صورت $sin^m x.cos^n x$ است که در آن m و n اعداد صحیح هستند. در اینجا سه حالت را در نظر می‌گیریم:

(a) $\int \sin^m xcos^n xdx$ ، که در آن از m و n لااقل یکی فرد است. برای سهولت فرض کنیم n فرد باشد. قرار می‌دهیم $n=2p+1$ و انتگرال را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\int \sin^m x\,cos^{2p+1}xdx=\int \sin^m x\,cos^{2p}x\ cosxdx$$
$$=\int \sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^p cosxdx.$$

تغییر متغیر می‌دهیم:

$$sinx=t,\qquad cosxdx=dt$$

با قراردادن متغیر جدید در انتگرال مفروض، بدست می‌آوریم

$$\int sin^m x\,cos^n xdx=\int t^m\left(1-t^2\right)^p\ dt$$

که انتگرال تابعی منطق از t است.

(b) $\int \sin^m x\,cos^n x\,dx$، که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی و زوج هستند. قرار می‌دهیم $m=2p$ و $n=2q$. فرمول‌های مثلثاتی زیر را می‌شناسیم:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2x,\qquad cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x \qquad (3)$$

با قراردادن آنها در انتگرال بدست می‌آوریم

$$\int \sin^{2p} x cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2x\right)^p \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x\right)^q dx.$$

پرانتزها را بتوان رسانیده و درهم ضرب می‌کنیم. با این کار جملاتی شامل $cos2x$ بدست می‌آوریم که دارای توان های فرد و زوج هستند. جملات با توان فرد مانند حالت (a) انتگرال‌گیری می‌شوند. مجدداً با استفاده از (3) توان‌های زوج را نصف می‌کنیم. با ادامه این روش بالاخره جملاتی به شکل $\int \cos kxdx$ را بدست می‌آوریم، که انتگرال‌گیری از آنها بسیار ساده است.

(c) اگر هر دو توان زوج بوده و لااقل یکی از آها منفی باشد،آنگاه روش حالت قبل نتیجهٔ مطلوب را بدست نمیدهد . در اینجا، بایستی از تغییر متغیر $tgx = t$ (یا $cotgx = t$) استفاده نمود.

مثال ۲۰: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

(i) $\int \frac{\cos^3 x}{sin^4 x}dx$ $\qquad$ (ii) $\int \sin^4 xdx$

(iii) $\int \frac{\sin^2 x}{cos^6 x}dx$.

حل. (i) داریم

$$\int \frac{cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{cos^2 x\, cosx}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)cosx}{\sin^4 x}dx.$$

با قراردادن $sinx = t$ ، $cosxdx = dt$ بدست می‌آوریم

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x}dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)}{t^4}dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C.$$
$$= -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C.$$

(ii) داریم

$$\int \sin^4 xdx = \frac{1}{4}\int \left(1-cos2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2cos2x+cos^2 2x\right)dx$$
$$= \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\int \left(1+cos4x\right)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$

(iii) داریم

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x \left(\sin^2 x + cos^2 x\right)^2}{cos^6 x} \ dx = \int tg^2 x \left(1 + tg^2 x\right)^2 dx \ .$$

قرار می‌دهیم $tgx = t$ ، در این صورت $x = arctgt$ ، $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ و بدست می‌آوریم

$$\int \frac{\sin^2 x}{cos^6 x} \ dx = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \left(1+t^2\right) \ dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C$$

$$= \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C \ .$$

تبصره : انتگرالی به شکل

$$I = \int \sin^m x \, cos^n x \, dx$$

که در آن m و n اعدادی منطق هستند قابل تبدیل به انتگرال دیفرانسیل دو جمله‌ای

$$I = \int t^m \left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt,$$

بوده و بنابراین تنها در سه حالت زیر امکان حل آن وجود دارد:

(1) n فرد است ($\dfrac{n-1}{2}$ عددی صحیح است)،

(2) m فرد است ($\dfrac{m+1}{2}$ عددی صحیح است)،

(3) $m+n$ زوج است ($\dfrac{m+1}{2} + \dfrac{n-1}{2}$ عددی صحیح است).

اگر n عددی فرد باشد، تغییر متغیر $\sin x = t$ بکار می‌رود.

اگر m عددی فرد باشد، تغییر متغیر $\cos x = t$ بکار می‌رود.

اگر $m+n$ عددی زوج باشد،تغییر متغیر $tgx = t$ (یا $\cot gx = t$) را بکار می‌بریم.

به ویژه ، این نوع تغییر متغیرها برای انتگرال‌هائی به شکل

$$\left(\int \cot g^n x dx \quad \text{یا} \quad \right), \int tg^n x dx$$

مناسب هستند . اما آخرین تغییر متغیر نامناسب است هرگاه n و m اعداد مثبت باشند. اگر m و n اعداد نامنفی زوج باشند، آنگاه به نظر می‌رسد که مناسبتر است روش تقلیل توان را با کمک تبدیلات مثلثاتی:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + cos 2x\right), \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)$$

یا $\sin x.cosx = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ بکار بریم.

مثال ۲۱: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$(i)\ \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} \qquad (ii)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x cosx}}$$

$$(iii)\ \int tg^7 x dx \qquad (iv)\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$$

حل. (i) در اینجا $m=3$ عددی فرد است. قرار می‌دهیم $\cos x = t, \sin x dx = -dt$ و بدست می‌آوریم.

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = -\int (1-t^2)t^{\frac{-2}{3}}dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}} + C$$
$$= 3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}cos^2 x - 1\right) + C .$$

(ii) در اینجا هر دو توان $\frac{-11}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ اعدادی منفی بوده و حاصلجمع آنها $-\frac{11}{3}-\frac{1}{3}=-4$ عددی زوج است، بنابراین قرار می‌دهیم

$$tgx = t \quad ; \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt .$$

پس

$$I = \int \frac{dx}{cos^4 x \sqrt[3]{tg^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}}\ dt = \int \left(t^{\frac{-11}{3}} + t^{\frac{-5}{3}}\right)\ dt$$

$$= -\frac{3}{8}t^{\frac{-3}{8}} - \frac{3}{2}t^{\frac{-2}{3}} + C = -\frac{3\left(1+4tg^2 x\right)}{8tg^2 x.\sqrt[3]{tg^2 x}} + C \ .$$

(iii) با قراردادن $tgx = t$ ، $x = arctgt$ ، $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ بدست می‌آوریم

$$I = \int tg^7 x dx = \int t^7 \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2}\right)\ dt$$
$$= \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C$$
$$= \frac{1}{6}tg^6 x - \frac{1}{4}tg^4 x + \frac{1}{2}tg^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

(iv) در اینجا $\sin x$ دارای توانی فرد است. قرار می‌دهیم

$$cosx = t \quad , \quad -\sin x dx = dt$$

و انتگرالی از یک تابع منطق بدست می‌آوریم.

$$.I=\int \frac{cos^4 x\sin x}{\sin^4 x}\ dx=-\int \frac{t^4}{\left(1-t^2\right)^2}\ dt\ .$$

برای این مساله، بجای استفاده از روش انتگرال‌گیری کسرهای منطق، بهتر است که از روش جزء به جزء استفاده کنیم . قرار می‌دهیم

$$u=t^3 \qquad ; \qquad dv=\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

در این صورت

$$.du=3t^2dt \qquad ; \qquad u=\frac{1}{2\left(1-t^2\right)}\ .$$

بنابراین

$$I=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{3}{2}\int\frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt$$
$$=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$
$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}cosx+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C\ .$$

(6) در خاتمه به انتگرال‌های زیر می‌پردازیم:

$$\int\cos mx\cos nxdx, \qquad \int\sin mx\cos nxdx, \qquad \int\sin mx\sin nxdx\ .$$

این انتگرال‌ها با استفاده از فرمول‌های زیر محاسبه می شوند $(m\neq n)$

$$\cos mx\quad \cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right]$$
$$\sin mx\quad cosnx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x+\sin\left(m-n\right)x\right]$$
$$\sin mx\quad \sin nx=\frac{1}{2}\left[-\cos\left(m+n\right)x+cos\left(m-n\right)x\right].$$

به عنوان مثال

$$\int\cos mx\quad \cos nxdx=\frac{1}{2}\int\left[\cos\left(m+n\right)x+\cos\left(m-n\right)x\right]\ dx$$
$$=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C\qquad .$$

دو انتگرال دیگر نیز به طریق مشابه محاسبه می‌گردند.

۵ . ۱۰ انتگرال بعضی توابع اصم با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی

بار دیگر به انتگرال بخش ۵ . ۷ باز می‌گردیم:

$$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (1)$$

که در آن $a\neq 0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}\neq 0$ (در حالت $a=0$ انتگرال دارای شکل II در بخش ۵ . ۶ است، برای $c-\dfrac{b^2}{4a}=0$ ، داریم $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ، و با تابعی منطق سروکار داریم به شرط آنکه $a>0$. برای $a<0$ تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به ازای هیچ مقدار x تعریف نشده است) در اینجا روشی را ارائه خواهیم داد که این انتگرال را به انتگرالی به شکل

$$\int \bar{R}\left(\sin z,\cos z\right)\ dz \qquad (2)$$

تبدیل می‌کند که در بخش قبل آن را بررسی نمودیم.

سه جمله‌ای زیر رادیکال را تبدیل می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

با قراردادن $x+\dfrac{b}{2a}=t$ ، $dx=dt$ تغییر متغیر می‌دهیم. در این صورت

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

تمامی حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

(1) فرض کنیم $a>0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$ ، با نامگذاری $a=m^2$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$ داریم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}\ .$$

(2) فرض کنیم $a>0, c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. در این صورت

$$a=m^2,\qquad c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$$

لذا،

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}\ .$$

(3) فرض کنیم $a<0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. در این صورت

$$a=-m^2,\qquad c-\frac{b^2}{4a}=n^2$$

بنابراین،

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}\ .$$

(4) فرض کنیم $a<0$ و $c-\frac{b^2}{4a}<0$. دراین حالت $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به ازای هر مقدار x به یک عدد مختلط تبدیل می‌شود که از بحث فعلی ما خارج است.

بدین طریق ، انتگرال (1) به یکی از انتگرال‌های زیر تقلیل می‌یابد:

$$I.\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})\,dt \qquad (3a)$$

$$II.\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})\,dt \qquad (3b)$$

$$III.\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})\,dt \qquad (3c)$$

بدیهی است که ، انتگرال $(3a)$ را می‌توان به انتگرالی به شکل (2) تقلیل داد هرگاه تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}tgz$$

را بکار بریم، زیرا در این صورت داریم

$$\sqrt{m^2t^2+n^2}=\frac{n}{\cos z}\quad,\qquad dt=\frac{n}{m}\frac{dz}{\cos^2 z}.$$

انتگرال $(3b)$ را می‌توان به انتگرالی به شکل (2) تقلیل داد هرگاه تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}\sec z$$

را بکار بریم، زیرا در این صورت داریم $dt=\frac{n}{m}\sec z tgz dz$ و $\sqrt{m^2t^2-n^2}=ntgz$.

انتگرال $(3c)$ با تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}\sin z$$

به شکل (2) درمی‌آید، زیرا در این صورت داریم $dt=\frac{n}{m}\cos z dz$ و $\sqrt{n^2-m^2t^2}=n\cos z$.

مثال ۲۲: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$(i)\ \int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx \qquad (ii)\ \int\sqrt{x^2+5}\,dx$$

$$(iii)\ \int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} \qquad (iv)\ \int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}.$$

حل. (i) فرض کنیم $x=3\sin\theta$. در این صورت $dx=3\cos\theta d\theta$ و

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\sqrt{\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

بنابراین

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx=\int\frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}(3\cos\theta)\,d\theta=\int\cot g^2\theta\,d\theta$$

$$= \int \left(\cot g^2\theta + 1 - 1 \right) \ d\theta = -\cot g\theta - \theta + C \qquad .$$

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2} \ dx = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - arc\sin\frac{x}{3} + C.$$

شکل ۵ . ۲

(ii) فرض کنیم $x=\sqrt{5}tg\theta$ در این صورت $dx=\sqrt{5}\sec^2\theta \ \ d\theta$ و

$$\sqrt{x^2+5} = \sqrt{5tg^2\theta+5} = \sqrt{5}\sqrt{\sec^2\theta} = \sqrt{5}\sec\theta \, .$$

بنابراین

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx = \int\sqrt{5}\sec\theta(\sqrt{5}\sec^2\theta)d\theta = 5\int\sec^3\theta d\theta \, .$$

حال انتگرال $\int\sec^3 xdx$ را به روش جزء به جزء محاسبه می‌نمائیم فرض کنیم.

$$u=\sec x \qquad , \qquad dv=\sec^2 xdx$$

پس

$$du=\sec xtgxdx \qquad , \qquad v=tgx$$

لذا

$$\begin{aligned}\int\sec^3 xdx &= \sec xtgx - \int\sec xtg^2 xdx \\ &= \sec xtgx - \int\sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx \\ &= \sec xtgx - \int\sec^3 xdx + \int\sec xdx \quad .\end{aligned}$$

(به سادگی دیده می‌شود که $\qquad (\int\sec xdx = \ln\left|\sec x + tgx\right| + C$

با اضافه نمودن $\int\sec^3 xdx$ به هر دو طرف بدست می‌آوریم

$$2\int\sec^3 xdx = \sec xtgx + \ln\left|\sec x + tgx\right| + 2C$$

و در نتیجه

$$\int\sec^3 xdx = \frac{1}{2}\sec xtgx + \frac{1}{2}\ln\left|\sec x + tgx\right| + C \, .$$

بنابراین

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}\sec\theta tg\theta + \frac{5}{2}\ln\left|\sec\theta + tg\theta\right| + C.$$

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{5}{2}.\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}.\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| - \frac{5}{2}\ln\sqrt{5} + C$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5} + \frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right| + C_1.$$

شکل ۵ . ۳

(iii) فرض کنیم $x=3\sec\theta$ ،بنابراین $dx=3\sec\theta\ \ tg\theta d\theta$ و

$$\sqrt{x^2-9} = \sqrt{9\sec^2\theta - 9} = 3\sqrt{tg^2\theta} = 3tg\theta.$$

لذا

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{3\sec\theta tg\theta d\theta}{27\sec^3\theta 3tg\theta} = \frac{1}{27}\int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{54}\int (1+cos2\theta)d\theta = \frac{1}{27}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$$

$$= \frac{1}{54}\left(\theta + \sin\theta cos\theta\right) + C.$$

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{54}\left(arc\cos\frac{3}{x} + \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.\frac{3}{x}\right) + C.$$

شکل ۵ . ۴

(iv) داریم $5+2x+x^2=4+(x+1)^2$. قرار می‌دهیم $x+1=t$ و در این صورت

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(4+t^2)^3}}.$$

تغییر متغیر $t=2tgz$ داده و بدست می‌آوریم $dt=\dfrac{2dz}{cos^2 z}$ ،

$\sqrt{4+t^2}=2\sqrt{1+tg^2 z}=\dfrac{2}{\cos z}$. بنابراین

$$I=\frac{1}{4}\int\cos z dz=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\frac{tgz}{\sqrt{1+tg^2 z}}+C=\frac{1}{4}\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$

فصل پنجم

انتگرال نامعین

۵ . ۱ ضد مشتق و انتگرال نامعین

در بخش ۲ از فصل چهارم مسأله زیر را مورد بررسی قرار دادیم:

تعریف: تابع $F(x)$ را یک **تابع اولیه (ضد مشتق)** تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ می‌نامیم در صورتی که به ازای هر x از این بازه داشته باشیم $F'(x)=f(x)$.
به علاوه

قضیه ۱: اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو تابع اولیه تابع مفروض تابع $f(x)$ بر بازه I باشند، آنگاه اختلاف آن‌ها تنها در یک عدد ثابت است، یعنی، عدد ثابتی مانند C وجود دارد به طوری که

$$F_2(x)=F_1(x)+C.$$

اثبات. به قضیه ۱۴ در فصل چهارم مراجعه نمائید.

