فصل

۵

جوابهای سری معادلات خطی مرتبهٔ دوم

برای یافتن جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خطی باید مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ همگن پیدا کنیم. تا به حال تنها برای حالتی که ضرایب معادله ثابت هستند روش نظام‌مندی برای ساختن جوابهای اساسی ارائه کرده‌ایم. برای بررسی ردهٔ بزرگ‌تری از معادله‌ها، که ضرایبشان متغیرند، لازم است که جواب را در رده‌ای بزرگ‌تر از ردهٔ تابعهای مقدماتی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال جستجو کنیم. ابزار اصلی مورد نیازمان نمایش تابع با سری توانی است. ایدهٔ اصلی مشابه ایدهٔ روش ضرایب نامعین است: فرض می‌کنیم که جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را می‌توان به‌صورت سری توانی بسط داد و سپس سعی می‌کنیم ضرایب سری توانی را طوری تعیین کنیم که در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند.

۱.۵ مرور خواص سریهای توانی

در این فصل کاربرد سریهای توانی را برای ساختن جوابهای اساسی معادلات خطی مرتبهٔ دومی که ضرایبشان تابعهایی از متغیر مستقل هستند بررسی می‌کنیم. این کار را با یادآوری خلاصهٔ احکام موردنیاز سریهای توانی شروع می‌کنیم. اگر به چیزی بیش از آنچه در اینجا آورده‌ایم نیاز دارید، باید به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مراجعه کنید.

۱. می‌گوییم سری توانی $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ در نقطهٔ x همگرا است اگر

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

به‌ازای آن x موجود باشد. به‌ازای $x=x_0$ سری مطمئناً همگراست؛ ممکن است به‌ازای هر x همگرا باشد و یا تنها به‌ازای مقادیری از x همگرا باشد و به‌ازای مقادیر دیگر همگرا نباشد.

۲. می‌گوییم سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ در نقطهٔ x همگرای مطلق است اگر سری

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(x-x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x-x_0|^n$$

همگرا باشد. می‌توان ثابت کرد که هر سری همگرای مطلق، همگرا هم هست؛ اما عکس این حکم لزوماً درست نیست.

۳. یکی از مفیدترین آزمونها برای همگرایی مطلق سری توانی، آزمون نسبت است. اگر $a_n \neq 0$ و اگر به‌ازای مقدار ثابتی از x بدانیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|L$$

آنگاه سری توانی به‌ازای آن مقدار x همگرای مطلق است اگر $|x-x_0|L<1$ و واگراست اگر $|x-x_0|L>1$. اگر $|x-x_0|L=1$، نتیجه‌ای از این آزمون به‌دست نمی‌آید.

مثال ۱

سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n(x-2)^n$$

به‌ازای چه مقادیری از x همگراست؟

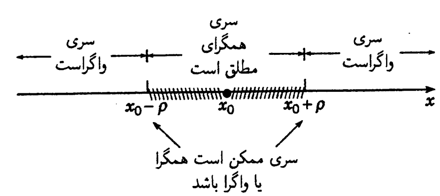
برای بررسی همگرایی از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم. می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

طبق گزارهٔ ۳، سری به‌ازای $|x-2|<1$ یا $1<x<3$ همگرای مطلق و به‌ازای $|x-2|>1$ واگراست. مقادیر x متناظر $|x-2|=1$، عبارت‌اند از $x=1$ و $x=3$. سری به‌ازای هر یک از این مقدارهای x واگراست، چون جملهٔ nام آن وقتی $n\to\infty$ به صفر میل نمی‌کند.

۴. اگر سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ در $x=x_1$ همگرا باشد آنگاه به‌ازای هر x که $|x-x_0|<|x_1-x_0|$ همگرای مطلق است و اگر در $x=x_1$ واگرا باشد به‌ازای هر x که $|x-x_0|>|x_1-x_0|$ واگراست.

۵. عددی نامنفی مانند ρ موجود است که $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ وقتی $|x-x_0|<\rho$ همگرای مطلق و وقتی $|x-x_0|>\rho$ واگرا است. به این ρ **شعاع همگرایی** می‌گوییم. برای سری‌ای که تنها در x_0 همگراست، ρ را صفر و برای سری‌ای که به‌ازای هر x همگراست ρ را بینهایت می‌گیریم. اگر $\rho>0$ به بازهٔ $|x-x_0|<\rho$ را **بازهٔ همگرایی** می‌گوییم. این بازه را در شکل ۱.۱.۵ با خطوط هاشورخورده نشان داده‌ایم. وقتی $|x-x_0|=\rho$ سری ممکن است همگرا و یا واگرا باشد.



شکل ۱.۱.۵ بازهٔ همگرایی سری توانی.

مثال ۲

شعاع همگرایی سری توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n}$$

را معین کنید.

آزمون نسبت را بکار می‌گیریم. می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\frac{n2^n}{(x+1)^n}\right| = \frac{|x+1|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2};$$

پس سری به‌ازای $|x+1|<2$ یا $-3<x<1$ همگرای مطلق و به‌ازای $|x+1|>2$ واگراست. شعاع همگرایی سری توان $\rho=2$ است. درنهایت نقاط انتهایی بازهٔ همگرایی را بررسی می‌کنیم. در $x=1$ سری تبدیل به سری همساز

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

می‌شود که واگراست. در $x=-3$ سری تبدیل می‌شود به

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

که همگراست، اما همگرای مطلق نیست. در این حالت، می‌گوییم سری در $x=-3$ همگرای مشروط است. به‌طور خلاصه، سری توانی به‌ازای $-3\le x<1$ همگرا و در غیر این‌صورت واگراست. سری به‌ازای $-3<x<1$ همگرای مطلق است و شعاع همگرایی آن ۲ است.

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n$ به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ که $\rho>0$ به‌ترتیب به $f(x)$ و $g(x)$ همگرا باشند.

۶. سریها را می‌توان جمله به جمله جمع و تفریق کرد:

$$f(x)\pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)(x-x_0)^n.$$

سریهای حاصل حداقل به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ همگرا هستند.

۷. سریها را می‌توان به‌صورت صوری ضرب کرد:

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

که در آن $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0$. سری حاصل حداقل به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ همگراست.

علاوه بر این اگر $g(x_0)\neq 0$، سریها را می‌توان به‌صورت صوری تقسیم کرد:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n$$

اغلب ساده‌ترین راه برای تعیین d_n مساوی قرار دادن ضرایب جملات هم‌توان در دو طرف است؛ یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right]$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n.$$

در حالت تقسیم، شعاع همگرایی سری توانی حاصله ممکن است کمتر از ρ باشد.

۸. تابع f به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ پیوسته و از هر مرتبه مشتق‌پذیر است. به‌علاوه f'، f''، ... را می‌توان با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سری به‌دست آورد؛ یعنی

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1},$$
$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

و به همین ترتیب، و هر یک از سریها به‌ازای $|x-x_0|<\rho$ همگرای مطلق است.

۹. مقدار a_n برابر است با

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

به این سری، سری تیلور[1] تابع f حول $x=x_0$ می‌گوییم.

۱۰. اگر به‌ازای هر x در بازهٔ بازی با مرکز x_0،

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

آنگاه به‌ازای هر n، $a_n=b_n$. به‌ویژه اگر به‌ازای هر x، $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$، آنگاه

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = \cdots = 0.$$

اگر تابع f حول $x=x_0$ بسط تیلوری به‌صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

---

۱. بروک تیلور (۱۶۸۵-۱۷۳۱م) برجسته‌ترین ریاضیدان انگلیسی در نسل بعد از نیوتن است. او در ۱۷۱۵ میلادی صورتی کلی از قضیهٔ بسط ارائه کرد که به نام او نامیده شد ــ نتیجه‌ای که یکی از حکمهای اساسی همهٔ شاخه‌های آنالیز است. او یکی از پایه‌گذاران حساب تفاضلهای متناهی هم بود و اولین کسی است که وجود جواب منفرد را برای معادلات دیفرانسیل تشخیص داد.

با شعاع همگرایی مثبت $\rho>0$ داشته باشد، می‌گوییم در $x=x_0$ **تحلیلی** است. همهٔ تابعهای آشنا در حساب دیفرانسیل و انتگرال جز در نقاطی که به‌سادگی قابل تشخیص هستند، تحلیلی هستند. به‌عنوان مثال، e^x و $\sin x$ همه‌جا تحلیلی هستند. $1/x$ جز در $x=0$ و $\tan x$ جز در مضربهای فرد $\pi/2$ تحلیلی هستند. طبق گزاره‌های ۶ و ۷، اگر f و g در x_0 تحلیلی باشند، $f\pm g$، $f\cdot g$ و f/g [به‌شرط اینکه $g(x_0)\neq 0$] هم در $x=x_0$ تحلیلی هستند. از بسیاری جنبه‌ها، بستر طبیعی استفاده از سریهای توانی صفحهٔ مختلط است. روشها و نتایج این فصل را تقریباً همواره می‌توان به معادلات دیفرانسیلی که در آن متغیرهای مستقل و وابسته مختلط‌مقدار هستند تعمیم داد.

تغییر اندیس مجموع. اندیس مجموع در سریهای نامتناهی مثل متغیر انتگرال‌گیری در انتگرال معین پارامتری ظاهری است، پس اینکه چه حرفی در اندیس مجموع به‌کار برود مهم نیست. به‌عنوان مثال

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

درست مانند تغییر متغیر انتگرال‌گیری در انتگرال معین، گاهی تغییر اندیس در محاسبهٔ جواب سری معادلات دیفرانسیل کار را ساده‌تر می‌کند. چگونگی تغییر در اندیس مجموع را در چند مثال نشان می‌دهیم.

مثال ۳

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ را به‌صورت سری‌ای بنویسید که جملهٔ اول آن به‌جای $n=2$ متناظر $n=0$ باشد.

فرض کنید $m=n-2$؛ پس $n=m+2$ و $n=2$ متناظر $m=0$ است. بنابراین

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} \tag{1}$$

با نوشتن چند جملهٔ اول هر یک از سریها می‌توانید تحقیق کنید که جمله‌های هر دو سری دقیقاً یکی هستند. درنهایت در سری طرف راست معادلهٔ (۱) اندیس m را با n عوض می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \tag{2}$$

در حقیقت اندیس را به اندازهٔ ۲ واحد به بالا انتقال دادیم و این تغییر را با شروع شمارش از ۲ واحد کمتر جبران کردیم.

مثال ۴

سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2} \tag{3}$$

را به‌صورت سری‌ای با جملهٔ عمومی $(x-x_0)^n$ به‌جای $(x-x_0)^{n-2}$ بنویسید.

مجدداً، اندیس را ۲ واحد تغییر می‌دهیم که n با $n+2$ جایگزین شود و از ۲ واحد کمتر می‌شمریم. نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^n. \tag{4}$$

به‌سادگی می‌توانید تحقیق کنید که جمله‌های سریهای (۳) و (۴) دقیقاً یکی هستند.

مثال ۵

عبارت

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n-1} \tag{5}$$

را به‌صورت سری‌ای با جملهٔ عمومی x^{r+n} بنویسید.

ابتدا x^2 را داخل مجموع می‌بریم؛ نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n+1}. \tag{6}$$

سپس اندیس را ۱ واحد به پایین انتقال می‌دهیم و از ۱ واحد بالاتر می‌شمریم؛ پس

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_nx^{r+n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(r+n-1)a_{n-1}x^{r+n}. \tag{7}$$

مجدداً به‌سادگی می‌توانید تحقیق کنید که جمله‌های سریهای معادلهٔ (۷) یکی هستند و جمله‌های هر دوی آنها دقیقاً با جمله‌های عبارت (۵) یکی هستند.

مثال ۶

فرض کنید به‌ازای هر x،

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{8}$$

تعیین کنید که از این معادله چه نتیجه‌ای دربارهٔ ضریب a_n به‌دست می‌آید.

می‌خواهیم با استفاده از گزارهٔ ۱۰، ضرایب نظیر در دو سری را مساوی قرار بدهیم. برای انجام این کار، باید ابتدا معادلهٔ (۸) را طوری بازنویسی کنیم که جملهٔ عمومی سریها نسبت به x هم‌توان باشند. به‌عنوان مثال در سری طرف چپ معادلهٔ (۸) می‌توانیم n را با $n+1$ جایگزین کنیم و از یک واحد پایین‌تر بشمریم؛ پس معادلهٔ (۸) تبدیل می‌شود به

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{9}$$

از گزارهٔ (۱۰)، نتیجه می‌گیریم که

$$(n+1)a_{n+1}=a_n,\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

یا

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1},\qquad n=0,1,2,3,\ldots; \tag{10}$$

بنابراین با قرار دادن مقادیر متوالی n در معادله (۱۰) نتیجه می‌شود

$$a_1=a_0,\qquad a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{a_0}{2},\qquad a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{a_0}{3!}$$

و به همین ترتیب، در حالت کلی،

$$a_n=\frac{a_0}{n!},\qquad n=1,2,3,\ldots \tag{11}$$

پس رابطهٔ (۸) همهٔ ضرایب را برحسب a_0 معین می‌کند. درنهایت با استفاده از ضرایب داده‌شده در معادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=a_0e^x.$$

طبق معمول، قرار داده‌ایم $0!=1$.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۸، شعاع همگرایی سری توانی داده‌شده را تعیین کنید.

۱. $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$

۲. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}x^n$

۳. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$

۴. $\sum_{n=0}^{\infty}3^nx^n$

۵. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n^2}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n^2}$

۷. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nn^2(x+2)^n}{4^n}$

۸. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$

در هر یک از مسئله‌های ۹ تا ۱۶، سری تیلور تابع داده‌شده را حول نقطهٔ x_0 و شعاع همگرایی آن را تعیین کنید.

۹. $\sin x$، $x_0=0$

۱۰. e^x، $x_0=0$

۱۱. x، $x_0=1$

۱۲. x^2، $x_0=-1$

۱۳. $\ln x$، $x_0=1$

۱۴. $\frac{1}{1-x}$، $x_0=0$

۱۵. $\frac{1}{1+x}$، $x_0=0$

۱۶. $\frac{1}{1-x}$، $x_0=2$

۱۷. فرض کنید $y=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n$. y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جملهٔ اول هر یک از سریها و ضریب جملهٔ عمومی x^n را بنویسید.

۱۸. فرض کنید $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. y' و y'' را محاسبه کنید و چهار جملهٔ اول هر یک از سریها و ضریب جملهٔ عمومی x^n را بنویسید. ثابت کنید که اگر $y''=y$، a_0 و a_1 دلخواه هستند و a_2 و a_3 را برحسب a_0 و a_1 تعیین کنید. ثابت کنید به‌ازای $n=0,1,2,3,\ldots$، $a_{n+2}=a_n/(n+2)(n+1)$.

در هر یک از مسئله‌های ۱۹ و ۲۰، درستی معادلهٔ داده‌شده را تحقیق کنید.

۱۹. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$

۲۰. $\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}=a_1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{k+1}+a_{k-1})x^k$

در هر یک از مسئله‌های ۲۱ تا ۲۷، عبارت داده‌شده را به‌صورت مجموعی بازنویسی کنید که نمای جملهٔ عمومی آن برحسب x^n است.

۲۱. $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+2}$

۲۲. $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$

۲۳. $x\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}+\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$

۲۴. $(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-2)a_nx^{n-2}$

۲۵. $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_mx^{m-2}+x\sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1}$

۲۶. $x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

۲۷. $\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$

۲۸. a_n را طوری تعیین کنید که رابطهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n=0$$

برقرار باشد. سعی نکنید تابعی را که بسط آن $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ است بشناسید.

۲.۵ جوابهای سری حول نقطهٔ عادی، قسمت اول

در فصل ۳، روشهای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت را تشریح کردیم. در اینجا روشهای حل معادلات خطی مرتبهٔ دومی را بررسی می‌کنیم که ضرایبشان تابعی از متغیر مستقل هستند. در این فصل متغیر مستقل را با x نشان می‌دهیم. کافی است که معادلهٔ همگن

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0 \qquad (1)$$

را در نظر بگیریم؛ چون روند حل معادلهٔ غیرهمگن متناظر مشابه است.

در بسیاری از مسئله‌های فیزیک ریاضی به معادله‌هایی به شکل (۱) با ضرایب چندجمله‌ای برمی‌خوریم؛ معادله‌هایی مثل معادلهٔ بسل، یعنی

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

که در آن ν ثابت است و معادلهٔ لژاندار، یعنی

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

که در آن α ثابت است. هم به این دلیل و هم برای ساده کردن محاسبات جبری، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که P، Q و R چندجمله‌ای هستند. البته، همان‌طور که خواهیم دید، این روش حل برای حالتی که P، Q و R توابع تحلیلی دلخواهی هستند هم کاربرد دارد.

فعلاً فرض می‌کنیم که P، Q و R چندجمله‌ایهایی هستند که عامل مشترک ندارند. به‌علاوه، می‌خواهیم معادلهٔ (۱) را حول نقطهٔ x_0 حل کنیم. جواب معادلهٔ (۱) در بازهٔ شامل x_0 وابستگی زیادی به رفتار P در آن بازه دارد.

اگر $P(x_0)\neq 0$، x_0 را **نقطهٔ عادی** می‌گوییم. از پیوستگی P نتیجه می‌شود که بازه‌ای حول نقطهٔ عادی x_0 موجود است که در آن $P(x)$ مخالف صفر است. در آن بازه می‌توانیم معادلهٔ (۱) را بر $P(x)$ تقسیم کنیم و بنویسیم

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \qquad (2)$$

که در آن $p(x)=Q(x)/P(x)$ و $q(x)=R(x)/P(x)$ پیوسته هستند. بنابراین، طبق قضیهٔ وجود و یکتایی ۱.۲.۳، جوابی یکتا از معادلهٔ (۱) موجود است که به‌ازای مقادیر دلخواه y_0 و y'_0 در شرایط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ و $y'(x_0)=y'_0$ صدق می‌کند. در این بخش و بخش بعدی، جواب معادلهٔ (۱) را در همسایگی نقاط عادی بررسی می‌کنیم. در مقابل، اگر $P(x_0)=0$، x_0 را **نقطهٔ تکین** معادلهٔ (۱) می‌گوییم. در این حالت حداقل یکی از مقادیر $Q(x_0)$ و $R(x_0)$ ناصفر است و در نتیجه، حداقل یکی از ضرایب p و q در معادلهٔ (۲) وقتی $x\to x_0$ بی‌کران می‌شود. بنابراین، در این حالت نمی‌توانیم قضیهٔ ۱.۲.۳ را به‌کار ببریم. در بخش‌های ۴.۵ تا ۷.۵ به یافتن جوابهای معادلهٔ (۱) در همسایگی نقطه‌های تکین می‌پردازیم.

اکنون به حل معادلهٔ (۱) در همسایگی نقطهٔ عادی x_0 می‌پردازیم. می‌خواهیم جوابی به‌صورت

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \qquad (3)$$

پیدا کنیم و فرض می‌کنیم که سری به‌ازای ρای مثبتی در بازهٔ $|x-x_0|<\rho$ همگرا است. هرچند در نگاه اول ممکن است جستجوی جوابی به‌صورت سری توانی چندان جذاب به نظر نیاید، اما این شکل در عمل شکل مناسب و مفیدی است. در داخل بازهٔ همگرایی، رفتار سریهای توانی بسیار شبیه چندجمله‌ایها است و کار تحلیلی و عددی با آنها ساده است. درواقع، حتی اگر بتوانیم جوابی را برحسب توابع مقدماتی مانند توابع نمایی یا مثلثاتی به‌دست بیاوریم، وقتی بخواهیم مقدارشان را به‌صورت عددی محاسبه کنیم یا نمودارشان را رسم کنیم به احتمال زیاد به سری توانی و یا عبارت مشابهی نیاز داریم.

عملی‌ترین راه تعیین a_nها، این است که سری (۳) و مشتق‌هایش را به‌جای y، y' و y'' در معادلهٔ (۱) قرار بدهیم. در مثالهای زیر این روند را نشان داده‌ایم. توجه کنید که کارهایی مثل مشتق‌گیری که در این روند انجام می‌دهیم، تا وقتی معتبرند که در بازهٔ همگرایی باشیم. معادله‌های دیفرانسیلی که در این مثالها آورده‌ایم، به‌نوبهٔ خودشان بسیار مهم‌اند.

مثال ۱

جوابی به‌صورت سری برای معادلهٔ

$$y''+y=0,\qquad -\infty<x<\infty \qquad (4)$$

به‌دست بیاورید.

می‌دانیم که $\sin x$ و $\cos x$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای این معادله تشکیل می‌دهند، بنابراین برای حل این معادله نیازی به استفاده از سریها نداریم. اما در این مثال کاربرد سریهای توانی را در حالتی نسبتاً ساده می‌بینیم.

می‌خواهیم جوابی به‌صورت سری توانی

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (5)$$

حول $x_0 = 0$ پیدا کنیم و فرض می‌کنیم که سری در بازهٔ $|x| < \rho$ همگرا است. با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله نتیجه می‌شود

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \tag{6}$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}. \tag{7}$$

با قرار دادن سریهای (۵) و (۷) به‌جای y و y'' در معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

برای یکی کردن دو سری، باید حداقل یکی از آنها را طوری بازنویسی کنیم که نمای x در جملهٔ عمومی هر دو سری یکی شود. پس در سری اول اندیس مجموع را با جایگزینی $n+2$ به‌جای n و شروع جمع از صفر به‌جای ۲ تغییر می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

یا

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0.$$

برای اینکه این معادله به‌ازای هر x برقرار باشد، ضریب هر توان x باید صفر باشد؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

به معادلهٔ (۸) **رابطهٔ بازگشتی** می‌گوییم. ضرایب متوالی را می‌توان یکی‌یکی با نوشتن رابطهٔ بازگشتی به‌ازای $n = 0$ و سپس به‌ازای $n = 1$ و غیره محاسبه کرد. در این مثال، معادلهٔ (۸) هر ضریب را برحسب دو جملهٔ قبلی به‌دست می‌دهد. پس ضرایب با اندیس زوج $(a_0, a_2, a_4, \ldots)$ و ضرایب با اندیس فرد $(a_1, a_3, a_5, \ldots)$ به‌طور جداگانه تعیین می‌شوند. برای ضرایب با اندیس زوج می‌توانیم بنویسیم

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}, \qquad a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \ldots$$

به این ترتیب به‌نظر می‌رسد که در حالت کلی اگر $n = 2k$ آنگاه

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

معادلهٔ (۹) را می‌توانیم با استقرای ریاضی ثابت کنیم. ابتدا توجه کنید که رابطه به‌ازای $k = 1$ درست است. فرض کنید که حکم به‌ازای مقدار دلخواه k برقرار است و حالت $k+1$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} a_{2k+2} &= -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} \\ &= -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}a_0 \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!}a_0; \end{aligned}$$

بنابراین معادلهٔ (۹) به‌ازای $k+1$ هم درست است و در نتیجه به‌ازای همهٔ kهای صحیح و مثبت درست است.

به همین ترتیب برای ضرایب با اندیس فرد می‌توانیم بنویسیم

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \qquad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \qquad a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \ldots$$

و در حالت کلی اگر $n = 2k+1$، آنگاه[1]

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

با جایگزینی این ضرایب در معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots \\ &= a_0\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\right] \\ &= a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

حالا که سری جواب معادلهٔ (۴) را به‌صورت صوری به‌دست آورده‌ایم می‌توانیم همگرایی آنها را بررسی کنیم. می‌توانیم با آزمون ریشه نشان بدهیم که هر دو سری معادلهٔ (۱۱) به‌ازای هر x همگرا هستند و این به نوبهٔ خود همهٔ گامهای استفاده‌شده در به‌دست آوردن جوابها را تأیید می‌کند. درواقع، اولین سری معادلهٔ (۱۱) دقیقاً سری تیلور $\cos x$ حول $x = 0$ است و دومی، سری تیلور $\sin x$ حول $x = 0$ است. پس همان‌طور که انتظار می‌رفت، جواب

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

را به‌دست آورده‌ایم.

توجه کنید که شرطی روی a_0 و a_1 اعمال نشده است؛ بنابراین این پارامترها اختیاری هستند. از معادله‌های (۵) و (۶) می‌توانیم ببینیم که مقادیر a_0 و a_1 به‌ترتیب همان y و y' محاسبه‌شده در $x = 0$ هستند. چون شرایط اولیهٔ $y(0)$ و $y'(0)$ را می‌توان دلخواه انتخاب کرد، a_0 و a_1 باید تا زمان تعیین شرایط اولیه دلخواه باشند.

