سؤال و پاسخ فصل اول
درس انتقال حرارت

ایمان بیات

کارشناسی ارشد

استاد راهنما: جیمز وات

۸ اردیبهشت، ۱۳۹۹

تمرین ۱ جزوه. ثابت کنید $\|A+B\|_p \le \|A\|_p + \|B\|_p$.

پاسخ تمرین ۱ جزوه.

$$\begin{aligned}
\|A+B\|_p = \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} &\le \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}(|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad + \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}(|b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i,j}(|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i,j}(|b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}\right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \le \sum_{i,j}(|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i,j}(|b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \|A+B\|_p \le \|A\|_p + \|B\|_p$$

تمرین ۲ جزوه. با استقرا ثابت کنید $\|A^n\| \le \|A\|^n$.

پاسخ تمرین ۲ جزوه.

$$\|A^{۲}\| = \|A\cdot A\| \le \|A\|\cdot\|A\| = \|A\|^{۲} \Rightarrow \|A^{۲}\| \le \|A\|^{۲}$$

فرض می‌کنیم برای $n=k$ درست باشد:

$$\|A^k\| \le \|A\|^k \xrightarrow{?} \|A^{k+۱}\| \le \|A\|^{k+۱}$$

$$\|A^{k+۱}\| = \|A^k\cdot A\| \le \|A^k\|\cdot\|A\| = \|A\|^{k+۱}$$

$$\Rightarrow \|A^{k+۱}\| \le \|A\|^{k+۱}$$

تمرین ۱ . معادله دیفرانسیل (۲.۱) را برای

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & t \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

حل کنید و ماتریس انتقال متناظر یعنی $\Phi(t,t_۰)$ را به دست آورید.

پاسخ تمرین ۱.

$$
\begin{aligned}
P_1(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot \mathrm{d}s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}s = \begin{bmatrix} 1+(t-t_0) & \frac{t^2}{2}-\frac{t_0^2}{2} \\ 0 & 1+(t-t_0) \end{bmatrix} \\
P_2(t) &= I + \int_{t_0}^{t} A(s)\cdot P_1(s)\,\mathrm{d}s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+(s-t_0) & \frac{s^2}{2}-\frac{t_0^2}{2} \\ 0 & 1+(s-t_0) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1+(s-t_0) & \frac{3s^2}{2}+s(1-t_0)-\frac{t_0^2}{2} \\ 0 & 1+(s-t_0) \end{bmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{bmatrix} 2+(t-t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2} & \frac{1}{2}\left[t^2(1+(t-t_0))-t_0^2(1+(t-t_0))\right] \\ 0 & 1+(t-t_0)+\frac{(t-t_0)^2}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{t-t_0} & \frac{1}{2}(t^2-t_0^2)e^{t-t_0} \\ 0 & e^{t-t_0} \end{bmatrix} = \Phi(t,t_0)
\end{aligned}
$$

تمرین ۲. فضای حالت X، فضای برداری از تمام توابعی است که هر یک پاسخ (منحصربه‌فرد) معادلهٔ (۲.۳) به ازای شرایط اولیه و ورودی (یا کنترل) u هستند. کلاس مجاز $\mathscr{U}$ از توابع ورودی را در نظر بگیرید و فرض کنید $X(\mathscr{U})$ زیرفضایی از X باشد که در آن تنها توابع ورودی $\mathscr{U}$ به کار رفته باشند. $X(\mathscr{U})$ را به ازای $A=[0]$، $B=[1]$ و $\mathscr{U}=\mathrm{sp}\left\{1,\dots,t^N\right\}$ به دست آورید.

پاسخ تمرین ۲.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(t_s) + \int_{t_0}^{t} \mathscr{U}(s)\,\mathrm{d}s = x_0 + \frac{t^{k+1}-t_0^{k+1}}{k+1} \\
\Rightarrow x(t) &= x_0 + \frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t_0^{k+1}}{k+1}, \qquad k=0,1,\dots,N \\
\Rightarrow X(\mathscr{U}) &= \mathrm{sp}\left\{1,t,\dots,t^{N+1}\right\}
\end{aligned}
$$

تمرین ۳. تمرین ۲ را برای کلاس مجاز $\mathscr{U}=\mathrm{sp}\left\{u_0,\dots,u_N\right\}$ تکرار کنید که در آن

$$
u_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < t_0 \\ 1 & \text{if } t \geq t_0 \end{cases}
$$

و $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N < \infty$.