از قضیه بالا نتیجه می‌شود که اگر برای تابع مفروض $f(x)$ تنها یک تابع اولیه $F(x)$ را بتوانیم پیدا کنیم، آنگاه هر تابع اولیه دیگر به شکل $F(x)+C$، به ازای یک مقدار ثابت C، است. در حقیقت با یافتن یک تابع اولیه ما تمامی توابع اولیه را یافته‌ایم.

تعریف: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، آنگاه عبارت $F(x)+C$ را، که در آن C مقدار ثابت دلخواهی است، **انتگرال نامعین** تابع $f(x)$ نامیده و آن را با علامت $\int f(x)\,dx$ نمایش می‌دهند.

لذا، بنابر تعریف، اگر $F'(x)=f(x)$، آنگاه

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

در اینجا، $f(x)$ **تابع زیر علامت انتگرال**، $f(x)dx$ **عنصر انتگرال‌گیری** (عبارت زیر علامت انتگرال) و $\int$ **علامت انتگرال** نامیده می‌شود. بنابراین یک انتگرال نامعین **خانواده‌ای از توابع** مانند $y=F(x)+C$ است.

از نقطه نظر هندسی، یک انتگرال نامعین خانواده‌ای از منحنی‌ها است که هر کدام از آنها با انتقال یکی از منحنی‌ها در امتداد محور Y ها، به طرف بالا یا پایین، بدست می‌آید. در شکل زیر $\int 3x^2\, dx = x^3 + C$ و منحنی $y = x^3 + C$ به ازای سه مقدار $C=0$, $C=C'>0$ و $C=C''<0$ رسم شده است.

شکل ۵ . ۱

اکنون این پرسش مطرح می‌شود که آیا توابع اولیه (و بنابراین انتگرال نامعین) هر تابعی مانند $f(x)$ وجود دارد؟ جواب منفی است و توابعی به شکل

$$\frac{1}{lnx}, \qquad \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\ (k<1), \qquad e^{\alpha x}\ (\alpha<0), \qquad \frac{\cos x}{x}, \qquad \frac{\sin x}{x}$$

نمونه‌هایی از این دسته توابع هستند.

برخی از ویژگی‌های تابع اولیه(انتگرال نامعین)

از روی تعریف انتگرال نامعین دیده می‌شود که:

(1) مشتق یک انتگرال نامعین برابر است با تابع زیر علامت انتگرال، یعنی، اگر $F'(x) = f(x)$ آنگاه

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x) .$$

تساوی بالا بدین معنی است که مشتق هر تابع اولیه برابر با تابع زیر علامت انتگرال است.

(2)دیفرانسیل یک انتگرال نامعین مساوی با عبارت زیر علامت انتگرال است، یعنی

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx.$$

زیرا $d\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)\,dx\right)' dx = \left(F(x)+C\right)' dx = f(x)dx$.

(3) انتگرال نامعین دیفرانسیل یک تابع مساوی است با این تابع به اضافه یک مقدار ثابت، یعنی

$$\int d\left(F\left(x\right)\right)=F\left(x\right)+C.$$

زیرا $d(F(x))=F'(x)dx$ و لذا

$$\int d(F(x))=\int F'(x)\,dx=F(x)+C.$$

قضیه ۲: انتگرال نامعین حاصلجمع دو تابع مساوی با حاصلجمع انتگرال هایشان است، یعنی

$$\int\left(f_1(x)+f_2(x)\right)dx=\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)dx. \qquad (1)$$

اثبات. برای اثبات تساوی فوق، مشتق دو طرف این تساوی را محاسبه می‌کنیم. داریم

$$\left(\int\left(f_1(x)+f_2(x)\,dx\right)\right)'=f_1(x)+f_2(x)$$

و

$$\begin{aligned}\left(\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx\right)'&=\left(\int f_1(x)\,dx\right)'+\left(\int f_2(x)\,dx\right)'\\&=f_1(x)+f_2(x).\end{aligned}$$

بنابراین مشتق‌های دو طرف تساوی (1) با هم برابر هستند و لذا اختلاف آن‌ها فقط در یک عدد ثابت است. این همان درکی است که ما از تساوی (1) داریم.

قضیه ۳ : عامل ثابت را می‌توان از علامت انتگرال بیرون آورد،یعنی، اگر α عدد ثابتی باشد، آنگاه

$$\int\alpha f(x)dx=\alpha\int f(x)dx. \qquad (2)$$

اثبات. از دو طرف تساوی (2) مشتق می‌گیریم:

$$\left(\int\alpha f(x)\,dx\right)'=\alpha f(x)$$
$$\left(\alpha\int f(x)\,dx\right)'=\alpha\left(\int f(x)\,dx\right)'=\alpha f(x).$$

مشتق‌های طرف راست و طرف چپ مساوی هستند، بنابراین اختلاف آن‌ها تنها در یک عدد ثابت است.

وقتی انتگرال‌های نامعین را محاسبه می‌کنیم توجه به قوانین زیر سودمند خواهد بود:

(I) اگر $\int f(x)dx = F(x)+C$ آنگاه

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C. \qquad (3)$$

در حقیقت با مشتق‌گیری از طرفین (3) بدست می‌آوریم:

$$\left(\int f(ax)\,dx\right)' = f(ax)$$

و

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)_{ax}{}' \times a = F'(ax) = f(ax).$$

مشتق‌های دو طرف راست و چپ مساوی هستند و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

(II) اگر $\int f(x)dx = F(x)+C$ آنگاه

$$\int f(x+b)dx = F(x+b)+C. \qquad (4)$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (5)$$

درستی تساوی‌های (4) و (5) را می‌توان با مشتق‌گیری از طرفین هر کدام ثابت نمود.

مثال ۱: انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید:

(1) $\int\left(2x^3-3\sin x+5\sqrt{x}\right)dx$ $\qquad$ (2) $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx$

(3) $\int cos\,7x\,dx$ $\qquad$ (4) $\int \sin(2x-6)\,dx$.

حل. (1)

$$\int\left(2x^3-3\sin x+5\sqrt{x}\right)dx = \int 2x^3\,dx - \int 3\sin x\,dx + \int 5\sqrt{x}\,dx$$

$$= 2\int x^3\,dx - 3\int \sin dx + 5\int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=2\frac{x^{3+1}}{3+1}-3(-\cos x)+5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{1}{2}x^4+3\cos x+\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C.$$

$$\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+x\sqrt[4]{x}\right)dx=3\int x^{\frac{-1}{3}}\,dx+\frac{1}{2}\int x^{\frac{-1}{2}}\,dx+\int x^{\frac{5}{4}}\,dx \qquad (2)$$

$$=3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1}+C=\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}+C.$$

$$\int \cos 7\,xd=\frac{1}{7}\sin 7x+C\ . \qquad (3)$$

$$\int \sin(2x-6)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-6)+C\,. \qquad (4)$$

قضیه ۴ (قاعده زنجیری برای تابع اولیه): فرض کنیم g تابعی مشتق‌پذیر از x بوده و حوزه مقادیر g بازه‌ای مانند I باشد. فرض کنیم f تابعی باشد که بر I تعریف شده است و این که F یک تابع اولیه f بر I باشد.

دراین صورت اگر $u=g(x)$، آنگاه $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)+C=F(g(x))+C$

اثبات. چون $u=g(x)$ پس u در بازه I است ؛ و چون F یک تابع اولیه f بر I است، نتیجه می‌گیریم که $F'(u)=\frac{dF(u)}{du}=f(u)\quad,\quad \int f(u)du=F(u)+C$.

همچنین $\frac{dF(g(x))}{dx}=\frac{dF(u)}{dx}$. با بکار بردن قاعده زنجیری برای مشتق بدست می‌آوریم $\frac{dF(g(x))}{dx}=\frac{dF(u)}{du}.\frac{du}{dx}$، و لذا $\frac{dF(g(x))}{dx}=f(u).\frac{du}{dx}$. چون $u=g(x)$ ، خواهیم داشت $\frac{dF(g(x))}{dx}=f(g(x)).g'(x)$ که از آن نتیجه می‌گیریم

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx=F(g(x))+C.$$

بالاخره با استفاده از آنچه که گفته شد

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

نتیجه: با استفاده از قضیه بالا، فرض کنیم که g تابعی مشتق‌پذیر باشد. در این صورت اگر $u = g(x)$، آنگاه

$$\int [g(x)]^n g'(x)dx = \int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1}+C = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1}+C$$

که در آن $n \neq -1$.

مثال ۲: انتگرال‌های زیر بسادگی محاسبه می‌شوند:

$$\int t(5+3t^2)^8\, dt = \frac{1}{6}\int (5+3t^2)^8\, 6t dt = \frac{1}{6}.\frac{(5+3t^2)^9}{9}+C. \qquad (1)$$

$$\int x^2 \sqrt[5]{7-4x^3}\; dx = \frac{-1}{12}\int (7-4x^3)^{\frac{1}{5}}(-12x^2)dx \qquad (2)$$

$$= \frac{-5}{72}(7-4x^3)^{\frac{6}{5}}+C.$$

$$\int x^3\sqrt{x^4+5}\, dx = \frac{1}{4}\int (4x^3)\sqrt{x^4+5}\, dx = \frac{1}{4}.\frac{2}{3}(x^4+5)^{\frac{3}{2}}+C \qquad (3)$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{(x^4+5)^3}++C.$$

$$\int x^2 cos(x^3)dx = \int \frac{1}{3}(3x^2)cos(x^3)dx = \frac{1}{3}\sin(x^3)+C. \qquad (4)$$

جدول انتگرال‌ها

قبل از آنکه به بیان روشهای انتگرال‌گیری بپردازیم، جدول زیر را ارائه می‌دهیم که انتگرال ساده‌ترین توابع را بدست می‌دهد. برای اطمینان از درستی هر یک از فرمول‌ها اگر از طرف راست هر تساوی نسبت به x مشتق بگیریم تابع زیر علامت انتگرال در طرف چپ آن تساوی بدست خواهد آمد.

1. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\,(n\neq -1)$. (در اینجا و در فرمول‌های بعدی، C ثابت دلخواهی است.)

2. $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$.

3. $\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

4. $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-cotg\,x+C$.

7. $\int tg\,x\,dx=-\ln|\cos x|+C$.

8. $\int cotg\,x\,dx=\ln|\sin x|+C$.

9. $\int e^x\,dx=e^x+C$.

10. $\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2}=arctgx+C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

برای فرمول 7 داریم

$$\left(-\ln|\cos x|\right)'=-\frac{-\sin x}{\cos x}=tg\,x$$

در نتیجه، $\int tg\, x\, dx = -\ln|cos\, x| + C$.

برای فرمول 13 داریم

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|\right)' = \frac{1}{2a}\left[\ln|a+x| - \ln|a-x|\right]'$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right] = \frac{1}{a^2-x^2}$$

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$$

برای فرمول 16 داریم

$$\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|\right)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C.$$

روش‌های انتگرال‌گیری

در این بخش روش‌های مختلف انتگرال‌گیری را ارائه می‌دهیم. سعی ما بر این است که، تا حد امکان کلی‌ترین صورت هر روش بیان گردد، فایده این مطلب در آن است که در مواجه شدن با هر مسأله انتگرال نامعین تشخیص ما را، مبنی بر اینکه کدام روش یا روش‌ها بهتر می‌توانند نتیجه مطلوب را

بدست دهند، آسانتر می‌سازد. پس از بحث کلی در مورد هر روش، مثال‌های مختلفی آورده خواهد شد.

۵ . ۲ روش تغییر متغیر

فرض کنیم که هدف ما یافتن انتگرال نامعین

$$\int f(x)\,dx,$$

باشد و در عین حالی که نمی‌توانیم مستقیماً تابع اولیه $f(x)$ را پیدا کنیم اما می‌دانیم این تابع اولیه وجود دارد. متغیر عبارت زیر علامت انتگرال را، با قرار دادن

$$x=\varphi(t) \qquad (1)$$

عوض می‌کنیم که در آن $\varphi(t)$ تابعی پیوسته (با مشتق پیوسته) و دارای تابع وارون است. در این صورت $dx=\varphi'(t)\,dt$ ، ثابت خواهیم کرد که در این حالت معادله زیر را داریم:

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (2)$$

در اینجا فرض بر این است که بعد از انتگرال‌گیری، در سمت راست، بجای t مقدار آن را بر حسب x با استفاده از (1) قرار می‌دهیم.

برای اثبات این که عبارت‌های راست و چپ یکسان هستند، لازم است نشان دهیم که مشتق‌های آن دو نسبت به x با هم مساوی هستند. مشتق طرف چپ را پیدا می‌کنیم:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)_x' = f(x).$$

از طرف راست (2) به عنوان تابعی مرکب از x مشتق می‌گیریم، که در آن t متغیر واسطه است. بستگی t به x بوسیله (1) داده شده است، در اینجا $\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)$ و بنابر قاعده مشتق‌گیری تابع وارون،

$$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

لذا داریم
$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)_x' = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt\right)_t' \frac{dt}{dx}$$

$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t).\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

بنابراین مشتق‌های طرف‌های راست و چپ (2) نسبت به x با هم مساوی هستند و این همان است که می‌خواستیم.

تابع $x=\varphi(t)$ بایستی طوری انتخاب شود که محاسبه انتگرال نامعین در طرف راست (2) امکانپذیر باشد.