در شکلهای ۱.۲.۵ و ۲.۲.۵ چگونگی تقریب $\cos x$ و $\sin x$ با مجموعهای جزئی سریهای معادلهٔ (۱۱) را نشان داده‌ایم. با افزایش تعداد جمله‌ها، بازهٔ تقریب مناسب، طولانی‌تر می‌شود و به‌ازای هر x در این بازه دقت تقریب بیشتر می‌شود. با این حال، همواره باید به‌خاطر داشته باشید که تقریب جواب در همسایگی نقطهٔ شروع $x = 0$ نمی‌تواند به‌خوبی جواب را به‌ازای $|x|$ بزرگ نمایش بدهد.

۱. حکم معادلهٔ (۱۰) و فرمولهای مشابه این فصل را می‌توان با استقرا مشابه معادلهٔ (۹) ثابت کرد. ما فرض می‌کنیم که حکمها درست‌اند و از این به بعد استدلالهای استقرایی را حذف می‌کنیم.

سپس اندیس جمع سری طرف راست را با جایگزین کردن $n-1$ به‌جای n و شروع مجموع از ۱ به‌جای صفر انتقال می‌دهیم. بنابراین

$$2\cdot 1\, a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

برای اینکه معادله به‌ازای هر x در بازه برقرار باشد، باید ضرایب جمله‌های هم‌توان برحسب x مساوی باشند؛ بنابراین $a_2 = 0$ و به رابطهٔ بازگشتی

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \qquad n=1,2,3,\ldots \tag{19}$$

می‌رسیم. چون a_{n+2} برحسب a_{n-1} معلوم می‌شود، aها در گامهایی به طول ۳ مشخص می‌شوند. پس a_0، a_3 را و a_3، a_6 را تعیین می‌کند؛ a_1، a_4 را و a_4، a_7 را تعیین می‌کند؛ و a_2، a_5 را و a_5، a_8 را تعیین می‌کند. بقیهٔ ضریبها هم به همین ترتیب معلوم می‌شوند. چون $a_2 = 0$، بلافاصله نتیجه می‌شود که $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

برای پیدا کردن دنبالهٔ a_0، a_3، a_6، a_9، ... در رابطهٔ بازگشتی قرار می‌دهیم $n = 1, 4, 7, 10, \ldots$:

$$a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3}, \quad a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}, \quad a_9 = \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}, \ldots$$

به این ترتیب به‌نظر می‌رسد که دستور کلی باید

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdots(3n-1)(3n)}, \qquad n \ge 4$$

باشد. برای پیدا کردن دنبالهٔ a_1، a_4، a_7، a_{10}، ... در رابطهٔ بازگشتی قرار می‌دهیم $n = 2, 5, 8, 11, \ldots$:

$$a_4 = \frac{a_1}{3\cdot 4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{9\cdot 10} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}, \ldots$$

در حالت کلی،

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdots(3n)(3n+1)}, \qquad n \ge 4.$$

پس جواب عمومی معادلهٔ ایری عبارت است از

$$\begin{aligned} y = {} & a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)} + \cdots\right] \\ & + a_1\left[x + \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)} + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

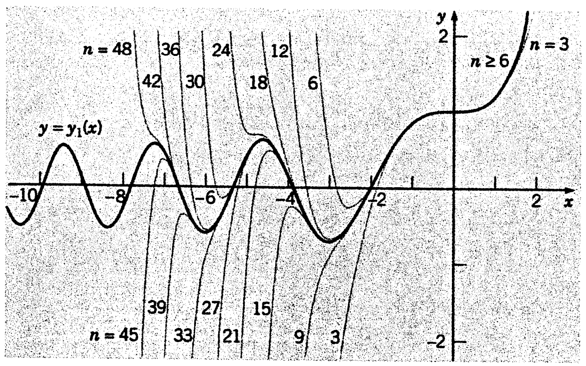
با به‌دست آوردن این سریها، می‌توانیم همگرایی آنها را بررسی کنیم. به‌خاطر رشد سریع مخرج جمله‌ها در سریهای (۲۰) می‌توانیم انتظار داشته باشیم که شعاع همگرایی این سریها بزرگ باشد. در حقیقت با استفاده از آزمون نسبت به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر دو سری به‌ازای هر x همگرا هستند؛ مسئلهٔ ۲۰ را ببینید.

به فرض اینکه سری به‌ازای هر x همگراست، فرض کنید y_1 و y_2 تابعهایی باشند که به‌ترتیب با مجموعهٔ اول و دوم پرانتزها در معادلهٔ (۲۰) تعریف می‌شوند. در این‌صورت، ابتدا با انتخاب $a_0 = 1$، $a_1 = 0$ و سپس $a_0 = 0$، $a_1 = 1$ نتیجه می‌گیریم که y_1 و y_2 به تنهایی جوابهای معادلهٔ (۱۵) هستند. توجه کنید که y_1 در شرایط اولیهٔ $y_1(0) = 1$، $y_1'(0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیهٔ $y_2(0) = 0$، $y_2'(0) = 1$ صدق می‌کند؛ پس $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ و در نتیجه y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ ایری عبارت است از

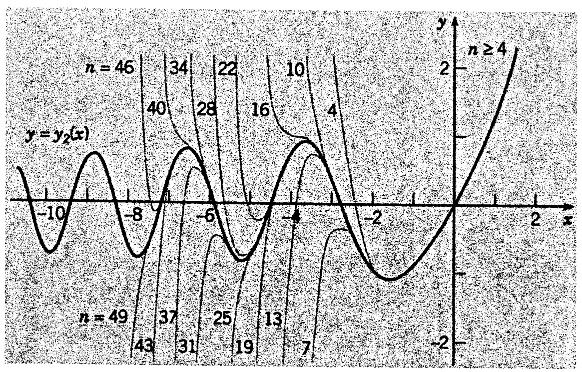
$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

در شکلهای ۳.۲.۵ و ۴.۲.۵ به‌ترتیب نمودار جوابهای y_1 و y_2 معادلات ایری و همچنین چند مجموع جزئی از دو سری معادلهٔ (۲۰) را نشان داده‌ایم. در اینجا هم مجموعهای جزئی تقریبهای موضعی جوابها را در همسایگی مبدأ به‌دست می‌دهند. با اینکه کیفیت تقریب با افزایش تعداد جمله‌ها بهتر می‌شود، هیچ چندجمله‌ای‌ای y_1 و y_2 را به‌ازای $|x|$ بزرگ به‌خوبی تقریب نمی‌زند. یک راه عملی برای تقریب بازه‌ای که مجموع جزئی در آن نسبتاً دقیق باشد این است که نمودار مجموع جزئی را با نمودار مجموع جزئی‌ای که از افزودن یک جملهٔ دیگر به آن به‌دست می‌آید مقایسه کنیم. به محض اینکه نمودارها به‌طور قابل توجهی از هم جدا شدند، درمی‌یابیم که مجموع جزئی اولیه دیگر دقیق نیست. به‌عنوان مثال، در شکل ۳.۲.۵، نمودارهای متناظر $n = 24$ و $n = 27$ تقریباً در نزدیکی $x = -9/2$ از هم جدا می‌شوند. پس بعد از این نقطه، مجموع جزئی از مرتبهٔ ۲۴ به‌عنوان تقریب جواب ارزشی ندارد.

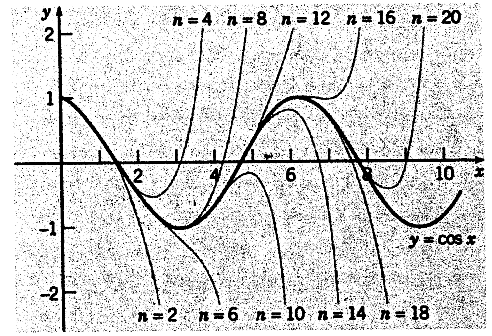
توجه کنید که هر دوی y_1 و y_2 به‌ازای $x > 0$ یکنوا و به‌ازای $x < 0$ نوسانی هستند. در شکلها معلوم است که نوسانات یکنواخت نیستند و با افزایش فاصله از مبدأ، دامنه‌شان کاهش و بسامدشان افزایش می‌یابد. برعکس مثال ۱، جوابهای y_1 و y_2 معادلهٔ ایری از توابع مقدماتی‌ای که قبلاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها روبه‌رو شده‌اید نیستند. اما به‌خاطر اهمیتشان در بعضی از کاربردهای فیزیکی به‌طور وسیعی مطالعه شده‌اند و خواصشان برای دانشمندان و ریاضیدانان کاربردی شناخته شده است.



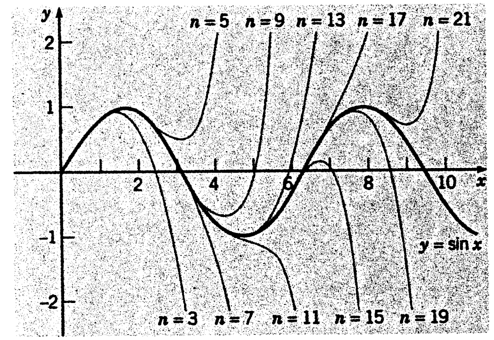
شکل ۳.۲.۵ تقریبهای چندجمله‌ای برای جواب $y_1(x)$ معادلهٔ ایری. n درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.



شکل ۴.۲.۵ تقریبهای چندجمله‌ای برای جواب $y_2(x)$ معادلهٔ ایری. n درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.



شکل ۱.۲.۵ تقریب چندجمله‌ای برای $\cos x$. مقدار n، درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.



شکل ۲.۲.۵ تقریب چندجمله‌ای برای $\sin x$. مقدار n، درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.

در مثال ۱، از ابتدا می‌دانستیم که $\sin x$ و $\cos x$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای (۴) تشکیل می‌دهند. اما حتی اگر این را نمی‌دانستیم و معادلهٔ (۴) را با استفاده از سریها حل می‌کردیم، باز هم می‌توانستیم جواب (۱۱) را به‌دست بیاوریم. با توجه به اینکه معادلهٔ دیفرانسیل (۴) اغلب در عمل ظاهر می‌شود، بهتر است که به این دو جواب معادلهٔ (۱۱) اسمهای خاصی بدهیم، مانند

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}. \qquad (12)$$

حالا می‌توانیم خواص این تابعها را بررسی کنیم. به‌عنوان مثال، آیا می‌توانیم مطمئن باشیم که $C(x)$ و $S(x)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند؟ بلافاصله نتیجه می‌شود که $C(0)=1$ و $S(0)=0$. با مشتق‌گیری جمله‌به‌جمله از سریهای $C(x)$ و $S(x)$ نتیجه می‌شود

$$S'(x)=C(x),\qquad C'(x)=-S(x); \qquad (13)$$

پس در $x=0$، $S'(0)=1$ و $C'(0)=0$. در نتیجه رانسکین C و S در $x=0$ عبارت است از

$$W(C,S)(0)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1; \qquad (14)$$

بنابراین این تابعها واقعاً مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. با جایگزینی $-x$ به‌جای x در معادله‌های (۱۲) نتیجه می‌شود $C(-x)=C(x)$ و $S(-x)=-S(x)$. علاوه بر این، با محاسبه با سریهای توانی[1] می‌توانیم نشان بدهیم که $C(x)$ و $S(x)$ به‌ترتیب خواص جبری و تحلیلی متداول توابع سینوس و کسینوس را دارند.

هرچند احتمالاً سینوس و کسینوس را اولین بارها در سطوح مقدماتی‌تر برحسب نسبتهایی در مثلث قائم‌الزاویه دیده‌اید، تعریف این تابعها به‌صورت جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم سادهٔ معین خالی از لطف نیست. درواقع، تابع $\sin x$ را می‌توان به‌صورت جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y''+y=0$، $y(0)=0$ و $y'(0)=1$ تعریف کرد. به همین ترتیب، $\cos x$ را هم می‌توان به‌صورت جواب یکتای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y''+y=0$، $y(0)=1$ و $y'(0)=0$ تعریف کرد. بسیاری از تابعهای دیگر را هم که در فیزیک ریاضی مهم هستند می‌توان به‌صورت جوابهای مسئله‌های مقدار اولیهٔ معین تعریف کرد. در مورد بیشتر این تابعها، راه ساده‌تر و یا مقدماتی‌تری برای نزدیک شدن به آنها موجود نیست.

مثال ۲

سری جواب معادلهٔ ایری[2]، یعنی

$$y''-xy=0,\qquad -\infty<x<\infty \qquad (15)$$

را برحسب توانهای x به‌دست بیاورید.

برای این معادله، $P(x)=1$، $Q(x)=0$ و $R(x)=-x$؛ بنابراین همهٔ نقطه‌ها عادی هستند. فرض می‌کنیم که

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad (16)$$

و اینکه سری در بازه‌ای مانند $|x|<\rho$ همگرا می‌شود. سری y'' در معادلهٔ (۷) داده شده است؛ به همان ترتیب مثال قبل، می‌توانیم آن را به‌صورت

$$y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \qquad (17)$$

بازنویسی کنیم. با قرار دادن سریهای (۱۶) و (۱۷) به‌جای y و y'' در معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}. \qquad (18)$$

---

۱. چنین تحلیلی در بخش ۲۴ کتاب
K. Knopp, *Theory and Applications of Infinite Series* (New York: Hafner, 1951)
داده‌شده است.

۲. سر جورج بیدل ایری (۱۸۰۱-۱۸۹۲)، منجم و ریاضیدان انگلیسی و مدیر رصدخانهٔ گرینویچ از ۱۸۳۵ تا ۱۸۸۱ میلادی بود. یکی از دلیلهای جالب‌بودن معادلهٔ ایری این است که به‌ازای xهای منفی، جوابها مانند تابعهای مثلثاتی نوسانی هستند و به‌ازای xهای مثبت مانند تابعهای هذلولوی یکنوا هستند. آیا می‌توانید توضیح بدهید چرا باید انتظار چنین رفتاری را داشته باشیم؟

سپس اندیس جمع سری طرف راست را با جایگزین کردن $n-1$ به‌جای n و شروع مجموع از ۱ به‌جای صفر انتقال می‌دهیم؛ بنابراین

$$2\cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

برای اینکه معادله به‌ازای هر x در بازه برقرار باشد، باید ضرایب جمله‌های هم‌توان برحسب x مساوی باشند؛ بنابراین $a_2 = 0$ و به رابطهٔ بازگشتی

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots \qquad (19)$$

می‌رسیم. چون a_{n+2} برحسب a_{n-1} معلوم می‌شود، aها در گامهایی به طول ۳ مشخص می‌شوند. پس a_0، a_3 را و a_3، a_6 را تعیین می‌کند؛ a_1، a_4 را و a_4، a_7 را تعیین می‌کند؛ و a_2، a_5 را و a_5، a_8 را تعیین می‌کند. بقیهٔ ضریبها هم به همین ترتیب معلوم می‌شوند. چون $a_2 = 0$، بلافاصله نتیجه می‌شود که $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$.

برای پیدا کردن دنبالهٔ a_0، a_3، a_6، a_9، ... در رابطهٔ بازگشتی قرار می‌دهیم $n = 1,4,7,10,\ldots$:

$$a_3 = \frac{a_0}{2\cdot3}, \quad a_6 = \frac{a_3}{5\cdot6} = \frac{a_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6}, \quad a_9 = \frac{a_6}{8\cdot9} = \frac{a_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdot8\cdot9}, \ldots$$

به این ترتیب به‌نظر می‌رسد که دستور کلی باید

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot3\cdot5\cdot6\cdots(3n-1)(3n)}, \quad n \ge 4$$

باشد. برای پیدا کردن دنبالهٔ a_1، a_4، a_7، a_{10}، ... در رابطهٔ بازگشتی قرار می‌دهیم $n = 2,5,8,11,\ldots$:

$$a_4 = \frac{a_1}{3\cdot4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6\cdot7} = \frac{a_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{9\cdot10} = \frac{a_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot9\cdot10}, \ldots$$

در حالت کلی،

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3\cdot4\cdot6\cdot7\cdots(3n)(3n+1)}, \quad n \ge 4.$$

پس جواب عمومی معادلهٔ ایری عبارت است از

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{2\cdot3} + \frac{x^6}{2\cdot3\cdot5\cdot6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2\cdot3\cdots(3n-1)(3n)} + \cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x + \frac{x^4}{3\cdot4} + \frac{x^7}{3\cdot4\cdot6\cdot7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3\cdot4\cdots(3n)(3n+1)} + \cdots\right]. \qquad (20)$$

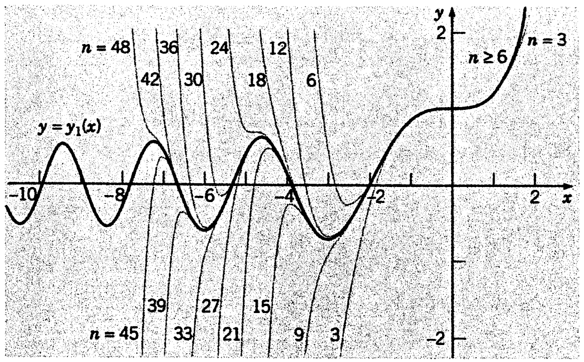
با به‌دست آوردن این سریها، می‌توانیم همگرایی آنها را بررسی کنیم. به‌خاطر رشد سریع مخرج جمله‌ها در سریهای (۲۰) می‌توانیم انتظار داشته باشیم که شعاع همگرایی این سریها بزرگ باشد. در حقیقت با استفاده از آزمون نسبت به‌سادگی می‌توان نشان داد که هر دو سری به‌ازای هر x همگرا هستند؛ مسئلهٔ ۲۰ را ببینید.

به فرض اینکه سری به‌ازای هر x همگراست، فرض کنید y_1 و y_2 تابعهایی باشند که به‌ترتیب با مجموعهٔ اول و دوم پرانتزها در معادلهٔ (۲۰) تعریف می‌شوند. در این‌صورت، ابتدا با انتخاب $a_0 = 1$، $a_1 = 0$ و سپس $a_0 = 0$، $a_1 = 1$ نتیجه می‌گیریم که y_1 و y_2 به تنهایی جوابهای معادلهٔ (۱۵) هستند. توجه کنید که y_1 در شرایط اولیهٔ $y_1(0) = 1$، $y_1'(0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیهٔ $y_2(0) = 0$، $y_2'(0) = 1$ صدق می‌کند؛ پس $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ و در نتیجه y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ ایری عبارت است از

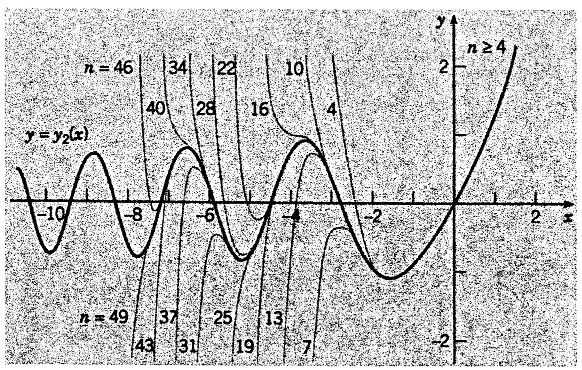
$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

در شکلهای ۳.۲.۵ و ۴.۲.۵ به‌ترتیب نمودار جوابهای y_1 و y_2 معادلات ایری و همچنین چند مجموع جزئی از دو سری معادلهٔ (۲۰) را نشان داده‌ایم. در اینجا هم مجموعهای جزئی تقریبهای موضعی جوابها را در همسایگی مبدأ به‌دست می‌دهند. با اینکه کیفیت تقریب با افزایش تعداد جمله‌ها بهتر می‌شود، هیچ چندجمله‌ای y_1 و y_2 را به‌ازای $|x|$ بزرگ به‌خوبی تقریب نمی‌زند. یک راه عملی برای تقریب بازه‌ای که مجموع جزئی در آن نسبتاً دقیق باشد این است که نمودار مجموع جزئی را با نمودار مجموع جزئی‌ای که از افزودن یک جملهٔ دیگر به آن به‌دست می‌آید مقایسه کنیم. به محض اینکه نمودارها به‌طور قابل توجهی از هم جدا شدند، درمی‌یابیم که مجموع جزئی اولیه دیگر دقیق نیست. به‌عنوان مثال، در شکل ۳.۲.۵، نمودارهای متناظر $n = 24$ و $n = 27$ تقریباً در نزدیکی $x = -9/2$ از هم جدا می‌شوند. پس بعد از این نقطه، مجموع جزئی از مرتبهٔ ۲۴ به‌عنوان تقریب جواب ارزشی ندارد.

توجه کنید که هر دوی y_1 و y_2 به‌ازای $x > 0$ یکنوا و به‌ازای $x < 0$ نوسانی هستند. در شکلها معلوم است که نوسانات یکنواخت نیستند و با افزایش فاصله از مبدأ، دامنه‌شان کاهش و بسامدشان افزایش می‌یابد. برعکس مثال ۱، جوابهای y_1 و y_2 معادلهٔ ایری از توابع مقدماتی‌ای که قبلاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال با آنها روبه‌رو شده‌اید نیستند. اما به‌خاطر اهمیتشان در بعضی از کاربردهای فیزیکی به‌طور وسیعی مطالعه شده‌اند و خواصشان برای دانشمندان و ریاضیدانان کاربردی شناخته شده است.



شکل ۳.۲.۵ تقریبهای چندجمله‌ای برای جواب $y_1(x)$ معادلهٔ ایری. n درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.



شکل ۴.۲.۵ تقریبهای چندجمله‌ای برای جواب $y_2(x)$ معادلهٔ ایری. n درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.

مثال ۳

جواب معادلهٔ ایری را برحسب توانهای $x-1$ به‌دست بیاورید.

نقطهٔ $x=1$ نقطهٔ عادی معادلهٔ (۱۵) است، بنابراین می‌خواهیم جوابی به‌صورت

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

پیدا کنیم که در آن فرض می‌کنیم که سری بازه‌ای مانند $|x-1|<\rho$ همگراست. پس

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-1)^n$$

و

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n.$$

با قرار دادن y و y'' در معادلهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n=x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n. \tag{۲۱}$$

حالا ضرایب جمله‌های هم‌توان از $(x-1)$ را مساوی هم قرار می‌دهیم. باید x ضریب y در معادلهٔ (۱۵) را برحسب توانهای $x-1$ بنویسیم؛ یعنی می‌نویسیم $x=1+(x-1)$. توجه کنید که این عبارت، دقیقاً سری تیلور x حول $x=1$ است. بنابراین معادلهٔ (۲۱) به‌صورت

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n=[1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1}$$

درمی‌آید. با تغییر اندیس مجموع دوم طرف راست نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n.$$

با مساوی قرار دادن ضرایب جمله‌های هم‌توان از $x-1$، نتیجه می‌شود

$$2a_2=a_0,$$
$$(3\cdot2)a_3=a_1+a_0,$$
$$(4\cdot3)a_4=a_2+a_1,$$
$$(5\cdot4)a_5=a_3+a_2,$$
$$\vdots$$

رابطهٔ بازگشتی کلی عبارت است از

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_n+a_{n-1}\qquad n\geq1. \tag{۲۲}$$

چند جملهٔ اول a_n برحسب a_0 و a_1 عبارت‌اند از

$$a_2=\frac{a_0}{2},\quad a_3=\frac{a_1}{6}+\frac{a_0}{6},\quad a_4=\frac{a_2}{12}+\frac{a_1}{12}=\frac{a_0}{24}+\frac{a_1}{12},\quad a_5=\frac{a_3}{20}+\frac{a_2}{20}=\frac{a_0}{30}+\frac{a_1}{120};$$

بنابراین

$$y=a_0\left[1+\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{24}+\frac{(x-1)^5}{30}+\cdots\right]$$
$$+a_1\left[(x-1)+\frac{(x-1)^3}{6}+\frac{(x-1)^4}{12}+\frac{(x-1)^5}{120}+\cdots\right]. \tag{۲۳}$$

در حالت کلی، وقتی که رابطهٔ بازگشتی شامل بیش از دو جمله باشد، مانند معادلهٔ ۲۲، تعیین دستوری برای a_n برحسب a_0 و a_1 اگر غیرممکن نباشد بسیار پیچیده است. در این مثال هم چنین دستوری به‌سادگی به‌دست نمی‌آید. بدون داشتن دستور، نمی‌توانیم همگرایی دو سری معادلهٔ (۲۳) را با روشهای مستقیم مانند آزمون نسبت آزمایش کنیم. اما در بخش ۳.۵ خواهیم دید که حتی بدون دانستن فرمولی برای a_n، می‌توانیم نشان بدهیم که هر دو سری معادلهٔ (۲۳) به‌ازای هر x همگرا هستند و علاوه بر این، تابعهای y_3 و y_4 را تعریف می‌کنند که مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ ایری (۱۵) تشکیل می‌دهند. پس

$$y=a_0y_3(x)+a_1y_4(x)$$

جواب عمومی معادلهٔ ایری به‌ازای $-\infty<x<\infty$ است.