پاسخ تمرین ۳.

$$
\begin{aligned}
u_0(t) &= \begin{cases} 0 & \text{if } t < t_0 \\ 1 & \text{if } t \geq t_0 \end{cases} \\
\mathrm{sp}(X(\mathscr{U})) &= \mathrm{sp}\left\{(t-t_0)_t, (t-t_1)_t, \dots, (t-t_N)_t\right\}
\end{aligned}
$$

تمرین ۴. با توجه به تعاریف تمرین ۲، فرض کنید

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}.$$

پایه‌ای از $X(\mathrm{sp}\,\{(t-t_0)_t, (t-t_1)_t, \dots, (t-t_N)_t\})$ را بیابید. (راهنمایی: از معادلهٔ انتقال حالت استفاده کنید.)

پاسخ تمرین ۴.

$$\begin{aligned}
x(t_0) &= \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \\
x(t) &= \Phi(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi(A,s)B(s)u(s)\,\mathrm{d}s \\
x(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} u(s)\,\mathrm{d}s \\
x(t) &= \begin{bmatrix} \alpha + t\beta \\ \beta \end{bmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{bmatrix} 1+t^2 \\ t \end{bmatrix} u(s)\,\mathrm{d}s \\
u(s) = 1 \Rightarrow x(t) &= \begin{bmatrix} \alpha + t\beta + t + \frac{t^3}{3} \\ \beta + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix} \\
u(s) = t^N \Rightarrow x(t) &= \begin{bmatrix} \alpha + t\beta + \frac{t^{N+1}}{N+1} + \frac{t^{N+3}}{N+3} \\ \beta + \frac{t^{N+2}}{N+2} \end{bmatrix} \\
X(u) = \mathrm{sp}&\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4} \\ \frac{t^3}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{t^{N+1}}{N+1} + \frac{t^{N+3}}{N+3} \\ \frac{t^{N+2}}{N+2} \end{bmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

تمرین ۵. ثابت کنید سیستمی که فضای حالت آن با رابطهٔ (۲.۱۰) یا (۲.۱۱) توصیف شده، در واقع یک سیستم خطی است. به این معنا که به ازای ورودی صفر خروجی نسبت به بردارهای حالت خطی است و همچنین به ازای حالت اولیهٔ صفر، خروجی نسبت به بردارهای ورودی خطی است. (راهنمایی: عملگر L را خطی می‌گوییم هرگاه $L(ay+bz) = aLy + bLz$.) همچنین نشان دهید اگر خروجی نسبت به ورودی خطی باشد و بردار x_0 اولیه باشد، آنگاه اگر رابطهٔ (۲.۱۰) در نظر گرفته شود، به ازای همهٔ kها داریم $C_k x_0 = 0$ و اگر رابطهٔ (۲.۱۱) در نظر گرفته شود، به ازای همهٔ $t \geq t_0$ خواهیم داشت $C(t)x_0 = 0$.

پاسخ تمرین ۵.

$$u = \circ \Rightarrow v = Cx$$

$$v(\circ) = C\Phi(t, t_\circ) \Rightarrow v(ax + b) = av + bu$$

$$x(t) = \circ$$

$$v = cx + c\int_{t_\circ}^{t} \Phi(t, s)B(s)u(s)\,\mathrm{d}s$$

$$v = c\int_{t_\circ}^{t} \Phi(t, s)B(s)u(s)\,\mathrm{d}s \quad \to \quad \text{خطی}$$

$$\begin{cases} v_k = C_k A_{k-1} \cdots A_\circ x_\circ + C_k B_\circ U_\circ + \cdots C_k B_{k+1} U_{k+1} + D_k U_k \\ v(t) = C(t)\Phi(t, t_\circ)x_\circ + C(t)\int_{t_\circ}^{t} \Phi(t, s)B(s)u(s)\,\mathrm{d}s + C(t, D_t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_k x_\circ = \circ \quad \forall k \\ C(t)x_\circ = \circ \end{cases}$$