نکته: در هنگام انتگرال‌گیری، گاهی بهتر است که تغییر متغیر را به شکل $t=\psi(x)$ و نه $x=\varphi(t)$ انتخاب کنیم. به عنوان توضیح، فرض کنیم محاسبه انتگرالی به صورت

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$$

مورد نظر باشد. در اینجا مناسب است که قرار دهیم $\psi(x)=t$ و در این صورت $\psi'(x)dx=dt$.
بنابراین داریم

$$\int \frac{\psi'(x)\,dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

به مثال‌های زیر توجه نمائید.

مثال ۳: (i) $\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$ $\quad(ii)$ $\int \frac{x\,dx}{1+x^4}$ $\quad(iii)$ $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$

(iv) $\int \sec x\,dx$ $\quad(v)$ $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3cos^2 x}$

حل. (i) تغییر متغیر $t=\sin x$ می‌دهیم. داریم $dt = cos\,x\,dx$ و در نتیجه،

$$\int \sqrt{\sin x}\,cos\,x\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \int t^{\frac{1}{2}}\,dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x + C.$$

(ii) قرار می‌دهیم $t = x^2$ در این صورت $dt = 2x\,dx$ و

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} arc\,tg\, t + C = \frac{1}{2} arc\,tg\, x^2 + C.$$

(iii) قرار می دهیم $t = \ln x$؛ در این صورت $dt = \frac{dx}{x}$ و

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3\, dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}(\ln x)^4 + C.$$

(iv) می‌توان نوشت

$$\sec x = \sec x . \frac{\sec x + tg\, x}{\sec x + tg\, x} = \frac{\sec x\, tg\, x + \sec^2 x}{\sec x + tg\, x}.$$

دیده می‌شود که صورت آخرین کسر مشتق مخرجش است. پس با انتخاب $u = \sec x + tg\, x$ بدست می‌آوریم $du = (\sec x\, tg\, x + \sec^2 x)\,dx$ و بنابراین

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x\, tg\, x + \sec^2 x}{\sec x + tg\, x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sec x + tgx| + C.$$

(v)ابتدا صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال را بر $cos^2 x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{cos^2 x}}{2tg^2 x + 3}$$

و سپس در انتگرال بدست آمده تغییر متغیر $t = tg\, x$ می‌دهیم. لذا $dt = \frac{dx}{cos^2 x}$ و انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\int \frac{\frac{dx}{cos^2 x}}{2tg^2 x + 3} = \int \frac{dt}{2t^2 + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{3}{2} + t^2}$$

$$= \frac{1}{2} . \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} arc\,tg\left(\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{6}} arc\,tg\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, tg\, x\right) + C.$$

مثال ۴: (i) $\int \frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx$ $\quad(ii)$ $\int \frac{dx}{1+e^x}$

(iii) $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^4+3x^2+1)arctg\frac{x^2+1}{x}}$ $\quad(iv)$ $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}dx$

(v) $\int \frac{dx}{(\arccos x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

حل. (i) تغییر متغیر $t=\ln\frac{1+x}{1-x}$ را در نظر می‌گیریم. داریم $t=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ و لذا

$$dt=\left(\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}\right)dx=\frac{2dx}{1-x^2}.$$

بنابراین

$$\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{1+x}{1-x}\right)^2+C.$$

(ii) تغییر متغیر $1+e^x=t$ داده و نتیجه می‌گیریم که

$$e^x=t-1\,,\qquad x=\ln(t-1),\qquad dx=\frac{dt}{t-1}.$$

با جایگذاری در انتگرال داریم

$$\int\frac{dx}{1+e^x}=\int\frac{dt}{t(t-1)}=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\ln|t-1|-\ln|t|+C$$
$$=x-\ln(1+e^x)+C.$$

(iii) انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I=\int\frac{(x^2-1)\;dx}{(x^4+3x^2+1)\,arc\,tg\,\frac{x^2+1}{x}}=\int\frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+1\right]arc\,tg\left(x+\frac{1}{x}\right)}.$$

تغییر متغیر $x+\frac{1}{x}=t$ را در نظر گرفته و بدست می‌آوریم $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$ که از آنجا

$$I=\int\frac{dt}{(t^2+1)arctg\,t}.$$

مجدداً تغییر متغیر $arc\,tg\, t = u$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت $\frac{dt}{t^2+1} = du$ و

$$I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|arc\,tgt| + C = \ln\left|arc\,tg\left(x + \frac{1}{x}\right)\right| + C.$$

(iv) تغییر متغیر $x = \frac{1}{t}$ را در نظر گرفته و بدست می‌آوریم $dx = -\frac{dt}{t^2}$. بنابراین

$$I = \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx = -\int \frac{\sqrt{a^2 - \frac{1}{t^2}}}{\left(\frac{1}{t^4}\right) t^2} dt = -\int t\sqrt{a^2 t^2 - 1}\, dt.$$

بار دیگر تغییر متغیر می‌دهیم: $\sqrt{a^2 t^2 - 1} = z$،در این صورت $2a^2\, td\, t = 2z\, dz$ و

$$I = \frac{-1}{a^2}\int z^2\, dz = -\frac{1}{3a^2} z^3 + C = -\frac{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3a^2 x^3} + C.$$

(v) تغییر متغیر $arc\cos x = t$ می‌دهیم و داریم $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -dt$. پس

$$I = \int \frac{dx}{(arc\cos x)^5 \sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dt}{t^5} = \frac{1}{4}t^{-4} + C = \frac{1}{4(arc\cos x)^4} + C.$$

۵ . ۳ روش جزء به جزء

فرض کنیم u و υتوابعی دیفرانسیل‌پذیر از x باشند. در این صورت دیفرانسیل حاصلضرب $u\upsilon$ از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$d(u\upsilon) = ud\upsilon + \upsilon du$$

که از آنجا، با انتگرال‌گیری، داریم

$$u\upsilon = \int u\, d\upsilon + \int \upsilon\, du$$

یا

$$\int u\, d\upsilon = u\upsilon - \int \upsilon\, du. \qquad (1)$$

این فرمول به دستور **انتگرال‌گیری جزء به جزء** معروف است. بیشترین کاربرد آن در انتگرال‌گیری عبارت‌هایی است که می‌توان آن‌ها را به شکل حاصلضربی از دو عامل $u, d\upsilon$ نمایش داد به طریقی که پیدا نمودن تابع υ از روی دیفرانسیل آن $d\upsilon$، و محاسبه انتگرال $\int \upsilon\, du$، هر دو با هم، مسأله‌ای ساده‌تر از محاسبه مستقیم $\int ud\upsilon$ باشد. برای دست‌یابی به توانایی تجزیه درست عنصر انتگرال‌گیری به عامل‌های uو $d\upsilon$ بایستی به تعداد کافی مسأله حل نمود. به مثال‌های زیر می‌پردازیم.

مثال ۵: (i) $\int x\sin x dx$ $\quad (ii)$ $\int arc\,tg\, x dx$

(iii) $\int x^2 e^x\, dx$ $\quad (iv)$ $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$

(v) $I_1=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\ dx$ $\quad (vi)$ $I_2=\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$

(vii) $I=\int\left(x^2-2x+5\right)e^{-x}\,dx$.

حل. (i) فرض کنیم $u=x$ و $d\upsilon=\sin x\, dx$، در این صورت $du=dx$, $\upsilon=-cos\, x$. بنابراین

$$\int x\sin x\, dx=-x\, cos\, x+\int cos\, xdx=-x\cos x+\sin x+C.$$

(ii) با فرض $u=arc\,tg\, x$, $d\upsilon=dx$ داریم $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$ و $\upsilon=x$. لذا

$$\int arc\,tg\, xdx=xarc\,tg\, x-\int\frac{xdx}{1+x^2}=xarc\,tg\, x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

(iii) فرض کنیم $u=x^2$, $d\upsilon=e^x\,dx$؛ بنابراین $du=2x\,dx$, $\upsilon=e^x$،

$$\int x^2 e^x\,dx=x^2e^x-2\int xe^x\,dx.$$

مجدداً از روش جزء به جزء برای آخرین انتگرال استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $u_1=x$, $d\upsilon_1=e^x\,dx$،
در این صورت $du_1=dx$, $\upsilon_1=e^x$. لذا

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C_1.$$

بالاخره بدست می‌آوریم

$$\int x^2e^x\,dx=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x+C_1\right)=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C.$$

(iv) با ضرب صورت و مخرج تابع زیر علامت انتگرال در $\sqrt{a^2-x^2}$ داریم:

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$
$$=a^2\,arc\sin\frac{x}{a}-\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

آخرین انتگرال را به روش جزء به جزء محاسبه می‌نماییم. فرض کنیم $u=x$, $du=dx$
$d\upsilon=\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $\upsilon=-\sqrt{a^2-x^2}$. بنا براین

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-x\sqrt{a^2-x^2}+\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

با قرار دادن این نتیجه در عبارت بدست آمده برای انتگرال مفروض، داریم

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

یا

$$2I=a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}$$

و با توجه به تعریف انتگرال نامعین بالاخره بدست می‌آوریم

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(v) با استفاده از روش جزء به جزء بدست می‌آوریم

$$u=e^{\alpha x}\ ,\ du=\alpha e^{\alpha x}\,dx$$

$$d\upsilon=\cos\beta x\,dx\ ,\ \upsilon=\frac{1}{\beta}\sin\beta x$$

و لذا

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

مجددا روش جزء به جزء را برای آخرین انتگرال بکار می بریم:

$$u=e^{\alpha x}\ ,\ du=\alpha e^{\alpha x}\,dx$$

$$d\upsilon=\sin\beta x\,dx\ ,\ \upsilon=\frac{-1}{\beta}\cos\beta x.$$

با قرار دادن عبارت بدست آمده در معادله قبلی خواهیم داشت

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

از این معادله I_1 پیدا می‌کنیم

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=e^{\alpha x}\left(\frac{1}{\beta}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}\cos\beta x\right)+C\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$

که از آنجا

$$I_1=\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\beta\sin\beta x+\alpha\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

(vi) به طریق مشابه بدست می‌آوریم

$$I_2=\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx=\frac{e^{\alpha x}\left(\alpha\sin\beta x-\beta\cos\beta x\right)}{\alpha^2+\beta^2}+C.$$

(vii) فرض کنیم $u = x^2 - 2x + 5$, $d\upsilon = e^{-x}\,dx$ که از آنجا
$\upsilon = -e^{-x}$, $du = (2x-2)dx$.

لذا

$$I = \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) + 2\int (x-1)e^{-x}\,dx.$$

مجدداً روش جزء به جزء را برای آخرین انتگرال بکار می‌بریم. قرار می‌دهیم

$$u = x - 1 \qquad , \qquad d\upsilon = e^{-x}\,dx$$

که از آنجا

$$du = dx \qquad , \qquad \upsilon = -e^{-x}$$

و لذا

$$I_1 = 2\int (x-1)\; e^{-x}\,dx = -2e^{-x}\,(x-1) + 2\int e^{-x}\,dx = -2\,xe^{-x} + C.$$

بالاخره بدست می‌آوریم که

$$I = -e^{-x}(x^2 - 2x + 5) - 2\,xe^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 5) + C.$$

نکته: به عنوان نتیجه ای از مثال (vii) در بالا، برای محاسبه انتگرال‌هایی به شکل $\int P(x)e^{ax}\,dx$ که در آن $P(x)$ یک چند جمله‌ای است، جواب انتگرال را به صورت $Q(x)e^{ax}$ می‌گیریم که در آن $Q(x)$ یک چند جمله‌ای هم درجه با $P(x)$ و با ضرایب مجهول است، یعنی

$$\int P(x)e^{ax}\,dx = Q(x)e^{ax} + C.$$

برای یافتن ضرایب مجهول از دو طرف تساوی بالا نسبت به x مشتق گرفته و ضرایب قوای متناظر از x در دو طرف را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. بدین ترتیب یک دستگاه از معادلات خطی برای ضرایب مجهول بدست می‌آوریم که با حل آن ضرایب مجهول پیدا می‌شوند. این مطلب در مثال زیر توضیح داده شده است.

مثال ۶: مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int (3x^3 - 17)e^{2x}\,dx$.

حل. قرار می‌دهیم

$$\int (3x^3 - 17)e^{2x}\,dx = (Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + C.$$

با مشتق‌گیری از طرف‌های راست و چپ، بدست می‌آوریم

$$(3x^3 - 17)e^{2x} = 2(Ax^3 + Bx^2 + Dx + E)e^{2x} + e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + D).$$

با حذف e^{2x}، داریم

$$3x^3 - 17 = 2Ax^3 + (2B + 3A)x^2 + (2D + 2B)x + (2E + D).$$

ضرایب قوای متناظر از x در طرفین اتحاد بالا را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم

$$3=2A;\qquad 0=2B+3A$$
$$0=2D+2B;\quad -17=2E+D.$$

با حل دستگاه خواهیم داشت

$$A=\frac{3}{2};\quad B=-\frac{9}{4};\quad D=\frac{9}{4};\quad E=-\frac{77}{8}.$$

بنابراین

$$\int\left(3x^3-17\right)\ e^{2x}\,dx=\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{77}{8}\right)e^{2x}+C.$$

تبصره: روش بالا را، که به **روش ضرایب نامعین** معروف است، می‌توان برای انتگرال‌هایی به شکل

$$\int P(x)\sin ax\,dx \quad \text{و} \int P(x)\cos ax\,dx$$

نیز بکار برد.

توجه: در محاسبه تعدادی از انتگرال‌ها مجبور هستیم روش انتگرال‌گیری جزء به جزء را به دفعات متوالی بکار بریم. نتیجه را می‌توان سریعتر و به شکلی خلاصه‌تر با استفاده **فرمول تعمیم یافته برای انتگرال‌گیری جزء به جزء** بدست آورد:

$$\int u(x)\upsilon(x)\,dx=u(x)\upsilon_1(x)-u'(x)\upsilon_2(x)+u''(x)\upsilon_3(x)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}u^{(n-1)}\upsilon_n(x)+(-1)^n\int u^{(n)}(x)\upsilon_n(x)\,dx$$

که در آن

$$\upsilon_1(x)=\int\upsilon(x)\,dx;\qquad \upsilon_2(x)=\int\upsilon_1(x)\,dx;\ldots;\qquad \upsilon_n(x)=\int\upsilon_{n-1}(x)\,dx.$$

در اینجا، البته، فرض می‌کنیم که کلیه مشتقات و انتگرال‌ها که در این فرمول ظاهر می‌شوند وجود داشته باشند.

