به نام خداوند بخشنده‌ی مهربان

پاسخ نامه مرحله دوم المپیاد نجوم و اخترفیزیک دوره هفتم سال 1390

تهیه و تنظیم : اعضای تیم نهمین المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک

توضیحات : این راه حل ها تنها راه حل های ممکن برای سوالات نیستند و ممکن است چند راه حل برای یک سوال وجود داشته باشد .

سوال اول:

الف : ابتدا با توجّه به قانون وین، دمای دو ستاره را به دست می‌آوریم:

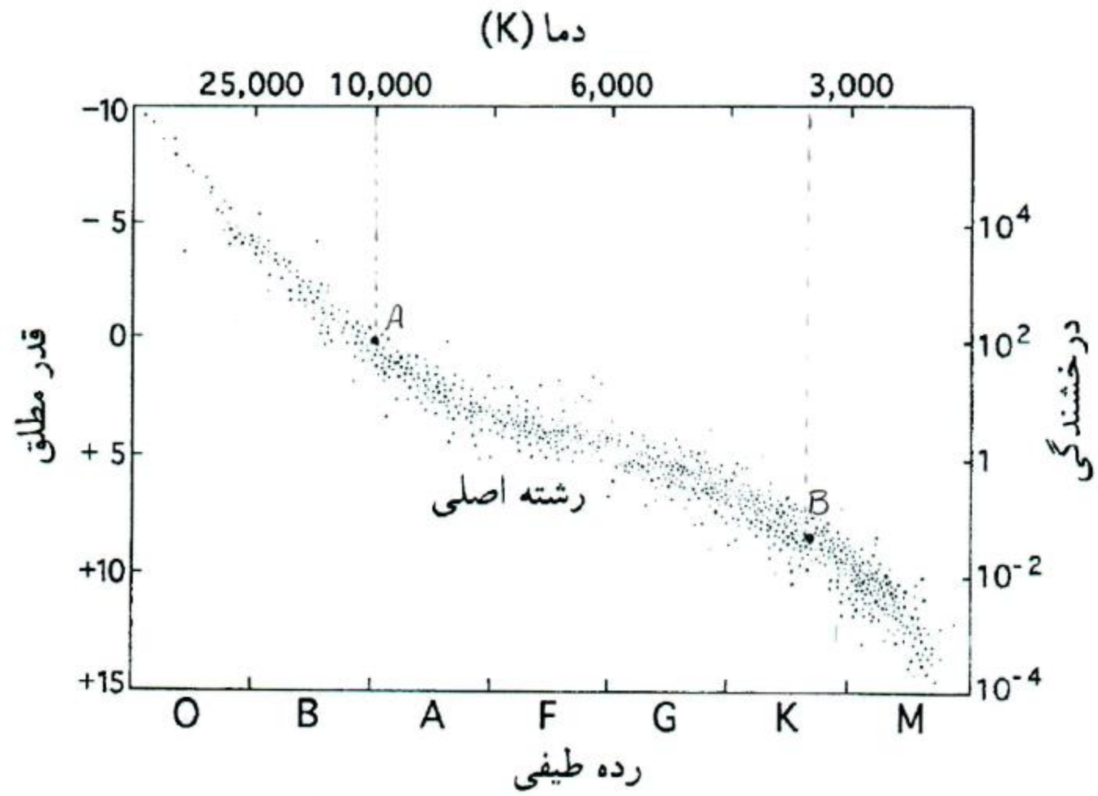
$$\lambda_{I_{max}} T = 2.9 \times 10^3\ mK \rightarrow\ T_A = 10^4\ K \quad ; \quad T_B = \frac{10^4}{3} K$$

طبق قانون کدریت کرامر، کدریت با دما رابطه‌ی عکس دارد؛ در نتیجه هر چه تعداد خطوط جذبی بیشتر باشد، دمای ستاره کمتر خواهد بود. پس طیف 1 مربوط به ستاره‌ی A و طیف 2 مربوط به ستاره‌ی B است.

ب : از آن‌جا که هر دو ستاره در مرحله‌ی هیدروژن‌سوزی قرار دارند، مکان آن‌ها روی رشته‌ی اصلی خواهد بود. مکان ستاره‌ی A به دلیل وجود عدد 10000 روی نمودار به راحتی مشخّص می‌شود. امّا با توجّه به لگاریتمی بودن مقیاس نمودار، برای مشخّص کردن ستاره‌ی B خواهیم داشت:

$$\frac{\log T_B - \log 3000}{\log 6000 - \log 3000} = \frac{x}{X}$$

که x و X فاصله روی نمودار از دمای 6000 هستند. با اندازه‌گیری X با خط‌کش، مقدار x قابل تعیین خواهد بود.