تمرین ۶. فرض کنید $|A|_p$، pــنُرم ماتریس $A = [a_{ij}(t)]$ باشد یعنی $|A|_p = |A(t)|_p = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}(t)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.
با فرض اینکه

$$\int_J |A(t)|_p^p\,\mathrm{d}t < \infty\ ,$$

که در آن $p > ۱$، ثابت کنید سری نامتناهی (۲.۶) روی هر زیربازهٔ کراندار از J به طور یکنواخت به $\Phi(t, t_\circ)$ همگراست. (راهنمایی: از نامساوی هولدر استفاده کنید:

$$\int_J |A(t)B(t)|_۱\,\mathrm{d}t \leq \left(\int_J |A(t)|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_J |B(t)|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

که در آن $۱/p + ۱/q = ۱$ و $۱ < p < \infty$.)

پاسخ تمرین ۶.

$$
\begin{aligned}
\text{روش پیکارد :}\ |P_N - P_m| &= \left|\sum_{k=m}^{N-1}\int_{t_0}^{t} A(s_1) + \int_{t_0}^{s_1} A(s_2)\cdots\int_{t_0}^{s_k} A(s_{k+1})\,\mathrm{d}s_{k+1}\right| \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1}\int_{t_0}^{t} |A(s_1)| + \int_{t_0}^{s_1} |A(s_2)|\cdots\int_{t_0}^{s_k} |A(s_{k+1})|\,\mathrm{d}s_{k+1} \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1}\int_{t_0}^{t} |A(s_1)|\cdots\int_{t_0}^{s_{k-1}} |A(s_k)|\left|\int_{t_0}^{s_k} A(s_k)\right|(s_k - t)^{\frac{1}{q}} \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1} C\int_{t_0}^{t} |A(s_1)|\cdots\int_{t_0}^{s_{k+1}} |A(u_k)|(s_k - t_0)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}s_k\ldots\mathrm{d}s \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1} C\int_{t_0}^{t} |A(s_1)| - \int_{t_0}^{t} |A(s_{k+1})| \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1} C\int_{t_0}^{t} |A(s_1)|\cdots\int_{t_0}^{s_{k+1}} |A(s_{k-1})|(s_{k-1} - t_0)^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}s_1 \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1} C^2\int_{t_0}^{t} |A(s_1)|\cdots\int_{t_0}^{s_{k-1}} |A(s_{k-1})|(s_{k-1} - t_0)\,\mathrm{d}s \\
&\le \sum_{k=m}^{N-1} C^k\int_{t_0}^{t} |A(s_1)|(s_1 - t_0)^{\frac{k}{q}}\,\mathrm{d}s \\
&\le \sum_{k=m}^{N} C^{k+1}(t - t_0)^{\frac{k+1}{q}} \to 0
\end{aligned}
$$

تمرین ۸. فرض کنید $|A|_p$ مانند تعریف تمرین ۶ باشد. نشان دهید اگر A و B ماتریس‌هایی با ابعاد یکسان باشند، آنگاه $|A+B|_p \le |A|_p + |B|_p$ (که به نامساوی مثلث معروف است). (راهنمایی: از نامساوی هولدر استفاده کنید: به ازای اعداد حقیقی a_{ij} و b_{ij}،

$$
\sum_{i,j}|a_{ij}||b_{ij}| \le \left(\sum_{i,j}|a_{ij}|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i,j}|b_{ij}|_q^q\right)^{\frac{1}{q}}
$$

که در آن $1/p + 1/q = 1$ و $1 < p < \infty$.)

پاسخ تمرین ۸.

$$
\begin{aligned}
\|A+B\|_p &= \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}|a_{ij}| + \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}|b_{ij}| \\
&\leq \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{i,j}(|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i,j}(|b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}}\right] \\
\Rightarrow & \sum_{i,j}(|a_{ij}+b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{i,j}(|a_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i,j}(|b_{ij}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
\Rightarrow & \|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p
\end{aligned}
$$