استفاده از فرمول تعمیم یافته برای انتگرال‌گیری جزء به جزء به ویژه سودمند است وقتی که انتگرال $\int P_n(x)\varphi(x)\,dx$ را محاسبه می‌کنیم که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای درجه n بوده و عامل $\varphi(x)$ به طریقی است که می‌توان $n+1$ بار متوالی از آن انتگرال گرفت. به عنوان مثال،

$$\int P_n(x)e^{kx}\,dx=P_n(x)\frac{e^{kx}}{k}-P_n'(x)\frac{e^{kx}}{k^2}+\ldots+(-1)^nP_n^{(n)}(x)\frac{e^{kx}}{k^{n+1}}+C=$$
$$=e^{kx}\left[\frac{P_n(x)}{k}-\frac{1}{k^2}P_n'(x)+\ldots+\frac{(-1)^n}{k^{n+1}}P_n^{(n)}(x)\right]+C.$$

مثال ۷: با استفاده از فرمول تعمیم یافته برای انتگرال گیری جزء به جزء ، انتگرال‌های زیر را پیدا کنید:

(a) $\int\left(x^3-2x^2+3x-1\right)cox\,2x\,dx$ ،

(b) $\int\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}\,dx$.

حل. (a) داریم

$$\int\left(x^3-2x^2+3x-1\right)cos\,2x\,dx=\left(x^3-2x^2+3x-1\right)\frac{\sin 2x}{2}-\left(3x^2-4x+3\right)\left(-\frac{cos\,2x}{4}\right)$$

$$+\left(6x-4\right)\left(-\frac{\sin 2x}{8}\right)-6\frac{\cos 2x}{16}+C$$

$$=\frac{\sin 2x}{4}\left(2x^3-4x^2+3x\right)+\frac{cos\,x}{8}\left(6x^2-8x+3\right)+C.$$

(b) داریم

$$\int\left(2x^3+6x^2-8x+1\right)\sqrt{2x+6}\,dx=$$

$$=\left(2x^3+3x^2-8x+1\right)\frac{(2x+6)^{\frac{3}{2}}}{3}-\left(6x^2+6x-8\right)\frac{(2x+6)^{\frac{5}{2}}}{3.5}+$$

$$+(12x+6)\frac{(2x+6)^{\frac{7}{2}}}{3.5.7}-12\frac{(2x+6)^{\frac{9}{2}}}{3.5.7.9}+C=$$

$$\frac{\sqrt{2x+6}}{5.7.9}(2x+6)\left(70x^3-45x^2-399x+897\right)+C.$$

۵ . ۴ انتگرال بعضی توابع شامل سه جمله‌های درجه دوم

1 . انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

ابتدا سه جمله‌ای مخرج را به صورت حاصلجمع یا تفاصل دو مربع نمایش می‌دهیم:

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]$$

که در آن $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=\pm k^2$.
علامت به اضافه یا منها بستگی به این دارد که عبارت طرف چپ مثبت یا منفی باشد، یعنی، ریشه‌های سه جمله‌ای ax^2+bx+c مختلط یا حقیقی باشند. توجه کنید که $\Delta=b^2-4ac\neq 0$ فرض می‌شود زیرا در غیر این صورت $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2$ (α ریشه مضاعف) و انتگرال به سادگی قابل محاسبه است.
بنابراین، انتگرال I_1 شکل زیر را خواهد داشت:

$$I_1=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right]}.$$

در این انتگرال تغییر متغیر $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$ داده و بدست می‌آوریم

$$I_1=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$$

اما این‌ها انتگرال‌های 12 و 13 در جدول انتگرال‌ها هستند.

مثال ۸: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}.$$

حل. داریم

$$I=\int\frac{dx}{2x^2+8x+20}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+10}$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+4x+4+10-4}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+2)^2+6}.$$

تغییر متغیر $x+2=t$, $dx=dt$ می‌دهیم و داریم

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+6}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}arctg\frac{t}{\sqrt{6}}+C=\frac{1}{2\sqrt{6}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{6}}+C.$$

II. انتگرالی به شکل کلیتر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx.$$

سعی می‌کنیم به نوعی مشتق مخرج کسر در صورت ظاهر شود:

$$I_2=\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}dx.$$

انتگرال طرف راست را به صورت حاصلجمع دو انتگرال نمایش می‌دهیم

$$I_2=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

دومین انتگرال در تساوی بالا همان I_1 است که قبلاً محاسبه گردید. در اولین انتگرال تغییر متغیر

$$ax^2+bx+c=t\ ,\qquad (2ax+b)\,dx=dt$$

داده و بدست می‌آوریم

$$\int\frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|ax^2+bx+c\right|+C.$$

بالاخره خواهیم داشت

$$I_2=\frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right|+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1.$$

مثال ۹: مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx.$$

حل. با بکار بردن روش بالا داریم

$$\begin{aligned}I=\int\frac{x+3}{x^2-2x-5}dx&=\int\frac{\frac{1}{2}(2x-2)+\left(3+\frac{1}{2}2\right)}{x^2-2x-5}dx\\&=\frac{1}{2}\int\frac{(2x-2)dx}{x^2-2x-5}+4\int\frac{dx}{x^2-2x-5}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+4\int\frac{dx}{(x-1)^2+6}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x-5\right|+2\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|+C.\end{aligned}$$

III. انتگرال زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_3=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

همانطور که در I دیدیم، $ax^2+bx+c=a\left[t^2\pm k^2\right]$. دو حالت در نظر می‌گیریم؛

اولاً اگر $a>0$ آنگاه $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\sqrt{t^2\pm k^2}$

و $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm k^2}}$ در شماره 16 جدول انتگرال‌ها آمده است. ثانیاً اگر $a<0$ آنگاه

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{-a}\sqrt{\pm k^2-t^2}=\sqrt{-a}\sqrt{k^2-t^2}$$

(توجه کنید که در $\sqrt{-k^2-t^2}$ عبارت زیر رادیکال همواره منفی است و از بحث ما خارج است) و $\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$ در شماره 15 جدول انتگرال‌ها آمده است.

IV. انتگرالی به شکل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$I_4=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

مشابه آنچه در II انجام دادیم؛

$$\begin{aligned} I_4&=\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \\ &=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,. \end{aligned}$$

با استفاده از تغییر متغیر $ax^2+bx+c=t\,,\,(2ax+b)dx=dt$ در اولین انتگرال طرف راست تساوی بالا بدست می‌آوریم

$$\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int \frac{dt}{\sqrt{t}}+C=2\sqrt{ax^2+bx+c}+C.$$

دومین انتگرال طرف راست تساوی بالا همان III است.

مثال ۱۰: مطلوبست محاسبه انتگرال

$$I=\int \frac{(5x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,.$$

حل. داریم

$$\begin{aligned} I&=\int \frac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)+(3-10)}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx \\ &=\frac{5}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+4x+10}}\,dx-7\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+6}} \end{aligned}$$

$$= 5\sqrt{x^2+4x+0} - 7\ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + C.$$

تبصره: (1) انتگرال $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ را، که در آن $P_n(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است، در نظر می‌گیریم. برای حل این انتگرال تساوی زیر را می‌نویسیم

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

که در آن $Q_{n-1}(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه $n-1$ است. اگر از دو طرف این تساوی نسبت به x مشتق گرفته و حاصل را در $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ضرب کنیم اتحاد

$$P_n(x) = Q'_{n-1}(x)\left(ax^2+bx+c\right) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2ax+b) + k$$

را بدست می‌آوریم. با مساوی قرار دادن ضرایب قوای متناظر x در دو طرف تساوی فوق یک دستگاه از $n+1$ معادله خطی برای یافتن ضرایب مجهول چند جمله‌ای $Q_{n-1}(x)$ و عامل k پیدا می‌کنیم.

(2) انتگرال $\int \frac{dx}{(x-x_1)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$ را در نظر می‌گیریم. برای حل این انتگرال تغییر متغیر

$$x - x_1 = \frac{1}{t}$$

می‌دهیم و به انتگرالی مشابه آنچه که در این قسمت دیده‌ایم می‌رسیم.

مثال ۱۱. انتگرال‌های زیر را حل کنید:

(i) $I = \int \frac{(x^3-x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\qquad$ (ii) $I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$

(iii) $I = \int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx$ $\qquad$ (iv) $I = \int \sqrt{4x^2-4x+3}\,dx$.

حل. (i) در اینجا $P_n(x) = x^3-x-1$. بنابراین $Q_{n-1}(x) = Ax^2+Bx+D$.

انتگرال را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I = \int \frac{x^3-x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \left(Ax^2+Bx+D\right)\sqrt{x^2+2x+2} + k\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

با مشتق‌گیری از این تساوی، بدست می‌آوریم

$$I' = \frac{x^3 - x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 + 2x + 2}$$
$$+ \left(Ax^2 + Bx + D\right)\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{k}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \quad .$$

طرفین تساوی بالا را در $\sqrt{x^2+2x+2}$ ضرب کرده و بدست می آوریم

$$x^3 - x - 1 = (2Ax + B)\left(x^2 + 2x + 2\right) + \left(Ax^2 + Bx + D\right)(x+1) + k .$$

اگر ضرایب قوای متناظر از x در دو طرف تساوی فوق را مساوی هم قرار دهیم ، آنگاه داریم

$$2A + A = 1 \qquad , \qquad B + 4A + B + A = 0$$
$$2B + 4A + D + B = -1 \ , \quad 2B + D + k = -1 .$$

با حل دستگاه بدست می‌آوریم $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{5}{6}, D = \frac{1}{6}, k = \frac{1}{2}$.

بنابراین

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

که در آن

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2 + 1}} = \ln\left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}\right| + C .$$

(ii) با قرار دادن $x - 1 = \frac{1}{t}$ بدست می‌آوریم $x = \frac{1}{t} + 1$ و $dx = \frac{-1}{t^2}\,dt$. در نتیجه،

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1 + \frac{1}{t}\right)^2 + 2\left(1 + \frac{1}{t}\right) + 3}}$$
$$= -\int \frac{dt}{t\sqrt{-1 - \frac{2}{t} - \frac{1}{t^2} + 2 + \frac{2}{t} + 3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2 - 1}}$$
$$= \frac{-1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left|t + \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}}\right| + C$$
$$= \frac{-1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1} + \sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 - \frac{1}{4}}\right| + C = \frac{-1}{2}\ln\left|\frac{2 + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}}{2(x-1)}\right| + C .$$

(iii) داریم

$$I=\int\frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}\,dx=3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}}-\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}.$$

اولین انتگرال طرف راست از نوع I_1 است و در دومین انتگرال تغییر متغیر $x+1=\frac{1}{t}$ می‌دهیم:

$$\begin{aligned}I&=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{(\frac{1}{t}-1)^2+3(\frac{1}{t}-1)+3}}\\&=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}\\&=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C\\&=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

(iv) انتگرال را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم.

$$I=\int\frac{4x^2-4x+3}{\sqrt{4x^2-4x+3}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{4x^2-4x+3}+k\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+3}}.$$

با استفاده از روشی که در تبصره بالا (1) بیان نمودیم بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}I&=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+2}}=\\&=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)\sqrt{4x^2-4x+3}+\frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right|+C.\end{aligned}$$

۵ . ۵ انتگرال‌گیری از کسرهای منطق

هر تابع منطق را می‌توان به شکل یک کسر منطق نمایش داد، یعنی، به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}.$$

بدون این که به کلیت استدلال خللی وارد می‌شود، فرض می‌کنیم که این چند جمله‌ای‌ها دارای ریشه مشترک نباشند.

اگر درجه صورت کمتر از درجه مخرج باشد، آنگاه کسر را **حقیقی** نامیده و در غیر این صورت (یعنی، اگر درجه صورت بزرگتر یا مساوی با درجه مخرج باشد) کسر را **غیر حقیقی** می‌گویند. اگر

یک کسر غیر حقیقی داشته باشیم، آنگاه با تقسیم صورت بر مخرج می‌توان کسر را به صورت حاصلجمع یک چند جمله‌ای و یک کسر حقیقی نمایش داد:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)}.$$

در اینجا $M(x)$ یک چند جمله‌ای و $\frac{F(x)}{f(x)}$ یک کسر حقیقی است. به عنوان مثال، کسر غیر حقیقی

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}$$

را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=\left(x^2-2x+3\right)-\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$$

چون انتگرال‌گیری از چند جمله‌ای‌ها کار آسانی است، مسئله اساسی در انتگرال‌گیری از کسرهای منطق به انتگرال‌گیری از کسرهای منطق حقیقی بر می‌گردد.

تعریف: کسرهای حقیقی منطق به شکل:

I. $\frac{A}{x-a}$،

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است)،

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (ریشه‌های مخرج مختلط هستند، یعنی، $\frac{p^2}{4}-q<0$)،

IV. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ (k عددی طبیعی و بزرگتر از 1 است، ریشه‌های مخرج مختلط هستند)

کسرهای منطق جزئی از نوع‌های I, II, III و IV نامیده می‌شوند.

در ادامه مطلب ثابت خواهد شد که هر کسر منطق را می‌توان به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نوشت. بنابراین در ابتدا به بررسی انتگرال کسرهای منطق جزئی می‌پردازیم. انتگرال‌گیری از کسرهای منطق جزئی نوع I, II, III متضمن مشکلی نیستند و لذا بدون هیچ توضیحی این کار را انجام می‌دهیم:

I. $$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a|+C.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,dx = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C$$

$$= \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

.III
$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\, arc\,tg\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q+p^2}} + C.$$

انتگرال‌گیری از کسرهای منطق نوع IV به محاسبات بیشتری نیاز دارد. فرض کنیم انتگرالی از این نوع داشته باشیم:

.IV
$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

تبدیل‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

اولین انتگرال را با استفاده از تغییر متغیر $(2x+p)dx = dt\,,\, x^2+px+q = t$ حل می‌کنیم:

$$\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \int \frac{dt}{t^k} = \int t^{-k}\,dt = \frac{t^{-k+1}}{1-k} + C$$

$$= \frac{1}{(1-k)\left(x^2+px+q\right)^{k-1}} + C.$$

دومین انتگرال را (که با I_k نمایش می‌دهیم) با قرار دادن $x+\frac{p}{2} = t\,,\, dx = dt\,,\, q-\frac{p^2}{4} = m^2$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$I_k = \int \frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \int \frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}$$

(فرض شده است که ریشه‌های مخرج مختلط هستند، و بنابراین $q-\frac{p^2}{4}>0$).