پ : با توجه به رابطه جرم درخشندگی داریم :

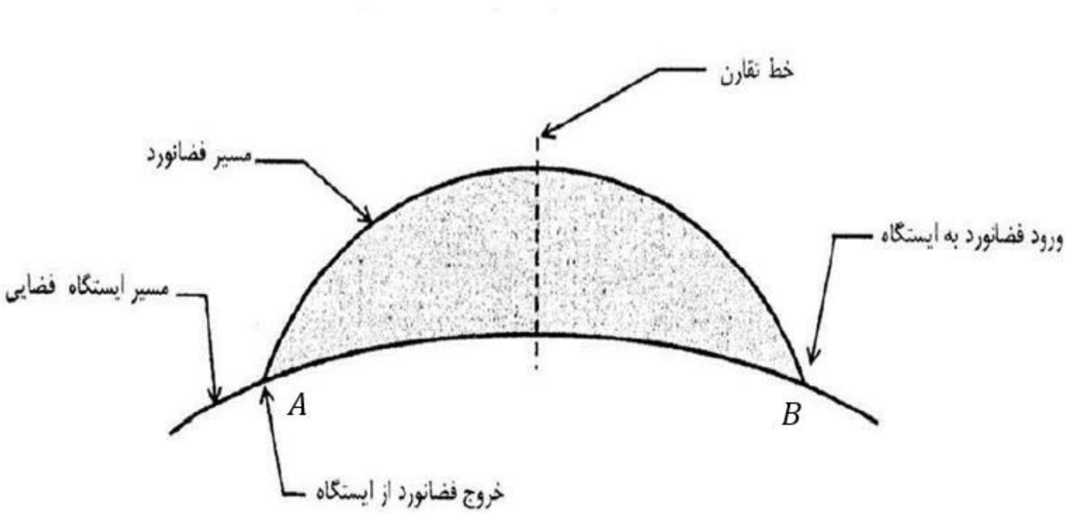
$$\frac{L}{L_{sun}} = \left(\frac{M}{M_{Sun}}\right)^{3.5} \rightarrow \frac{L_A}{L_B} = \left(\frac{M_A}{M_B}\right)^{3.5} \rightarrow \frac{M_A}{M_B} = \left(\frac{L_A}{L_B}\right)^{\frac{2}{7}}$$

از روی نمودار میتوان L_B و L_A را با توجه به جایگاه آن ها روی رشته اصلی بدست آورد. پس برای نسبت جرم داریم :

$$\frac{M_A}{M_B} = 9.44$$

سوال دوم:

الف: در این سوال با استفاده از قانون دوم کپلر و اطلاعات داده شده، باید مشخصات مدار را حساب کنیم.



با توجه به زمان مانور، زاویه‌ای که ایستگاه فضایی در طی مانور فضانورد طی می‌کند برابر است با:

$$\Delta\theta_{tot} = \frac{2\pi}{T}\Delta t = \frac{2\pi}{T} \times \frac{4T}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

پس فاصله زاویه‌ای دو نقطه A و B برابر مقدار زیر است:

$$\Delta\theta_{AB} = \Delta\theta_{tot} - 2\pi = \frac{2\pi}{3}$$

چون مدار فضانورد نسبت به خط نشان داده شده متقارن است (نسبت به نقطه اوج)، پس فاصله زاویه‌ای نقطه A از نقطه اوج و نقطه حضیض خواهد شد:

$$\theta'_A = \frac{\pi}{3} = 60° \rightarrow \theta_A = 180° - 60° = 120°$$

و با توجه به رابطه قطبی بیضی داریم:

$$r_A = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta_A} \rightarrow a(1-e^2) = R(1-\frac{e}{2})$$

که در رابطه بالا ، R شعاع مداری ایستگاه فضایی است.

مساحت جاروب شده توسط فضانورد در طی مانور برابر است با:

$$s = 2 \times \left(\frac{1}{2}R^2\theta_A\right) = \frac{\pi}{3}R^2 + 0.728\pi R^2 = 1.06R^2$$

پس با توجه به قانون دوم کپلر داریم:

$$\frac{s}{A_{tot}} = \frac{\Delta t}{T_{as}} \rightarrow \frac{1.06\pi R^2}{\pi ab} = \frac{\frac{4T}{3}}{T_{as}} = \frac{4T}{3T_{as}}$$

که در رابطه فوق، T_{as} دوره تناوب مدار فضانورد است. حال با توجه به قانون سوم کپلر:

$$\frac{T}{T_{as}} = \left(\frac{R}{a}\right)^{1.5} \rightarrow \frac{1.06\pi 8R^2}{\pi ab} = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{a}\right)^{1.5} \rightarrow \frac{1.06\pi R^2}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}} = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{a}\right)^{1.5}$$

$$\sqrt{\frac{R}{a}} = \frac{4\sqrt{1-e^2}}{3\times 1.06} \rightarrow \frac{R}{a} = 1.58(1-e^2)$$

و با توجه به رابطه بین R و a داریم:

$$\frac{R}{a} = \frac{(1-e^2)}{1-\frac{e}{2}} \rightarrow \frac{1-e^2}{1-\frac{e}{2}} = 1.58(1-e^2) \rightarrow 1-\frac{e}{2} = 0.634 \rightarrow e = 0.733$$