تأکید می‌کنیم که همان‌طور که در مثال ۳ دیدیم، اگر بخواهیم جوابی به‌صورت $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ برای معادلهٔ (۱) به‌دست بیاوریم، باید ضرایب $P(x)$، $Q(x)$ و $R(x)$ معادلهٔ (۱) به‌صورت توانهایی از $x-x_0$ نوشته شوند. راه دیگر این است که تغییر متغیر $t=x-x_0$ را انجام بدهیم و معادلهٔ دیفرانسیلی برای y برحسب t به‌دست بیاوریم و سپس جوابی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ برای این معادله جدید پیدا کنیم. پس از تمام شدن محاسبات می‌توانیم t را با $x-x_0$ جایگزین کنیم.

در مثالهای ۲ و ۳ دو مجموعهٔ جواب برای معادلهٔ ایری پیدا کردیم. تابعهای y_1 و y_2 که با سریهای معادلهٔ (۲۰) به‌ازای هر x تعریف شده‌اند مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ (۱۵) تشکیل می‌دهند و تابعهای y_3 و y_4 هم که با سریهای معادلهٔ (۲۳) تعریف شده‌اند چنین‌اند. طبق نظریهٔ عمومی معادلات خطی مرتبهٔ دوم، هر یک از دو تابع اول را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی دو تابع بعدی نوشت و بالعکس ــ نتیجه‌ای که تنها با بررسی سری واضح نیست.

درنهایت تأکید می‌کنیم که اینکه مانند مثال ۳ نتوانیم ضریب عمومی a_n را برحسب a_0 و a_1 تعیین کنیم اهمیت چندانی ندارد. مهم این است که می‌توانیم هر تعداد از ضریب را که می‌خواهیم، تعیین کنیم. پس در این دو سری می‌توانیم هر تعداد از جمله‌ها را که می‌خواهیم، تعیین کنیم؛ حتی اگر نتوانیم جملهٔ عمومی را تعیین کنیم. مسئلهٔ محاسبهٔ چند ضریب سریهای توانی کار مشکلی نیست، اما ممکن است خسته‌کننده باشد. برنامه‌های نرم‌افزاری جبری می‌توانند در این راستا مفید باشند، بعضی از آنها می‌توانند هر تعداد موردنظر از جمله‌های سری توانی از جواب را تنها در پاسخ به یک دستور محاسبه کنند. با برنامه‌های گرافیکی می‌توانیم نمودارهایی مانند شکلهای نشان داده‌شده در این بخش را هم تولید کنیم.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۴،

الف) سری توانی جوابهای معادله دیفرانسیل داده‌شده را حول نقطهٔ مفروض x_0 پیدا کنید؛ رابطهٔ بازگشتی را بیابید.

ب) چهار جملهٔ اول هر یک از دو جواب y_1 و y_2 را بیابید (مگر آنکه سری زودتر از آن خاتمه یابد).

ج) با محاسبهٔ رانسکین $W(y_1, y_2)(x_0)$ ثابت کنید که آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند.

د) در صورت امکان، در هر جواب جملهٔ عمومی را بیابید.

۱. $y''-y=0$، $x_0=0$

۲. $y''-xy'-y=0$، $x_0=0$

۳. $y''-xy'-y=0$، $x_0=1$

۴. $y''+k^2x^2y=0$، $x_0=0$، k ثابت

۵. $(1-x)y''+y=0$، $x_0=0$

۶. $(2+x^2)y''-xy'+4y=0$، $x_0=0$

۷. $xy''+y'+xy=0$، $x_0=1$

۸. $y''+xy'+2y=0$، $x_0=0$

۹. $(1+x^2)y''-4xy'+6y=0$، $x_0=0$

۱۰. $(4-x^2)y''+2y=0$، $x_0=0$

۱۱. $(1-x)y''+xy'-y=0$، $x_0=0$

۱۲. $(3-x^2)y''-3xy'-y=0$، $x_0=0$

۱۳. $2y''+xy'+3y=0$، $x_0=0$

۱۴. $2y''+(x+1)y'+3y=0$، $x_0=2$

در هر یک از مسئله‌های ۱۵ تا ۱۸،

الف) پنج جملهٔ اول ناصفر جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را پیدا کنید.

ب) تقریبهای چهارجمله‌ای و پنج‌جمله‌ای جواب را در یک دستگاه رسم کنید.

ج) از نمودار قسمت (ب) بازه‌ای را تخمین بزنید که در آن تقریب چهارجمله‌ای نسبتاً دقیق است.

۱۵. $y''-xy'-y=0$، $y(0)=2$، $y'(0)=1$؛ مسئلهٔ ۲ را ببینید.

۱۶. $(2+x^2)y''-xy'+4y=0$، $y(0)=-1$، $y'(0)=3$؛ مسئلهٔ ۶ را ببینید.

۱۷. $(1-x)y''+xy'-y=0$، $y(0)=-3$، $y'(0)=2$؛ مسئلهٔ ۱۲ را ببینید.

۱۸. $y''+xy'+2y=0$، $y(0)=4$، $y'(0)=-1$؛ مسئلهٔ ۸ را ببینید.

۱۹. الف) با انجام تغییر متغیر $x-1=t$ و فرض اینکه y سری تیلوری برحسب توانهای t دارد، دو سری جواب

$$y''+(x-1)^2y'+(x^2-1)y=0$$

را برحسب توانهای $x-1$ به‌دست بیاورید.

ب) ثابت کنید که همان نتیجه‌ای را به‌دست می‌آورید که با فرض وجود سری تیلور برای y برحسب $x-1$ و همچنین نمایش x^2-1 برحسب توانهای $x-1$ به‌دست می‌آید.

۲۰. به‌طور مستقیم با آزمون نسبت ثابت کنید که دو سری جواب معادلهٔ ایری حول $x=0$ به‌ازای هر x همگرا هستند؛ معادلهٔ (۲۰) در متن را ببینید.

۲۱. **معادلهٔ هرمیت.** معادلهٔ

$$y''-2xy'+\lambda y=0, \quad -\infty<x<\infty$$

که در آن λ ثابت است به معادلهٔ هرمیت[1] معروف است و در ریاضی‌فیزیک معادلهٔ مهمی است.

الف) چهار جملهٔ اول هر یک از دو جواب حول $x=0$ را به‌دست بیاورید و ثابت کنید آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند.

ب) توجه کنید که اگر λ عدد صحیح نامنفی زوجی باشد، یکی از دو سری جواب خاتمه می‌یابد و به چندجمله‌ای تبدیل می‌شود. جوابهای چندجمله‌ای را به‌ازای λ برابر ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ به‌دست بیاورید. توجه کنید که هر چندجمله‌ای با تقریب مضربی ثابت تعیین می‌شود.

ج) چندجمله‌ای هرمیت $H_n(x)$ برابر جواب چندجمله‌ای معادلهٔ هرمیت به‌ازای $\lambda=2n$ تعریف می‌شود که در آن ضریب x^n برابر 2^n است. $H_0(x)$، ...، $H_5(x)$ را به‌دست بیاورید.

۲۲. مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $y'=\sqrt{1-y^2}$، $y(0)=0$ را در نظر بگیرید.

الف) ثابت کنید $y=\sin x$ جوابی برای این مسئلهٔ مقدار اولیه است.

ب) جوابی به‌صورت سری توانی حول $x=0$ برای مسئلهٔ مقدار اولیه بیابید. ضریب جمله‌های تا x^3 را در این سری به‌دست بیاورید.

در هر یک از مسئله‌های ۲۳ تا ۲۸، چند مجموع جزئی سری جواب مسئلهٔ مقدار اولیه داده‌شده حول $x=0$ را رسم کنید و به این ترتیب نمودارهای متناظر شکلهای ۱.۲.۵ تا ۴.۲.۵ را به‌دست بیاورید.

۲۳. $y''-xy'-y=0$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$؛ مسئلهٔ ۲ را ببینید.

۲۴. $(2+x^2)y''-xy'+4y=0$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$؛ مسئلهٔ ۶ را ببینید.

۲۵. $y''+xy'+2y=0$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ مسئلهٔ ۷ را ببینید.

۲۶. $(4-x^2)y''+2y=0$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$؛ مسئلهٔ ۱۰ را ببینید.

۲۷. $(1-x)y''+xy'-2y=0$، $y(0)=0$، $y'(0)=1$

۲۸. $y''+x^2y=0$، $y(0)=1$، $y'(0)=0$؛ مسئلهٔ ۴ را ببینید.

۳.۵ جوابهای سری حول نقطهٔ عادی، قسمت دوم

در بخش قبل مسئلهٔ یافتن جوابهای

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad (1)$$

را در همسایگی نقطهٔ عادی x_0 بررسی کردیم که در آن P، Q و R چندجمله‌ای هستند. با فرض اینکه معادلهٔ (۱) جوابی مثل $y=\phi(x)$ دارد و ϕ سری تیلوری مانند

$$y=\phi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \qquad (2)$$

۱. شارل هرمیت (۱۸۲۲-۱۹۰۱م) یک آنالیزدان و متخصص جبر تأثیرگذار فرانسوی بود. او توابع هرمیت را در ۱۸۶۴ معرفی کرد و در ۱۸۷۳ ثابت کرد که e عددی متعالی است (یعنی e ریشهٔ چندجمله‌ای با ضرایب گویا نیست). ماتریس‌های هرمیتی هم به‌نام او نامگذاری شده‌اند (بخش ۳.۷ را ببینید) چون بعضی از خواص آنها را او کشف کرد.

دارد که به‌ازای $|x - x_0| < \rho$ با $\rho > 0$ همگرا است، فهمیدیم که a_n را می‌توان مستقیماً با قرار دادن سری (۲) به‌جای y در معادلهٔ (۱) به‌دست آورد.

اکنون می‌خواهیم ببینیم که چطور این حکم را، که اگر x_0 نقطهٔ عادی معادلهٔ (۱) باشد آنگاه جوابی به‌صورت (۲) موجود است، توجیه کنیم. شعاع همگرایی این سریها را هم بررسی می‌کنیم. این کار به تعمیم تعریف نقطهٔ عادی می‌انجامد.

فرض کنید که معادلهٔ (۱) جوابی به‌صورت (۲) دارد. با m بار مشتق‌گیری از معادلهٔ (۲) و قرار دادن x مساوی x_0 نتیجه می‌شود

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

بنابراین برای محاسبهٔ a_n در سری (۲)، باید ثابت کنیم که می‌توان $\phi^{(n)}(x_0)$ را به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ از معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌دست آورد.

فرض کنید $y = \phi(x)$ جوابی برای معادلهٔ (۱) است که در شرایط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$، $y'(x_0) = y'_0$ صدق می‌کند. در این‌صورت $a_0 = y_0$ و $a_1 = y'_0$. اگر تنها بخواهیم جواب معادلهٔ (۱) را بدون مشخص کردن شرایط اولیه‌ای پیدا کنیم، a_0 و a_1 دلخواه باقی می‌مانند. برای تعیین $\phi^{(n)}(x_0)$ و ضرایب a_n به‌ازای $n = 2, 3, \ldots$، به معادلهٔ (۱) برمی‌گردیم. چون ϕ جواب معادلهٔ (۱) است،

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

در بازه‌ای حول x_0 که در آن P ناصفر است، می‌توانیم این معادله را به‌صورت

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x) \qquad (۳)$$

بازنویسی کنیم که در آن $p(x) = Q(x)/P(x)$ و $q(x) = R(x)/P(x)$. با مساوی قرار دادن x برابر x_0 در معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0);$$

بنابراین a_2 از معادلهٔ

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0 \qquad (۴)$$

تعیین می‌شود. برای تعیین a_3 از معادلهٔ (۳) مشتق می‌گیریم و x را برابر x_0 قرار می‌دهیم تا به

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p'+q)\phi' + q'\phi]\Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0 \qquad (۵) \end{aligned}$$

برسیم. با قرار دادن a_2 از معادلهٔ (۴)، a_3 برحسب a_1 و a_0 تعیین می‌شود. چون $P(x_0) \neq 0$ و P، Q و R چندجمله‌ای هستند، هردوی p و q در x_0 از هر مرتبه‌ای مشتق دارند. بنابراین می‌توانیم مشتق‌گیری از معادلهٔ (۳)

را به‌طور نامتناهی ادامه بدهیم و پس از هر مشتق‌گیری، ضرایب متوالی a_4، a_5، ... را با قرار دادن x برابر با x_0 تعیین کنیم.

توجه کنید که مهم‌ترین خاصیتی که در تعیین a_n از آن استفاده کردیم این است که می‌توانیم از p و q بینهایت بار مشتق بگیریم. به‌نظر منطقی می‌آید که این فرض را که p و q نسبت دو چندجمله‌ای هستند تخفیف بدهیم و تنها فرض کنیم که می‌توان در همسایگی x_0 از آنها بینهایت بار مشتق گرفت. متأسفانه این شرط برای اثبات همگرایی سری بسط $y = \phi(x)$ بسیار ضعیف است. چیزی که لازم است، فرض تحلیلی بودن p و q در x_0 است؛ یعنی فرض می‌کنیم که آنها در بازه‌ای حول x_0 بسط تیلوری همگرا دارند:

$$p(x) = p_0 + p_1(x-x_0) + \cdots + p_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n, \qquad (۶)$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \cdots + q_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n. \qquad (۷)$$

با این ایده، تعریف نقطهٔ عادی و نقطهٔ تکین معادلهٔ (۱) به این‌صورت است: اگر $p = Q/P$ و $q = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، x_0 را **نقطهٔ عادی** معادلهٔ دیفرانسیل (۱) می‌گوییم؛ در غیر این‌صورت x_0 نقطهٔ **تکین** است.

حالا به سؤال شعاع همگرایی سری جواب برمی‌گردیم. یک روش این است که سری جواب را برای هر مسئله محاسبه کنیم و سپس از یکی از آزمونهای همگرایی سریهای نامتناهی برای تعیین شعاع همگرایی آنها استفاده کنیم. متأسفانه لازمهٔ استفاده از این آزمونها به‌دست آوردن جملهٔ عمومی a_n به‌صورت تابعی از n است و این کار، اگر غیرممکن نباشد، اغلب بسیار مشکل است؛ مثال ۳ در بخش ۲.۵ را یادآوری می‌کنیم. به‌هر حال با استفاده از قضیهٔ زیر می‌توان بلافاصله جواب این سؤال را برای دستهٔ بزرگی از مسئله‌ها داد.

قضیهٔ ۱.۳.۵ اگر x_0 نقطهٔ عادی معادلهٔ دیفرانسیل (۱)، یعنی

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد، یعنی اگر $p = Q/P$ و $q = R/P$ در x_0 تحلیلی باشند، جواب عمومی معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0y_1(x) + a_1y_2(x) \qquad (۸)$$

که در آن a_0 و a_1 دلخواه هستند و y_1 و y_2 جوابهایی به‌صورت سری توانی هستند که در x_0 تحلیلی‌اند. جوابهای y_1 و y_2 مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. علاوه بر این، شعاع همگرایی هر یک از سریهای جواب y_1 و y_2 به بزرگی حداقل شعاع همگرایی سریهای p و q است.

برای اثبات اینکه این جوابها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند، توجه کنید که آنها به شکل $y_1(x) = 1 + b_2(x-x_0)^2 + \cdots$ و $y_2(x) = (x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots$ هستند که در آن $b_2 + c_2 = a_2$. بنابراین y_1 در شرایط اولیهٔ $y_1(x_0) = 1$، $y'_1(x_0) = 0$ و y_2 در شرایط اولیهٔ $y_2(x_0) = 0$ و $y'_2(x_0) = 1$ صدق می‌کند. پس $W(y_1, y_2)(x_0) = 1$.

همچنین توجه کنید که هرچند محاسبهٔ ضرایب با مشتق‌گیری متوالی از معادلهٔ دیفرانسیل به لحاظ نظری بی‌نقص است، اما معمولاً از نظر محاسباتی عملی نیست. به‌جای این کار باید سری (۲) را به‌جای y در معادلهٔ دیفرانسیل (۱) قرار بدهیم و مانند مثالهای بخش قبل ضرایب را طوری تعیین کنیم که سری در معادلهٔ دیفرانسیل صدق کند.

این قضیه را، که فوخس[1] در چارچوب کمی کلی‌تری آن را ثابت کرده، ثابت نمی‌کنیم. برای منظور ما مهم این است که سری جوابی به‌صورت (۲) موجود است و شعاع همگرایی سری جواب کمتر از حداقل شعاع همگرایی سریهای p و q نیست؛ بنابراین کافی است که شعاع همگرایی ضرایب را تعیین کنیم.

این کار را می‌توان به دو روش انجام داد. مجدداً، یک روش همان محاسبهٔ سریهای توانی p و q و سپس تعیین شعاع همگرایی آنها با استفاده از یکی از آزمونهای همگرایی برای سریهای نامتناهی است؛ اما اگر P، Q و R چندجمله‌ای باشند، راه ساده‌تری وجود دارد. در نظریهٔ توابع مختلط، ثابت می‌کنند که نسبت دو چندجمله‌ای مثلاً Q/P، اگر $P(x_0) \neq 0$ بسط سری توانی‌ای حول $x = x_0$ دارد. علاوه بر این، اگر فرض کنیم عامل مشترک Q و P ساده شده است، شعاع همگرایی سری توان Q/P حول نقطهٔ x_0 دقیقاً برابر فاصلهٔ x_0 از نزدیک‌ترین ریشهٔ $P(x)$ است. در تعیین این فاصله باید به‌خاطر داشته باشیم که $P(x) = 0$ ممکن است ریشه‌های مختلط هم داشته باشد و این ریشه‌ها هم باید در نظر گرفته شوند.

مثال ۱

شعاع همگرایی سری تیلور $(1+x^2)^{-1}$ حول $x = 0$ چقدر است؟

یک راه این است که سری تیلور تابع را پیدا کنیم؛ یعنی بنویسیم

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

سپس می‌توان با آزمون نسبت نشان داد که $\rho = 1$. راه دیگر این است که توجه کنیم که صفرهای $1 + x^2$، $x = \pm i$ هستند. چون فاصلهٔ ۰ تا i یا $-i$ در صفحهٔ مختلط برابر است، شعاع همگرایی سری توانی حول $x_0 = 0$، ۱ است.

مثال ۲

شعاع همگرایی سری تیلور $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ حول $x = 0$ چقدر است؟ حول $x = 1$ چقدر است؟

ابتدا توجه کنید که جوابهای

$$x^2 - 2x + 2 = 0,$$

$x = 1 \pm i$ هستند. فاصلهٔ $x = 0$ تا هر یک از نقاط $x = 1 + i$ یا $x = 1 - i$ در صفحهٔ مختلط $\sqrt{2}$ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط سری تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حول $x = 0$، $\sqrt{2}$ است.

فاصلهٔ $x = 1$ تا هر یک از نقاط $x = 1 + i$ یا $x = 1 - i$ در صفحهٔ مختلط برابر ۱ است؛ بنابراین شعاع همگرایی بسط سری تیلور $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ حول $x = 1$، ۱ است.

طبق قضیهٔ ۱.۳.۵، سریهای جواب معادلهٔ ایری در مثالهای ۲ و ۳ بخش قبل به‌ترتیب به‌ازای همهٔ مقادیر x و $x - 1$ همگرا است، چون در هر مسئله $P(x) = 1$ که هرگز صفر نمی‌شود.

۱. امانوئل لازاروس فوخس (۱۸۳۳-۱۹۰۲م) دانشجو و سپس استاد دانشگاه برلین بود. او قضیهٔ ۱.۳.۵ را در ۱۸۶۶ میلادی ثابت کرد. مهم‌ترین تحقیقات او دربارهٔ نقاط تکین معادلات دیفرانسیل خطی بود. او اهمیت نقاط تکین منظم (بخش ۴.۵) را تشخیص داد و معادلاتی که تنها نقاط تکین آنها (شامل نقطهٔ بینهایت) نقطه تکین منظم هستند به معادلات فوخسی معروف‌اند.

سری جواب ممکن است در دامنهٔ وسیع‌تری نسبت به آنچه که در قضیهٔ ۱.۳.۵ مطرح شد همگرا باشد، بنابراین قضیه تنها کران پایینی برای شعاع همگرایی جواب سری را معین می‌کند. این موضوع را می‌توان در چندجمله‌ای لژاندر جواب معادلهٔ لژاندر در مثال بعد دید.

مثال ۳

کران پایینی برای شعاع همگرایی سری جواب معادلهٔ لژاندر، یعنی

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

حول $x = 0$ به‌دست بیاورید. α ثابت است.

توجه کنید که $P(x) = 1 - x^2$، $Q(x) = -2x$ و $R(x) = \alpha(\alpha + 1)$ چندجمله‌ای هستند و صفرهای P، یعنی $x = \pm 1$، در فاصلهٔ ۱ از $x = 0$ هستند. پس سری جوابی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به‌ازای $|x| < 1$ همگراست. در حقیقت می‌توان نشان داد که اگر α عددی صحیح و مثبت باشد، یکی از جوابهای سری پس از تعداد متناهی جمله خاتمه می‌یابد و بنابراین سری نه تنها به‌ازای $|x| < 1$، بلکه به‌ازای هر x همگراست. به‌عنوان مثال، اگر $\alpha = 1$، جواب چندجمله‌ای $y = x$ است. مسئله‌های ۲۲ تا ۲۹ را در انتهای این بخش برای بررسی مفصل معادلهٔ لژاندر ببینید.

مثال ۴

کران پایینی برای شعاع همگرایی سری جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' + 4x^2 y = 0 \qquad (9)$$

حول $x = 0$ و حول $x = -1/2$ به‌دست بیاورید.

در اینجا هم P و Q و R چندجمله‌ای هستند و ریشه‌های P عبارت‌اند از $x = \pm i$، فاصلهٔ ۰ از $\pm i$ در صفحهٔ مختلط برابر است با ۱، و فاصلهٔ $-1/2$ تا $\pm i$ برابر است با $\sqrt{1 + 1/4} = \sqrt{5}/2$. پس در مورد اول سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حداقل به‌ازای $|x| < 1$ همگراست و در مورد دوم سری $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x + 1/2)^n$ حداقل به‌ازای $|x + 1/2| < \sqrt{5}/2$ همگراست.

دربارهٔ معادلهٔ (۹) نکتهٔ جالبی از قضیهٔ ۱.۲.۳ و ۱.۳.۵ نتیجه می‌شود. فرض کنید شرایط اولیهٔ $y(0) = y_0$ و $y'(0) = y'_0$ مفروض باشند. چون به‌ازای هر x، $1 + x^2 \neq 0$، از قضیهٔ ۱.۲.۳ می‌دانیم که جوابی یکتا برای مسئلهٔ مقدار اولیه بر $-\infty < x < \infty$ موجود است. از طرفی، قضیهٔ ۱.۳.۵ وجود سری جوابی به شکل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (که $a_0 = y_0$ و $a_1 = y'_0$) را فقط به‌ازای $-1 < x < 1$ تضمین می‌کند. جواب یکتا بر بازه $-\infty < x < \infty$ ممکن است سری توانی‌ای حول $x = 0$ که به‌ازای هر x همگراست نداشته باشد.

مثال ۵

آیا می‌توانیم سری جوابی برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + (\sin x)y' + (1 + x^2)y = 0$$

حول $x = 0$ تعیین کنیم؟ شعاع همگرایی آن چقدر است؟

برای این معادلهٔ دیفرانسیل $p(x) = \sin x$ و $q(x) = 1 + x^2$. از حساب دیفرانسیل و انتگرال یادآوری می‌کنیم که $\sin x$ بسط تیلوری حول $x = 0$ دارد که به‌ازای هر x همگراست. علاوه بر این q هم بسط تیلوری حول $x = 0$ دارد (یعنی $q(x) = 1 + x^2$) که به‌ازای هر x همگراست. پس سری جوابی به‌صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ با a_0 و a_1 دلخواه موجود است و سری به‌ازای هر x همگراست.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، اگر $y=\phi(x)$ جوابی برای مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده باشد، $\phi''(x_0)$، $\phi'''(x_0)$ و $\phi^{(4)}(x_0)$ را در نقطهٔ مفروض x_0 به‌دست بیاورید.

۱. $y''+xy'+y=0$؛ $y(0)=1$، $y'(0)=0$.