خواهیم داشت

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{m^2}\int\frac{\left(t^2+m^2\right)-t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}dt$$
$$=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{1}{m^2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+m^2\right)^k}. \qquad (1)$$

در آخرین انتگرال تصرف نموده و می‌نویسیم:

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\int\frac{t.t\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=\frac{1}{2}\int t\frac{d\left(t^2+m^2\right)}{\left(t^2+m^2\right)^k}=-\frac{1}{2\left(k-1\right)}\int td\left(\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right).$$

با انتگرای‌گیری جزء به جزء بدست می‌آوریم

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+m^2\right)^k}=-\frac{1}{2\left(k-1\right)}\left[t\frac{1}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right].$$

با قرار دادن این عبارت (1) داریم

$$I_k=\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)}=\frac{1}{m^2}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}$$
$$+\frac{1}{m^2}\frac{1}{2(k-1)}\left[\frac{t}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}\right]$$
$$=\frac{t}{2m^2(k-1)\left(t^2+m^2\right)^{k-1}}-\frac{2k-3}{2m^2(k-1)}\int\frac{dt}{\left(t^2+m^2\right)^{k-1}} \quad .$$

در طرف راست انتگرالی از همان نوع I_k، اما با توانی یک واحد کمتر در مخرج تابع زیر علامت انتگرال $(k-1)$، را داریم: بنابراین ما I_k را بر حسب I_{k-1} بیان نمودیم. اگر این روش را ادامه دهیم بالاخره به انتگرال آشنای

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+m^2}=\frac{1}{m}arc\,tg\frac{t}{m}+C$$

می‌رسیم. پس از آن با قرار دادن مقادیر متناظر با m و t هر کجا که ظاهر شده‌اند انتگرال IV را بر حسب x و اعداد مفروض q,p,B,A بدست می‌آوریم.

مثال ۱۲: مطلوبست محاسبه انتگرال $I=\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$.

حل. داریم

$$I=\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)+(-1-1)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}$$
$$=\frac{-1}{2}\frac{1}{\left(x^2+2x+3\right)}-2\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}.$$

در آخرین انتگرال تغییر متغیر $x+1=t$ می‌دهیم:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\int\frac{dx}{\left[(x+1)^2+2\right]^2}=\int\frac{dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(t^2+2\right)-t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\left(t^2+2\right)^2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}.$$

به حل آخرین انتگرال می‌پردازیم:

$$\int\frac{t^2\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}=\int t.\frac{t\,dt}{\left(t^2+2\right)^2}$$
$$\begin{cases}u=t\\ dv=\dfrac{t\ dt}{\left(t^2+2\right)^2}\end{cases},\qquad\begin{cases}du=dt\\ v=-\dfrac{1}{2\left(t^2+2\right)}.\end{cases}$$

بنابراین

$$\int t.\frac{tdt}{\left(t^2+2\right)^2}=-\frac{1}{2}\frac{t}{t^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2}$$
$$=-\frac{t}{2\left(t^2+2\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

در نتیجه

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+3\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}$$
$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{x+1}{2\left(x^2+2x+3\right)}+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right].$$

بالاخره بدست می‌آوریم

$$\int\frac{x-1}{\left(x^2+2x+3\right)^2}dx=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)^2}-\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

تجزیه یک کسر منطق به حاصلجمع کسرهای منطق جزئی

اکنون نشان می‌دهیم که هر کسر منطق حقیقی را می‌توان به حاصلجمع کسرهای منطق جزئی تجزیه نمود. فرض کنیم کسر منطق $\frac{F(x)}{f(x)}$ را داشته باشیم که در آن ضرایب چند جمله‌ای‌ها اعداد حقیقی بوده و صورت و مخرج کسر ریشه مشترک ندارند.

قضیه ۵: فرض کنیم $x=a$ یک ریشه حقیقی مکرر از مرتبه k از مخرج کسر باشد، یعنی $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$ که در آن $f_1(a)\neq 0$. در این صورت کسر حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو کسر حقیقی به صورت زیر نوشت:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}f_1(x)} \qquad (1)$$

که در آن A ثابتی غیر صفر بوده و $F_1(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن کمتر از درجه مخرج $(x-a)^{k-1}\ f_1(x)$ می‌باشد.

اثبات. اتحاد زیر را می‌نویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{F(x)-Af_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)} \qquad (2)$$

(که برای هر A درست است) و فرض کنیم ثابت A را چنان تعریف کرده باشیم که چند جمله‌ای $F(x)-Af_1(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد. برای انجام این کار، لازم و کافی است که معادله زیر برقرار باشد:

$$F(a)-A\,f_1(a)=0\,.$$

چون $f_1(a)\neq 0$, $A, F(a)\neq 0$ به صورت منحصر به فرد با $A=\frac{F(a)}{f_1(a)}$ تعریف می‌گردد.

برای این مقدار A خواهیم داشت

$$F(x)-Af_1(x)=(x-a)F_1(x)$$

که در آن $F_1(x)$ یک چند جمله‌ای با درجه کمتر نسبت به چند جمله‌ای $(x-a)^{k-1}\ f_1(x)$ می‌باشد. با حذف عامل $(x-a)$ از صورت و مخرج (2) تساوی (1) را بدست می‌آوریم.

نتیجه: استدلال مشابهی را می‌توان برای کسر منطق حقیقی

$$\frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1}\ f_1(x)}$$

در معادله (۱) بکار برد. بنابراین، اگر مخرج کسر دارای ریشه $x=a$ مکرر از مرتبه k باشد، می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^k}+\frac{A_1}{(x-a)^{k-1}}+\dots+\frac{A_{k-1}}{x-a}+\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$$

که در آن $\frac{F_k(x)}{f_1(x)}$ کسر حقیقی منطقی است که صورت و مخرج آن ریشه مشترک ندارند. برای این کسر می‌توانیم قضیه بالا را بکار ببریم به شرط آنکه $f_1(x)$ دارای ریشه‌های حقیقی دیگری باشد.

اکنون به بررسی حالت ریشه‌های مختلط مخرج می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که ریشه‌های مختلط یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی دو بدو به صورت مزدوج ظاهر می‌گردند. وقتی یک چند جمله‌ای را به عامل‌های حقیقی تجزیه می‌کنیم، به هر زوج (مزدوج) از ریشه‌های مختلط چند جمله‌ای عبارتی به شکل x^2+px+q متناظر می‌گردد. اما اگر ریشه‌های مختلط با تکرار از مرتبه μ باشند، آن‌ها با عبارت $\left(x^2+px+q\right)^{\mu}$ متناظر می‌گردند.

قضیه ۶: اگر $f(x)=\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\varphi_1(x)$، که در آن چند جمله‌ای $\varphi_1(x)$ بر x^2+px+q بخش پذیر نیست، آنگاه کسر حقیقی منطق $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت حاصلجمع دو کسر حقیقی دیگر به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{\phi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)} \quad (3)$$

که در آن $\phi_1(x)$ یک چند جمله‌ای است که درجه آن کمتر از درجه چند جمله‌ای $\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)$ می‌باشد.

اثبات. اتحاد زیر را می‌نویسیم

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{F(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\varphi_1(x)}=\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\varphi_1(x)} \quad (4)$$

که برای هر N,M برقرار است، فرض می‌کنیم N,M را چنان تعریف کرده باشیم که چند جمله‌ای $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ بر x^2+px+q بخش‌پذیر باشد. برای این کار، لازم و کافی است که معادله

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=0$$

دارای ریشه‌های $\alpha\pm i\beta$، یعنی همان چند جمله‌ای x^2+px+q باشد. لذا،

$$F(\alpha+i\beta)-\left[M(\alpha+i\beta)+N\right]\varphi_1(\alpha+i\beta)=0$$

یا

$$M(\alpha+i\beta)+N=\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}.$$

اما $\frac{F(\alpha+i\beta)}{\varphi_1(\alpha+i\beta)}$ عدد مختلط مشخصی است که می‌توان آن را به صورت $K+iL$ نوشت، که در آن L,K اعداد حقیقی معینی هستند. بنابراین،

$$M(\alpha+i\beta)+N=K+iL$$

که از آنجا

$$M\alpha+N=K\ ,M\beta=L$$

یا

$$M=\frac{L}{\beta},N=\frac{K\beta-L\alpha}{\beta}.$$

با این مقادیر برای ضرایب N,M چند جمله‌ای $F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)$ دارای ریشه $\alpha+i\beta$ است، بنابراین مزدوج آن $\alpha-i\beta$ نیز ریشه این چند جمله‌ای است. اما در این صورت چند جمله‌ای را می‌توان، بدون باقیمانده، بر تفاضل‌های $x-(\alpha+i\beta)$, $x-(\alpha-i\beta)$ و بنابراین بر حاصلضرب آن‌ها، که x^2+px+q می‌باشد، تقسیم نمود. خارج قسمت این تقسیم را با $\phi_1(x)$ نشان داده و بدست می‌آوریم

$$F(x)-(Mx+N)\varphi_1(x)=\left(x^2+px+q\right)\phi_1(x).$$

در آخرین کسر (4) از صورت و مخرج x^2+px+q را حذف کرده و (3) را بدست می‌آوریم و بدیهی است که درجه $\phi_1(x)$ از درجه مخرج کمتر است. بدین ترتیب قضیه ثابت شده است

اکنون برای کسر حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ نتایج قضیه های ۵ و ۶ را بطور متوالی، بکار می‌بریم و کلیه کسرهای منطق جز ئی متناظر به تمامی ریشه‌های مخرج $f(x)$ را بدست می‌آوریم. بنابراین از آنچه گفته شد نتیجه می‌گیریم که اگر

$$f(x)=(x-a)^{\alpha}...(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\mu}...\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon}$$

آنگاه کسر $\frac{F(x)}{f(x)}$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+...+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a}+ \tag{5}$$

....

$$+\frac{B}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}}+\ldots+\frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$+\frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+$$

....

$$+\frac{Px+Q}{\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon}}+\frac{P_1x+Q_1}{\left(x^2+lx+s\right)^{\upsilon-1}}+\ldots+\frac{P_{\upsilon-1}x+Q_{\upsilon-1}}{x^2+lx+s}.$$

ضرایب $A, A_1, \ldots, B, B_1, \ldots$ را می‌توان به روش زیر پیدا نمود:
تساوی (5)در حقیقت یک اتحاد است، و به این دلیل با ضرب طرفین آن در $f(x)$ به یک تساوی می‌رسیم که طرف‌های چپ و راست آن چند جمله‌ای‌هائی در x است. با مساوی هم قراردادن ضرایب قوای متناظر x در دو طرف تساوی، دستگاهی از معادلات خطی برای ضرایب مجهول $A, A_1, \ldots B, B_1, \ldots$ بدست می‌آوریم. این روش پیدا کردن ضرایب به **روش ضرایب نامعین** معروف است.

علاوه بر روش ضرایب نامعین می‌توان از روش زیر هم استفاده نمود:

به دلیل آنکه چند جمله‌ای‌های بدست آمده در طرف‌های راست و چپ معادله بایستی پس از حذف مخرج‌ها به طور یکسان مساوی باشند، مقادیر آن‌ها برای هر مقدار خاص از x با هم مساوی است.
با فرض مقادیر خاصی برای x (و از جمله ریشه‌های $f(x)$) معادله‌هایی برای پیدا کردن ضرایب بدست می‌آوریم.
بنابراین مشاهده می‌کنیم که هر کسر حقیقی منطق را می‌توان به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نمایش داد. اکنون هدف ما محاسبه انتگرال کسر منطق $\frac{Q(x)}{f(x)}$؛ یعنی، انتگرال

$$\int\frac{Q(x)}{f(x)}dx$$

است. اگر کسر داده شده غیر حقیقی باشد، آن را به صورت حاصلجمع یک چند جمله‌ای $M(x)$ و کسر منطق حقیقی $\frac{F(x)}{f(x)}$ نشان می‌دهیم. کسر اخیر را می‌توان، با استفاده از فرمول (5)، به صورت حاصلجمعی از کسرهای منطق جزئی نوشت.

بنابراین انتگرال‌گیری از یک کسر منطق به انتگرال‌گیری از یک چند جمله‌ای و کسرهای منطق جزئی متعدد تبدیل می‌گردد. می‌دانیم که شکل کسرهای منطق بوسیله ریشه‌های مخرج آن‌ها تعیین می‌گردد. به مثال‌های زیر توجه نمایید.

مثال ۱۳: انتگرال‌های زیر را محاسبه نمائید:

$$(i)\quad \int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx \qquad\qquad (ii)\quad \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}$$

$$(iii)\quad \int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+B}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx.$$

حل. (i) مخرج کسر زیر علامت انتگرال، یعنی $f(x)=(x+1)^3(x-2)$ دارای ریشه ساده 2 و ریشه مکرر مرتبه سوم -1 می‌باشد. بنابراین کسر به شکل زیر تجزیه می‌گردد:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}.$$

اگر طرفین تساوی بالا را در مخرج کسر طرف چپ ضرب کنیم، داریم

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3 \qquad (6)$$

یا

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

با مساوی هم قراردادن ضرایب x^0, x^1, x^2, x^3 (جمله ثابت) در دو طرف تساوی بالا دستگاه معادلات خطی زیر را برای تعیین ضرایب بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 0=A_2+B \\ 1=A_1+3B \\ 0=A-A_1-3A_2+3B \\ 2=-2A-2A_1-2A_2+B. \end{cases}$$

با حل این دستگاه داریم

$$A=-1\,; \qquad A_1=\frac{1}{3}; \qquad A_2=-\frac{2}{9}; \qquad B=\frac{2}{9}.$$

بنابراین

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx &= -\int \frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{2}{9}\int \frac{dx}{x-2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C \\ &= -\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

(ii) مخرج کسر زیر علامت انتگرال از حاصلضرب دو عامل تشکیل شده است، یکی $x-1$ و دیگری عبارت x^2+1 که دارای ریشه حقیقی نیست. بنابراین تجزیه زیر را داریم:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}.$$

در نتیجه

$$x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1).$$

قرار می‌دهیم $x=1$ و بدست می‌آوریم $1=2C$, $C=\frac{1}{2}$. قرار می‌دهیم $x=0$ و بدست می‌آوریم $0=-B+C$ و لذا $B=\frac{1}{2}$. ضرایب x^2 را مساوی هم قرار داده و بدست می‌آوریم $0=A+C$، که از آنجا $A=\frac{-1}{2}$.