ب : با توجه به این که خروج از مرکز مدار را داریم:

$$\frac{R}{a} = \frac{1-e^2}{1-\frac{e}{2}} \rightarrow \frac{R}{a} = 0.73 \rightarrow a = 1.37R$$

ج : سرعت ایستگاه فضایی برابر است با:

$$v_s = \frac{2\pi R}{T} = \sqrt{\frac{GM_e}{R}}$$

در نقطه اوج، فاصله فضانورد از مرکز زمین برابر است با:

$$r = a(1+e)$$

با توجه به پایستگی انرژی داریم:

$$E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_e}{r} = -\frac{GM_e}{2a} \rightarrow v = \sqrt{GM_e\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{GM_e\left(\frac{2}{a(1+e)} - \frac{1}{a}\right)} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{a}\frac{1-e}{1+e}}$$

حال با توجه به خروج از مرکز و نسبت شعاع مداری فضانورد به نیم محور مدار سیاره داریم:

$$v = 0.338\sqrt{\frac{GM_e}{R}} = 0.338\left(\frac{2\pi R}{T}\right)$$

پس اندازه سرعت نسبی فضانورد و ایستگاه فضایی برابر است با:

$$v_{rel} = v_s - v = 0.662\left(\frac{2\pi R}{T}\right) = 4.159\frac{R}{T}$$

سوال سوم:

برایند نیروهای وارد بر سفینه را این گونه می‌توان نوشت:

$$\sum \vec{F} = F_g(-\hat{r}) + F_{rad}\hat{r} \rightarrow \sum F = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{2FA}{c} = \left(\frac{LA}{2\pi c} - GMm\right)\frac{1}{r^2} = \frac{k}{r^2}$$

الف) هنگام باز شدن بادبان‌های سفینه، با افزایش سطح مقطع بادبان‌ها نیروی تابشی افزایش می‌یابد؛ تا جایی که در یک لحظه، شتاب تغییر علامت داده و k مثبت می‌شود. این تنها اثری است که می‌توان از باز شدن

بادبان روی نمودار مکان-زمان مشاهده کرد که به صورت نقطه‌ی عطف خود را نشان خواهد داد (چرا که مشتق دوّم تابع تغییر جهت داده است).

به منظور تعیین تقریبی این نقطه، می‌توان نقطه‌ای را که شیب خطّ مماس بر نمودار صعودی می‌شود را یافت. (لحظه‌ای که بادبان به قدری باز شود که علامت شتاب تغییر کند.) این نقطه تقریباً بر نقطه‌ی عطف تابع فاصله بر حسب زمان واقع است.

ب) با توجّه به این که هر دو نیرو پایستار هستند، می‌توان میدان انرژی پتانسیل ناشی از این دو نیرو را یافت و سپس از فرم پایستار رابطه‌ی تغییرات انرژی مکانیکی استفاده کرد (پایستگی انرژی مکانیکی). از آن‌جا که تقارن کروی برقرار است و پتانسیل را در بینهایت می‌توان صفر در نظر گرفت، داریم:

$$\Delta U = -W = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \to U - U_\infty = -\int_\infty^r \frac{k}{r^2} dr$$

$$\to U - U_\infty = \left[\frac{k}{r}\right]_\infty^r = \left(\frac{LA}{2\pi c} - GMm\right)\frac{1}{r}$$

که البتّه با استدلال k/r^2 بودن میدان نیرو و شباهت با گرانش هم می‌توانستیم به این رابطه برسیم. حال دو نقطه روی نمودار را که مربوط به پس از باز شدن بادبان‌ها (رسیدن k به یک مقدار ثابت) هستند، به دل‌خواه انتخاب کرده و رابطه‌ی پایستگی انرژی را برای آن دو نقطه می‌نویسیم. برای محاسبه‌ی سرعت نیز از شیب خطّ مماس بر نمودار مکان-زمان استفاده می‌کنیم. به دلیل سادگی کار، در این‌جا نقطه‌ی 2، کمینه‌ی فاصله انتخاب می‌شود ($v_2 = 0$).

