

فصل چهارم

مشتق گیری و انتگرال گیری عددی

هرگز در مسیر پیموده شده گام برندارید، زیرا این راه تنها
به همان جایی می رسد که دیگران رسیده اند. گراهام بل

خطای مشتق گیری عددی

برای محاسبه خطای مشتق گیری از بسط تیلور استفاده می شود. به این منظور کافیست که بسط تیلور تمام توابعی که اندیسی جز 1 دارند را تعیین و سپس فرمول مشتق را تشکیل دهیم.

$$\text{مثال ۴-۳: مطلوب است خطای فرمول } f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$$

حل: بسط تیلور تابع f_{i+1} به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} f_{i+1} = f(x_{i+1}) = f(x_i + h) &= f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \\ &+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \dots = f_i + h f'_i + \frac{h^2}{2!} f''_i + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}_i + \dots \quad (5.4) \end{aligned}$$

اینک رابطه داده شده را تشکیل می دهیم:

$$\frac{f_{i+1} - f_i}{h} = f'_i + \frac{h}{2!} f''_i + \dots$$

ولذا خطا برابر است با $\frac{h}{2} f''_i + \dots = \text{خطا}$

تعریف: اگر $f(h)$ و $g(h)$ دو تابع باشند که $g(h) \neq 0$ و داشته باشیم

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = c \neq 0$$

در این صورت می گوییم $f(h) = O(g(h))$ در حالت خاص که $g(h) = h^p$ و $p \in \mathbb{R}^+$

گوییم $f(h) = O(h^p)$. ظاهراً هر چقدر p بزرگتر باشد خطا نیز کمتر است. به طور مثال خطای

فرمول $f'_i \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ به صورت $O(h)$ می باشد و لذا این فرمول برای محاسبه مشتق نادقیق

است و خطای بالایی دارد.

انتگرال گیری عددی:

از آنجا که محاسبه تابع اولیه بعضی از توابع امکانپذیر نمی باشد، لذا نمی توان مقدار دقیق انتگرال این توابع را در یک بازه تعیین نمود. در چنین مواردی روش های عددی محاسبه انتگرال حائز اهمیت است. روش معمول در ارائه فرمول های انتگرال گیری عددی شبیه روش مشتق گیری عددی است. ما از نقاط

تعریف شده به وسیله تابع یک چندجمله‌ای گذرانده و سپس از این چندجمله‌ای انتگرال می‌گیریم. وقتی مقادیر x_i دارای فاصله یکسان باشند، چند جمله‌ای پیشرو نیوتن مناسب است.

روش دوزنقه ای

چند جمله‌ای درونیاب پیشرو نیوتن را که از نقاط (x_i, f_i) و (x_{i+1}, f_{i+1}) می‌گذرد در نظر بگیرید:

$$f(x) \approx p_1(x) = f_i + \theta \Delta f_i$$

با توجه به اینکه $\theta = \frac{x - x_i}{h}$ لذا $dx = h d\theta$ بنابراین

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_1(x) dx = h \int_0^1 (f_i + \theta \Delta f_i) d\theta$$

$$= h \left(f_i + \frac{1}{2} \Delta f_i \right) = \frac{h}{2} (f_i + f_{i+1})$$

اینک با تقسیم بازه $[a, b]$ به n زیر بازه مساوی $[x_i, x_{i+1}]$ داریم:

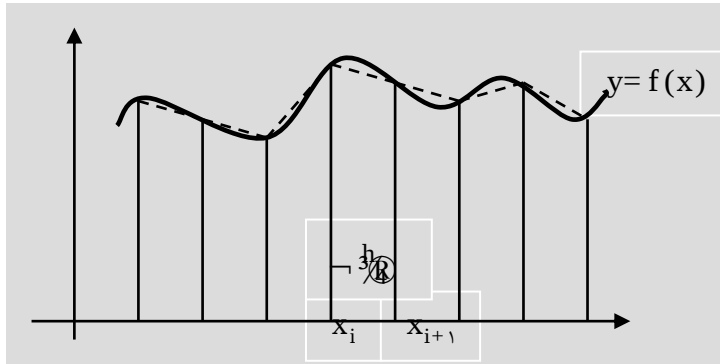
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n=b} f(x) dx$$

$$\approx \frac{h}{2} (f_0 + f_1) + \frac{h}{2} (f_1 + f_2) + \dots + \frac{h}{2} (f_{n-1} + f_n)$$

بنابراین فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) \quad (10.4)$$

مقدار انتگرال فوق را با $T(h)$ نشان داده و آن را مقدار تقریبی انتگرال از روش دوزنقه می‌نامیم. از دیدگاه هندسی فرمول بیان شده برای محاسبه تقریبی مقدار یک انتگرال معین به کمک روش دوزنقه‌ای که در رابطه (۱۰.۴) ارایه شد، برابر است با مجموع مساحت دوزنقه‌هایی که در ناحیه بین نمودار تابع و محور x ها تشکیل می‌گردند.