بنابراین

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}$$
$$=-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}\,arctg\,x+\frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|+C.$$

(iii) مخرج کسر زیر علامت انتگرال از دو عامل تشکیل شده است، یکی $x+1$ که ریشه حقیقی ساده $x=-1$ را بدست می‌دهد و دیگری توان دوم سه جمله‌ای x^2+2x+3 که دارای ریشه حقیقی نمی‌باشد. بنابراین تجزیه زیر را داریم:

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)}+\frac{E}{x+1}$$

که از آنجا

$$x^4+4x^3+11x^2+12x+8$$
$$=(Ax+B)(x+1)+(Cx+D)(x^2+2x+3)(x+1)+E(x^2+2x+3)^2.$$

با ترکیبی از روش‌های گفته شده برای یافتن ضرایب، خواهیم داشت

$$A=1,\qquad B=-1,\qquad C=0,\qquad D=0,\qquad E=1.$$

لذا بدست می‌آوریم

$$\int\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx=\int\frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2}dx+\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=-\frac{x+2}{2\left(x^2+2x+3\right)}-\frac{\sqrt{2}}{4}\,arctg\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\ln|x+1|+C.$$

اولین انتگرال طرف راست همان مثال ۱۲ است. دومین انتگرال به طور مستقیم محاسبه شده است.

مثال ۱۴: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

(i) $\int\frac{dx}{x^5-x^2}$ $\qquad$ (ii) $\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$

(iii) $\int\frac{dx}{x^4+1}$ $\qquad$ (iv) $\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.

حل. (i) مخرج کسر زیر علامت انتگرال را تجزیه می‌کنیم:

$$x^5-x^2=x^2\left(x^3-1\right)=x^2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right).$$

بنابراین

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{1}{x^2\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}.$$

طرفین تساوی بالا را در x^5-x^2 ضرب می‌کنیم:

$$1=A\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+Bx\left(x-1\right)\left(x^2+x+1\right)+Cx^2\left(x^2+x+1\right)+\left(Dx+E\right)x^2\left(x-1\right).$$

ریشه‌های حقیقی مخرج اعداد $1,0$ هستند.

برای $x=0$ داریم $1=-A$، یعنی $A=-1$. برای $x=1$ داریم $1=3C$، یعنی $C=\frac{1}{3}$.

تساوی بالا را مجدداً بصورت زیر می‌نویسیم:

$$1=A\left(x^3-1\right)+B\left(x^4-x\right)+C\left(x^4+x^3+x^2\right)+Dx^4+Ex^3-Dx^3-Ex^2.$$

با مقایسه ضرایب x^2, x^3, x^4 در دو طرف تساوی اخیر به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ A+C+E-D=0 \\ C-E=0 \end{cases}$$

که از آن بدست می‌آوریم $B=0$, $D=-\frac{1}{3}$, $E=\frac{1}{3}$. بنابراین داریم

$$\frac{1}{x^5-x^2}=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x-1}{3\left(x^2+x+1\right)}.$$

در نتیجه

$$\int\frac{dx}{x^5-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\int \frac{(2x+1)-3}{x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{\left|x^2+x+1\right|} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, arctg\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.
\end{aligned}
$$

(ii) تابع زیر علامت انتگرال یک کسر منطق غیر حقیقی است. با استفاده از تقسیم چند جمله‌ای ها داریم

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = (x+3) + \frac{3x+1}{x^2+2}.$$

بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}\,dx = \int \left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx \\
&= \int x\,dx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2} + \int \frac{dx}{x^2+2} \\
&\qquad = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}
$$

(iii) به دلیل آنکه $x^4+1 = \left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)$، تجزیه کسر زیر علامت انتگرال خواهد شد:

$$\frac{1}{\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

یا

$$1 = (Ax+B)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)$$

یا

$$1 = (A+C)x^3 + \left(B+D-\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C\right)x^2 + \left(A+C-\sqrt{2}\,B+\sqrt{2}\,D\right)x + (B+D)$$

و پس از محاسبات لازم بدست می‌آید

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}, \qquad C = \frac{-\sqrt{2}}{4}, \qquad B = D = \frac{1}{2}.$$

بنابراین

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx + \int \frac{\frac{-\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,dx\,.$$

انتگرال‌های بالا بسادگی قابل حل هستند و به عنوان مثال اولین انتگرال را حل می‌کنیم.

$$\int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{\frac{1}{2}\left(2x+\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}dx+\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|x^2+\sqrt{2}\,x+1\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\,arctg\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+C.$$

(iv) مخرج کسر زیر علامت انتگرال دارای دو زوج از ریشه‌های مزدوج مختلط متفاوت است، بنابراین

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{x^2+4},$$

بنابراین

$$1=\left(Ax+B\right)\left(x^2+4\right)+\left(Dx+E\right)\left(x^2+1\right).$$

در اینجا مناسب است که روش مقادیر خاص را برای یافتن ضرایب بکار بریم، زیرا ریشه‌های مختلط مخرج $(x=\pm i\ ,\ x=\pm 2i)$ بقدر کافی ساده هستند.

با قراردادن $x=i$ بدست می‌آوریم

$$3B+3Ai=1$$

که از آنجا $A=0\,,\ B=\frac{1}{3}$. با قرار دادن $x=2i$ بدست می‌آوریم

$$-3E-6Di=1$$

که از آنجا $D=0\,,\ E=-\frac{1}{3}$. لذا

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1}-\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{3}\,arctg\,x-\frac{1}{6}\,arctg\frac{x}{2}+C.$$

۵ . ۶ انتگرال بعضی توابع اصم

در ادامه این فصل نماد $R(\alpha,\beta,\gamma,...)$ برای نمایش یک عبارت منطق (تابع منطق) در متغیرهای $\alpha,\beta,\gamma,...$ بکار می‌رود و بدین معنی است که روی $\alpha,\beta,\gamma,...$ تنها اعمال حسابی انجام می‌شود.

گونه‌های معینی از انتگرال‌های توابع اصم را می‌توان با استفاده از تغییر متغیری مناسب به انتگرال توابع منطق تبدیل نمود. یک چنین تبدیلی از یک انتگرال را **عمل گویا کردن** آن می‌نامند.

I. انتگرال $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \ldots, x^{\frac{r}{s}}\right)dx$ را در نظر می‌گیریم که در آن R تابعی منطق از متغیرهایش می‌باشد. فرض کنیم k یک مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ باشد. تغییر متغیر

$$x = t^k \,, dx = k\, t^{k-1}\, dt$$

می‌دهیم. در این صورت هر توان کسری از متغیر x به شکل توانی صحیح از متغیر t در می‌آید و بنابراین تابع زیر علامت انتگرال به تابعی منطق در متغیر t تبدیل می‌گردد.

II.انتگرالی به شکل

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]dx$$

را در نظر می‌گیریم. این انتگرال با تغییر متغیر $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$، که در آن k یک مخرج مشترک کسرهای $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$ است، به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد، به دلیل آنکه از تغییر متغیر بالا بدست می‌آوریم

$$.\, dx = \frac{k\,dt^{k-1}\left(a - ct^k\right) + kct^k\left(dt^k - b\right)}{\left(a - ct^k\right)^2}\,dt,\; x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}.$$

با جایگذاری این مقادیر، انتگرال بالا به صورت $\int \overline{R}(t)\,dt$ در می‌آید که $\overline{R}(t)$ تابعی منطق از t است.

مثال ۱۵: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$$(i)\quad \int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x\left(1 + \sqrt[3]{x}\right)}\,dx \qquad\qquad (ii)\quad \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}} + 1}\,dx$$

$$(iii)\quad \int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx \qquad\qquad (iv)\quad .\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3\,(x+2)^5}}$$

حل. (i) کوچکترین مضرب مشترک 3 و 6 عدد 6 است، بنابراین تغییر متغیر

$$x = t^6 \,, dx = 6t^5\; dt$$

می‌دهیم و داریم

$$\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\,dx = 6\int \frac{\left(t^6+t^4+t\right)t^5}{t^6\left(1+t^2\right)}\,dt = 6\int \frac{t^5+t^3+1}{1+t^2}\,dt$$
$$= 6\int t^3\,dt + 6\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}t^4 + 6\,arc\,tg\,t + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 6arctgx^{\frac{1}{6}} + C\,.$$

(ii) تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از $\sqrt[6]{2x-3}$ است، بنابراین قرار می‌دهیم $2x-3=t^6$، که از آنجا

$$dx = 3t^5\,dt\,, \qquad (2x-3)^{\frac{1}{2}} = t^3\,, \qquad (2x-3)^{\frac{1}{3}} = t^2\,.$$

بنابراین

$$I = \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1}\,dx = \int \frac{3t^8}{t^2+1}\,dt = 3\int\left(t^6-t^4+t^2-1\right)dt + 3\int\frac{dt}{1+t^2}$$
$$= 3\frac{t^7}{7} - 3\frac{t^5}{5} + 3\frac{t^3}{3} - 3t + 3\,arc\,tg\,t + C\,.$$

با برگشتن به متغیر x، بدست می‌آوریم

$$I = 3\left[\frac{1}{7}(2x-3)^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{5}(2x-3)^{\frac{5}{6}} + \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{1}{2}} - (2x-3)^{\frac{1}{6}} + arc\,tg(2x-6)^{\frac{1}{6}}\right] + C\,.$$

(iii) تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از x و عبارت $\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}$ است، بنابراین تغییر متغیر

$$\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} = t \qquad ; \qquad \frac{2-x}{2+x} = t^3$$

می‌دهیم که از آنجا

$$x = \frac{2-2t^3}{1+t^3}; \qquad 2-x = \frac{4t^3}{1+t^3}; \qquad dx = \frac{-12t^2}{\left(1+t^3\right)^2}\,dt\,.$$

بنابراین

$$I = -\int \frac{2\left(1+t^3\right)^2 t.12t^2}{16t^6\left(1+t^3\right)^2}\,dt = -\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3} = \frac{3}{4t^2} + C\,.$$

با برگشتن به متغیر x بدست می‌آوریم

$$I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C\,.$$

(iv) به دلیل آنکه

$$\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}=(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$$

تابع زیر علامت انتگرال تابعی منطق از x و $\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}$ است، بنابراین تغییر متغیر

$$\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}=t, \qquad \frac{x+2}{x-1}=t^4$$

می‌دهیم که از آنجا

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1}, \qquad x-1=\frac{3}{t^4-1}, \qquad x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}, \qquad dx=\frac{12t^3}{\left(t^4-1\right)^2}dt.$$

بنابراین

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=-\int\frac{(t^4-1)(t^4-1)12t^3}{3.3t^4\,t(t^4-1)^2}dt=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C.$$

با برگشتن به متغیر x، بدست می‌آوریم

$$I=\frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

۵ . ۷ تغییر متغیرهای اویلر

انتگرال

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad (a\neq 0) \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم. انتگرالی از این نوع را می‌توان به انتگرال تابعی منطق از یک متغیر جدید، بوسیله تغییر متغیرهای اویلر که در زیر بیان می‌شود، تبدیل نمود.

اولین تغییر متغیر اویلر. اگر $a>0$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t.$$

برای سهولت علامت مقابل $\sqrt{a}$ را مثبت اختیار می‌کنیم. در این صورت

$$ax^2+bx+c=ax^2+2\sqrt{a}\,xt+t^2$$

که از آنجا x به صورت تابعی منطق از t بدست می‌آید:

$$x=\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}$$

(لذا، dx نیز به صورت تابعی منطق از t بیان می‌شود). بنابراین

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}\,x+t=\sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}+t.$$

دومین تغییر متغیر اویلر. اگر $c>0$، آنگاه قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=ax\pm\sqrt{c}$$

که از آنجا

$$ax^2+bx+c=x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c$$

(برای سهولت علامت مقابل رادیکال را مثبت اختیار می‌کنیم). در این صورت x به عنوان تابعی منطق از t بدست می‌آید:

$$x=\frac{2\sqrt{c}\,t-b}{a-t^2}.$$

به دلیل آنکه dx و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نیز به صورت عباراتی منطق از t بیان می‌شوند، با جایگذاری مقادیر x، $\sqrt{ax^2+bx+c}$، dx در انتگرال $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$، این انتگرال تبدیل به انتگرال تابعی منطق از t می‌شود.

سومین تغییر متغیر اویلر. فرض کنیم α,β ریشه‌های حقیقی سه جمله‌ای ax^2+bx+c باشند. قرار می‌دهیم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)\;t.$$

به دلیل آنکه $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$، داریم

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)t$$
$$a(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2\,t^2$$
$$a(x-\beta)=(x-\alpha)\;t^2$$

که از آنجا x را به صورت تابعی منطق از t بدست می‌آوریم:

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}.$$

چون dx و $\sqrt{ax^2+bx+c}$ نیز توابعی منطق از t هستند، انتگرال داده شده به انتگرال تابعی منطق از t تبدیل می‌شود.

مثال ۱۶: مطلوبست محاسبه انتگرال‌های زیر:

$(i)\quad I=\int\frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$ $\qquad(ii)\quad I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

$(iii)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}$.

حل. (i) در اینجا $a=1>0$، بنابراین اولین تغییر متغیر اویلر را بکار می‌بریم:

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t-x.$$

پس از مربع نمودن طرفین این تساوی و حذف جملات مشابه، بدست می‌آوریم

$$2x+2tx=t^2-2$$

که از آنجا

$$x=\frac{t^2-2}{2(1+t)}\,; \qquad dx=\frac{t^2+2t+2}{2(1+t)^2}\,dt\,; \qquad 1+\sqrt{x^2+2x+2}=\frac{t^2+4t+4}{2(1+t)}.$$

این مقادیر را در انتگرال قرار داده و بدست می‌آوریم

$$I=\int\frac{2(1+t)\left(t^2+2t+2\right)}{\left(t^2+4t+4\right)2\left(1+t^2\right)^2}\,dt=\int\frac{\left(t^2+2t+2\right)dt}{(1+t)(1+2)^2}.$$

اکنون کسر منطق حقیقی بدست آمده را به صورت حاصلجمع کسرهای منطق جزئی می‌نویسیم:

$$\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{t+2}+\frac{D}{(t+2)^2}.$$

با استفاده از روش ضرایب نامعین خواهیم داشت: $A=1$, $B=0$, $D=-2$. بنابراین

$$\int\frac{t^2+2t+2}{(t+1)(t+2)^2}\,dt=\int\frac{dt}{t+1}-2\int\frac{dt}{(t+2)^2}=\ln|t+1|+\frac{2}{t+2}+C.$$

و اگر بجای t مقدار آن را بر حسب x قرار دهیم، خواهیم داشت

$$I=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+\frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}}+C.$$

(ii) چون در اینجا $c=1>0$، می‌توانیم دومین تغییر متغیر اویلر را بکار بریم:

$$\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$$

که از آنجا

$$(2t-1)x=\left(t^2-1\right)x^2\,; \qquad x=\frac{2t-1}{t^2-1}$$

$$dx=-2\frac{t^2-t+1}{\left(t^2-1\right)^2}\,dt, \qquad x+\sqrt{x^2-x+1}=\frac{t}{t-1}.$$

با جایگذاری در I ، انتگرالی از یک کسر منطق بدست می‌آوریم:

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\int\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}\,dt.$$

اما

$$\frac{-2t^2+2t-2}{t(t-1)(t+1)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{D}{(t+1)^2}+\frac{E}{t+1}\quad.$$

بنابر روش ضرایب نامعین دیده می‌شود که

$$A=2\,,\qquad B=-\frac{1}{2}\,,\qquad D=-3\,,\qquad E=-\frac{3}{2}\,.$$

بنابراین

$$I=2\int\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t-1}-3\int\frac{dt}{(t+1)^2}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t+1}=$$
$$2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|t-1|+\frac{3}{t+1}-\frac{3}{2}\ln|t+1|+C$$

که در آن $t=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}$.