۲. $y''+x^2y'+(\sin x)y=0$؛ $y(0)=a_0$، $y'(0)=a_1$

۳. $x^2y''+(1+x)y'+3(\ln x)y=0$؛ $y(1)=2$، $y'(1)=0$

۴. $y''+(\sin x)y'+(\cos x)y=0$؛ $y(0)=0$، $y'(0)=1$

در هر یک از مسئله‌های ۵ تا ۸، کران پایینی برای شعاع همگرایی سری جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده حول x_0 به‌دست بیاورید.

۵. $y''+4y'+6xy=0$؛ $x_0=0$، $x_0=4$

۶. $(x^2-2x-3)y''+xy'+4y=0$؛ $x_0=4$، $x_0=-4$، $x_0=0$

۷. $(1+x^3)y''+4xy'+y=0$؛ $x_0=0$، $x_0=2$

۸. $xy''+y=0$؛ $x_0=1$

۹. کران پایینی برای شعاع همگرایی سریهای جواب هر یک از معادله‌های دیفرانسیل در مسئله‌های ۱ تا ۱۴ بخش ۲.۵ حول x_0 داده‌شده تعیین کنید.

۱۰. **معادلهٔ چبیشف.** معادلهٔ دیفرانسیل چبیشف[1] عبارت است از

$$(1-x^2)y''-xy'+\alpha^2y=0$$

که در آن α ثابت است.

الف) به‌ازای $|x|<1$، دو جواب برحسب توانهای x را تعیین کنید و ثابت کنید که مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند.

ب) ثابت کنید که اگر α عدد صحیح نامنفی‌ای مانند n باشد، جوابی چندجمله‌ای از درجهٔ n موجود است. به این چندجمله‌ای‌ها، پس از اینکه به‌طور مناسب نرمال شدند، چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌گوییم. این چندجمله‌ای‌ها در مسئله‌هایی مفیدند که در آن نیاز به تقریب چندجمله‌ای توابع تعریف‌شده روی بازهٔ $-1\le x\le 1$ داریم.

ج) جواب چندجمله‌ای را در هر یک از حالتهای $\alpha=n=0,1,2,3$ به‌دست بیاورید.

برای هر یک از معادلات دیفرانسیل مسئله‌های ۱۱ تا ۱۴، چهار جملهٔ اول ناصفر هر یک از جوابهای سری توان حول $x=0$ را به‌دست بیاورید. ثابت کنید آنها مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. دربارهٔ شعاع همگرایی هر جواب چه انتظاری دارید؟

۱۱. $y''+(\sin x)y=0$

۱۲. $(\cos x)y''+xy'-2y=0$

۱۳. $e^xy''+xy=0$

۱۴. $e^{-x}y''+\ln(1+x)y'-xy=0$

۱. پافنوتی اِل چبیشف (۱۸۲۱-۱۸۹۴م) ۳۵ سال استاد دانشگاه پترزبورگ و یکی از بانفوذترین ریاضیدانان روسی قرن نوزدهم بود. او مکتب پترزبورگ را بنا کرد که چند نسل ریاضیدان برجسته در آن تربیت شدند. وی مطالعهٔ چندجمله‌ای‌های چبیشف را در حدود ۱۸۵۴ میلادی به‌عنوان بخشی از تحقیق دربارهٔ تقریب توابع به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌ها آغاز کرد. چبیشف برای تحقیقاتش در نظریهٔ اعداد و احتمال هم شهرت دارد.

۱۵. فرض کنید x و x^2 جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ باشند. آیا می‌توانید بگویید که $x=0$ نقطهٔ عادی است یا نقطهٔ تکین؟ جوابتان را ثابت کنید.

معادلات مرتبهٔ اول. روش استفاده از سریها را، که در این فصل دیدیم، می‌توان به‌طور مستقیم برای معادلات خطی مرتبهٔ اول $P(x)y'+Q(x)y=0$ در نقطهٔ x_0 به‌کار برد اگر تابع $p=Q/P$ بسط تیلوری حول آن نقطه داشته باشد. چنین نقطه‌ای را نقطهٔ عادی می‌گوییم و علاوه بر این، شعاع همگرایی سری $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ حداقل به بزرگی شعاع همگرایی سری Q/P است. در هر یک از مسئله‌های ۱۶ تا ۲۱، معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را با سری‌ای از توانهای x حل کنید و ثابت کنید در هر حالت a_0 دلخواه است. در مسئله‌های ۲۰ و ۲۱ به معادلات دیفرانسیل غیرهمگن پرداخته‌ایم که این روش را به‌سادگی می‌توان برای آنها تعمیم داد. در صورت امکان سری جواب را با جواب به‌دست آمده از روشهای فصل ۲ مقایسه کنید.

۱۶. $y'-y=0$

۱۷. $y'-xy=0$

۱۸. $y'=e^{x^2}y$، تنها سه جمله

۱۹. $y'+xy=1+x$

۲۰. $y'-y=x^2$

۲۱. $(1-x)y'=y$

معادلهٔ لژاندر. در مسئله‌های ۲۲ تا ۲۹ به معادلهٔ لژاندر[1]، یعنی

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

پرداخته‌ایم. همان‌طور که در مثال ۳ اشاره کردیم، نقطهٔ $x=0$ نقطهٔ عادی این معادله است و فاصلهٔ مبدأ از نزدیک‌ترین صفر $P(x)=1-x^2$، ۱ است. بنابراین حداقل شعاع همگرایی سری جوابها حول $x=0$ برابر واحد است. همچنین توجه کنید که تنها به بررسی $\alpha>-1$ نیاز داریم چرا که اگر $\alpha\le -1$ آنگاه جایگزینی $\alpha=-(1+\gamma)$ که در آن $\gamma\ge 0$ منجر به معادلهٔ لژاندر $(1-x^2)y''-2xy'+\gamma(\gamma+1)y=0$ می‌شود.

۲۲. ثابت کنید به‌ازای $|x|<1$، دو جواب معادلهٔ لژاندر عبارت‌اند از

$$y_1(x)=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4+\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m},$$

$$y_2(x)=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5+\sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m\frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

۲۳. ثابت کنید که اگر α صفر و یا عدد صحیح مثبت $2n$ باشد، سری جواب y_1 به چندجمله‌ای‌ای از درجهٔ $2n$ تبدیل می‌شود که تنها شامل توانهای زوج x است. چندجمله‌ای‌های نظیر $\alpha=0,2,4$ را بیابید. ثابت کنید اگر α عدد

۱. آدرین‌ـ‌ماری لژاندر (۱۷۵۲-۱۸۳۳م) از سال ۱۷۸۳ میلادی به بعد مسئولیتهای متعددی در آکادمی علوم فرانسه داشت. کارهای اولیهٔ او در زمینهٔ توابع بیضوی و نظریهٔ اعداد بود. توابع لژاندر، جوابهای معادلهٔ لژاندر، برای اولین‌بار در ۱۷۸۴ میلادی در مطالعات وی دربارهٔ جاذبهٔ اجسام کروی ظاهر شدند.

صحیح مثبت فرد $۲n+۱$ باشد، سری جواب $y_۲$ به چندجمله‌ای از درجهٔ $۲n+۱$ تبدیل می‌شود که تنها شامل توانهای فرد x است. چندجمله‌ای‌های نظیر $\alpha = ۱, ۳, ۵$ را بیابید.

۲۴. چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$ برابر جواب چندجمله‌ای معادلهٔ لژاندر به‌ازای $\alpha = n$ تعریف می‌شود که در شرط $P_n(۱) = ۱$ صدق می‌کند.

الف) با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۲۳، چندجمله‌ای‌های لژاندر $P_۰(x), \ldots, P_۵(x)$ را محاسبه کنید.

ب) نمودار $P_۰(x), \ldots, P_۵(x)$ را به‌ازای $-۱ \le x \le ۱$ رسم کنید.

ج) صفرهای $P_۰(x), \ldots, P_۵(x)$ را بیابید.

۲۵. می‌توان نشان داد که فرمول کلی $P_n(x)$ عبارت است از

$$P_n(x) = \frac{۱}{۲^n}\sum_{k=۰}^{\lfloor n/۲\rfloor} \frac{(-۱)^k(۲n-۲k)!}{k!(n-k)!(n-۲k)!}x^{n-۲k}$$

که در آن $\lfloor n/۲ \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کمتر و یا مساوی $n/۲$ را نمایش می‌دهد. با بررسی شکل $P_n(x)$ برای n زوج و n فرد ثابت کنید $P_n(-۱) = (-۱)^n$.

۲۶. چندجمله‌ای‌های لژاندر نقش مهمی در فیزیک ریاضی بازی می‌کنند. به‌عنوان مثال در حل معادلهٔ لاپلاس (معادلهٔ پتانسیل)، در مختصات کروی با معادلهٔ

$$\frac{d^۲F(\varphi)}{d\varphi^۲} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+۱)F(\varphi) = ۰, \qquad ۰ < \varphi < \pi$$

مواجه می‌شویم که در آن n عددی صحیح و مثبت است. ثابت کنید تغییر متغیر $x = \cos\varphi$ منجر به معادلهٔ لژاندر برای $y = f(x) = F(\arccos x)$ با $\alpha = n$ می‌شود.

۲۷. ثابت کنید به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳$ چندجمله‌ای لژاندر متناظر برابر است با

$$P_n(x) = \frac{۱}{۲^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^۲-۱)^n$$

این فرمول به فرمول رودریگز[۱] معروف است و به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n درست است.

۲۸. ثابت کنید معادلهٔ لژاندر را می‌توان به‌صورت

$$[(۱-x^۲)y']' = -\alpha(\alpha+۱)y$$

نیز نوشت، که از آن نتیجه می‌شود

$$[(۱-x^۲)P_n'(x)]' = -n(n+۱)P_n(x), \qquad [(۱-x^۲)P_m'(x)]' = -m(m+۱)P_m(x).$$

با ضرب معادلهٔ اول در $P_m(x)$ و معادلهٔ دوم در $P_n(x)$، انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و سپس کم کردن یک معادله از دیگری، نتیجه می‌شود

$$\int_{-۱}^{۱} P_n(x)P_m(x)dx = ۰ \qquad (n \ne m).$$

به این خاصیت توابع لژاندر، خاصیت تعامد می‌گوییم. اگر $m = n$، می‌توان ثابت کرد که مقدار انتگرال قبلی برابر با $۲/(۲n+۱)$ است.

۱. اولیند رودریگز (۱۷۹۴-۱۸۵۱م) این حکم را به‌عنوان بخشی از رسالهٔ دکترایش از اِکول نرمال پاریس در ۱۸۱۶ میلادی منتشر کرد. او بعدها بانکدار و مصلح اجتماعی شد.

۲۹. با مفروض بودن چندجمله‌ای f از مرتبهٔ n، می‌توان f را به‌صورت ترکیبی خطی از $P_۰, P_۱, P_۲, \ldots, P_n$ نوشت، یعنی

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} a_k P_k(x).$$

با استفاده از مسئلهٔ ۲۸ ثابت کنید که

$$a_k = \frac{۲k+۱}{۲}\int_{-۱}^{۱} f(x)P_k(x)dx.$$

۴.۵ معادلات اویلر؛ نقاط تکین منظم

در این بخش چگونگی حل معادله‌هایی به‌صورت

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = ۰ \tag{۱}$$

را در همسایگی نقطهٔ تکین $x_۰$ بررسی می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که P، Q و R چندجمله‌ای هستند و عامل مشترک ندارند. در این‌صورت، نقاط تکین معادلهٔ (۱)، نقاطی هستند که در آنها $P(x) = ۰$.

معادلات اویلر. یکی از معادلات دیفرانسیل نسبتاً ساده‌ای که یک نقطهٔ تکین دارند **معادلهٔ اویلر**[۱]، یعنی

$$L[y] = x^۲y'' + \alpha x y' + \beta y = ۰ \tag{۲}$$

است که در آن α و β ثابتهای حقیقی هستند. در این حالت $P(x) = x^۲$، بنابراین $x = ۰$ تنها نقطهٔ تکین معادلهٔ (۲) است و همهٔ نقاط دیگر عادی هستند. برای راحتی ابتدا بازهٔ $x > ۰$ را در نظر می‌گیریم؛ بعداً نتایج را به بازهٔ $x < ۰$ تعمیم می‌دهیم.

توجه کنید که $(x^r)' = rx^{r-۱}$ و $(x^r)'' = r(r-۱)x^{r-۲}$. بنابراین اگر فرض کنیم که معادلهٔ (۲) جوابی به‌صورت

$$y = x^r \tag{۳}$$

دارد، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^۲(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-۱)+\alpha r + \beta]. \end{aligned} \tag{۴}$$

اگر r ریشهٔ معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$F(r) = r(r-۱)+\alpha r+\beta = ۰ \tag{۵}$$

باشد، $L[x^r]$ صفر است و $y = x^r$ جواب معادلهٔ (۲) است. ریشه‌های معادلهٔ (۵) عبارت‌اند از

$$r_۱, r_۲ = \frac{-(\alpha-۱)\pm\sqrt{(\alpha-۱)^۲-۴\beta}}{۲} \tag{۶}$$

۱. گاهی به این معادله، معادلهٔ کوشی–اویلر یا معادلهٔ متساوی‌البعد می‌گویند. اویلر در ۱۷۴۰ میلادی آن را بررسی کرد؛ اما از قبل از ۱۷۰۰ میلادی یوهان برنولی جواب آن را می‌دانست.

و $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. مانند معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت، حالتهایی را که ریشه‌ها حقیقی و متمایز، حقیقی و مساوی و مزدوج مختلط هستند جداگانه بررسی می‌کنیم. در حقیقت همهٔ بحث معادلات اویلر شبیه بررسی معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت در فصل ۳ است؛ با این تفاوت که x^r جایگزین e^{rx} می‌شود.

ریشه‌های حقیقی متمایز. اگر $F(r) = 0$ ریشه‌های حقیقی r_1 و r_2 داشته باشد و $r_2 \neq r_1$ آنگاه $y_1(x) = x^{r_1}$ و $y_2(x) = x^{r_2}$ جوابهای معادلهٔ (۲) هستند. چون

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1},$$

وقتی $r_1 \neq r_2$ و $x > 0$ مخالف صفر است، جواب عمومی معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}, \qquad x > 0. \tag{7}$$

توجه کنید که اگر r عددی گویا نباشد، x^r با $x^r = e^{r\ln x}$ تعریف می‌شود.

مثال ۱

معادلهٔ

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0 \tag{8}$$

را حل کنید.

با قرار دادن $y = x^r$ در معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0$$

بنابراین $r_1 = \frac{1}{2}$ و $r_2 = -1$ و در نتیجه، جواب عمومی معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \qquad x > 0 \tag{9}$$

ریشه‌های مساوی. اگر r_1 و r_2 برابر باشند، تنها یک جواب $y_1(x) = x^{r_1}$ به شکلی که فرض کرده بودیم به‌دست می‌آید. جواب دوم را می‌توان با روش کاهش مرتبه به‌دست آورد، اما به‌خاطر هدف بررسیمان از روش دیگری استفاده می‌کنیم. چون $r_1 = r_2$، $F(r) = (r - r_1)^2$؛ پس در این حالت علاوه بر $F(r_1) = 0$ باید $F'(r_1) = 0$. به این ترتیب، به نظر می‌رسد که مشتق‌گیری از معادلهٔ (۴) نسبت به r و سپس جایگزینی r با r_1 مفید باشد. با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۴) نسبت به r نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^rF(r)].$$

با قرار دادن $F(r)$، تعویض ترتیب مشتق‌گیری نسبت به x و r و توجه به اینکه $\partial(x^r)/\partial r = x^r\ln x$، نتیجه می‌شود

$$L[x^r\ln x] = (r - r_1)^2x^r\ln x + 2(r - r_1)x^r. \tag{10}$$

طرف راست معادلهٔ (۱۰) به‌ازای $r = r_1$ صفر است؛ در نتیجه

$$y_2(x) = x^{r_1}\ln x, \qquad x > 0 \tag{11}$$

جواب دوم معادلهٔ (۲) است. با محاسبهٔ رانسکین، نتیجه می‌شود

$$W(x^{r_1}, x^{r_1}\ln x) = x^{2r_1-1};$$

بنابراین وقتی $x > 0$، x^{r_1} و $x^{r_1}\ln x$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$y = (c_1 + c_2\ln x)x^{r_1}, \qquad x > 0. \tag{12}$$

مثال ۲

معادلهٔ

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \qquad x > 0 \tag{13}$$

را حل کنید.

با قرار دادن $y = x^r$ در معادلهٔ (۱۳) نتیجه می‌شود

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0;$$

بنابراین $r_1 = r_2 = -2$ و

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2\ln x), \qquad x > 0 \tag{14}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱۳) است.

ریشه‌های مختلط. بالاخره، فرض کنید که ریشه‌های r_1 و r_2 برای معادلهٔ (۵) مزدوج مختلط هستند؛ مثلاً $r_1 = \lambda + i\mu$ و $r_2 = \lambda - i\mu$ که $\mu \neq 0$. اول باید توضیح بدهیم که x^r وقتی r مختلط باشد به چه معنی است. یادآوری می‌کنیم که

$$x^r = e^{r\ln x}. \tag{15}$$

وقتی $x > 0$ و r حقیقی باشد، می‌توانیم از این معادله برای تعریف x^r به‌ازای rهای مختلط استفاده کنیم. با استفاده از فرمول اویلر برای $e^{i\mu\ln x}$، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} x^{\lambda+i\mu} &= e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda\ln x}e^{i\mu\ln x} = x^{\lambda}e^{i\mu\ln x} \\ &= x^{\lambda}[\cos(\mu\ln x) + i\sin(\mu\ln x)], \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{16}$$

با این تعریف x^r به‌ازای مقادیر مختلط r، می‌توان نشان داد که قواعد معمول جبری و حساب دیفرانسیل برقرارند و بنابراین x^{r_1} و x^{r_2} واقعاً جوابهای معادلهٔ (۲) هستند. جواب عمومی معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$y = c_1x^{\lambda+i\mu} + c_2x^{\lambda-i\mu}. \tag{17}$$

نقطه‌ضعف این عبارت این است که $x^{\lambda+i\mu}$ و $x^{\lambda-i\mu}$ مختلط‌مقدار هستند. یادآوری می‌کنیم که در مورد معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت، هنگامی که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مختلط بودند، وضع مشابهی رخ می‌داد. به همان ترتیب، توجه کنید که قسمت‌های حقیقی و موهومی $x^{\lambda+i\mu}$، یعنی

$$x^{\lambda}\cos(\mu\ln x), \qquad x^{\lambda}\sin(\mu\ln x) \tag{18}$$

هم جوابهای معادلهٔ (۲) هستند. با محاسبه‌ای سرراست نتیجه می‌شود که

$$W[x^\lambda\cos(\mu\ln x), x^\lambda\sin(\mu\ln x)] = \mu x^{2\lambda-1};$$

بنابراین این جوابها به‌ازای $x>0$ مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند و جواب عمومی معادلهٔ (۲) عبارت است از

$$y = c_1x^\lambda\cos(\mu\ln x)+c_2x^\lambda\sin(\mu\ln x),\qquad x>0. \qquad (۱۹)$$

مثال ۳

معادلهٔ

$$x^2y''+xy'+y=0 \qquad (۲۰)$$

را حل کنید.

با قرار دادن $y=x^r$ در معادلهٔ (۲۰) نتیجه می‌شود که

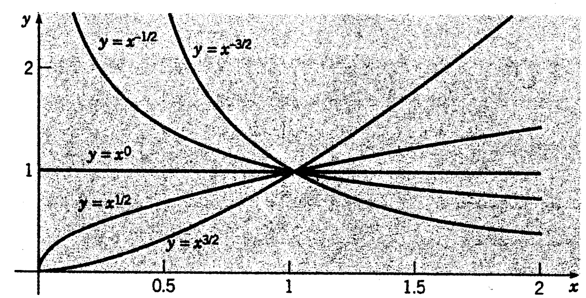
$$x^r[r(r-1)+r+1] = x^r(r^2+1)=0;$$

بنابراین $r=\pm i$ و جواب عمومی عبارت است از

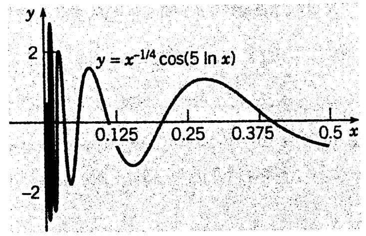
$$y=c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x),\qquad x>0. \qquad (۲۱)$$

عامل x^λ به‌طور صریح در معادلهٔ (۲۱) ظاهر نشد، چون در این مثال $\lambda=0$ و $x^\lambda=1$.

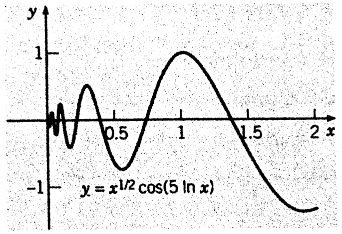
اکنون رفتار کیفی جوابهای معادلهٔ (۲) را در نزدیکی نقطهٔ تکین $x=0$ بررسی می‌کنیم. این رفتار کاملاً به مقدار نماهای r_1 و r_2 بستگی دارد. اگر r حقیقی و مثبت باشد، وقتی x از اعداد مثبت به صفر میل کند، $x^r\to 0$. از طرف دیگر اگر r حقیقی و منفی باشد، x^r بی‌کران می‌شود. بالاخره اگر $r=0$ آنگاه $x^r=1$. در شکل ۱.۴.۵ این حالتهای مختلف r را نشان داده‌ایم. اگر r مختلط باشد، جواب چیزی مانند $x^\lambda\cos(\mu\ln x)$ است. اگر به‌ترتیب λ مثبت و یا منفی باشد این تابع بی‌کران است و یا به صفر میل می‌کند و به‌علاوه، وقتی $x\to 0$ سریع و سریع‌تر نوسان می‌کند. این رفتار را در شکلهای ۲.۴.۵ و ۳.۴.۵ به‌ازای چند مقدار λ و μ نشان داده‌ایم. اگر $\lambda=0$، نوسان دامنهٔ ثابتی دارد. بالاخره اگر ریشه‌ها تکراری باشند، یک جواب به‌صورت $x^r\ln x$ است که اگر $r>0$ به صفر میل می‌کند و اگر $r\le 0$ بی‌کران می‌شود. مثالی از هر حالت را در شکل ۴.۴.۵ نشان داده‌ایم.



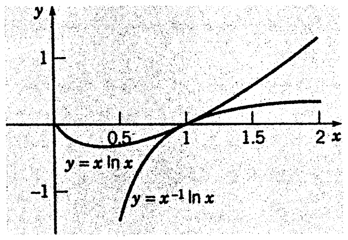
شکل ۱.۴.۵ جوابهای معادلهٔ اویلر؛ ریشه‌های حقیقی.



شکل ۲.۴.۵ جوابهای معادلهٔ اویلر؛ ریشه‌های مختلط با قسمت حقیقی منفی.



شکل ۳.۴.۵ جواب معادلهٔ اویلر؛ ریشه‌های مختلط با قسمت حقیقی مثبت.



شکل ۴.۴.۵ جواب دوم معادلهٔ اویلر با ریشه‌های تکراری.

گسترش دامنهٔ جوابهای معادلهٔ (۲) به بازهٔ $x<0$ نسبتاً ساده انجام می‌شود. مشکل، درک مفهوم x^r به‌ازای xهای منفی برای rهایی است که عدد صحیح نیستند و به همین ترتیب، $\ln x$ به‌ازای $x<0$ تعریف نشده است. می‌توان نشان داد که جوابهایی که به‌ازای $x>0$ برای معادلهٔ اویلر ارائه دادیم به‌ازای $x<0$ هم معتبرند؛ اما در حالت کلی مختلط‌مقدار هستند. پس در مثال ۱، جواب $x^{1/2}$ به‌ازای $x<0$ موهومی است.