در نتیجه:

$$\Delta E = 0 \to K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \to \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{k}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{k}{r^2}$$

$$\to \frac{LA}{2\pi c} - GMm = \frac{mv_1^2}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^{-1} \to \frac{LA - 2\pi cGMm}{\pi c} = \frac{mv_1^2 r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

$$\to A = \frac{1}{L}\left(\frac{\pi cmv_1^2 r_1 r_2}{r_1 - r_2} + 2\pi cGMm\right)$$

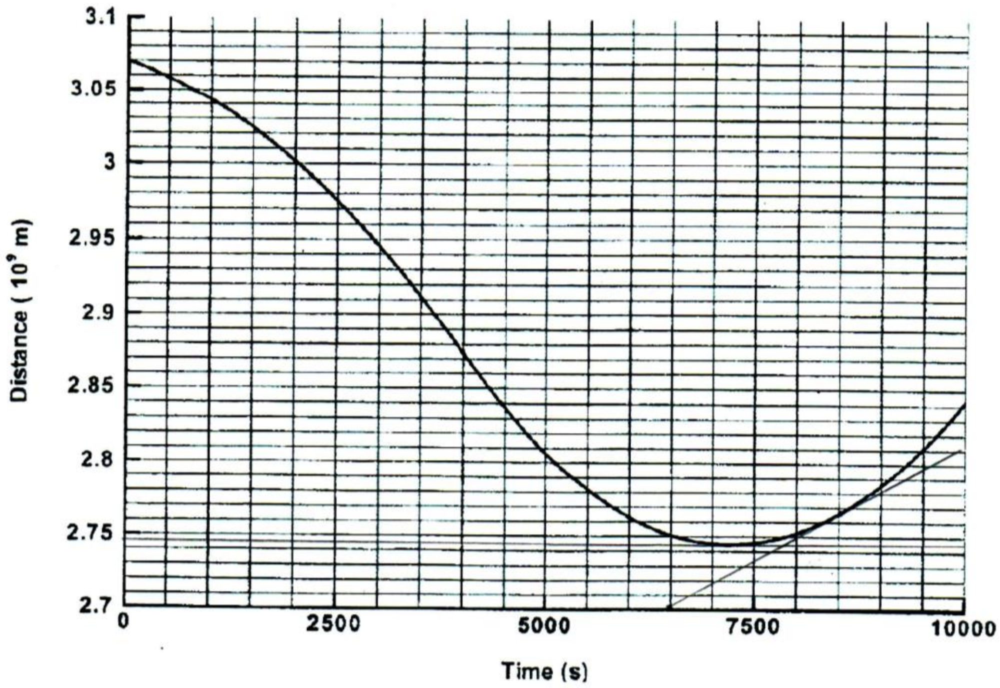
که در آن:

$$t_1 = 8500\, s \;\;;\;\; r_1 = d_1 = 2.765 \times 10^9\, m \;\;;\;\; v_1 = 32.5\, km/s$$

$$t_2 = 7250\, s \;\;;\;\; r_2 = d_2 = 2.745 \times 10^9\, m \;\;;\;\; v_2 = 0\, km/s$$

با جایگذاری مقادیر در رابطه، مساحت بادبان‌ها چنین به دست خواهد آمد:

$$A = 40.86\ m^2$$

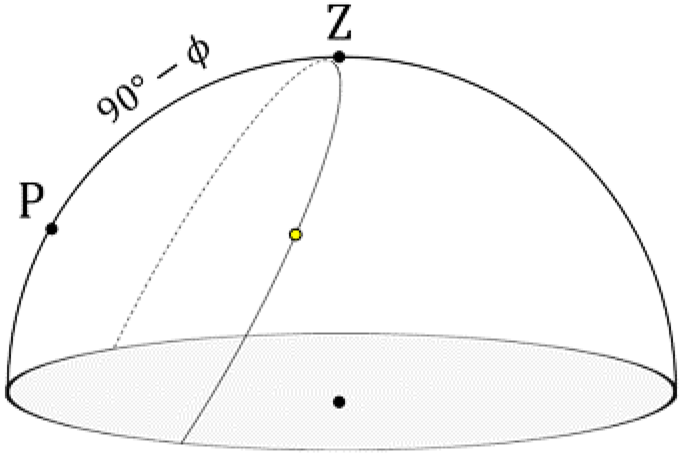


سوال چهارم:

ابتدا به این نکته توجّه می‌کنیم که ستارگان گذرنده از سرسو دارای میل $\delta = \phi$ هستند.

