پایانترم ریاضی۱

دانشگاه صنعتی شریف-دی۱۴۰۲

پاسخ تشریحی: مهندس شاه ابراهیمی

تاریخ: ۰۲/۱۰/۲۸
شماره: ....
پیوست: ....

دانشکدهٔ علوم ریاضی

امتحان پایان‌ترم ریاضی عمومی ۱ (گروه‌های ۱ تا ۴)

۲۲-۰۱۵

نیمسال اول ۰۳-۰۲

مدّت امتحان: ۳ ساعت

- این امتحان شامل ۵ سؤال است. پاسخ سؤالات را به ترتیب در دفترچهٔ امتحانی بنویسید. استفاده از ماشین حساب و نیز هرگونه پرسش و پاسخ در طول جلسهٔ امتحان ممنوع است.
- برای نشان دادن درستی جواب‌های خود استدلال کنید و حتی‌الامکان از به کار بردن عباراتی چون «واضح است» یا «بدیهی است» پرهیز کنید.

سؤال ۱. تمام اعداد مختلطی مثل z را بیابید که $(z-2)(\bar{z}+i)$ عددی حقیقی شود.

سؤال ۲. انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\int \cos(\ln x)\, dx$

(ب) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\, dx$

سؤال ۳. حدهای زیر را محاسبه کنید.

(الف) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{i \times i}{(i\times n)^2 + (n \times n)^2}}$

(ب) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}$

سؤال ۴. همگرایی مطلق، همگرایی مشروط یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln(\ln n)}}$

(ب) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{2^n}{3^n - n^3}$

سؤال ۵. تابع f را با ضابطهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = e^x + \int_0^{x^3} e^{-t^2}\, dt.$$

(الف) نشان دهید تابع f در هر نقطه از $\mathbb{R}$ تعریف شده است و روی $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر می‌باشد. هم‌چنین، معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} را در نقطهٔ $(1, f^{-1}(1))$ (که روی نمودار f^{-1} است) به دست آورید.

(ب) مشتق پانزدهم f را در صفر محاسبه کنید.

@EbiMath
EbiMath.com

پاسخ سوال۱:

(فصل اعداد مختلط)

$$\xrightarrow[\bar{z}=x-iy]{z=x+iy} A=(z-۲)(\bar{z}+i)=(x-۲+iy)(x+(۱-y)i)$$

$$=(x-۲)x+(x-۲)(۱-y)i+iyx+y(۱-y)i^{۲}$$

$$=(x-۲)x-y(۱-y)+\big((x-۲)(۱-y)+yx\big)i$$

$$\begin{cases} Im(A)=(x-۲)(۱-y)+yx \\ Re(A)=(x-۲)x-y(۱-y) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{Im(A)=۰}(x-۲)(۱-y)+yx=۰$$

$$\rightarrow x-xy-۲+۲y+xy=۰\rightarrow \underline{x+۲y=۲}|$$

$$\xrightarrow{z=x+iy}\underline{z=۲-۲y+iy}|\quad y\in\mathbb{R}$$

بنابراین بی شمار عدد وجود خواهند داشت. بعنوان مثال اعداد زیر :

$$\xrightarrow{Ex}\begin{cases} \xrightarrow{y=-۱} z=۴-i \\ \xrightarrow{y=۰} z=۲ \\ \xrightarrow{y=۱} z=i \\ \vdots \qquad \vdots \end{cases}$$

پاسخ سوال۲:

(فصل انتگرال)

الف) جزء به جزء حالت خودارجاعی :

$\rightarrow \ln x = u$

$\rightarrow x = e^{u} \rightarrow dx = e^{u}du$

$$\rightarrow \int \cos(\ln x)dx = \int \cos(u)e^{u}du$$

مشتق	انتگرال
$\int e^{u}$	$\cos u\,du$
e^{u}	$\sin u$
e^{u}	$-\cos u$

$$\rightarrow \int \cos(u)e^{u}du = e^{u}\sin u + e^{u}\cos u - \int e^{u}\cos u\,du$$

$$\rightarrow 2\int \cos(u)e^{u}du = e^{u}\sin u + e^{u}\cos u$$

$$\rightarrow \int \cos(u)e^{u}du = \frac{e^{u}(\sin u + \cos u)}{2}$$

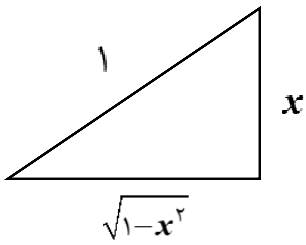
$$\rightarrow \int \cos(\ln x)dx = \frac{e^{\ln x}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))}{2} = \boxed{\frac{x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))}{2}}$$

ب)تغییر متغیر مثلثاتی

$\boxed{a^{2}-x^{2} \rightarrow x = a\sin\theta}$

$$\begin{cases} x = \sin\theta \\ dx = \cos\theta d\theta \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \frac{dx}{x^{2}\sqrt{1-x^{2}}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^{2}\theta\sqrt{1-\sin^{2}\theta}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^{2}\theta\cos\theta} = \int \frac{d\theta}{\sin^{2}\theta} = \int \csc^{2}\theta d\theta = -\cot\theta + c$$



$$\rightarrow \int \frac{dx}{x^{2}\sqrt{1-x^{2}}} = \boxed{\frac{-\sqrt{1-x^{2}}}{x} + c}$$