با تغییر مناسب متغیر همواره می‌توان در بازهٔ $x<0$ جوابهای حقیقی‌مقداری برای معادلهٔ اویلر (۲) به‌دست آورد. فرض کنید $x=-\xi$ که $\xi>0$ و قرار دهید $y=u(\xi)$. در این‌صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx}=-\frac{du}{d\xi},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx}=\frac{d^2u}{d\xi^2}; \qquad (۲۲)$$

پس به‌ازای $x<0$، معادلهٔ (۲) به‌صورت

$$\xi^2\frac{d^2u}{d\xi^2}+\alpha\xi\frac{du}{d\xi}+\beta u=0,\qquad \xi>0 \qquad (۲۳)$$

درمی‌آید. اما صرف‌نظر از نام متغیرها، این دقیقاً همان معادلهٔ (۲) است؛ از معادله‌های (۷)، (۱۲) و (۱۹) نتیجه می‌شود

$$u(\xi)=\begin{cases} c_1\xi^{r_1}+c_2\xi^{r_2} \\ (c_1+c_2\ln\xi)\xi^{r_1} \\ c_1\xi^\lambda\cos(\mu\ln\xi)+c_2\xi^\lambda\sin(\mu\ln\xi)\end{cases} \qquad (۲۴)$$

بسته به اینکه ریشه‌های $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$، حقیقی و متمایز، حقیقی و تکراری یا مزدوج‌مختلط باشند. برای به‌دست آوردن u برحسب x، در معادله‌های (۲۴) به‌جای ξ، $-x$ را قرار می‌دهیم.

می‌توانیم نتایجی را که به‌ازای $x > 0$ و $x < 0$ به‌دست آورده‌ایم با یادآوری اینکه $|x| = x$ به‌ازای $x > 0$ و $|x| = -x$ به‌ازای $x < 0$ ادغام کنیم. پس برای به‌دست آوردن جوابهای حقیقی‌مقدار که در هر بازه‌ای که شامل صفر نباشد معتبرند تنها کافی است در معادله‌های (۷)، (۱۲) و (۱۹) به‌جای x، $|x|$ را قرار بدهیم. بنابراین جواب عمومی معادلهٔ اویلر (۲)، یعنی

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

در هر بازه‌ای که شامل صفر نباشد با ریشه‌های r_1 و r_2 از معادلهٔ

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

به این ترتیب تعیین می‌شوند که اگر ریشه‌ها حقیقی و متفاوت باشند،

$$y = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}; \tag{۲۵}$$

اگر ریشه‌ها حقیقی و مساوی باشند،

$$y = (c_1 + c_2 \ln|x|)|x|^{r_1}; \tag{۲۶}$$

اگر ریشه‌ها مزدوج‌مختلط باشند،

$$y = |x|^{\lambda}[c_1 \cos(\mu \ln|x|) + c_2 \sin(\mu \ln|x|)] \tag{۲۷}$$

که در آن $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

جوابهای معادلهٔ اویلری به‌صورت

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0 \tag{۲۸}$$

هم به همین شکل‌اند. اگر دنبال جوابهایی به‌صورت $y = (x - x_0)^r$ بگردیم، جواب عمومی از معادلهٔ (۲۵)، معادلهٔ (۲۶) یا معادلهٔ (۲۷) با قرار دادن $x - x_0$ به‌جای x به‌دست می‌آید. روش دیگر این است که معادلهٔ (۲۸) را با تغییر متغیر مستقل $t = x - x_0$ به شکل معادلهٔ (۲) ساده کنیم.

نقاط تکین منظم. اکنون به بررسی معادلهٔ (۱)، یعنی

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

بازمی‌گردیم که در آن x_0 نقطهٔ تکین است. این یعنی $P(x_0) = 0$ و حداقل یکی از Q و R در x_0 صفر نیست.

متأسفانه اگر از روشهای دو بخش قبل برای حل معادلهٔ (۱) حول نقطهٔ تکین x_0 استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که این روشها با شکست مواجه می‌شوند؛ چون جواب معادلهٔ (۱) در x_0 تحلیلی نیست و در نتیجه نمی‌توان آن را با سری تیلوری برحسب توانهای $x - x_0$ نمایش داد. در مثالهای ۱، ۲ و ۳ این واقعیت را نشان داده‌ایم؛ در

حقیقت در هر یک از این مثالها جوابها بسط سری توانی حول نقطهٔ تکین $x = 0$ نداشتند. بنابراین برای حل معادلهٔ (۱) در همسایگی نقطهٔ تکین باید از بسط به سریها از نوع کلی‌تری استفاده کنیم.

چون معمولاً نقاط تکین معادلهٔ دیفرانسیل کم هستند، ممکن است فکر کنیم که می‌توان به‌سادگی از آنها صرف‌نظر کرد، به‌ویژه اینکه نحوهٔ ساختن جوابها حول نقاط عادی را از قبل می‌دانیم. اما این کار عملی نیست؛ چون نقاط تکین بیش از آنکه تصور می‌کنیم ویژگیهای اصلی جواب را مشخص می‌کنند. معمولاً در همسایگی نقطهٔ تکین اندازهٔ جواب بسیار بزرگ می‌شود یا به‌سرعت تغییر می‌کند. جوابهای مثالهای ۱، ۲ و ۳ هم همین را نشان می‌دهند. پس رفتار سیستم فیزیکی‌ای که با معادلهٔ دیفرانسیل مدل شده، اغلب در همسایگی نقطهٔ تکین به‌غایت جالب است. اغلب تکینگی‌های هندسی مسئله‌های فیزیکی، مانند گوشه و یا لبه‌های تیز، منجر به نقاط تکین در معادلهٔ دیفرانسیل متناظرشان می‌شوند. پس هرچند که در نگاه اول ممکن است بخواهیم از چند نقطه که معادلهٔ دیفرانسیل در آنها تکین است پرهیز کنیم، دقیقاً همین نقاط برای مطالعهٔ دقیق‌تر جواب ضروری هستند.

به‌عنوان جایگزینی برای روشهای تحلیلی، می‌توانیم استفاده از روشهای عددی را بررسی کنیم که در فصل ۸ به بحث در مورد آنها می‌پردازیم. اما این روشها برای بررسی جوابها در نزدیکی نقطهٔ تکین مناسب نیستند. پس حتی اگر بخواهیم از روشهای عددی استفاده کنیم، با ترکیب آنها با روشهای تحلیلی این فصل در بررسی رفتار جوابها در نزدیکی نقاط تکین به نتایج بهتری می‌رسیم.

بدون اطلاعات اضافی دربارهٔ رفتار Q/P و R/P در همسایگی نقطهٔ تکین، تشریح رفتار جوابهای معادلهٔ (۱) در نزدیکی $x = x_0$ غیرممکن است. ممکن است دو جواب متمایز از معادلهٔ (۱) موجود باشند که وقتی $x \to x_0$ کراندار باقی می‌مانند (مانند مثال ۳)؛ یا ممکن است تنها یک جواب موجود باشد و دیگری وقتی $x \to x_0$ بی‌کران شود (مانند مثال ۱)؛ یا ممکن است هر دو وقتی $x \to x_0$ بی‌کران شوند (مانند مثال ۲). اگر معادلهٔ (۱) جوابهایی داشته باشد که وقتی $x \to x_0$ بی‌کران شوند، اغلب مهم است تعیین کنیم که این جوابها وقتی $x \to x_0$ چگونه رفتار می‌کنند: y مشابه با $(x - x_0)^{-1}$ به بینهایت میل می‌کند یا مشابه $|x - x_0|^{-1/2}$ یا به نحوی دیگر؟

هدفمان این است که روشی را که قبلاً برای حل معادلهٔ (۱) در نزدیکی نقطهٔ عادی مطرح کردیم طوری تعمیم بدهیم که بتوان آن را در همسایگی نقطهٔ تکین x_0 به‌کار گرفت. برای اینکه این تعمیم به شکل معقولی انجام شود، لازم است بحث را به حالتهایی محدود کنیم که در آنها تکینگی Q/P و R/P در $x = x_0$ چندان جدی نیست ــ حالتی که می‌توانیم به آن «تکینگی ضعیف» بگوییم. در این مرحله چندان واضح نیست که تکینگی قابل قبول چه‌جور چیزی است؛ اما وقتی روش حل را ارائه کردیم خواهید دید که شرایط مناسب برای تمیز «تکینگی ضعیف» عبارت‌اند از

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{کراندار است.} \tag{۲۹}$$

و

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{کراندار است.} \tag{۳۰}$$

(مسئلهٔ ۲۱ بخش ۶.۵ را هم ببینید)، که یعنی تکینگی در Q/P بدتر از $(x - x_0)^{-1}$ نیست و تکینگی در R/P بدتر از $(x - x_0)^{-2}$ نیست. به چنین نقطه‌ای **نقطهٔ تکین منظم** معادلهٔ (۱) می‌گوییم. برای معادله‌هایی

که ضرایبشان از چندجمله‌ای‌ها کلی‌ترند، x_0 نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (۱) است اگر نقطهٔ تکین باشد و هر دوی

$$(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)},\qquad (x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} \tag{۳۱}$$

حول x_0 سری تیلور همگرا داشته باشند، یعنی اگر تابعهای معادلهٔ (۳۱) در $x=x_0$ تحلیلی باشند.[1] برقراری معادله‌های (۲۹) و (۳۰) نتیجه می‌دهد که اگر P، Q و R چندجمله‌ای باشند این وضع برقرار است. به نقطهٔ تکین معادلهٔ (۱) که نقطهٔ تکین منظم نیست **نقطهٔ تکین نامنظم** معادلهٔ (۱) می‌گوییم.

توجه کنید که معادلهٔ اویلر (۲۸) در شرایط معادله‌های (۲۹) و (۳۰) صدق می‌کند؛ پس نقطهٔ تکین معادلهٔ اویلر نقطهٔ تکین منظم است. در حقیقت خواهیم دید که همهٔ معادله‌های به‌صورت (۱) در نزدیکی نقطهٔ تکین منظم بسیار شبیه معادلهٔ اویلر رفتار می‌کنند؛ یعنی جوابها در نزدیکی نقطهٔ تکین منظم ممکن است شامل توانهایی از x با نماهای منفی و یا غیرصحیح، لگاریتم‌ها یا سینوس‌ها و کسینوس‌ها با آرگومان لگاریتمی باشند.

در بخش‌های بعدی چگونگی حل معادلهٔ (۱) را در همسایگی نقطهٔ تکین منظم بررسی می‌کنیم. بحث دربارهٔ جوابهای معادلات دیفرانسیل در همسایگی نقاط تکین نامنظم پیچیده‌تر است و می‌توان آن را در کتابهای پیشرفته‌تر یافت.

مثال ۴

نقاط تکین معادلهٔ لژاندر، یعنی

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0 \tag{۳۲}$$

را تعیین کنید و تعیین کنید که تکینگی‌ها منظم‌اند و یا نامنظم‌اند.

در این حالت $P(x)=1-x^2$، بنابراین نقاط تکین $x=1$ و $x=-1$ هستند. توجه کنید که اگر معادلهٔ (۳۲) را بر $1-x^2$ تقسیم کنیم، ضرایب y' و y به‌ترتیب عبارت‌اند از $-2x/(1-x^2)$ و $\alpha(\alpha+1)/(1-x^2)$. ابتدا حالت $x=1$ را در نظر می‌گیریم و حد معادله‌های (۲۹) و (۳۰) را حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-2x)}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to1}\frac{2x}{1+x}=1$$

و

$$\lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2\alpha(\alpha+1)}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-\alpha)(\alpha+1)}{1+x}=0.$$

چون این حدها متناهی هستند، نقطهٔ $x=1$ نقطهٔ تکین منظم است. به‌طور مشابهی می‌توان نشان داد که $x=-1$ هم نقطهٔ تکین منظم است.

مثال ۵

نقاط تکین معادلهٔ دیفرانسیل

$$2x(x-2)^2y''+3xy'+(x-2)y=0$$

را تعیین کنید و آنها را برحسب منظم و یا نامنظم بودنشان دسته‌بندی کنید.

۱. ممکن است تابعهای معادلهٔ (۳۱) در x_0 تعریف نشده باشند. در این حالت باید آنها را با حدشان وقتی $x\to x_0$ تعریف کرد.

با تقسیم معادلهٔ دیفرانسیل بر $2x(x-2)^2$ نتیجه می‌شود

$$y''+\frac{3}{2(x-2)^2}y'+\frac{1}{2x(x-2)}y=0;$$

بنابراین $p(x)=Q(x)/P(x)=3/2(x-2)^2$ و $q(x)=R(x)/P(x)=1/2x(x-2)$. نقاط تکین $x=0$ و $x=2$ هستند. $x=0$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to0}xp(x)=\lim_{x\to0}x\frac{3}{2(x-2)^2}=0,$$
$$\lim_{x\to0}x^2q(x)=\lim_{x\to0}x^2\frac{1}{2x(x-2)}=0.$$

چون این حدها متناهی هستند، $x=0$ نقطهٔ تکین منظم است. به‌ازای $x=2$ می‌توانیم بنویسیم

$$\lim_{x\to2}(x-2)p(x)=\lim_{x\to2}(x-2)\frac{3}{2(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{3}{2(x-2)};$$

بنابراین حد موجود نیست و در نتیجه $x=2$ نقطهٔ تکین نامنظم است.

مثال ۶

نقاط تکین

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2y''+(\cos x)y'+(\sin x)y=0$$

را تعیین کنید و آنها را برحسب منظم یا نامنظم بودنشان دسته‌بندی کنید.

تنها نقطهٔ تکین $x=\pi/2$ است. برای بررسی وضع آن، تابعهای

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)p(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{\cos x}{x-\pi/2}$$

و

$$\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2q(x)=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\sin x$$

را در نظر می‌گیریم. با استفاده از سری تیلور $\cos x$ حول $x=\pi/2$ نتیجه می‌شود

$$\frac{\cos x}{x-\pi/2}=-1+\frac{(x-\pi/2)^2}{3!}-\frac{(x-\pi/2)^4}{5!}+\cdots$$

که به‌ازای هر x همگراست. $\sin x$ هم در $x=\pi/2$ تحلیلی است؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\pi/2$ نقطهٔ تکین منظم این معادله است.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲، جواب عمومی‌ای را برای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده به‌دست بیاورید که در هر بازه‌ای که شامل نقطهٔ تکین نباشد معتبر است.

۱. $x^2y''+4xy'+2y=0$

۲. $(x+1)^2y''+3(x+1)y'+0.75y=0$

۳. $x^2y''-3xy'+4y=0$

۴. $x^2y''+3xy'+5y=0$

۵. $x^2y''+6xy'-y=0$

۶. $(x-1)^2y''+8(x-1)y'+12y=0$

۷. $x^2y'' - xy' + y = 0$ ۸. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

۹. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ ۱۰. $(x-2)^2y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$

۱۱. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$ ۱۲. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۶، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ داده‌شده را بیابید. نمودار جواب را رسم کنید و چگونگی رفتار جواب را وقتی $x \to 0$ تشریح کنید.

۱۳. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0$، $y(1) = 1$، $y'(1) = 4$

۱۴. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$، $y(-1) = 2$، $y'(-1) = 3$

۱۵. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0$، $y(1) = 2$، $y'(1) = -3$

۱۶. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$، $y(1) = 1$، $y'(1) = -1$

در هر یک از مسئله‌های ۱۷ تا ۳۴، همهٔ نقاط تکین معادلهٔ داده‌شده را بیابید و تعیین کنید که هرکدامشان منظم است و یا نامنظم.

۱۷. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$ ۱۸. $x^2(1-x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$

۱۹. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$ ۲۰. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$

۲۱. $(1-x^2)^2y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$

۲۲. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$، معادلهٔ بسل

۲۳. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$

۲۴. $x(1-x^2)^3y'' + (1-x^2)^2y' + 2(1+x)y = 0$

۲۵. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$

۲۶. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$

۲۷. $(x^2+x-2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$ ۲۸. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$

۲۹. $y'' + (\ln|x|)y' + 3xy = 0$ ۳۰. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$

۳۱. $xy'' + y'(\cot x)y = 0$ ۳۲. $x^2y'' - 3(\sin x)y' + (1+x^2)y = 0$

۳۳. $(\sin x)y'' + xy' + 4y = 0$ ۳۴. $(x\sin x)y'' + 3y' + xy = 0$

۳۵. همهٔ αهایی را بیابید که همهٔ جوابهای $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ وقتی $x \to 0$ به صفر میل کنند.

۳۶. همهٔ βهایی را بیابید که همهٔ جوابهای $x^2y'' + \beta y = 0$ وقتی $x \to 0$ به صفر میل کنند.

۳۷. γ را طوری بیابید که وقتی $x \to 0$، جواب مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $x^2y'' - 2y = 0$، $y(1) = 1$، $y'(1) = \gamma$ کراندار باشد.

۳۸. همهٔ αهایی را بیابید که همهٔ جوابهای $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ وقتی $x \to \infty$ به صفر میل کنند.

۳۹. معادلهٔ اویلر $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ را در نظر بگیرید. شرایطی روی α و β بیابید که

الف) وقتی $x \to 0$ همهٔ جوابها به صفر میل کنند.

ب) وقتی $x \to 0$ همهٔ جوابها کراندار باشند.

ج) وقتی $x \to \infty$ همهٔ جوابها به صفر میل کنند.

د) وقتی $x \to \infty$ همهٔ جوابها کراندار باشند.

ه) وقتی $x \to 0$ یا $x \to \infty$ همهٔ جوابها کراندار باشند.

۴۰. با استفاده از روش کاهش مرتبه ثابت کنید که اگر r_1 ریشهٔ تکراری

$$r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$$

باشد، x^{r_1} و $x^{r_1}\ln x$ به‌ازای $x > 0$ جوابهای $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ هستند.

در هر یک از مسئله‌های ۴۱ و ۴۲ ثابت کنید که نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است. در هر مسئله سعی کنید جوابی به‌صورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بیابید. ثابت کنید (صرف‌نظر از مضارب ثابت) تنها یک جواب ناصفر به این‌صورت برای مسئلهٔ ۴۱ وجود دارد و برای مسئلهٔ ۴۲ جوابی به این‌صورت موجود نیست. پس در هیچ‌یک از این حالتها جواب عمومی را نمی‌توان به این طریق یافت. معادله‌هایی که نقاط تکین دارند، نوعاً چنین‌اند.

۴۱. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

۴۲. $2x^2y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$

۴۳. **تکینگی‌ها در بینهایت.** تعریف نقطهٔ عادی و نقطهٔ تکین منظم در بخش قبل را تنها وقتی می‌توان به‌کار گرفت که نقطهٔ x_0 متناهی باشد. گاهی لازم است که نقطهٔ بینهایت را در معادلهٔ دیفرانسیل در نظر بگیریم. این کار با تغییر متغیر $\xi = 1/x$ و بررسی معادلهٔ حاصل در $\xi = 0$ صورت می‌گیرد. ثابت کنید که برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

نقطهٔ بینهایت نقطهٔ عادی است اگر

$$\frac{1}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

حول $\xi = 0$ بسط سری تیلور داشته باشند. ثابت کنید نقطهٔ بینهایت نقطهٔ تکین منظم است اگر حداقل یکی از تابعهای فوق بسط تیلور نداشته باشند اما هر دوی

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)}\left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2}\right], \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

تحلیلی باشند.

در هر یک از مسئله‌های ۴۴ تا ۴۹، با استفاده از نتایج مسئلهٔ ۴۳ تعیین کنید که نقطهٔ بینهایت نقطهٔ عادی است، نقطهٔ تکین منظم است و یا نقطهٔ تکین نامنظم معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده است.

۴۴. $y'' + y = 0$

۴۵. $x^2y'' + xy' - 4y = 0$

۴۶. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$، معادلهٔ هرمیت

۴۷. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$، معادلهٔ بسل

۴۸. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$، معادلهٔ لژاندر

۴۹. $y'' - xy = 0$، معادلهٔ ایری.

۵.۵ جوابهای سری در نزدیکی نقطهٔ تکین منظم؛ قسمت اول

اکنون مسئلهٔ حل معادلهٔ خطی مرتبهٔ دوم کلی، یعنی

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \qquad (۱)$$

را در همسایگی نقطهٔ تکین منظم $x = x_0$ در نظر می‌گیریم. برای راحتی کار فرض می‌کنیم $x_0 = 0$. اگر $x_0 \neq 0$ می‌توانیم با قرار دادن $t = x - x_0$ معادله را به معادله‌ای تبدیل کنیم که نقطهٔ تکین منظم آن در مبدأ است.

اینکه $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (۱) است نتیجه می‌دهد که وقتی x به صفر میل می‌کند، حد $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ و $x^2R(x)/P(x) = x^2q(x)$ متناهی است و این تابعها در $x = 0$ تحلیلی هستند. پس بسط تیلوری همگرا به‌صورت

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad (۲)$$

در بازهٔ $|x| < \rho$ حول مبدأ دارند که در آن $\rho > 0$. برای ظاهر کردن کمیتهای $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در معادلهٔ (۱)، می‌توانیم معادلهٔ (۱) را بر $P(x)$ تقسیم کنیم و سپس در x^2 ضرب کنیم تا به

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0 \qquad (۳)$$

یا

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots)y' + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots)y = 0 \qquad (۴)$$

برسیم. اگر همهٔ ضرایب p_n و q_n صفر باشند به‌جز احتمالاً

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{و} \quad q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \qquad (۵)$$

آنگاه معادلهٔ (۴) به معادلهٔ اویلر

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \qquad (۶)$$

ساده می‌شود که در بخش قبل آن را بررسی کردیم؛ اما در حالت کلی بعضی از p_n و q_nها، وقتی $n \geq 1$، هم صفر نیستند. با این حال، مشخصهٔ اصلی جوابهای معادلهٔ (۴) با جوابهای معادلهٔ اویلر (۶) یکسان است. حضور جملات $p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots$ و $q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots$ تنها محاسبات را پیچیده‌تر می‌کند.

ابتدا فقط به بازهٔ $x > 0$ توجه می‌کنیم. بازهٔ $x < 0$ را می‌توان مانند معادلهٔ اویلر با تغییر متغیر $x = -\xi$ و سپس حل معادلهٔ حاصله به‌ازای $\xi > 0$ بررسی کرد.

چون ضرایب معادلهٔ اویلر حاصلضرب «ضرایب اویلر» و سریهای توانی است، طبیعی است که در جستجوی جوابی به‌صورت حاصلضرب «جوابهای اویلر» و سریهای توانی باشیم. پس فرض می‌کنیم که

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n} \qquad (۷)$$

که در آن $a_0 \neq 0$. به‌عبارت دیگر r نمای جملهٔ اول سری و a_0 ضریب آن است. به‌عنوان بخشی از حل باید موارد زیر را تعیین کنیم:

۱. مقادیری از r را که به‌ازای آنها معادلهٔ (۱) جوابی به‌صورت (۷) داشته باشد.

۲. رابطهٔ بازگشتی برای ضرایب a_n.

۳. شعاع همگرایی سری $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

نظریهٔ کلی را فروبنیوس[۱] ارائه کرده که نسبتاً پیچیده است. در این بخش و دو بخش بعدی، به‌جای اینکه این نظریه را ارائه کنیم، تنها فرض می‌کنیم که جوابی به‌صورتی که گفتیم موجود است. به‌ویژه فرض می‌کنیم که شعاع همگرایی هر سری توانی در عبارت جواب ناصفر است و به نحوهٔ تعیین ضرایب در این نوع سریها می‌پردازیم. برای نشان دادن روش فروبنیوس ابتدا مثالی می‌آوریم.

مثال ۱

معادلهٔ دیفرانسیل

$$2x^2y'' - xy' + (1 + x)y = 0 \qquad (۸)$$

را حل کنید.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (۸) است. علاوه بر این $xp(x) = -1/2$ و $x^2q(x) = (1 + x)/2$؛ پس $p_0 = -1/2$، $q_0 = 1/2$ و $q_1 = 1/2$ و بقیهٔ pها و qها صفرند. پس، مانند معادلهٔ (۶)، معادلهٔ اویلر متناظر معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \qquad (۹)$$

برای حل معادلهٔ (۸) فرض می‌کنیم که جوابی به‌صورت (۷) موجود است. آنگاه

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)x^{r+n-1} \qquad (۱۰)$$

و

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r + n)(r + n - 1)x^{r+n-2}. \qquad (۱۱)$$

---

۱. فردیناند گئورگ فروبنیوس (۱۸۴۹-۱۹۱۷م) هم مانند فوخس دانشجو و سپس استاد دانشگاه برلین بود. او در ۱۸۷۴ میلادی نشان داد که چگونه باید سریهای توانی جواب حول نقطهٔ تکین منظم را ساخت. اما مهم‌ترین کار او در جبر بود؛ او یکی از بنیانگذاران نظریهٔ گروهها است.