(iii) چون $x^2+3x-4=(x+4)(x-1)$ سومین تغییر متغیر اویلر را بکار برده و قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)\ \ t\,.$$

بنابراین

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2\,t^2\,,\qquad x-1=(x+4)t^2$$

$$dx=\frac{10t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt\,,\qquad x=\frac{1+4t^2}{1-t^2}\,,$$ و $$\sqrt{(x+4)(x-1)}=\left[\frac{1+4t^2}{1-t^2}+4\right]t=\frac{5t}{1-t^2}.$$

لذا می‌توان نوشت

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-4}}=\int\frac{10t\left(1-t^2\right)dt}{\left(1-t^2\right)^2 5t}=\int\frac{2}{1-t^2}\,dt$$
$$=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+4}}}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right|+C\,.$$

۵ . ۸ انتگرال دیفرانسیل دوجمله‌ای

انتگرال $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ را که در آن m، n و p اعدادی منطق هستند در نظر می‌گیریم . ثابت می‌شود که انتگرال تنها در سه حالت زیر قابل حل است:

حالت اول: p یک عدد صحیح است. در این صورت اگر $p>0$ آنگاه $\left(a+bx^n\right)^p$ همان دو جمله‌ای نیوتن بوده و بنابراین انتگرال به سادگی قابل محاسبه است. اما اگر $p<0$ آنگاه تغییر متغیر $x=t^h$ می‌دهیم که در آن h یک مخرج مشترک کسرهای منطق m و n است.

حالت دوم: $\frac{m+1}{n}$ یک عدد صحیح است. قرار می‌دهیم $a+bx^n=t^\alpha$ که در آن α مخرج کسر p است.

حالت سوم: $\frac{m+1}{n}+p$ یک عدد صحیح است. قرار می‌دهیم $a+bx^n=t^\alpha x^n$ که در آن α مخرج کسر p است.

مثال ۱۷: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$(i)\quad I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} \qquad\qquad (ii)\quad I=\int x^{-11}\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$(iii)\quad I=\int x^{\frac{-2}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx.$$

حل. (i) در اینجا تابع زیر علامت انتگرال را به شکل $x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10}$ می‌توان نوشت، یعنی $p=-10$ عددی صحیح است. لذا حالت اول انتگرال پذیری دو جمله‌ای دیفرانسیل را داریم. بنابراین، اگر تغییر متغیر $x=t^4$ بدهیم آنگاه $dx=4t^3dt$ و انتگرال به شکل زیر درمی‌آید:

$$I=\int\frac{4t^3dt}{t^2(t+1)^{10}}=4\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}}.$$

برای حل آخرین انتگرال می‌توانیم بنویسیم

$$\int\frac{tdt}{(t+1)^{10}}=\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt=\int\frac{dt}{(t+1)^9}-\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}$$
$$=-\frac{1}{8(t+1)^8}+\frac{1}{9(t+1)^9}+C.$$

بنابراین

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9}+C.$$

(ii) در اینجا $p=-\frac{1}{2}$ یک کسر است، $\frac{m+1}{n}=-\frac{5}{2}$ نیز یک کسر است، اما $\frac{m+1}{n}+p=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=-3$ عددی صحیح است،یعنی در حالت سوم هستیم. قرار می‌دهیم $1+x^4=x^4t^2$. بنابراین

$$x=\frac{1}{\left(t^2-1\right)^{\frac{1}{4}}}\ ; \qquad dx=-\frac{tdt}{2\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{2}}}.$$

با جایگذاری این عبارت‌ها در انتگرال بدست می‌آوریم

$$I=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^{\frac{11}{4}}\left(\frac{t^2}{t^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{tdt}{\left(t^2-1\right)^{\frac{5}{4}}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left(t^2-1\right)^2dt=-\frac{t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}+C$$

و اگر t را برحسب x جایگذاری کنیم داریم

$$I=-\frac{1}{10x^{10}}\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}+\frac{1}{3x^6}\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}-\frac{1}{2x^2}\sqrt{1+x^2}+C.$$

(iii)در اینجا $m=-\frac{2}{3}$ ، $n=\frac{1}{3}$ ، $\frac{m+1}{n}=\frac{\left(-\frac{2}{3}+1\right)}{\frac{1}{3}}=1$، یعنی $\frac{m+1}{n}$ عددی صحیح است. لذا حالت دوم انتگرال‌پذیری دو جمله‌ای دیفرانسیل را داریم. تغییر متغیر

$$1+x^{\frac{1}{3}}=t^3\ ; \qquad \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx=2tdt$$

می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت

$$I=6\int t^2dt=2t^3+C=2\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

۵ . ۹ انتگرال توابع مثلثاتی

از ابتدای فصل حاضر تا اینجا تنها به بررسی انتگرال توابع جبری (منطق و اصم) پرداخته‌ایم. در این قسمت به مطالعهٔ انتگرال توابع مثلثاتی می‌پردازیم. انتگرالی به شکل

$$\int R\left(sinx, cosx\right)\ dx \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم . نشان می‌دهیم که این انتگرال با تغییر متغیر

$$tg\frac{x}{2}=t \qquad (2)$$

همواره به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد. توابع $\sin x$ و $\cos x$ را برحسب $tg\frac{x}{2}$ ، و بنابراین t بیان می‌کنیم:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{1}=\frac{2\sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$cosx=\frac{cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}}{1}=\frac{cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

علاوه بر آن

$$x=2arctgt \quad \text{و} \quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

به این طریق، $sinx$ ، $cosx$ و dx به طور منطق برحسب t بیان می‌شوند. چون یک تابع منطق از توابع منطق خود تابع منطقی است،با جایگذاری عبارت‌های بدست آمده در انتگرال (1) ما انتگرالی از یک تابع منطق بدست می‌آوریم:

$$\int R\left(sinx,cosx\right)\ dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

مثال ۱۸: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

(i) $\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}$ $\qquad$ (ii) $\int\frac{dx}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)cosx}$

(iii) $\int\frac{dx}{sinx\left(2+cosx-2sinx\right)}.$

حل: (i) با تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4.\frac{2t}{1+t^2}+3.\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}$$
$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C.$$

بجای t مقدار آن را برحسب x قرار داده و بدست می‌آوریم

$$\int\frac{dx}{4sinx+3cosx+5}=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

(ii) با تغییر متغیر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$\int\frac{dx}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right)cosx}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\left(a^2+b^2\right)-\left(a^2-b^2\right).\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$=2\int\frac{dt}{(a^2+b^2)(1+t^2)-(a^2-b^2)(1-t^2)}=\int\frac{dt}{a^2t^2+b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{1}{ab}arctg\frac{at}{b}+C=\frac{1}{ab}arctg\left(\frac{a}{b}.tg\frac{x}{2}\right)+C.$$

(iii) با تغییر $tg\frac{x}{2}=t$ داریم

$$I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2}\right)}=\int\frac{\left(1+t^2\right)dt}{t\left(t^2-4t+3\right)}$$

کسر زیر علامت انتگرال را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1+t^2}{t(t-3)(t-1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-3}+\frac{D}{t-1}.$$

به سادگی دیده می‌شود که $A=\frac{1}{3}$، $B=\frac{5}{3}$، $D=-1$. بنابراین

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}-\int\frac{dt}{t-1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|t|+\frac{5}{3}\ln|t-3|-\ln|t-1|+C=$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}-3\right|-\ln\left|tg\frac{x}{2}-1\right|+C.$$

تغییر متغیر بالا به ما این امکان را می‌دهد که از هر تابع به شکل $R\left(\sin x,cosx\right)$ انتگرال بگیریم. به این دلیل گاهی اوقات آن را یک **تغییر متغیر مثلثاتی عمومی** می‌نامند. با وجود این، در عمل این تغییر متغیر توابع منطق بسیار پیچیده‌ای را ایجاد می‌کند. بنابراین مناسب است که تغییر متغیرهای دیگری (علاوه بر «عمومی») را بشناسیم که اغلب خیلی سریعتر به جواب می‌رسند.

(1)اگر انتگرال به شکل $\int R(\sin x) cosxdx$ باشد، تغییر متغیر $sinx = t$ ، $cosxdx = dt$ این انتگرال را به صورت $\int R(t)dt$ درمی‌آورد.

(2) اگر انتگرال به شکل $\int R(\cos x)\sin xdx$ باشد، با تغییر متغیر $cosx = t$ ، $sinxdx = -dt$ به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌گردد.

(3) اگر تابع زیر علامت انتگرال فقط به tgx بستگی داشته باشد، آنگاه تغییر متغیر

$$tgx = t, \qquad x = arctgt, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

این انتگرال را به انتگرال یک تابع منطق تبدیل می‌کند:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

(4) اگر تابع زیر علامت انتگرال به شکل $R(\sin x, cosx)$ بوده، اما $sinx$ و $\cos x$ تنها با توان‌های زوج ظاهر شده باشند، آنگاه همان تغییر متغیر $tgx = t$ می تواند به کار برده شود. زیرا $sin^2 x$ و $\cos^2 x$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$
$$sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

بعد از جایگذاری انتگرالی از یک تابع منطق را بدست می‌آوریم.

مثال ۱۹: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}dx \qquad (i)$$
$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} \qquad (ii)$$
$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{cos2x}dx \qquad (iii)$$
$$.\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x.cosx - cos^2 x} \qquad (iv)$$

حل. (i) این انتگرال به صورت $\int R(\sin x, cosx)\ dx$ نوشته می‌شود. در حقیقت:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}\ dx = \int \frac{\sin^2 x.\sin xdx}{2+cosx} = \int \frac{1-cos^2 x}{2+cosx}\sin xdx\ .$$

تغییر متغیر $cosx = t$ می‌دهیم. در این صورت $\sin xdx = -dt$ و

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+cosx}\ dx = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\ dt = \int \frac{t^2-1}{t+2}\ dt = \int \left(t-2+\frac{3}{t+2}\right)\ dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{cos^2 x}{2} - 2cosx + 3\ln\left(cosx+2\right) + C\ .$$

(ii) تغییر متغیر $tgx = t$ می‌دهیم:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} + C$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

(iii) انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)}{cos2x}dx = \int \frac{\left(1+\sin^2 x\right)}{2cos^2 x-1}sinxdx = \int \frac{\left(2-cos^2 x\right)}{2cos^2 x-1}sinxdx.$$

لذا تغییر متغیر $cosx = t$ می‌دهیم و داریم $\sin xdx = -dt$ ،

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)}{cos2x}dx = \int \frac{\left(2-t^2\right)\left(-dt\right)}{2t^2-1} = \int \frac{\left(t^2-2\right)dt}{2t^2-1}$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1}$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{2}} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C$$

و در نتیجه ،

$$\int \frac{\left(\sin x+\sin^3 x\right)dx}{cos2x} = \frac{1}{2}cosx - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}cosx-1}{\sqrt{2}cosx+1}\right| + C.$$

(iv) تابع زیر علامت انتگرال نسبت به سینوس و کسینوس از توان زوج است . با قراردادن $tgx = t$ بدست می‌آوریم

$$sinx = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad cosx = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$x = arctgt \qquad ; \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

از این نتیجه می‌گیریم که

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x . cosx - cos^2 x}$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} . \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+2t-1} \ .$$

اما

$$\int \frac{dt}{t^2+2t-1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C \ .$$

بنابراین داریم

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x . cosx - cos^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{tgx+1-\sqrt{2}}{tgx+1+\sqrt{2}} \right| + C \ .$$

(5) اکنون به بررسی یکی دیگر از انتگرال‌های به شکل $\int R(\sin x, cosx)\ dx$ می‌پردازیم، یعنی، انتگرالی که تابع زیر علامت انتگرال در آن به صورت $sin^m x . cos^n x$ است که در آن m و n اعداد صحیح هستند. در اینجا سه حالت را در نظر می‌گیریم:

(a) $\int \sin^m x cos^n x dx$ ، که در آن از m و n لااقل یکی فرد است. برای سهولت فرض کنیم n فرد باشد. قرار می‌دهیم $n = 2p+1$ و انتگرال را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\int \sin^m x\, cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x\, cos^{2p} x\ cosx dx$$
$$= \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p cosx dx.$$

تغییر متغیر می‌دهیم:

$$sinx = t, \qquad cosx dx = dt$$

با قراردادن متغیر جدید در انتگرال مفروض، بدست می‌آوریم

$$\int sin^m x\, cos^n x dx = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt$$

که انتگرال تابعی منطق از t است.

(b) $\int \sin^m x\, cos^n x\, dx$، که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی و زوج هستند. قرار می‌دهیم $m = 2p$ و $n = 2q$. فرمول‌های مثلثاتی زیر را می‌شناسیم:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos2x, \qquad cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos2x \qquad (3)$$

با قراردادن آنها در انتگرال بدست می‌آوریم

$$\int \sin^{2p} x cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}cos2x\right)^p \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos2x\right)^q dx.$$

پرانتزها را بتوان رسانیده و درهم ضرب می‌کنیم. با این کار جملاتی شامل $cos2x$ بدست می‌آوریم که دارای توان های فرد و زوج هستند. جملات با توان فرد مانند حالت (a) انتگرال‌گیری می‌شوند. مجدداً با استفاده از (3) توان‌های زوج را نصف می‌کنیم. با ادامه این روش بالاخره جملاتی به شکل $\int \cos kxdx$ را بدست می‌آوریم، که انتگرال‌گیری از آنها بسیار ساده است.

(c) اگر هر دو توان زوج بوده و لااقل یکی از آها منفی باشد،آنگاه روش حالت قبل نتیجهٔ مطلوب را بدست نمیدهد . در اینجا، بایستی از تغییر متغیر $tgx=t$ (یا $cotgx=t$) استفاده نمود.

مثال ۲۰: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

(i) $\int \frac{\cos^3 x}{sin^4 x}dx$ $\qquad$ (ii) $\int \sin^4 xdx$

(iii) $\int \frac{\sin^2 x}{cos^6 x}dx$.