پاسخ سوال ۳:

(فصل انتگرال-حد در بینهایت و ریمان)

الف)

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i\times i}{(i\times n)^2+(n\times n)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i^2 n^2}{i^2 n^2+n^4}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i^2 n^2}{n^4\left(\frac{i^2}{n^2}+1\right)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\frac{i^2}{n^2}}{\frac{i^2}{n^2}+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{\left(\frac{i}{n}\right)^2+1}}=\int_0^1\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}}\,dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\underline{\sqrt{2}-1}$$

ب)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}=e^{\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\ln n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\ln n\,\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\xrightarrow[\text{Maclaurin Series}]{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}\xrightarrow{Hop}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=e^{0}=\underline{1}$$

پاسخ سوال۴:

(فصل سری-همگرایی واگرایی)

الف)آزمون انتگرال

به کمک مشتق نشان می دهیم که تابع $f(x)$ نزولی است. همچنین واضح است که توابع x و $\ln x$ در $x>۳$ پیوسته و مثبت اند.

$$\to f(x)=\frac{۱}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$$

$$\to f'(x)=\frac{-\left(x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}\right)'}{\left(x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}\right)^{۲}}=\frac{-\left((\ln x+۱)\sqrt{\ln(\ln x)}+\frac{۱}{۲\sqrt{\ln(\ln x)}}\right)}{\left(x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}\right)^{۲}}<۰$$

$$\to \sum_{n=۳}^{\infty}\frac{۱}{n\ln n\sqrt{\ln(\ln n)}}=\int_{x=۳}^{\infty}\frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$$

$$\to \begin{cases}\ln(\ln x)=u\\ \dfrac{dx}{x\ln x}=du\end{cases}\to=\int_{u=\ln(\ln ۳)}^{\infty}\frac{du}{\sqrt{u}}=۲\sqrt{u}\Big|_{u=\ln(\ln ۳)}^{\infty}=\lim_{u\to\infty}۲\sqrt{u}-۲\sqrt{\ln(\ln ۳)}=\infty$$

طبق آزمون انتگرال چون انتگرال متناظر با سری واگراست پس سری نیز واگراست.

ب)

$$\sum_{n=۴}^{\infty}\frac{۲^n}{۳^n-n^۳}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{n>۴}\frac{۲^n}{۳^n-n^۳}\approx\frac{۲^n}{۳^n}$$

$$\to \sum_{n=۴}^{\infty}\frac{۲^n}{۳^n}\to \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{۲^n}{۳^n}}=\frac{۲}{۳}<۱$$

طبق آزمون ریشه سری $\sum_{n=۴}^{\infty}\frac{۲^n}{۳^n}$ همگراست و طبق آزمون مقایسه حدی چون $\frac{۲^n}{۳^n}\approx\frac{۲^n}{۳^n-n^۳}$ پس $\sum_{n=۴}^{\infty}\frac{۲^n}{۳^n-n^۳}$ نیز همگراست.

پاسخ سوال ۵:

(فصل انتگرال-مشتق از انتگرال(قضیه اساسی حساب))

$$f(x)=e^{x}+\int_{0}^{x^{3}}e^{-t^{2}}dt\xrightarrow{(a,1)}e^{a}+\int_{0}^{a^{3}}e^{-t^{2}}dt=1\rightarrow \boxed{a=0}$$

بنابراین نقطه $(0,1)$ روی تابع است.

$$\boxed{(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}}\rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{f'(0)}$$

$$\rightarrow f'(x)=e^{x}+3x^{2}e^{-x^{6}}>0$$

با توجه به اینکه بازای هر $x\in\mathbb{R}$ مشتق تابع همواره عددی مثبت است یعنی تابع اکیدا صعودی است و هر خط به موازات محور طول ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع خواهد کرد، بنابراین تابع یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است.

$$\xrightarrow{x=0}f'(0)=1\rightarrow (f^{-1})'(1)=\frac{1}{1}=1$$

$$\xrightarrow{y-y_0=m(x-x_0)}y-0=1(x-1)\rightarrow \boxed{y=x-1}$$

با توجه به اینکه مشتق مرتبه اول تابع را یافته ایم کافیست از تابع مشتق، مشتق مرتبه چهاردهم را بیابیم. از طرفی مشتق n ام تابع e^{x} با خودش برابر است، پس خواهیم داشت:

$$\boxed{\xrightarrow[y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n]{a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}f^{(n)}(0)=a_n\times n!}\quad f^{(15)}(0)=e^{0}+a_{14}\times 14!\rightarrow \boxed{f^{(15)}(0)=1+\frac{3}{2}\times 14!}$$

$$\xrightarrow[\text{Maclaurin Series}]{e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}}3x^{2}e^{-x^{6}}=3x^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^{6})^{n}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^{n}x^{6n+2}}{n!}$$

$$\xrightarrow[y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n]{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n x^{6n+2}}{n!}}a_{6n+2}=\frac{3(-1)^{n}}{n!}\xrightarrow[n=2]{a_{6n+2}=\frac{3(-1)^n}{n!}}a_{14}=\frac{3(-1)^{2}}{2!}=\frac{3}{2}$$

اینم از پایان قصه ریاضی۱، بریم خودمونو آماده کنیم برای ریاضی۲ و معادلات دیفرانسیل ...