با قرار دادن y، y' و y'' در معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}. \tag{12}$$

جملهٔ آخر معادلهٔ (۱۲) را می‌توان به‌صورت $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{r+n}$ نوشت، بنابراین با ترکیب جمله‌های معادلهٔ (۱۲) نتیجه می‌شود

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = a_0[2r(r-1)-r+1]x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\{[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]a_n + a_{n-1}\}x^{r+n} = 0. \tag{13}$$

اگر قرار باشد که معادلهٔ (۱۳) به‌ازای هر x برقرار باشد، ضریب هر توان x در معادلهٔ (۱۳) باید صفر باشد. چون $a_0 \neq 0$، از صفر بودن ضریب x^r نتیجه می‌شود

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0 \tag{14}$$

به معادلهٔ (۱۴) **معادلهٔ مبین** معادلهٔ (۸) می‌گوییم. توجه کنید که این معادله، دقیقاً معادلهٔ چندجمله‌ای است که برای معادلهٔ اویلر (۹) متناظر معادلهٔ (۸) به‌دست می‌آمد. ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1/2. \tag{15}$$

به این مقدارهای r، **نماهای تکینگی** نقطهٔ تکین منظم $x = 0$ می‌گوییم. این نماها رفتار کیفی جواب معادلهٔ (۷) را در همسایگی نقطهٔ تکین تعیین می‌کنند.

حال به معادلهٔ (۱۳) برمی‌گردیم و ضریب x^{r+n} را برابر صفر قرار می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود

$$[2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1]a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1 \tag{16}$$

یا

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} = -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \quad n \geq 1. \tag{17}$$

برای هر یک از دو ریشهٔ r_1 و r_2 از معادلهٔ مبین، از رابطهٔ بازگشتی (۱۷) برای تعیین مجموعهٔ ضرایب a_1، a_2، ... استفاده می‌کنیم. به‌ازای $r = r_1 = 1$ معادلهٔ (۱۷) تبدیل می‌شود به

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \quad n \geq 1;$$

پس

$$a_1 = -\frac{a_0}{3\cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5\cdot 2} = \frac{a_0}{(3\cdot 5)(1\cdot 2)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{7\cdot 3} = -\frac{a_0}{(3\cdot 5\cdot 7)(1\cdot 2\cdot 3)}$$

و در حالت کلی،

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)]n!}a_0, \quad n \geq 4. \tag{18}$$

با ضرب صورت و مخرج طرف راست معادلهٔ (۱۸) در $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n = 2^n n!$، می‌توانیم آن را به‌صورت

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!}a_0, \quad n \geq 1$$

بنویسیم. بنابراین اگر ضریب ثابت a_0 را حذف کنیم، یک جواب معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$y_1(x) = x\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{(2n+1)!}\right], \quad x > 0. \tag{19}$$

برای تعیین شعاع همگرایی سری معادلهٔ (۱۹) از آزمون نسبت استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0;$$

بنابراین سری به‌ازای هر x همگراست.

به‌ازای $r = r_2 = 1/2$ هم همین کار را انجام می‌دهیم. از معادلهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(n-1/2)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n \geq 1;$$

بنابراین

$$a_1 = -\frac{a_0}{1\cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{(1\cdot 2)(1\cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3\cdot 5} = -\frac{a_0}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 3\cdot 5)}$$

و به‌طور کلی

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}a_0, \quad n \geq 4. \tag{20}$$

مجدداً، صورت و مخرج را در $2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n = 2^n n!$ ضرب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}a_0, \quad n \geq 1.$$

مجدداً با حذف ضریب ثابت a_0، جواب

$$y_2(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!}x^n\right], \quad x > 0 \tag{21}$$

را به‌دست می‌آوریم. مثل قبل می‌توانیم نشان بدهیم که سری معادلهٔ (۲۱) به‌ازای هر x همگراست. چون y_1 و y_2 در نزدیکی $x = 0$ به‌ترتیب مشابه x و $x^{1/2}$ رفتار می‌کنند، مجموعه‌ای اساسی از جوابها تشکیل می‌دهند. بنابراین جواب عمومی

معادلهٔ (۸) عبارت است از

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x), \qquad x > 0.$$

در مثال قبل دیدیم که اگر $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم باشد، گاهی دو جواب به‌صورت (۷) در همسایگی این نقطه وجود دارند. به‌طور مشابه اگر $x = x_0$ نقطهٔ تکین منظم باشد، ممکن است دو جواب به‌صورت

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad (22)$$

موجود باشند که در نزدیکی $x = x_0$ معتبرند. اما همان‌طور که ممکن نیست معادلهٔ اویلر دو جواب به‌صورت $y = x^r$ داشته باشد، معادلهٔ کلی‌تر با نقطهٔ تکین منظم هم نمی‌تواند دو جواب به‌صورت (۷) یا (۲۲) داشته باشد. به‌ویژه در بخش بعد نشان می‌دهیم که اگر ریشه‌های معادلهٔ مبین برابر باشند و یا به اندازهٔ یک عدد صحیح تفاوت داشته باشند، ساختار جواب دوم معمولاً پیچیده‌تر است. به‌هر حال، همیشه می‌توان جوابی به‌صورت (۷) یا (۲۲) یافت؛ اگر r_1 و r_2 به اندازهٔ عددی صحیح تفاوت داشته باشند، این جواب به ریشهٔ بزرگ‌تر r متناظر می‌شود. اگر تنها یک چنین جوابی موجود باشد، جواب دوم (درست مانند معادلهٔ اویلر در حالتی که ریشه‌های معادلهٔ مشخصه مساوی بودند) حتماً شامل جملهٔ لگاریتمی است. برای تعیین جواب دوم در این حالتها می‌توان روش کاهش مرتبه یا روشهای دیگر را به‌کار گرفت. این موضوع را در بخش‌های ۶.۵ و ۷.۵ بررسی می‌کنیم.

اگر ریشه‌های معادلهٔ مبین مختلط باشند، نمی‌توانند مساوی باشند و یا تفاوتی برابر عددی صحیح داشته باشند؛ بنابراین همواره دو جواب به‌صورت (۷) یا (۲۲) موجودند. البته این جوابها تابعهایی مختلط‌مقدار از x هستند؛ اما مانند معادلهٔ اویلر، می‌توان با در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی جوابهای مختلط، جوابهای حقیقی‌مقدار را به‌دست آورد.

درنهایت نکته‌ای عملی را ذکر می‌کنیم. اگر P، Q و R چندجمله‌ای باشند، اغلب کارکردن مستقیم با معادلهٔ (۱) به‌جای معادلهٔ (۳) ساده‌تر است: با این کار از لزوم نمایش $xQ(x)/P(x)$ و $x^2R(x)/P(x)$ به‌صورت سریهای توان پرهیز می‌کنیم. به‌عنوان مثال راحت‌تر است که معادلهٔ

$$x(1 + x)y'' + 2y' + xy = 0$$

را در نظر بگیریم تا اینکه آن را به‌صورت

$$x^2y'' + \frac{2x}{1+x}y' + \frac{x^2}{1+x}y = 0$$

بنویسیم که در آن باید $2x/(1 + x)$ و $x^2/(1 + x)$ به‌صورت سری توانی نوشت.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۰،

الف) ثابت کنید معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده نقطهٔ تکین منظمی در $x = 0$ دارد.

ب) معادلهٔ مبین، رابطهٔ بازگشتی و ریشه‌های معادلهٔ مبین را تعیین کنید.

ج) سری جواب متناظر با ریشهٔ بزرگ‌تر را به‌دست بیاورید ($x > 0$).

د) اگر ریشه‌ها نامساوی باشند و تفاوتشان عدد صحیح نباشد، سری جواب نظیر ریشهٔ کوچک‌تر را هم به‌دست بیاورید.

۱. $2xy'' + y' + xy = 0$

۲. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/9)y = 0$

۳. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

۴. $xy'' + y' - y = 0$

۵. $xy'' + y = 0$

۶. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$

۷. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$

۸. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$

۹. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$

۱۰. $x^2y'' + (x^2 + 1/4)y = 0$

۱۱. معادلهٔ لژاندر از مرتبهٔ α عبارت است از

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$$

جواب این معادله در نزدیکی نقطهٔ عادی $x = 0$ را در مسئله‌های ۲۲ و ۲۳ بخش ۳.۵ بررسی کردیم. در مثال ۴ بخش ۴.۵ نشان دادیم که $x = \pm 1$ نقاط تکین منظم هستند.

الف) معادلهٔ مبین و ریشه‌های آن را به‌ازای $x = 1$ به‌دست بیاورید.

ب) سری جوابی برحسب توانهای $x - 1$ به‌ازای $x - 1 > 0$ به‌دست بیاورید.

راهنمایی: بنویسید $1 + x = 2 + (x - 1)$ و $x = 1 + (x - 1)$. معادلاً تغییر متغیر $x - 1 = t$ را انجام بدهید و جواب سری را برحسب توانهای t تعیین کنید.

۱۲. معادلهٔ چبیشف،

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2y = 0$$

است که در آن α ثابت است؛ مسئلهٔ ۱۰ بخش ۳.۵ را ببینید.

الف) ثابت کنید که $x = 1$ و $x = -1$ نقاط تکین منظم هستند و نماهای هر یک از این نقاط تکین را به‌دست بیاورید.

ب) دو جواب حول $x = 1$ را بیابید.

۱۳. معادلهٔ دیفرانسیل لاگر[1] عبارت است از

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

الف) ثابت کنید $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است.

ب) معادلهٔ مشخصه، ریشه‌های آن و رابطهٔ بازگشتی را معین کنید.

ج) فرض کنید $x > 0$ و یک جواب را به‌دست بیاورید. ثابت کنید اگر به‌ازای عدد صحیح و مثبتی مانند m بدانیم $\lambda = m$، این جواب چندجمله‌ای می‌شود. این چندجمله‌ای، اگر کاملاً نرمال باشد، به چندجمله‌ای لاگر معروف است و با $L_m(x)$ نشان داده می‌شود.

۱۴. معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر عبارت است از

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

الف) ثابت کنید $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است.

ب) ثابت کنید ریشه‌های معادلهٔ مبین $r_1 = r_2 = 0$ هستند.

۱. ادموند نیکلاس لاگر (۱۸۳۴-۱۸۸۶م) هندسه‌دان و آنالیزدان فرانسوی چندجمله‌ای‌هایی را در حدود ۱۸۷۹ بررسی کرد که به‌نام وی نامگذاری شدند.

ج) ثابت کنید جواب به‌ازای $(x > 0)$ عبارت است از

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

د) ثابت کنید سری $J_0(x)$ به‌ازای هر x همگراست. تابع J_0 به تابع بسل نوع اول و مرتبهٔ صفر مشهور است.

۱۵. با رجوع به مسئلهٔ ۱۴، از روش کاهش مرتبه برای اثبات اینکه جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر شامل جملهٔ لگاریتمی است استفاده کنید.

راهنمایی: اگر $y_2(x) = J_0(x)v(x)$،

$$y_2(x) = J_0(x)\int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

جملهٔ اول در بسط سری $1/x[J_0(x)]^2$ را به‌دست بیاورید.

۱۶. معادلهٔ بسل مرتبهٔ یک عبارت است از

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

الف) ثابت کنید $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است.

ب) ثابت کنید ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$.

ج) ثابت کنید جوابی به‌ازای $x > 0$ عبارت است از

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!n!2^{2n}}.$$

د) ثابت کنید که سری $J_1(x)$ به‌ازای هر x همگراست. تابع J_1 به تابع بسل نوع اول و مرتبهٔ یک مشهور است.

هـ) ثابت کنید که تعیین جوابی به‌صورت

$$x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0$$

غیرممکن است.

۶.۵ جوابهای سری در نزدیکی نقطهٔ تکین منظم؛ قسمت دوم

اکنون مسئلهٔ کلی تعیین جواب

$$L[y] = x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0 \qquad (1)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \qquad (2)$$

و هر دو سری در بازهٔ $|x| < \rho$ به‌ازای ρای که $\rho > 0$ همگرا هستند. نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم معادله است و معادلهٔ اویلر متناظر آن

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \qquad (3)$$

است. با فرض $x > 0$، جوابهای معادلهٔ (۱) را جستجو می‌کنیم و فرض می‌کنیم جواب به شکل

$$y = \phi(r,x) = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad (4)$$

باشد که در آن $a_0 \neq 0$ و می‌نویسیم $y = \phi(r,x)$ که بر وابستگی ϕ بر r و x تأکید کنیم؛ در نتیجه

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2}. \qquad (5)$$

در این‌صورت با قرار دادن معادله‌های (۲)، (۴) و (۵) در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&a_0r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\
&\quad + (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\
&\qquad \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\
&\quad + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\
&\qquad \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0.
\end{aligned}$$

با ضرب سریهای توانی در یکدیگر و ساده کردن حاصلضرب، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
&a_0F(r)x^r + [a_1F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\
&\quad + \{a_2F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2} \\
&\quad + \cdots + \{a_nF(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] \\
&\quad + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} + \cdots = 0;
\end{aligned}$$

یا به شکلی فشرده‌تر،

$$\begin{aligned}
L[\phi](r,x) &= a_0F(r)x^r \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right\}x^{r+n} = 0 \qquad (6)
\end{aligned}$$

که در آن

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \qquad (7)$$

برای اینکه معادلهٔ (۶) به‌ازای هر $x > 0$ برقرار باشد، ضریب هر توان x باید صفر باشد.

چون $a_0 \neq 0$، صفر بودن ضریب جملهٔ شامل x^r، معادلهٔ $F(r) = 0$ را نتیجه می‌دهد. به این معادله **معادلهٔ مبین** می‌گوییم. توجه کنید که این همان معادله‌ای است که از جستجوی جوابهای به شکل $y = x^r$ برای معادلهٔ اویلر (۳) به‌دست می‌آید. ریشه‌های معادلهٔ مبین را با r_1 و r_2 نشان می‌دهیم و اگر حقیقی باشند فرض می‌کنیم $r_1 \geq r_2$. اگر ریشه‌های مختلط باشند، نام‌گذاری ریشه‌ها اهمیت ندارد. تنها به‌ازای این مقدارهای r می‌توانیم انتظار داشته باشیم که جوابی به‌صورت (۴) برای معادلهٔ (۱) به‌دست بیاید. به r_1 و r_2 **نماهای تکینگی** می‌گوییم؛ این نماها ماهیت کیفی جواب را در همسایگی نقطهٔ تکین تعیین می‌کنند.

از صفر قرار دادن ضریب x^{r+n} در معادلهٔ (۶) به **رابطهٔ بازگشتی**

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \qquad n \geq 1 \tag{8}$$

می‌رسیم. معادلهٔ (۸) نشان می‌دهد که در حالت کلی، a_n به r و همهٔ ضرایب قبلی a_0، a_1، ...، a_{n-1} بستگی دارد و می‌توانیم a_1، a_2، ...، a_n، ... را برحسب a_0 و ضرایب سریهای $xp(x)$ و $x^2q(x)$ محاسبه کنیم به‌شرط اینکه $F(r+1)$، $F(r+2)$، ...، $F(r+n)$، ... صفر نباشند. تنها مقادیری از r که به‌ازای آنها $F(r) = 0$، $r = r_1$ و $r = r_2$ هستند؛ چون $r_1 \geq r_2$، نتیجه می‌شود که $r_1 + n$ به‌ازای $n \geq 1$ برابر r_1 یا r_2 نیست؛ بنابراین به‌ازای $n \geq 1$، $F(r_1 + n) \neq 0$. پس همواره می‌توانیم جوابی به‌صورت (۴) برای معادلهٔ (۱) به‌دست بیاوریم که همان

$$y_1(x) = x^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right], \qquad x > 0 \tag{9}$$

است. در اینجا از نماد $a_n(r_1)$ استفاده کردیم تا اشاره کنیم که a_n از معادلهٔ (۸) به‌ازای $r = r_1$ تعیین شده است. برای مشخص کردن ثابت دلخواه در جواب، a_0 را برابر واحد قرار می‌دهیم.

اگر r_2 برابر r_1 نباشد و $r_1 - r_2$ هم عدد صحیح مثبت نباشد، $r_2 + n$ به‌ازای هیچ $n \geq 1$، برابر r_1 نیست؛ بنابراین $F(r_2 + n) \neq 0$ و می‌توانیم جواب دوم را هم به‌دست بیاوریم:

$$y_2(x) = x^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right], \qquad x > 0. \tag{10}$$

درست مانند سریهای توانی جواب حول نقطهٔ عادی که در بخش ۳.۵ آنها را بررسی کردیم، سریهای معادله‌های (۹) و (۱۰) حداقل در بازهٔ $|x| < \rho$ ــ که در آن سریهای هر دو تابع $xp(x)$ و $x^2q(x)$ همگرا هستند ــ همگرا هستند. سریهای توانی $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ و $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ در داخل شعاع همگرایی‌شان تابعهایی تحلیلی در $x = 0$ تعریف می‌کنند؛ پس تکینگی جوابهای y_1 و y_2 بواسطهٔ عاملهای x^{r_1} و x^{r_2} است که در این تابعهای تحلیلی ضرب می‌شوند. برای به‌دست آوردن جوابهای حقیقی‌مقدار به‌ازای $x < 0$، می‌توانیم به‌ازای $\xi > 0$، جایگزینی $x = -\xi$ را انجام بدهیم. مانند بحثی که دربارهٔ معادلهٔ اویلر انجام دادیم، کافی است که x^{r_1} در معادلهٔ (۹) و x^{r_2} در معادلهٔ (۱۰) را بهترتیب با $|x|^{r_1}$ و $|x|^{r_2}$ جایگزین کنیم. بالاخره، توجه کنید که اگر r_1 و r_2 مختلط باشند لزوماً مزدوج مختلط هستند و به‌ازای هر عدد صحیح N، $r_2 \neq r_1 + N$. پس در این حالت همواره می‌توانیم دو جواب سری به‌صورت (۴) پیدا کنیم که تابعهایی مختلط‌مقدار از x هستند.

جوابهای حقیقی‌مقدار را می‌توان با در نظر گرفتن قسمت‌های حقیقی و موهومی جوابهای مختلط‌مقدار به‌دست آورد. حالتهای خاص $r_1 = r_2$ و $r_1 - r_2 = N$ که N عددی صحیح و مثبت است نیاز به بحث بیشتر دارند و بعداً در این بخش آنها را بررسی می‌کنیم.

توجه به اینکه r_1 و r_2، یعنی نماهای نقطهٔ تکین، را به‌سادگی می‌توان یافت و اینکه آنها رفتارکیفی جوابها را تعیین می‌کنند مهم است. برای محاسبهٔ r_1 و r_2 تنها لازم است که معادلهٔ مبین مرتبهٔ دوم

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{11}$$

را حل کنیم که ضرایبش از

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xp(x), \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2 q(x) \tag{12}$$

به‌دست می‌آیند. توجه کنید که اینها دقیقاً حدهایی هستند که برای دسته‌بندی تکینگی در نقطهٔ تکین منظم باید محاسبه شوند؛ پس معمولاً در مراحل اولیهٔ بررسی تعیین می‌شوند.

علاوه بر این اگر $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \tag{13}$$

باشد که در آن P، Q و R چندجمله‌ای هستند، $xp(x) = xQ(x)/P(x)$ و $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$؛ پس

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)}, \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)}. \tag{14}$$

دست آخر، شعاع همگرایی سریهای معادله‌های (۹) و (۱۰) حداقل به اندازهٔ فاصلهٔ مبدأ از نزدیک‌ترین صفر P غیر از خود $x = 0$ است.

مثال ۱

ماهیت جوابهای معادلهٔ

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

را در نزدیکی نقاط تکین بررسی کنید.

این معادله به‌صورت (۱۳) است با $P(x) = 2x(1+x)$، $Q(x) = 3 + x$ و $R(x) = -x$. نقاط $x = 0$ و $x = -1$ تنها نقاط تکین هستند. نقطهٔ $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است، چون

$$\lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-x}{2x(1+x)} = 0.$$

علاوه بر این، از معادلهٔ (۱۴)، $p_0 = 3/2$ و $q_0 = 0$. پس معادلهٔ مبین عبارت است از $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$ و ریشه‌ها عبارت‌اند از $r_1 = 0$ و $r_2 = -1/2$. چون این ریشه‌ها برابر نیستند و تفاوتشان عدد صحیحی نیست، دو جواب به‌صورت

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n, \qquad y_2(x) = |x|^{-1/2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(-\frac{1}{2}\right)x^n\right]$$

به‌ازای $|x| < \rho$ وجود دارند. یک کران پایین برای شعاع همگرایی سریها برابر ۱ (یعنی فاصلهٔ $x = 0$ تا ریشهٔ دیگر $P(x)$ یعنی $x = -1$) است. توجه کنید جواب y_1 وقتی $x \to 0$ کران‌دار است (در حقیقت تحلیلی است) و جواب y_2 وقتی $x \to 0$ بی‌کران است.

نقطهٔ $x = -1$ هم نقطهٔ تکین منظم است، چون

$$\lim_{x \to -1} (x+1)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1,$$

$$\lim_{x \to -1} (x+1)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0.$$

در این حالت $p_0 = -1$ و $q_0 = 0$، بنابراین معادلهٔ مبین عبارت است از $r(r-1) - r = 0$. ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از $r_1 = 2$ و $r_2 = 0$. متناظر ریشهٔ بزرگ‌تر، جوابی به‌صورت

$$y_1(x) = (x+1)^2\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n\right]$$

به‌دست می‌آید. سری حداقل به‌ازای $|x+1| < 1$ همگراست و y_1 در این بازه تابعی تحلیلی است. چون تفاوت دو ریشه عددی صحیح است، ممکن است جواب دومی به‌صورت

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n$$

موجود باشد یا نباشد. بدون تحلیل بیشتر نمی‌توانیم چیز دیگری بگوییم.

توجه کنید که برای اطلاع از جوابهای این مثال به محاسبات پیچیده نیاز نیست و کافی است چند حد حساب کنیم و معادلهٔ مرتبهٔ دوم حل کنیم.

اکنون حالتهایی را در نظر می‌گیریم که در آن ریشه‌های معادلهٔ مبین مساوی هستند یا به اندازهٔ عدد صحیح مثبتی تفاوت دارند، یعنی $r_1 - r_2 = N$. همانگونه که قبلاً نشان دادیم، حتماً یک جواب به‌صورت (۹) متناظر ریشهٔ بزرگ‌تر معادلهٔ مبین موجود است. با استفاده از تحلیل معادلهٔ اویلر، انتظار داریم که اگر $r_1 = r_2$، جواب دوم شامل جملهٔ لگاریتمی باشد. این موضوع ممکن است در حالتی که ریشه‌ها به اندازهٔ عددی صحیح تفاوت دارند هم صحیح باشد.

ریشه‌های برابر. روش یافتن جواب دوم اساساً همان است که برای یافتن جواب دوم معادلهٔ اویلر (بخش ۴.۵ را ببینید) در حالت برابری ریشه‌های معادلهٔ مبین دیدیم. r را متغیری پیوسته در نظر می‌گیریم و با حل رابطهٔ بازگشتی (۸)، a_n را تابعی از r در نظر می‌گیریم. برای این انتخاب $a_n(r)$ به‌ازای $n \geq 1$، معادلهٔ (۶) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= a_0 F(r) x^r \\ &= a_0 (r - r_1)^2 x^r. \end{aligned} \qquad (15)$$

چون r_1 ریشهٔ تکراری $F(r)$ است، با قرار دادن $r = r_1$ در معادلهٔ (۱۵) نتیجه می‌شود $L[\phi](r_1, x) = 0$؛ بنابراین همان‌طور که از قبل می‌دانستیم، $y_1(x)$ داده‌شده در معادلهٔ (۹) جواب معادلهٔ (۱) است. اما مهم‌تر این

است که مانند معادلهٔ اویلر، از معادلهٔ (۱۵) هم نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r}[x^r (r - r_1)^2]\Big|_{r=r_1} \\ &= a_0 [(r-r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r]\Big|_{r=r_1} = 0; \end{aligned} \qquad (16)$$

بنابراین، جواب دوم معادلهٔ (۱) عبارت است از

$$\begin{aligned} y_2(x) = \frac{\partial \phi(r,x)}{\partial r}\Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial}{\partial r}\left\{x^r\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n\right]\right\}\Big|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1}\ln x)\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1)x^n \\ &= y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1)x^n, \qquad x > 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

که در آن $a'_n(r_1)$، da_n/dr را که در $r = r_1$ محاسبه شده نشان می‌دهد.

ممکن است تعیین $a_n(r)$ از رابطهٔ بازگشتی (۸) به‌عنوان تابعی از r و سپس مشتق گرفتن از عبارت حاصله نسبت به r مشکل باشد. یک راه دیگر همان فرض کردن y به‌صورت معادلهٔ (۱۷) است؛ یعنی فرض کنیم که

$$y = y_1(x)\ln x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0 \qquad (18)$$

که در آن y_1 را قبلاً یافتیم. ضرایب b_n طبق معمول با قرار دادن در معادلهٔ دیفرانسیل و مرتب کردن جمله‌ها و صفر قرار دادن ضریب هر توان x محاسبه می‌شوند. راه سوم استفاده از روش کاهش مرتبه برای $y_2(x)$ است اگر $y_1(x)$ معلوم باشد.