حل. (i) داریم

$$\int \frac{cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{cos^2 x\, cosx}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)cosx}{\sin^4 x} dx.$$

با قراردادن $sinx=t$ ، $cosxdx=dt$ بدست می‌آوریم

$$\int \frac{cos^3 x}{sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)}{t^4} dt = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3}+\frac{1}{t}+C.$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C \quad .$$

(ii) داریم

$$\int \sin^4 xdx = \frac{1}{4}\int \left(1-cos2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-2cos2x+cos^2 2x\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x-\sin 2x+\frac{1}{2}\int \left(1+cos4x\right)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C\ .$$

(iii) داریم

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x\left(\sin^2 x + cos^2 x\right)^2}{cos^6 x}\ dx = \int tg^2 x\left(1+tg^2 x\right)^2 dx\ .$$

قرار می‌دهیم $tgx = t$ ، در این صورت $x = arctgt$ ، $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ و بدست می‌آوریم

$$\int \frac{\sin^2 x}{cos^6 x}\ dx = \int t^2\left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2\left(1+t^2\right)\ dt = \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C$$

$$= \frac{tg^3 x}{3}+\frac{tg^5 x}{5}+C\ .$$

تبصره : انتگرالی به شکل

$$I = \int \sin^m x\, cos^n x\, dx$$

که در آن m و n اعدادی منطق هستند قابل تبدیل به انتگرال دیفرانسیل دو جمله‌ای

$$I = \int t^m\left(1-t^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dt,$$

بوده و بنابراین تنها در سه حالت زیر امکان حل آن وجود دارد:

(1) n فرد است ($\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است)،

(2) m فرد است ($\frac{m+1}{2}$ عددی صحیح است)،

(3) $m+n$ زوج است ($\frac{m+1}{2}+\frac{n-1}{2}$ عددی صحیح است).

اگر n عددی فرد باشد، تغییر متغیر $\sin x = t$ بکار می‌رود.

اگر m عددی فرد باشد، تغییر متغیر $\cos x = t$ بکار می‌رود.

اگر $m+n$ عددی زوج باشد،تغییر متغیر $tgx = t$ (یا $\cot gx = t$) را بکار می‌بریم.

به ویژه ، این نوع تغییر متغیرها برای انتگرال‌هائی به شکل

$$\left(\int \cot g^n x dx \quad \text{یا} \quad\right), \int tg^n x dx$$

مناسب هستند . اما آخرین تغییر متغیر نامناسب است هرگاه n و m اعداد مثبت باشند. اگر m و n اعداد نامنفی زوج باشند، آنگاه به نظر می‌رسد که مناسبتر است روش تقلیل توان را با کمک تبدیلات مثلثاتی:

$$cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+cos 2x\right), \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

یا $\sin x.cosx = \frac{1}{2}\sin 2x$ بکار بریم.

مثال ۲۱: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

$$(i)\ \int \frac{\sin^3 xdx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} \qquad (ii)\ \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x\cos x}}$$

$$(iii)\ \int tg^7 xdx \qquad (iv)\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x}dx.$$

حل. (i) در اینجا $m=3$ عددی فرد است. قرار می‌دهیم $\cos x = t, \sin xdx = -dt$ و بدست می‌آوریم.

$$I = \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}dx = -\int (1-t^2)t^{\frac{-2}{3}}dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7}t^{\frac{7}{3}} + C$$

$$= 3\sqrt[3]{\cos x}\left(\frac{1}{7}\cos^2 x - 1\right) + C .$$

(ii) در اینجا هر دو توان $\frac{-11}{3}$ و $-\frac{1}{3}$ اعدادی منفی بوده و حاصلجمع آنها $-\frac{11}{3}-\frac{1}{3}=-4$ عددی زوج است، بنابراین قرار می‌دهیم

$$tgx = t \qquad ; \qquad \frac{dx}{\cos^2 x} = dt .$$

پس

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x\sqrt[3]{tg^{11} x}} = \int \frac{1+t^2}{\sqrt[3]{t^{11}}}\ dt = \int \left(t^{\frac{-11}{3}} + t^{\frac{-5}{3}}\right)\ dt$$

$$= -\frac{3}{8}t^{\frac{-3}{8}} - \frac{3}{2}t^{\frac{-2}{3}} + C = -\frac{3\left(1+4tg^2 x\right)}{8tg^2 x.\sqrt[3]{tg^2 x}} + C \quad .$$

(iii) با قراردادن $tgx = t$ ، $x = arctgt$ ، $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ بدست می‌آوریم

$$I = \int tg^7 xdx = \int t^7 \frac{dt}{1+t^2} = \int \left(t^5 - t^3 + t - \frac{t}{1+t^2}\right)\ dt$$

$$= \frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}tg^6 x - \frac{1}{4}tg^4 x + \frac{1}{2}tg^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

(iv) در اینجا $\sin x$ دارای توانی فرد است. قرار می‌دهیم

$$cosx = t \qquad , \qquad -\sin xdx = dt$$

و انتگرالی از یک تابع منطق بدست می‌آوریم.

$$.I=\int \frac{cos^4 x \sin x}{\sin^4 x}\ dx=-\int \frac{t^4}{\left(1-t^2\right)^2}\ dt\ .$$

برای این مساله، بجای استفاده از روش انتگرال‌گیری کسرهای منطق، بهتر است که از روش جزء به جزء استفاده کنیم . قرار می‌دهیم

$$u=t^3 \qquad ; \qquad dv=\frac{tdt}{\left(1-t^2\right)^2}$$

در این صورت

$$.du=3t^2 dt \qquad ; \qquad u=\frac{1}{2\left(1-t^2\right)}\ .$$

بنابراین

$$I=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{3}{2}\int \frac{t^2 dt}{1-t^2}=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}+\frac{3}{2}\int \frac{t^2-1+1}{1-t^2}dt$$

$$=-\frac{t^3}{2\left(1-t^2\right)}-\frac{3}{2}t+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=$$

$$=-\frac{\cos^3 x}{2\sin^2 x}-\frac{3}{2}cosx+\frac{3}{4}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|+C\ .$$

(6) در خاتمه به انتگرال‌های زیر می‌پردازیم:

$$\int \cos mx \cos nxdx, \qquad \int \sin mx \cos nxdx, \qquad \int \sin mx \sin nxdx\ .$$

این انتگرال‌ها با استفاده از فرمول‌های زیر محاسبه می شوند $(m \neq n)$

$$\cos mx \quad \cos nx=\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \quad cosnx=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \quad \sin nx=\frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x+cos(m-n)x\right].$$

به عنوان مثال

$$\int \cos mx \quad \cos nxdx=\frac{1}{2}\int\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]\ dx$$

$$=\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}+C \qquad .$$

دو انتگرال دیگر نیز به طریق مشابه محاسبه می‌گردند.

۵ . ۱۰ انتگرال بعضی توابع اصم با استفاده از تغییر متغیر مثلثاتی

بار دیگر به انتگرال بخش ۵ . ۷ باز می‌گردیم:

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad (1)$$

که در آن $a \neq 0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a} \neq 0$ (در حالت $a=0$ انتگرال دارای شکل II در بخش ۵ . ۶ است، برای $c-\dfrac{b^2}{4a}=0$ ، داریم $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$ ، و با تابعی منطق سروکار داریم به شرط آنکه $a>0$. برای $a<0$ تابع $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به ازای هیچ مقدار x تعریف نشده است) در اینجا روشی را ارائه خواهیم داد که این انتگرال را به انتگرالی به شکل

$$\int \bar{R}(\sin z, \cos z) \; dz \qquad (2)$$

تبدیل می‌کند که در بخش قبل آن را بررسی نمودیم.

سه جمله‌ای زیر رادیکال را تبدیل می‌کنیم:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

با قراردادن $x+\dfrac{b}{2a}=t$ ، $dx=dt$ تغییر متغیر می‌دهیم. در این صورت

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{at^2+\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}.$$

تمامی حالت‌های ممکن را بررسی می‌کنیم:

(1) فرض کنیم $a>0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$ ، با نامگذاری $a=m^2$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}=n^2$ داریم

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2+n^2}\ .$$

(2) فرض کنیم $a>0, c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. در این صورت

$$a=m^2, \qquad c-\frac{b^2}{4a}=-n^2$$

لذا،

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{m^2t^2-n^2}\ .$$

(3) فرض کنیم $a<0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}>0$. در این صورت

$$a=-m^2, \qquad c-\frac{b^2}{4a}=n^2$$

بنابراین،

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{n^2-m^2t^2}\ .$$

(4) فرض کنیم $a<0$ و $c-\dfrac{b^2}{4a}<0$. دراین حالت $\sqrt{ax^2+bx+c}$ به ازای هر مقدار x به یک عدد مختلط تبدیل می‌شود که از بحث فعلی ما خارج است.

بدین طریق ، انتگرال (1) به یکی از انتگرال‌های زیر تقلیل می‌یابد:

$$I.\int R(t,\sqrt{m^2t^2+n^2})\,dt \qquad (3a)$$

$$II.\int R(t,\sqrt{m^2t^2-n^2})\,dt \qquad (3b)$$

$$III.\int R(t,\sqrt{n^2-m^2t^2})\,dt \qquad (3c)$$

بدیهی است که ، انتگرال $(3a)$ را می‌توان به انتگرالی به شکل (2) تقلیل داد هرگاه تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}tgz$$

را بکار بریم، زیرا در این صورت داریم

$$\sqrt{m^2t^2+n^2}=\frac{n}{\cos z} \quad , \quad dt=\frac{n}{m}\frac{dz}{\cos^2 z}.$$

انتگرال $(3b)$ را می‌توان به انتگرالی به شکل (2) تقلیل داد هرگاه تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}\sec z$$

را بکار بریم، زیرا در این صورت داریم $dt=\dfrac{n}{m}\sec z tgz dz$ و $\sqrt{m^2t^2-n^2}=ntgz$.

انتگرال $(3c)$ با تغییر متغیر

$$t=\frac{n}{m}\sin z$$

به شکل (2) درمی‌آید، زیرا در این صورت داریم $dt=\dfrac{n}{m}\cos z dz$ و $\sqrt{n^2-m^2t^2}=n\cos z$.

مثال ۲۲: مطلوبست محاسبهٔ انتگرال‌های زیر:

$$(i)\ \int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx \qquad (ii)\ \int\sqrt{x^2+5}\,dx$$

$$(iii)\ \int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} \qquad (iv)\ \int\frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}}.$$

حل. (i) فرض کنیم $x=3\sin\theta$. در این صورت $dx=3\cos\theta d\theta$ و

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2\theta}=3\sqrt{\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

بنابراین

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx=\int\frac{3\cos\theta}{9\sin^2\theta}(3\cos\theta)\,d\theta=\int\cot g^2\theta\,d\theta$$

$$=\int\left(\cot g^2\theta+1-1\right)\ d\theta=-\cot g\theta-\theta+C$$
.

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\ dx=-\frac{\sqrt{9-x^2}}{x}-arc\sin\frac{x}{3}+C.$$

شکل ۵ . ۲

(ii) فرض کنیم $x=\sqrt{5}tg\theta$ در این صورت $dx=\sqrt{5}\sec^2\theta\ \ d\theta$ و

$$\sqrt{x^2+5}=\sqrt{5tg^2\theta+5}=\sqrt{5}\sqrt{\sec^2\theta}=\sqrt{5}\sec\theta\,.$$

بنابراین

$$\int\sqrt{x^2+5}dx=\int\sqrt{5}\sec\theta(\sqrt{5}\sec^2\theta)d\theta=5\int\sec^3\theta d\theta\,.$$

حال انتگرال $\int\sec^3 xdx$ را به روش جزء به جزء محاسبه می‌نمائیم فرض کنیم.

$$u=\sec x\qquad,\qquad dv=\sec^2 xdx$$

پس

$$du=\sec xtgxdx\qquad,\qquad v=tgx$$

لذا

$$\begin{aligned}\int\sec^3 xdx&=\sec xtgx-\int\sec xtg^2 xdx\\&=\sec xtgx-\int\sec x\left(\sec^2 x-1\right)dx\\&=\sec xtgx-\int\sec^3 xdx+\int\sec xdx\ .\end{aligned}$$

(به سادگی دیده می‌شود که $\int\sec xdx=\ln\left|\sec x+tgx\right|+C$)

با اضافه نمودن $\int\sec^3 xdx$ به هر دو طرف بدست می‌آوریم

$$2\int\sec^3 xdx=\sec xtgx+\ln\left|\sec x+tgx\right|+2C$$

و در نتیجه

$$\int\sec^3 xdx=\frac{1}{2}\sec xtgx+\frac{1}{2}\ln\left|\sec x+tgx\right|+C\,.$$

بنابراین

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx=\frac{5}{2}\sec\theta tg\theta+\frac{5}{2}\ln\left|\sec\theta+tg\theta\right|+C.$$

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx=\frac{5}{2}.\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}.\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt{5}}+\frac{x}{\sqrt{5}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right|-\frac{5}{2}\ln\sqrt{5}+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+5}+x\right|+C_1.$$

شکل ۵ . ۳

(iii) فرض کنیم $x=3\sec\theta$ ،بنابراین $dx=3\sec\theta\ \ tg\theta d\theta$ و

$$\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\sec^2\theta-9}=3\sqrt{tg^2\theta}=3tg\theta.$$

لذا

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{3\sec\theta tg\theta d\theta}{27\sec^3\theta 3tg\theta}=\frac{1}{27}\int\cos^2\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{54}\int(1+cos2\theta)d\theta=\frac{1}{27}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C$$

$$=\frac{1}{54}(\theta+\sin\theta cos\theta)+C.$$

با توجه به شکل زیر داریم

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}=\frac{1}{54}\left(arc\cos\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}.\frac{3}{x}\right)+C.$$

شکل ۵ . ۴

(iv) داریم $5+2x+x^2=4+(x+1)^2$. قرار می‌دهیم $x+1=t$ و در این صورت

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{\left(5+2x+x^2\right)^3}}=\int\frac{dt}{\sqrt{\left(4+t^2\right)^3}}.$$

تغییر متغیر $t=2tgz$ داده و بدست می‌آوریم $dt=\frac{2dz}{cos^2z}$ ،

$\sqrt{4+t^2}=2\sqrt{1+tg^2z}=\frac{2}{\cos z}$. بنابراین

$$I=\frac{1}{4}\int\cos z dz=\frac{1}{4}\sin z+C=\frac{1}{4}\frac{tgz}{\sqrt{1+tg^2z}}+C=\frac{1}{4}\frac{\frac{t}{2}}{\sqrt{1+\frac{t^2}{4}}}+C=\frac{x+1}{4\sqrt{5+2x+x^2}}+C.$$