$$90° - \delta = 90° - \phi$$

$$\rightarrow \delta = \phi$$



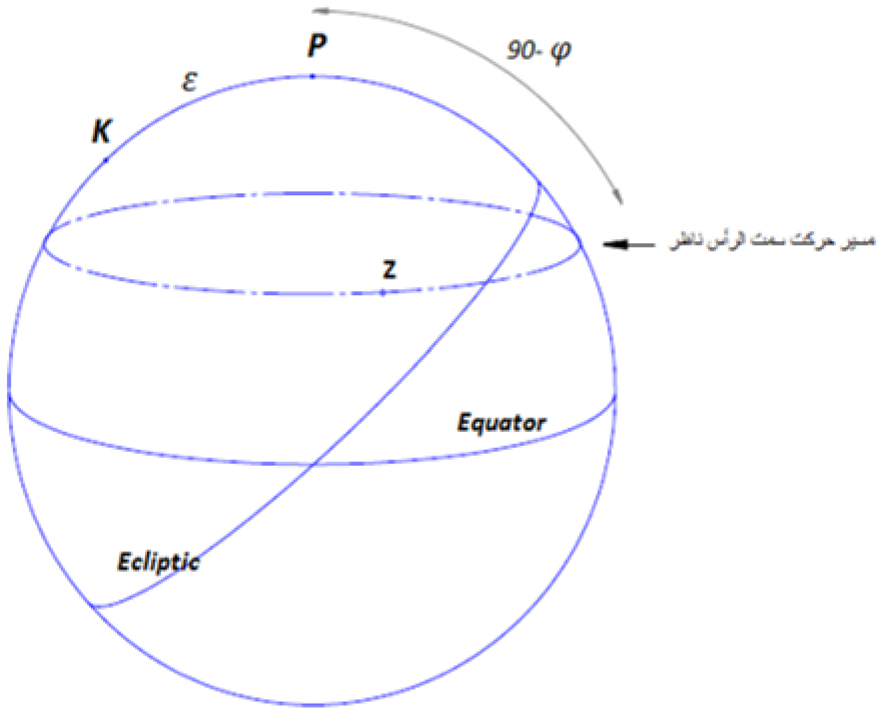
دایره‌البروج و استوای سماوی را بر روی کره‌ی سماوی رسم می‌کنیم. مکان هندسی ستارگان گذرنده از سرسو دایره‌ی صغیره‌ای به فاصله φ از استوای سماوی و موازی آن است.

الف) در حالتی که $\phi < 90 - \varepsilon$:

$$90 - \varepsilon > \varphi \Rightarrow 90 - \varphi > \varepsilon$$

بنابراین در این حالت مسیر حرکت سرسو دارای میل کمتر از قطب شمال دایره‌البروج شده و کمترین طول دایره‌البروجی آن صفر می باشد.

$$\lambda_{min} = 0$$

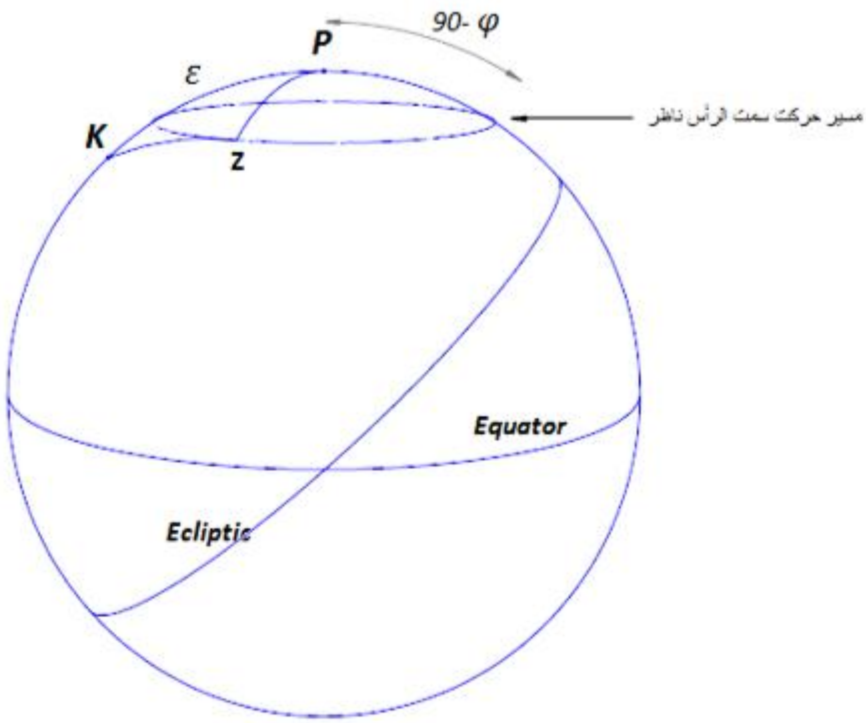


ب) در حالتی که $\phi > 90 - \varepsilon$:

$$90 - \varepsilon < \varphi \rightarrow 90 - \varphi < \varepsilon$$

در این حالت مسیر حرکت سرسو دارای میل بیشتر از قطب شمال دایره‌البروج شده و کمترین طول دایره‌البروجی هنگامی رخ می‌دهد که دایره‌ی عظیمه‌ی گذرنده از آن بر مسیر حرکت سرسو مماس باشد. در چنین حالتی شعاع دایره‌ی صغیره ($\widehat{KZ}$) بر کمان مماس ($\widehat{PZ}$) عمود خواهد بود. ($\angle Z = 90°$) بنابراین در مثلّث ΔPZK با نوشتن رابطه‌ی سینوس‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\sin 90°} = \frac{\sin{(90 - \phi)}}{\sin{(90 - \lambda_{min})}} \Rightarrow \lambda_{min} = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\varepsilon}\right)$$



سوال پنجم:

الف: با توجه به صورت سوال برای سرعت در راستای خط دید داریم:

$$v = H_0 r + v_p$$

و سرعت جسم به صورت زیر با انتقال به سرخ آن رابطه دارد:

$$z = \frac{v}{c} \to v = zc$$

پس:

$$zc = H_0 r + v_p \to H_0 r = zc - v_p \to H_0 = \frac{zc}{r} - \frac{v_p}{r}$$

ب: هنگامی که حرکت خاصه وجود ندارد، ثابت هابل بر حسب قرمز گرایی به صورت زیر داده میشود :

$$zc = H_0 r \to H_0' = \frac{zc}{r}$$

حال هنگامی که حرکت خاصه را در نظر بگیریم، داریم:

$$H_0 = \frac{zc}{r} - \frac{v_p}{r}$$

پس خطایی که به علت در نظر نگرفتن حرکت خاصه در محاسبه ثابت هابل بوجود می‌آید برابر است با:

$$|H_0 - H_0'| = \frac{v_p}{r}$$

بنابراین برای خطای نسبی داریم:

$$\text{خطا نسبی} = \left|\frac{\text{مقدار واقعی} - \text{مقدار مشاهده شده}}{\text{مقدار واقعی}}\right| = \left|\frac{H_0 - H_0{}'}{H_0}\right| = 0.05$$

می‌دانیم مقدار واقعی ثابت هابل برابر است با:

$$H_0 = 72\ km\ s^{-1} Mpc^{-1}$$

پس داریم:

$$\frac{v_p}{r} = 0.05 \times 72\ km\ s^{-1} Mpc^{-1} \rightarrow r = \frac{v_p}{0.05 \times 72}$$

$$\rightarrow r = 166.7\ Mpc$$

ج: قرمزگرایی ناشی از انبساط هابلی برابر است با:

$$z_H = \frac{H_0 c}{r}$$

قرمزگرایی ناشی از حرکت خاصه برابر است با:

$$z_p = \frac{v_p}{c} = \frac{1}{500}$$

پس برای قرمزگرایی مجموع داریم:

$$(1 + z_t) = (1 + z_H)\left(1 + z_p\right) \rightarrow z_H = 0.0379$$

حال اگر حرکت خاصه نداشته باشیم، قرمزگرایی مجموع، همان قرمزگرایی هابلی خواهد بود. پس تغییر در قرمزگرایی را در اثر حرکت خاصه، به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta z = z_t - z_H = 0.04 - 0.0379 = 0.038$$

دقت کنید که برای پیدا کردن قرمز گرایی مجموع نباید قرمز گرایی ها را با هم جمع کنیم.

سوال ششم:

الف: ابتدا با توجه به فاصله‌ی خوشه، قدر مطلق کهکشان‌ها را حساب می‌کنیم:

$$d = 62\ ly \rightarrow d = 1.9 \times 10^{7}\ pc$$

$$m_M - M_B = 5\log\left(\frac{d}{10}\right) \rightarrow M_B = m_B - 5\log\left(\frac{d}{10}\right)$$

حال می‌توانیم درخشندگی کهکشان در باند آبی را مشخص کنیم:

$$M_B - M_{sun} = -2.5\log(L_B) \rightarrow L_B = 10^{-\frac{M_B - M_{sun}}{2.5}}$$

که در رابطه بالا، L_B درخشندگی بر حسب درخشندگی خورشید در باند آبی است.

حال با توجه به رابطه جرم و درخشندگی داریم:

$$M = L_B \times \left(\frac{M}{L_B}\right)$$

و برای مرکز جرم خوشه داریم:

$$x_{CM} = \sum_i \frac{M_i x_i}{M_{tot}}\ , y_{CM} = \sum_i \frac{M_i y_i}{M_{tot}}$$