تفاوت ریشه‌های r_1 و r_2 به اندازهٔ عدد صحیح N. در این حالت روش به‌دست آوردن جواب دوم به‌طور قابل توجهی پیچیده‌تر است و در اینجا داده نمی‌شود. شکل این جواب در معادلهٔ (۲۴) در قضیهٔ بعد بیان می‌شود. ضرایب $c_n(r_2)$ در معادلهٔ (۲۴) با

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}[(r - r_2)a_n(r)]\Big|_{r=r_2}, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (19)$$

داده می‌شوند که در آن $a_n(r)$ از رابطهٔ بازگشتی (۸) با $a_0 = 1$ به‌دست می‌آید. علاوه بر این ضریب a در معادلهٔ (۲۴) عبارت است از

$$a = \lim_{r \to r_2}(r - r_2)a_N(r). \qquad (20)$$

اگر $a_N(r_2)$ متناهی باشد، $a = 0$ و هیچ جملهٔ لگاریتمی‌ای در y_2 وجود ندارد. روش به‌دست آوردن فرمولهای (۱۹) و (۲۰) را می‌توان در کادینگتون (فصل ۴) یافت.

در عمل، بهترین راه برای تعیین اینکه a در معادلهٔ دوم صفر است یا نه این است که a_n متناظر با ریشهٔ r_2 را حساب کنیم و ببینیم که تعیین $a_N(r_2)$ ممکن است یا نه. اگر ممکن باشد، مسئله حل است و در غیر این‌صورت، باید از شکل (۲۴) با $a \neq 0$ استفاده کنیم.

وقتی $r_1 - r_2 = N$ هم سه راه برای یافتن جواب دوم وجود دارد. اول، می‌توانیم a و $c_n(r_2)$ را مستقیماً با قرار دادن عبارت (۲۴) به‌جای y در معادلهٔ (۱) به‌دست بیاوریم. دوم، می‌توانیم $c_n(r_2)$ و a معادلهٔ (۲۴) را با استفاده از فرمولهای (۱۹) و (۲۰) محاسبه کنیم. اگر می‌خواهید از این روند استفاده کنید، در محاسبهٔ جواب متناظر $r = r_1$ توجه کنید که باید به‌جای $a_n(r_1)$ فرمول کلی $a_n(r)$ را به‌دست بیاورید. روش سوم استفاده از روش کاهش مرتبه است.

قضیهٔ ۱.۶.۵ معادلهٔ دیفرانسیل (۱)، یعنی

$$x^2y'' + x[xp(x)]y' + [x^2q(x)]y = 0$$

را در نظر بگیرید که در آن $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم است. در این‌صورت $xp(x)$ و $x^2q(x)$ در $x = 0$ تحلیلی‌اند و سری توانی همگرایی مانند

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \qquad x^2q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

به‌ازای $|x| < \rho$ دارند که در آن $\rho > 0$ حداقل شعاع همگرایی سریهای توانی $xp(x)$ و $x^2q(x)$ است. فرض کنید r_1 و r_2 ریشه‌های معادلهٔ مبین

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

باشند و اگر r_1 و r_2 حقیقی باشند، $r_1 \geq r_2$. در این‌صورت در هر یک از بازه‌های $-\rho < x < 0$ یا $0 < x < \rho$ جوابی به‌صورت

$$y_1(x) = |x|^{r_1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n\right] \tag{۲۱}$$

وجود دارد که در آن $a_n(r_1)$ با رابطهٔ بازگشتی (۸) به‌ازای $a_0 = 1$ و $r = r_1$ داده می‌شود.

اگر $r_1 - r_2$ صفر و یا عددی صحیح و مثبت نباشد، در هر یک از بازه‌های $-\rho < x < 0$ و یا $0 < x < \rho$ جواب دومی به‌صورت

$$y_2(x) = |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n\right] \tag{۲۲}$$

موجود است. $a_n(r_2)$ هم با رابطهٔ بازگشتی (۸) به‌ازای $a_0 = 1$ و $r = r_2$ تعیین می‌شود. سری توانی معادله‌های (۲۱) و (۲۲) حداقل به‌ازای $|x| < \rho$ همگرا است.

اگر $r_2 = r_1$، جواب دوم عبارت است از

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1)x^n. \tag{۲۳}$$

اگر $r_1 - r_2 = N$ عددی صحیح و مثبت باشد،

$$y_2(x) = ay_1(x)\ln|x| + |x|^{r_2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2)x^n\right]. \tag{۲۴}$$

ضرایب $a_n(r_1)$، $b_n(r_1)$، $c_n(r_2)$ و ثابت a را می‌توان با قرار دادن سری جواب به‌جای y در معادلهٔ (۱) به‌دست آورد. ثابت a ممکن است صفر شود، که در این حالت جملهٔ لگاریتمی‌ای در جواب (۲۴) موجود نیست. هر یک از سریهای معادله‌های (۲۳) و (۲۴) حداقل به‌ازای $|x| < \rho$ همگراست و تابعی را تعریف می‌کند که در همسایگی‌ای از $x = 0$ تحلیلی است.

در هر سه حالت دو جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده تشکیل می‌دهد.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۱۲،

الف) همهٔ نقاط تکین منظم معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده را بیابید.

ب) معادلهٔ مبین و نماهای تکینگی هر نقطهٔ تکین منظم را تعیین کنید.

۱. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$

۲. $x^2y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$

۳. $x(x-1)y'' + 6x^2y' + 3y = 0$

۴. $y'' + 4xy' + 6y = 0$

۵. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$

۶. $x^2y'' + 3(\sin x)y' - 2y = 0$

۷. $x^2y'' + \frac{1}{2}(x + \sin x)y' + y = 0$

۸. $(x+1)^2y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$

۹. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$

۱۰. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$

۱۱. $x(x+3)^2y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

۱۲. $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$

در هر یک از مسئله‌های ۱۳ تا ۱۷،

الف) ثابت کنید $x = 0$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده است.

ب) نماها را در نقطهٔ تکین $x = 0$ به‌دست بیاورید.

ج) سه جملهٔ اول ناصفر هر یک از دو جواب (که مضرب یکدیگر نیستند) را حول $x = 0$ به‌دست بیاورید.

۱۳. $xy'' + y' - y = 0$

۱۴. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$؛ مسئلهٔ ۱ را ببینید.

۱۵. $xy'' + y = 0$

۱۶. $x(x-۱)y'' + ۶x^۲y' + ۳y = ۰$؛ مسئلهٔ ۳ را ببینید.

۱۷. $x^۲y'' + (\sin x)y' - (\cos x)y = ۰$

۱۸. الف) ثابت کنید

$$(\ln x)y'' + \frac{۱}{۲}y' + y = ۰$$

در $x = ۱$ نقطهٔ تکین منظم دارد.

ب) ریشه‌های معادلهٔ مبین را در $x = ۱$ تعیین کنید.

ج) سه جملهٔ اول ناصفر سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^{r+n}$ متناظر به ریشهٔ بزرگ‌تر را تعیین کنید. فرض کنید $x-۱>۰$.

د) چه انتظاری دربارهٔ شعاع همگرایی سری دارید؟

۱۹. در بسیاری از مسئله‌های فیزیک ریاضی لازم است که معادلهٔ دیفرانسیل

$$x(۱-x)y'' + [\gamma - (۱+\alpha+\beta)x]y' - \alpha\beta y = ۰ \qquad \text{(i)}$$

بررسی شود که در آن α، β و γ ثابت هستند. این معادله به معادلهٔ **فوق هندسی** مشهور است.

الف) ثابت کنید $x = ۰$ نقطهٔ تکین منظم است و ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از ۰ و $۱-\gamma$.

ب) ثابت کنید $x = ۱$ نقطهٔ تکین منظم است و ریشه‌های معادلهٔ مبین ۰ و $\gamma-\alpha-\beta$ هستند.

ج) با فرض اینکه $۱-\gamma$ عددی صحیح و مثبت نیست، ثابت کنید در همسایگی $x = ۰$ جواب معادلهٔ (i) عبارت است از

$$y_۱(x) = ۱ + \frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot ۱!}x + \frac{\alpha(\alpha+۱)\beta(\beta+۱)}{\gamma(\gamma+۱)۲!}x^۲ + \cdots.$$

چه انتظاری دربارهٔ شعاع همگرایی این سری دارید؟

د) با فرض اینکه $۱-\gamma$ عددی صحیح و مثبت نیست، ثابت کنید جواب دوم به‌ازای $۰<x<۱$ عبارت است از

$$y_۲(x) = x^{۱-\gamma}\left[۱ + \frac{(\alpha-\gamma+۱)(\beta-\gamma+۱)}{(۲-\gamma)۱!}x + \frac{(\alpha-\gamma+۱)(\alpha-\gamma+۲)(\beta-\gamma+۱)(\beta-\gamma+۲)}{(۲-\gamma)(۳-\gamma)۲!}x^۲ + \cdots\right].$$

هـ) ثابت کنید نقطهٔ بینهایت نقطهٔ تکین منظم است و ریشه‌های معادلهٔ مبین α و β هستند. مسئلهٔ ۴۳ بخش ۴.۵ را ببینید.

۲۰. معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^۳y'' + \alpha xy' + \beta y = ۰$$

را در نظر بگیرید که در آن α و β ثابتهای حقیقی‌اند و $\alpha \neq ۰$.

الف) ثابت کنید $x = ۰$ نقطهٔ تکین نامنظم است.

ب) با سعی در یافتن جوابی به‌صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{r+n}$، ثابت کنید معادلهٔ مبین خطی است و در نتیجه تنها یک جواب [صوری] به شکل فرض‌شده موجود است.

ج) ثابت کنید اگر $\beta/\alpha = -۱, ۰, ۱, ۲, \ldots$، سری صوری جواب خاتمه می‌یابد و واقعاً جوابی وجود دارد. به‌ازای مقدارهای دیگر β/α، ثابت کنید شعاع همگرایی سری صوری جواب صفر است و بنابراین، این سری در هیچ بازه‌ای جواب واقعی‌ای را نمایش نمی‌دهد.

۲۱. معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = ۰ \qquad \text{(i)}$$

را در نظر بگیرید که در آن $\alpha \neq ۰$ و $\beta \neq ۰$ اعداد حقیقی و s و t اعداد صحیح مثبت هستند که تا اینجا دلخواه هستند.

الف) ثابت کنید اگر $s > ۱$ یا $t > ۲$، $x = ۰$ نقطهٔ تکین نامنظم است.

ب) سعی کنید جوابی به‌صورت

$$y = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > ۰ \qquad \text{(ii)}$$

برای معادلهٔ (i) پیدا کنید. ثابت کنید که اگر $s = ۲$ و $t = ۲$، تنها یک مقدار ممکن برای r وجود دارد که به‌ازای آن جواب صوری‌ای به شکل (ii) برای معادلهٔ (i) موجود است.

ج) ثابت کنید اگر $s = ۱$ و $t = ۳$، جوابی به‌صورت (ii) برای معادلهٔ (i) موجود است.

د) ثابت کنید ماکزیمم مقدارهای s و t که به‌ازای آن معادلهٔ مبین نسبت به r درجهٔ دوم است [و بنابراین می‌توان انتظار یافتن دو جواب به شکل (ii) داشت] $s = ۱$ و $t = ۲$ است. اینها دقیقاً شرایطی هستند که «تکینگی ضعیف» یا نقطهٔ تکین منظم را از نقطهٔ تکین نامنظم ــ همانگونه که در بخش ۴.۵ تعریف شد ــ تفکیک می‌کنند. توجه کنید که اگرچه گاهی ممکن است جواب سری صوری‌ای به شکل (ii) در نقطهٔ تکین نامنظم یافت شود، ممکن است سری شعاع همگرایی مثبت نداشته باشد. مسئلهٔ ۲۰ را به‌عنوان مثال ببینید.

۷.۵ معادلهٔ بسل

در این بخش بحث ارائه‌شده در بخش ۶.۵ را با در نظر گرفتن سه حالت خاص از معادلهٔ بسل[1]، یعنی

$$x^۲y'' + xy' + (x^۲ - \nu^۲)y = ۰ \qquad (۱)$$

انجام می‌دهیم که در آن ν ثابت است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که $x = ۰$ نقطهٔ تکین منظم معادلهٔ (۱) است. می‌توانیم بنویسیم

$$p_۰ = \lim_{x\to ۰} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to ۰} x\frac{۱}{x} = ۱,$$

$$q_۰ = \lim_{x\to ۰} x^۲\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to ۰} x^۲\frac{x^۲-\nu^۲}{x^۲} = -\nu^۲;$$

۱. فردریک ویلهلم بسل (۱۷۸۴-۱۸۴۶م) در جوانی تجارت را شروع کرد اما به‌زودی به نجوم و ریاضیات علاقمند شد. او سپس در ۱۸۱۰ به‌عنوان مدیر رصدخانهٔ کنیگزبرگ منصوب شد و این سمت را تا آخر عمر حفظ کرد. مطالعهٔ اختلالات سیاره‌ای در ۱۸۲۴ او را به اولین تحلیل نظام‌مند جوابها رساند که به توابع بسل معروف‌اند. او به‌خاطر تعیین دقیق فاصلهٔ زمین تا یک ستاره که اولین‌بار در ۱۸۳۸ میلادی انجام شد هم مشهور است.

پس معادلهٔ مبین عبارت است از

$$F(r) = r(r-۱) + p_۰ r + q_۰ = r(r-۱) + r - \nu^۲ = r^۲ - \nu^۲ = ۰$$

و ریشه‌هایش عبارت‌اند از $r = \pm\nu$. بر بازهٔ $x > ۰$، سه حالت $\nu = ۰$، $\nu = ۱/۲$ و $\nu = ۱$ را در نظر می‌گیریم.

معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر. در این حالت $\nu = ۰$، بنابراین معادلهٔ (۱) تبدیل می‌شود به

$$L[y] = x^۲ y'' + xy' + x^۲ y = ۰ \qquad (۲)$$

و ریشه‌های معادلهٔ مبین برابر هستند؛ یعنی $r_۱ = r_۲ = ۰$. با قرار دادن

$$y = \phi(r,x) = a_۰ x^r + \sum_{n=۱}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad (۳)$$

در معادلهٔ (۲)، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=۰}^{\infty} a_n[(r+n)(r+n-۱) + (r+n)]x^{r+n} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{r+n+۲} \\ &= a_۰[r(r-۱)+r]x^r + a_۱[(r+۱)r + (r+۱)]x^{r+۱} \\ &\quad + \sum_{n=۲}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-۱)+(r+n)] + a_{n-۲}\}x^{r+n} = ۰. \end{aligned} \qquad (۴)$$

همان‌گونه که قبلاً دیدیم، ریشه‌های معادلهٔ مبین $F(r) = r(r-۱) + r = ۰$، $r_۱ = ۰$ و $r_۲ = ۰$ هستند. رابطهٔ بازگشتی عبارت است از

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-۲}(r)}{(r+n)(r+n-۱) + (r+n)} = -\frac{a_{n-۲}(r)}{(r+n)^۲}, \qquad n \geq ۲. \qquad (۵)$$

برای تعیین $y_۱(x)$، r را مساوی ۰ قرار می‌دهیم. پس از معادلهٔ (۴) نتیجه می‌شود که برای صفر شدن ضریب $x^{r+۱}$ باید $a_۱ = ۰$. بنابراین از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود $a_۳ = a_۵ = a_۷ = \cdots = ۰$. علاوه بر این

$$a_n(۰) = -\frac{a_{n-۲}(۰)}{n^۲}, \qquad n = ۲, ۴, ۶, ۸, \ldots$$

با قرار دادن $n = ۲m$ می‌توانیم بنویسیم

$$a_{۲m}(۰) = \frac{-a_{۲m-۲}(۰)}{(۲m)^۲}, \qquad m = ۱, ۲, ۳, \ldots;$$

پس

$$a_۲(۰) = -\frac{a_۰}{۲^۲}, \qquad a_۴(۰) = \frac{a_۰}{۲^۴ ۲^۲}, \qquad a_۶(۰) = -\frac{a_۰}{۲^۶(۳ \cdot ۲)^۲}$$

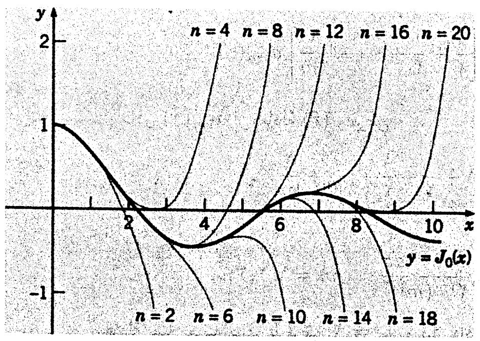
و در حالت کلی

$$a_{۲m}(۰) = \frac{(-۱)^m a_۰}{۲^{۲m}(m!)^۲}, \qquad m = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۶)$$

بنابراین

$$y_۱(x) = a_۰\left[۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^m x^{۲m}}{۲^{۲m}(m!)^۲}\right], \qquad x > ۰. \qquad (۷)$$

تابع داخل کروشه به تابع بسل نوع اول از مرتبهٔ ۰ مشهور است و با $J_۰(x)$ نشان داده می‌شود. از قضیهٔ ۱.۶.۵ نتیجه می‌شود که سری به‌ازای هر x همگراست و $J_۰$ در $x = ۰$ تحلیلی است. بعضی از خواص مهم $J_۰$ را در مسئله‌ها بررسی خواهیم کرد. در شکل ۱.۷.۵ نمودار $y = J_۰(x)$ و چند مجموع جزئی سری (۷) را نشان داده‌ایم.



شکل ۱.۷.۵ چندجمله‌ای‌های تقریب $J_۰(x)$. n درجهٔ چندجمله‌ای تقریب است.

برای تعیین $y_۲(x)$، $a'_n(۰)$ را محاسبه می‌کنیم.[۱] ابتدا توجه می‌کنیم که ضریب $x^{r+۱}$ در معادلهٔ (۴)، $(r+۱)^۲ a_۱(r) = ۰$ است. پس به‌ازای هر r در نزدیکی $r = ۰$، $a_۱(r) = ۰$. بنابراین علاوه بر اینکه $a_۱(۰) = ۰$، $a'_۱(۰) = ۰$. از رابطهٔ بازگشتی (۵) نتیجه می‌شود که $a'_۳(۰) = a'_۵(۰) = \cdots = a'_{۲n+۱}(۰) = \cdots = ۰$؛ بنابراین تنها باید $a'_{۲m}(۰)$ را به‌ازای $m = ۱, ۲, ۳, \ldots$ حساب کنیم. از معادلهٔ (۵) نتیجه می‌شود

$$a_{۲m}(r) = \frac{-a_{۲m-۲}(r)}{(r+۲m)^۲}, \qquad m = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

با حل این رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود

$$a_۲(r) = -\frac{a_۰}{(r+۲)^۲}, \qquad a_۴(r) = \frac{a_۰}{(r+۲)^۲(r+۴)^۲}$$

و در حالت کلی

$$a_{۲m}(r) = \frac{(-۱)^m a_۰}{(r+۲)^۲ \cdots (r+۲m)^۲}, \qquad m \geq ۳. \qquad (۸)$$

راحت‌ترین راه برای انجام محاسبهٔ $a'_{۲m}(r)$ این است که توجه کنیم اگر

$$f(x) = (x-\alpha_۱)^{\beta_۱}(x-\alpha_۲)^{\beta_۲}(x-\alpha_۳)^{\beta_۳} \cdots (x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

۱. در مسئلهٔ ۱۰ روند دیگری را مطرح کرده‌ایم که در آن جوابی به شکل (۲۳) بخش ۶.۵ را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم و b_n را تعیین می‌کنیم.

و x مساوی α_1، α_2، ...، α_n نباشد آنگاه

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1}+\frac{\beta_2}{x-\alpha_2}+\cdots+\frac{\beta_n}{x-\alpha_n}.$$

با استفاده از این نتیجه برای $a_{2m}(r)$ در معادلهٔ (۸) نتیجه می‌شود

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left(\frac{1}{r+2}+\frac{1}{r+4}+\cdots+\frac{1}{r+2m}\right)$$

و با قرار دادن r مساوی ۰ نتیجه می‌شود

$$a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2m}\right]a_{2m}(0).$$

بالاخره، با قرار دادن $a_{2m}(0)$ از معادلهٔ (۶) و فرض

$$H_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} \qquad (۹)$$

نتیجه می‌شود

$$a'_{2m}(0) = -H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2},\qquad m=1,2,3,\ldots$$

جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر با فرض $a_0 = 1$ و قرار دادن $y_1(x)$ و $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ در معادلهٔ (۲۳) بخش ۶.۵ پیدا می‌شود:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m},\qquad x>0. \qquad (۱۰)$$

به‌جای y_2، معمولاً ترکیب معینی از J_0 و y_2 را برای جواب دوم در نظر می‌گیرند که به تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ صفر معروف است و آن را با Y_0 نشان می‌دهند. به پیروی از کاپسون (فصل ۱۲) تعریف می‌کنیم[1]

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x)+(\gamma-\ln 2)J_0(x)] \qquad (۱۱)$$

در اینجا γ ثابت اویلر-ماسچرونی[2] نامیده می‌شود و با

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n)\cong 0{,}5772 \qquad (۱۲)$$

تعریف می‌شود. با قرار دادن $y_2(x)$ در معادلهٔ (۱۱) نتیجه می‌شود

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_0(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right],\qquad x>0. \qquad (۱۳)$$

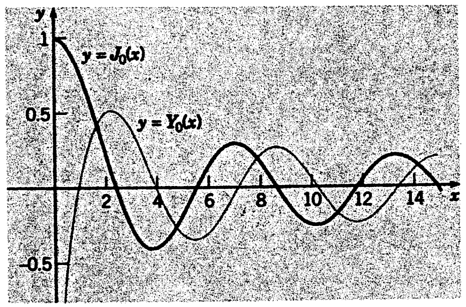
۱. مؤلفان دیگر از تعریفهای دیگری برای Y_0 استفاده می‌کنند. این انتخاب Y_0 به‌نام هاینریش وبر (۱۸۴۲-۱۹۱۳م) که در دانشگاههای مختلف آلمان تدریس کرد، به تابع وبر معروف است.

۲. لورنزو ماسچرونی (۱۷۵۰-۱۸۰۰م) کشیشی ایتالیایی و استاد دانشگاه پاویا بود. او در ۱۷۹۰ میلادی γ را تا ۱۹ رقم اعشار به‌درستی محاسبه کرد.

جواب عمومی معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر به‌ازای $x>0$ عبارت است از

$$y = c_1J_0(x)+c_2Y_0(x).$$

توجه کنید که وقتی $x\to 0$، $J_0(x)\to 1$ و به‌علاوه، $Y_0(x)$ در $x=0$ تکینگی لگاریتمی دارد؛ یعنی وقتی که x با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، $Y_0(x)$ مانند $(2/\pi)\ln x$ رفتار می‌کند. پس اگر به دنبال آن جوابهایی از معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر باشیم که در مبدأ متناهی هستند ــ که اغلب چنین است ــ باید Y_0 را کنار بگذاریم. نمودارهای J_0 و Y_0 را در شکل ۲.۷.۵ نشان داده‌ایم.



شکل ۲.۷.۵ تابعهای بسل، J_0 و Y_0.

جالب است که در شکل ۲.۷.۵ توجه کنیم که به‌ازای xهای بزرگ، هر دوی $J_0(x)$ و $Y_0(x)$ نوسانی هستند. این رفتار را از معادلهٔ اولیه هم می‌توان انتظار داشت؛ درواقع این موضوع برای جوابهای معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν درست است. اگر معادلهٔ (۱) را بر x^2 تقسیم کنیم نتیجه می‌شود

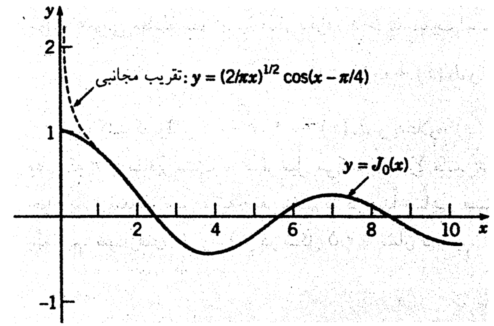
$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0.$$

به‌ازای xهای بزرگ، به‌نظر می‌رسد که جمله‌های $(1/x)y'$ و $(\nu^2/x^2)y$ کوچک هستند و بنابراین می‌توان از آنها چشم‌پوشی کرد. اگر این موضوع درست باشد، می‌توان معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν را با

$$y''+y=0$$

تقریب زد. جوابهای این معادله $\sin x$ و $\cos x$ هستند؛ پس می‌توان انتظار داشت که جوابهای معادلهٔ بسل به‌ازای xهای بزرگ شبیه ترکیبی خطی از $\sin x$ و $\cos x$ باشند. درست است که تابعهای بسل نوسانی هستند؛ اما به‌ازای xهای بزرگ، تابعهای J_0 و Y_0 با افزایش x کاهش می‌یابند، پس تقریبی که معادلهٔ $y''+y=0$ به‌ازای xهای بزرگ از معادلهٔ بسل به‌دست می‌دهد به اندازهٔ کافی درست نیست و به تحلیلی دقیق‌تر نیاز داریم. درواقع می‌توانیم ثابت کنیم که وقتی $x\to\infty$،

$$J_0(x)\cong\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (۱۴)$$



شکل ۳.۷.۵ تقریب مجانبی $J_۰(x)$.

و

$$Y_۰(x) \cong \left(\frac{۲}{\pi x}\right)^{۱/۲} \sin\left(x - \frac{\pi}{۴}\right). \qquad (۱۵)$$

وقتی $x \to \infty$ این تقریبهای مجانبی واقعاً بسیارخوب هستند. به‌عنوان مثال، در شکل ۳.۷.۵ می‌توان دید که تقریب مجانبی (۱۴) برای $J_۰(x)$ به‌ازای $x \ge ۱$ در حد قابل قبولی دقیق است. پس برای تقریب $J_۰(x)$ در محدودهٔ وسیع از صفر تا بینهایت می‌توانید از دو یا سه جملهٔ سری (۷) به‌ازای $x \le ۱$ و تقریب مجانبی (۱۴) به‌ازای $x \ge ۱$ استفاده کنید.

معادلهٔ بسل مرتبهٔ نیم. در این حالت، تفاوت ریشه‌های معادلهٔ مبین عددی صحیح است، اما جملهٔ لگاریتمی‌ای در جواب دوم موجود نیست. با قرار دادن $\nu = ۱/۲$ در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$L[y] = x^۲ y'' + xy' + \left(x^۲ - \frac{۱}{۴}\right)y = ۰. \qquad (۱۶)$$

اگر به‌جای y سری (۳) $y = \phi(r,x)$ را قرار بدهیم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} L[\phi](r,x) &= \sum_{n=۰}^{\infty}\left[(r+n)(r+n-۱) + (r+n) - \frac{۱}{۴}\right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^{r+n+۲} \\ &= \left(r^۲ - \frac{۱}{۴}\right) a_۰ x^r + \left[(r+۱)^۲ - \frac{۱}{۴}\right] a_۱ x^{r+۱} \\ &\quad + \sum_{n=۲}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^۲ - \frac{۱}{۴}\right] a_n + a_{n-۲}\right\} x^{r+n} = ۰. \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از $r_۱ = ۱/۲$ و $r_۲ = -۱/۲$؛ بنابراین ریشه‌ها به اندازهٔ عددی صحیح تفاوت دارند. رابطهٔ بازگشتی عبارت است از

$$\left[(r+n)^۲ - \frac{۱}{۴}\right] a_n = -a_{n-۲}, \quad n \ge ۲. \qquad (۱۸)$$

متناظر ریشهٔ بزرگ‌تر $r_۱ = ۱/۲$ با استفاده از ضریب $x^{r+۱}$ در معادلهٔ (۱۷) نتیجه می‌شود $a_۱ = ۰$. بنابراین از معادلهٔ (۱۸) نتیجه می‌شود $a_۳ = a_۵ = \cdots = a_{۲n+۱} = \cdots = ۰$. علاوه بر این، به‌ازای $r = ۱/۲$،

$$a_n = -\frac{a_{n-۲}}{n(n+۱)}, \quad n = ۲, ۴, ۶, \ldots$$

با قرار دادن $n = ۲m$ می‌توانیم بنویسیم

$$a_{۲m} = -\frac{a_{۲m-۲}}{۲m(۲m+۱)}, \quad m = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

با حل این رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود

$$a_۲ = -\frac{a_۰}{۳!}, \quad a_۴ = \frac{a_۰}{۵!}, \ldots$$

و در حالت کلی

$$a_{۲m} = \frac{(-۱)^m a_۰}{(۲m+۱)!}, \quad m = ۱, ۲, ۳, \ldots;$$

بنابراین با انتخاب $a_۰ = ۱$، نتیجه می‌شود

$$y_۱(x) = x^{۱/۲}\left[۱ + \sum_{m=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^m x^{۲m}}{(۲m+۱)!}\right] = x^{-۱/۲} \sum_{m=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^m x^{۲m+۱}}{(۲m+۱)!}, \quad x > ۰. \qquad (۱۹)$$

سری تیلور دوم معادلهٔ (۱۹) دقیقاً سری تیلور $\sin x$ است؛ بنابراین یک جواب معادلهٔ بسل رتبهٔ نیم $x^{-۱/۲} \sin x$ است. تابع بسل نوع اول رتبهٔ نیم، $J_{۱/۲}$، با $(۲/\pi)^{۱/۲} y_۱$ تعریف می‌شود. پس

$$J_{۱/۲}(x) = \left(\frac{۲}{\pi x}\right)^{۱/۲} \sin x, \quad x > ۰. \qquad (۲۰)$$

متناظر ریشهٔ $r_۲ = -۱/۲$ ممکن است برای محاسبهٔ $a_۱$ به مشکل بربخوریم، چون $N = r_۱ - r_۲ = ۱$. اما با استفاده از معادلهٔ (۱۷) به‌ازای $r = -۱/۲$، ضرایب x^r و $x^{r+۱}$ مستقل از انتخاب $a_۰$ و $a_۱$ صفرند و بنابراین $a_۰$ و $a_۱$ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد. از رابطهٔ بازگشتی (۱۸) مجموعه‌ای از ضرایب با اندیس زوج متناظر $a_۰$ و مجموعه‌ای با اندیس فرد متناظر $a_۱$ به‌دست می‌آید. به‌عنوان تمرین ثابت کنید که به‌ازای $r = -۱/۲$،

$$a_{۲n} = \frac{(-۱)^n a_۰}{(۲n)!}, \quad a_{۲n+۱} = \frac{(-۱)^n a_۱}{(۲n+۱)!}, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

بنابراین

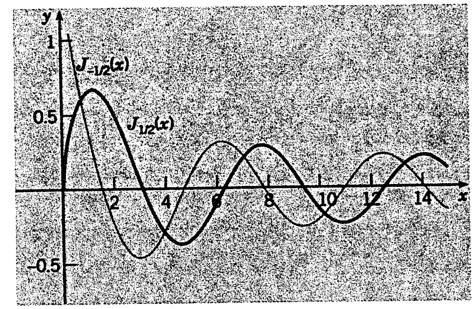
$$\begin{aligned} y_۲(x) &= x^{-۱/۲}\left[a_۰ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n x^{۲n}}{(۲n)!} + a_۱ \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!}\right] \\ &= a_۰ \frac{\cos x}{x^{۱/۲}} + a_۱ \frac{\sin x}{x^{۱/۲}}, \quad x > ۰. \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

ثابت a_1 ضریب $y_1(x)$ است. جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ نیم را معمولاً جوابی در نظر می‌گیرند که در آن $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ و $a_1 = 0$ و آن را با $J_{-1/2}$ نشان می‌دهند؛ یعنی

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x, \quad x > 0. \tag{۲۲}$$

جواب عمومی معادلهٔ (۱۶)، $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$ است.

با مقایسهٔ معادله‌های (۲۰) و (۲۲) با معادله‌های (۱۴) و (۱۵) می‌بینیم که به‌ازای xهای بزرگ، به استثنای یک انتقال فاز $\pi/4$، تابعهای $J_{-1/2}$ و $J_{1/2}$ به‌ترتیب مشابه J_0 و Y_0 هستند. نمودارهای $J_{1/2}$ و $J_{-1/2}$ را در شکل ۴.۷.۵ نشان داده‌ایم.



شکل ۴.۷.۵ تابعهای بسل، $J_{1/2}$ و $J_{-1/2}$.

معادلهٔ بسل مرتبهٔ ۱. در این حالت ریشه‌های معادلهٔ مبین به اندازهٔ یک عدد صحیح مثبت تفاوت دارند و جواب دوم یک جملهٔ لگاریتمی دارد. با قرار دادن $\nu = 1$ در معادلهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \tag{۲۳}$$

اگر به‌جای $y = \phi(r,x)$ سری (۳) را قرار بدهیم و جمله‌ها را مثل حالتهای قبلی مرتب کنیم، نتیجه می‌شود

$$L[\phi](r,x) = a_0(r^2-1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\left\{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\right\}x^{r+n} = 0. \tag{۲۴}$$

ریشه‌های معادلهٔ مبین عبارت‌اند از $r_1 = 1$ و $r_2 = -1$. رابطهٔ بازگشتی عبارت است از

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \quad n \ge 2. \tag{۲۵}$$

متناظر ریشهٔ بزرگ‌تر $r = 1$، رابطهٔ بازگشتی تبدیل می‌شود به

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

با توجه به ضریب x^{r+1} در معادلهٔ (۲۴) درمی‌یابیم که $a_1 = 0$؛ بنابراین از رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود که $a_3 = a_5 = \cdots = 0$. به‌ازای مقادیر زوج n، قرار می‌دهیم $n = 2m$؛ بنابراین

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

با حل این رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{۲۶}$$

تابع بسل نوع اول مرتبهٔ یک، که آن را با J_1 نشان می‌دهند، با انتخاب $a_0 = 1/2$ به‌دست می‌آید؛ یعنی

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!\,m!} \tag{۲۷}$$

این سری به‌ازای هر x همگراست، بنابراین تابع J_1 همه‌جا تحلیلی است.

برای تعیین جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ یک، به روش جایگزینی مستقیم عمل می‌کنیم. محاسبهٔ جملهٔ عمومی در معادلهٔ (۲۸) زیر نسبتاً پیچیده است، اما چند جملهٔ اول آن را می‌توان نسبتاً به‌سادگی به‌دست آورد. طبق قضیهٔ ۱.۶.۵ می‌توانیم فرض کنیم که

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right], \quad x > 0. \tag{۲۸}$$

با محاسبهٔ $y_2'(x)$ و $y_2''(x)$ و قرار دادن نتیجه در معادلهٔ (۲۳) و استفاده از این واقعیت که J_1 جواب معادلهٔ (۲۳) است، نتیجه می‌شود

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \tag{۲۹}$$

که در آن $c_0 = 1$. با قرار دادن $J_1(x)$ از معادلهٔ (۲۷)، تغییر اندیس‌ها در مجموع دو سری و انجام اعمال جبری لازم به رابطهٔ

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right] \tag{۳۰}$$

می‌رسیم. از معادلهٔ (۳۰) نتیجه می‌شود که $c_1 = 0$ و $a = -c_0 = -1$. علاوه بر این، چون در طرف راست تنها توانهای فرد x موجود است، ضریب هر توان زوج از x در طرف چپ باید صفر باشد. پس چون $c_1 = 0$ باید $c_3 = c_5 = \cdots = 0$. متناظر توانهای فرد x، رابطهٔ بازگشتی [در طرف چپ سری معادلهٔ (۳۰) قرار دهید $n = 2m+1$]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \tag{۳۱}$$

به‌دست می‌آید. اگر در معادلهٔ (۳۱) فرض کنیم $m=1$، نتیجه می‌شود

$$(3^2-1)c_4+c_2=\frac{(-1)3}{(2^2\cdot 2!)}.$$

توجه کنید که c_2 را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد و این معادله c_4 را تعیین می‌کند. همچنین توجه کنید که در معادله برای ضریب x، c_2 در صفر ضرب شده است و به‌علاوه برای تعیین a از آن استفاده می‌کنیم. اینکه c_2 دلخواه است تعجب‌برانگیز نیست، چون c_2 ضریب x در عبارت $x^{-1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right]$ است. در نتیجه c_2 صرفاً ضریب J_1 است و y_2 با اختلاف مضربی از J_1 تعیین می‌شود. مطابق معمول، c_2 را برابر $1/2^2$ انتخاب می‌کنیم؛ بنابراین

$$c_4=\frac{-1}{2^4\cdot 2}\left[\frac{3}{2}+1\right]=\frac{-1}{2^4 2!}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+1\right]$$

$$=\frac{(-1)}{2^4\cdot 2!}(H_2+H_1).$$

می‌توان ثابت کرد که جواب رابطهٔ بازگشتی (۳۱)، با این قرارداد که $H_0=0$، عبارت است از

$$c_{2m}=\frac{(-1)^{m+1}(H_m+H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!},\qquad m=1,2,\ldots$$

پس

$$y_2(x)=-J_1(x)\ln x+\frac{1}{x}\left[1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m+H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}x^{2m}\right],\qquad x>0. \qquad (32)$$

محاسبهٔ $y_2(x)$ با روندی دیگر (معادله‌های (۱۹) و (۲۰) از بخش ۶.۵ را ببینید) که در آن $c_n(r_2)$ را تعیین می‌کنیم کمی راحت‌تر است. به‌ویژه این روند به فرمولی کلی برای c_{2m} بدون نیاز به حل رابطهٔ بازگشتی به شکل (۳۱) (مسئلهٔ ۱۱ را ببینید) می‌انجامد. به این ترتیب، خوب است که به میزان محاسبات لازم برای به‌دست آوردن جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر چنان‌که در متن آورده‌ایم و به شیوهٔ مسئلهٔ ۱۰ توجه کنیم.

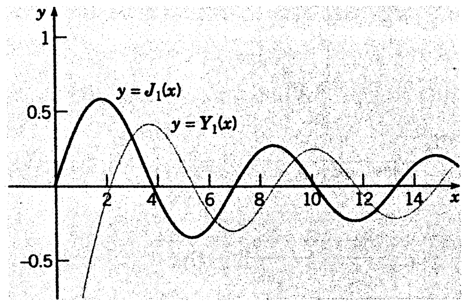
جواب دوم معادلهٔ (۲۳)، تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ یک، معمولاً به‌صورت ترکیب معینی از J_1 و y_2 انتخاب می‌شود. به پیروی از کاپسون (فصل ۱۲) Y_1 را به‌صورت

$$Y_1(x)=\frac{2}{\pi}[-y_2(x)+(\gamma-\ln 2)J_1(x)] \qquad (33)$$

تعریف می‌کنیم که در آن، γ همان است که در معادلهٔ (۱۲) تعریف شد. جواب عمومی معادلهٔ (۲۳) به‌ازای $x>0$ عبارت است از

$$y=c_1J_1(x)+c_2Y_1(x).$$

توجه کنید که اگرچه J_1 در $x=0$ تحلیلی است، وقتی $x\to 0$ جواب دوم مشابه با $1/x$ بی‌کران می‌شود. نمودارهای J_1 و Y_1 را در شکل ۵.۷.۵ نشان داده‌ایم.



شکل ۵.۷.۵ تابعهای بسل، J_1 و Y_1.

مسئله‌ها

در هر یک از مسئله‌های ۱ تا ۴، ثابت کنید که معادلهٔ دیفرانسیل داده‌شده نقطهٔ تکین منظمی در $x=0$ دارد و دو جواب آن را به‌ازای $x>0$ تعیین کنید.

۱. $x^2y''+2xy'+xy=0$

۲. $x^2y''+3xy'+(1+x)y=0$

۳. $x^2y''+4xy'+(2+x)y=0$

۴. $x^2y''+xy'+2xy=0$

۵. دو جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ ۳/۲، یعنی

$$x^2y''+xy'+(x^2-\tfrac{9}{4})y=0,\qquad x>0$$

را بیابید که مضرب هم نباشند.

۶. ثابت کنید که معادلهٔ بسل مرتبهٔ نیم، یعنی

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0,\qquad x>0$$

را می‌توان با تغییر متغیر $y=x^{-1/2}v(x)$ به معادلهٔ

$$v''+v=0$$

ساده کرد. از این نتیجه بگیرید که $y_1(x)=x^{-1/2}\cos x$ و $y_2(x)=x^{-1/2}\sin x$ جوابهای معادلهٔ بسل مرتبهٔ نیم هستند.

۷. به روش مستقیم ثابت کنید که سری $J_0(x)$، معادلهٔ (۷)، به‌ازای هر x به‌طور مطلق همگراست.

۸. به روش مستقیم ثابت کنید که سری $J_1(x)$، معادله (۲۷)، به‌ازای هر x به‌طور مطلق همگراست و $J_0'(x)=-J_1(x)$.

۹. معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν، یعنی

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\qquad x>0$$

را در نظر بگیرید که در آن ν حقیقی و مثبت است.

الف) ثابت کنید $x=0$ نقطهٔ تکین منظم معادله است و ریشه‌های معادلهٔ مبین ν و $-\nu$ هستند.

ب) متناظر ریشهٔ بزرگ‌تر ν، ثابت کنید یک جواب عبارت است از

$$y_1(x) = x^{\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1+\nu)\cdots(m+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

ج) اگر 2ν عددی صحیح نباشد، ثابت کنید که جواب دوم عبارت است از

$$y_2(x) = x^{-\nu}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(1-\nu)\cdots(m-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\right].$$

توجه کنید که وقتی $x \to 0$، $y_1(x) \to 0$ و $y_2(x)$ بی‌کران است.

د) به روش مستقیم ثابت کنید که سریهای توانی عبارتهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ به‌ازای هر x همگرای مطلق هستند. همچنین ثابت کنید که y_2 جواب است اگر ν عدد صحیح نباشد.

۱۰. در این بخش نشان دادیم که یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ صفر، یعنی

$$L[y] = x^2y'' + xy' + x^2y = 0,$$

J_0 است که در آن $J_0(x)$ با معادلهٔ (۷) به‌ازای $a_0 = 1$ داده می‌شود. طبق قضیهٔ ۱.۶.۵، جواب دوم به‌صورت

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0$$

است.

الف) ثابت کنید

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2xJ_0'(x). \qquad \text{(i)}$$

ب) سری $J_0(x)$ را در معادلهٔ (i) قرار بدهید و ثابت کنید

$$b_1x + 2^2b_2x^2 + \sum_{n=3}^{\infty}(n^2b_n + b_{n-2})x^n = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \qquad \text{(ii)}$$

ج) توجه کنید که در طرف راست معادلهٔ (ii)، فقط توانهای زوج x ظاهر می‌شوند. ثابت کنید $b_1 = b_3 = b_5 = \cdots = 0$، $b_2 = 1/2^2(1!)^2$ و

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n(2n)/2^{2n}(n!)^2, \qquad n = 2, 3, 4\ldots$$

نتیجه بگیرید که

$$b_4 = -\frac{1}{2^2 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \qquad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

جواب عمومی رابطهٔ بازگشتی عبارت است از $b_{2n} = (-1)^{n+1}H_n/2^{2n}(n!)^2$. با جایگزینی b_n در عبارت $y_2(x)$، جواب داده‌شده در معادلهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید.

۱۱. جواب دوم معادلهٔ بسل مرتبهٔ نیم را با محاسبهٔ $c_n(r_2)$ و a در معادلهٔ (۲۴) بخش ۶.۵ طبق فرمولهای (۱۹) و (۲۰) آن بخش بیابید. می‌توانید به این‌صورت عمل کنید که ابتدا از معادلهٔ (۲۴) این بخش استفاده کنید و ثابت کنید $a_1(-1)$ و $a_1'(-1)$ صفر هستند، سپس ثابت کنید $c_1(-1) = 0$ و از رابطهٔ بازگشتی نتیجه می‌شود $c_n(-1) = 0$ به‌ازای $n = 3, 5, \ldots$. درنهایت با استفاده از معادلهٔ (۲۵) ثابت کنید که

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \qquad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+3)(r+5)}$$

و

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1)\cdots(r+2m-1)(r+3)\cdots(r+2m+1)}, \qquad m \geq 3.$$

درنهایت، ثابت کنید

$$c_{2m}(-1) = \frac{(-1)^{m+1}(H_m + H_{m-1})}{2^{2m}m!(m-1)!}, \qquad m \geq 1.$$

۱۲. گاهی می‌توان با تغییر متغیر مناسب معادلهٔ دیفرانسیل دیگر را به معادلهٔ بسل تبدیل کرد. به‌عنوان مثال ثابت کنید که یک جواب

$$x^2y'' + \left(\alpha^2\beta^2x^{2\beta} + \frac{1}{4} - \nu^2\beta^2\right)y = 0, \qquad x > 0$$

با $y = x^{1/2}f(\alpha x^{\beta})$ داده می‌شود که در آن $f(\xi)$ جوابی از معادلهٔ بسل مرتبهٔ ν است.

۱۳. با استفاده از نتیجهٔ مسئلهٔ ۱۲ ثابت کنید که جواب عمومی معادلهٔ ایری، یعنی

$$y'' - xy = 0, \qquad x > 0$$

$y = x^{1/2}[c_1f_1(2/3ix^{3/2}) + c_2f_2(2/3ix^{3/2})]$ است که در آن $f_1(\xi)$ و $f_2(\xi)$ مجموعه‌ای اساسی از جوابهای معادلهٔ بسل مرتبهٔ یک‌سوم تشکیل می‌دهند.

۱۴. می‌توان ثابت کرد که وقتی $x > 0$، تعداد ریشه‌های J_0 نامتناهی است. به‌ویژه سه صفر اولیهٔ آن تقریباً عبارت‌اند از ۲٫۴۰۵، ۵٫۵۲۰ و ۸٫۶۵۳ (شکل ۱.۷.۵ را ببینید). فرض کنید λ_j، $j = 1, 2, 3, \ldots$، صفرهای J_0 باشند؛ نتیجه می‌شود که

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ثابت کنید $y = J_0(\lambda_j x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda_j^2 y = 0, \qquad x > 0$$

صدق می‌کند. بنابراین ثابت کنید که اگر $\lambda_i \neq \lambda_j$،

$$\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)J_0(\lambda_j x)\,dx = 0.$$

این خاصیت مهم $J_\circ(\lambda_i x)$ به خاصیت تعامد معروف است و در حل مسئله‌های مقادیر مرزی مفید است.

راهنمایی: معادلهٔ دیفرانسیل $J_\circ(\lambda_i x)$ را بنویسید. آن را در $xJ_\circ(\lambda_j x)$ ضرب کنید و از $xJ_\circ(\lambda_i x)$ برابر معادلهٔ دیفرانسیل $J_\circ(\lambda_j x)$ کم کنید و سپس در بازهٔ ۰ تا ۱ انتگرال بگیرید.

مراجع

Coddington, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961; New York: Dover, 1989).

Copson, E. T., *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable* (Oxford: Oxford University Press, 1935).

اثبات قضایای ۱.۳.۵ و ۱.۶.۵ را می‌توان درکتابهای متوسط و یا پیشرفته یافت؛ به‌عنوان مثال فصلهای ۳ و ۴ کتاب کادینگتون یا فصلهای ۳ و ۴ کتاب

Rainville, E. D., *Intermediate Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Macmillan, 1964)

را ببینید. برای بررسی نقطهٔ بینهایت هم که در مسئلهٔ ۴۳ بخش ۴.۵ ذکر شد این کتابها را ببینید. رفتار جوابها در نزدیکی نقطهٔ تکین نامنظم موضوع پیشرفته‌تری است؛ بحث کوتاهی دربارهٔ آن را می‌توان در فصل ۵ کتاب

Coddington, E. A., and Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: McGraw-Hill, 1955)

یافت. بررسی بیشتر معادلهٔ بسل، معادلهٔ لژاندر و بسیاری دیگر از معادله‌های مشهور را می‌توان در کتابهای پیشرفتهٔ معادلات دیفرانسیل، روشهای ریاضیات کاربردی و توابع خاص یافت. یک کتاب که به توابع خاص مانند چندجمله‌ای‌های لژاندر و توابع بسل می‌پردازد عبارت است از

Hochstadt, H., *Special Functions of Mathematical Physics* (New York: Holt, 1961).

ترکیبی عالی از فرمولها، نمودارها و جدولهای توابع بسل، توابع لژاندر و توابع خاص دیگر فیزیک‌ریاضی را می‌توان درکتاب

Abramowitz, M., and Stegun, I. A. (eds.), *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965)

یافت که ابتدا سازمان ملی استانداردها در واشنگتن دی‌سی در ۱۹۶۴ میلادی آن را منتشر کرد.