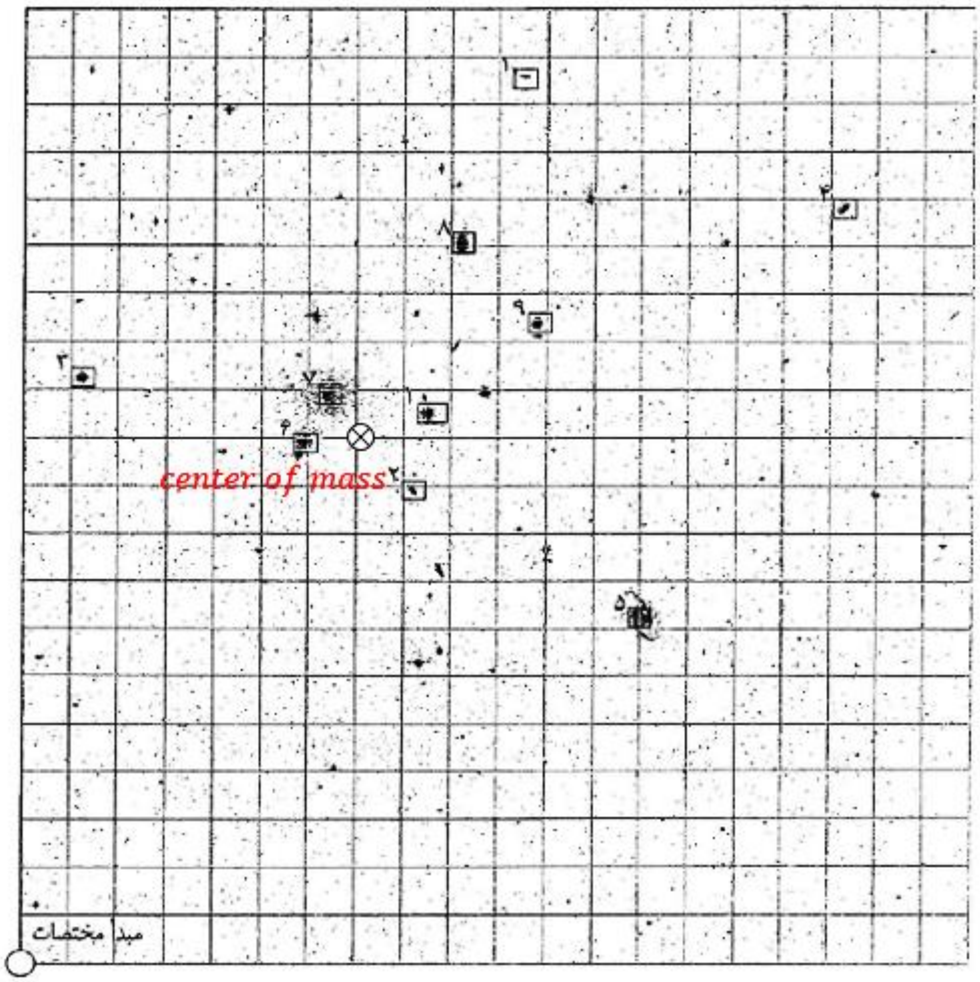
در جدول زیر، محاسبات مربوطه داده شده است.

جرم کهکشان بر حسب جرم خورشید	درخشندگی در باند آبی	قدر مطلق در باند آبی	شماره کهکشان
1.001×10^{8}	1.385×10^{7}	-12.38	1
3.394×10^{10}	3.813×10^{7}	-13.48	2
4.955×10^{9}	6.75×10^{8}	-16.60	3
1.707×10^{9}	2.474×10^{8}	-15.51	4
2.007×10^{11}	4.460×10^{10}	-21.15	5
8.490×10^{11}	1.655×10^{11}	-22.58	6
6.947×10^{11}	7.470×10^{10}	-21.71	7
9.148×10^{10}	9.148×10^{9}	-19.43	8
5.608×10^{9}	1.649×10^{9}	-17.57	9
9.061×10^{10}	1.590×10^{10}	-20.03	10

پس داریم:

$$(x_{CM}, y_{CM}) = (7.158, 11.14)$$

در شکل زیر، محل مرکز جرم نشان داده شده است.



ب: ابتدا درخشندگی کل خوشه را حساب می‌کنیم:

$$L_{gal} = \sum_i L_i = 3.124 \times 10^{11}\ L_{Sun}$$

می‌دانیم درخشندگی کهکشان‌ها، برابر 10 درصد درخشندگی خوشه است. پس درخشندگی کل خوشه برابر است با:

$$L_{tot} = \frac{L_{gal}}{0.1} \rightarrow L_{tot} = 3.124 \times 10^{12}\ L_{sun}$$

و برای مساحت خوشه داریم:

$$A = 47' \times 47' = 7952400\ arcsec$$

پس درخشندگی سطحی خوشه برابر است با:

$$I_{tot} = \frac{L_{tot}}{A} = 3.93 \times 10^5$$

پس قدر سطحی خوشه برابر است با:

$$M_{sur} - M_{sun} = -2.5 \log\left(\frac{I_{tot}}{L_{sun}}\right) \to M_{sur} = -8.5$$

حال با توجه به فاصله‌ی خوشه از ما:

$$m_{sur} = M_{sur} + 5 \log\left(\frac{d}{10}\right) \to m_{sur} = 22.87$$

سوال هفتم:

در شکل نام تمامی صورت‌فلکی‌های موجود در نقشه نوشته شده است.

الف: با توجه به شکل می‌توانید نام صورت‌فلکی‌هایی را که در شمال دایره‌البروج قرار دارند، ببینید. در زیر نام پنج صورت‌فلکی را به دلخواه ذکر می‌کنیم:

دب اصغر – دب اکبر – اکلیل شمالی – عوا – شلیاق

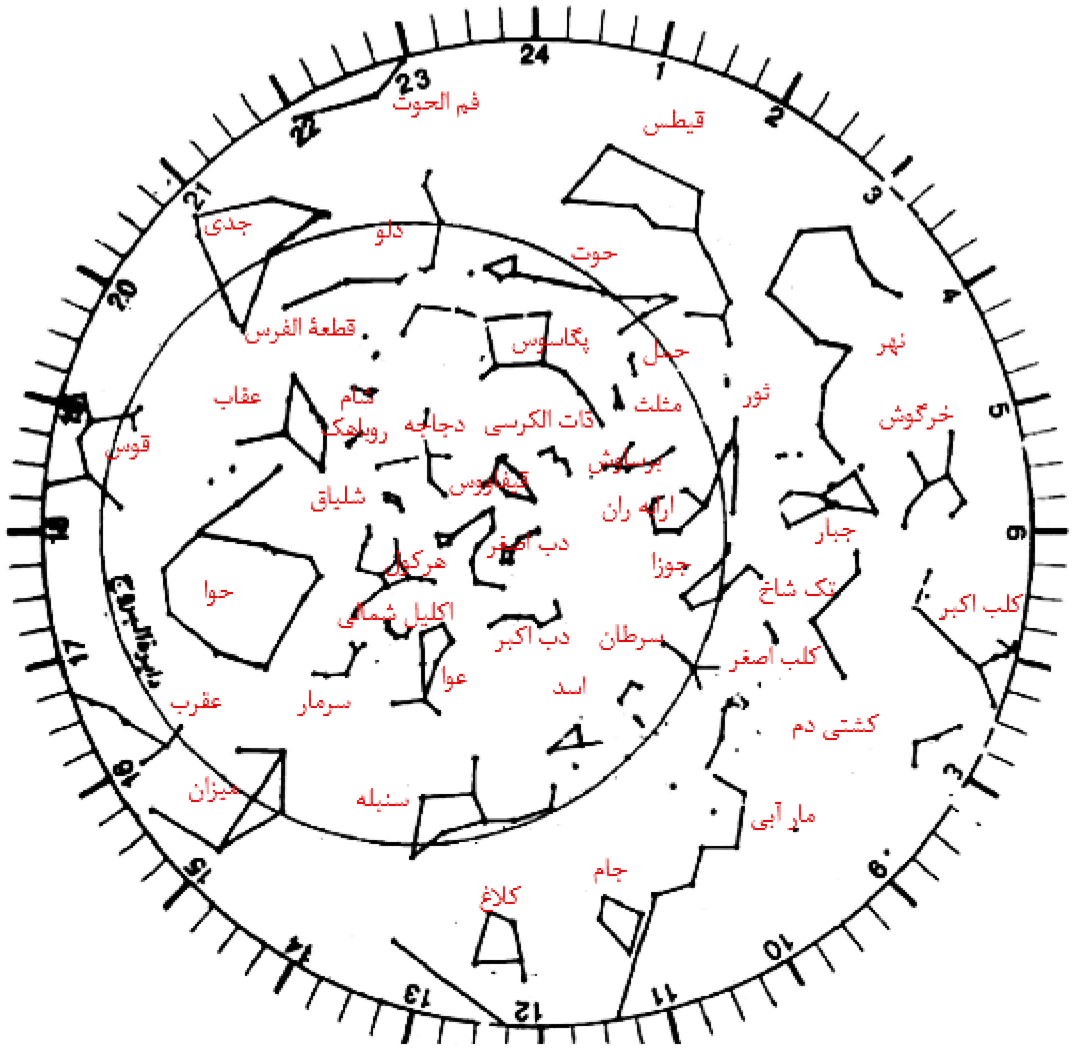
ب: در این بخش نیز با استفاده از نقشه می‌توانید صورت‌فلکی‌های مورد نظر را پیدا کنید. به عنوان مثال در زیر نام پنج صورت‌فلکی با شرایط خواسته شده را ذکر می‌کنیم:

جوزا – ارابه‌ران – برساوش – سرطان – جبار

پ: برای پیدا کردن تاریخ، پس از تنظیم کردن دو صفحه و قرار دادن ستاره‌ی قطبی (پلاریس) در جای مناسب، صفحه اول را بچرخانید به طوری که دنب در سرسو قرار گیرد. حال باید ببینیم که ساعت 8 روی صفحه اول، منطبق بر چه تاریخی روی صفحه دوم است. اگر این کار را درست انجام دهید، تاریخ رصد 26 مهر خواهد شد.

ت: در این بخش نیز پس از تنظیم دو صفحه، صفحه اول را طوری می‌چرخانیم که ستاره‌ی نسر طائر روی منحنی هم سمت 120 درجه قرار گیرد. می‌بینیم که ارتفاع آن برابر 47.5 درجه می‌شود.

ث : می‌دانیم فصل تابستان مربوط به صورت‌فلکی‌های سرطان، اسد و سنبله است. با نگاه کردن به نقشه دوم و تنظیم کردن اسطرلاب برای یکی از روزهای فصل تابستان، می‌بینید که نقطه‌ای با ارتفاع 10 درجه و سمت 80 درجه، نزدیک به ستاره‌ی قلب‌الاسد قرار دارد.



موفق باشید.

سید مرتضی سادات – محمد هادی ستوده – فاطمه زرگرباشی

بهار 94