شکل ۴-۱ روش ذوزنقه‌ای

به کمک چندجمله‌ای لاگرانژ نیز می‌توان رابطه (۱۰.۴) را بدست آورد. به این منظور کافیت فرمول دو نقطه‌ای لاگرانژ را در نظر بگیرید:

$$f(x_i) \approx L_i(x_i)f_i + L_{i+1}(x_i)f_{i+1}$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx &\approx \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \left\{ \frac{1}{3} x_{i+1}^2 f_i + \frac{1}{3} x_i^2 f_{i+1} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{x_{i+1}^2}{3} - x_i x_{i+1} \right] f_{i+1} + \left[\frac{x_i^2}{3} - x_i x_{i+1} \right] f_i \right\} \end{aligned}$$

که با فرض $x_{i+1} = x_i + h$ و ساده نمودن رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_i + f_{i+1})$$

نکته: خطای روش ذوزنقه‌ای در زیربازه $[x_i, x_{i+1}]$ برابر است با:

$$E_i = -\frac{h^3}{3!} f''(\eta_i) \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

همچنین مقدار خطا در بازه $[a, b]$ از فرمول زیر محاسبه می‌گردد:

$$E(T(h)) = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

نتیجه ۱: خطای قاعده دوزنقه‌ای متناسب با h^2 است و این قاعده برای توابع چندجمله‌ای حداکثر درجه یک دقیق است.

نتیجه ۲: اگر M_2 کران بالایی برای $|f''(x)|$ باشد یعنی $|f''(x)| \leq M_2$ $\max_{a \leq x \leq b}$ آنگاه

$$|E(T(h))| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M_2$$

مثال: با توجه به جدول زیر مطلوب است مقدار تقریبی $\int_0^4 f(x) dx$ از قاعده دوزنقه

x	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۳	۴
f	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۸۵	۲	۲/۱۵	۲/۷۵

حل: چون نقاط جدول متساوی الفاصله نیستند لذا انتگرال را در دو بازه $[0, 2]$ و $[2, 4]$ جداگانه محاسبه می‌کنیم. با توجه به رابطه (10.4) داریم:

$$\int_0^2 f(x) dx \approx \frac{0.5}{3} (f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) + 2f(1.5) + f(2))$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \approx T(0.5) = 3/275$$

$$\int_2^4 f(x) dx \approx T(1) = \frac{1}{3} (f(2) + 2f(3) + f(4)) = 4/525$$

$$\Rightarrow \int_0^4 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx = T(0.5) + T(1) = 7/8$$

مثال: تقریبی از $\int_0^1 x \sin x dx$ به روش دوزنقه‌ای چنان حساب نمایید که خطای آن از 10^{-2} کمتر باشد.

حل: چون $f(x) = x \sin x$ لذا $f'(x) = \cos x - x \sin x$ و با توجه به اینکه $0 \leq x \leq 1$ داریم:

$$|f''(x)| \leq 2|\cos x| + |x| |\sin x| \leq 3$$

بنابراین $M_3 = 3$ و h از نامساوی زیر بدست می آید:

$$|T(h)| \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{b-a}{12} h^2 M_3 \leq 10^{-2} \Rightarrow \frac{h^2}{4} \leq 10^{-2}$$

$$\Rightarrow h \leq 0.2$$

با فرض $h = 0.2$ می توان مقدار تقریبی انتگرال را محاسبه نمود:

$$T(0.2) = \frac{0.2}{3} [0 + 2(0.2 \sin 0.2) + 2(0.4 \sin 0.4) + 2(0.6 \sin 0.6) + 2(0.8 \sin 0.8) + \sin 1] = 0.3578$$

روش سیمپسون

چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ را در نقاط x_i, x_{i+1}, x_{i+2} در نظر بگیرید:

$$p_2(x) = f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i$$

از آنجا که

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} p_2(x) dx$$

با تغییر متغیر $x = x_i + \theta h$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+2}} p_2(x) dx &= \int_0^2 (f_i + \theta \Delta f_i + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_i) h d\theta \\ &= \frac{1}{3} (2f_i + 2\Delta f_i + \frac{1}{3} \Delta^2 f_i) \\ &= \frac{h}{3} (f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}) \end{aligned}$$

برای بدست آوردن فرمول روش سیمپسون در بازه $[a, b]$ لازم است که این بازه به n قسمت

مساوی تقسیم شود که n عددی زوج می باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} \int_{x_0=a}^{x_n=b} f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \\ &\approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2) + \frac{h}{3} (f_2 + 4f_3 + f_4) + \dots + \frac{h}{3} (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \end{aligned}$$

و فرمول سیمپسون راکه با $S(h)$ نشان می‌دهند، به قرار زیر است:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 4f_{n-1} + f_n) \quad (11.4)$$

خطای این فرمول در بازه $[x_i, x_{i+2}]$ از رابطه

$$E_i = -\frac{h^3}{90} f^{(4)}(\eta_i) \quad \eta_i \in [x_i, x_{i+2}]$$

و در بازه $[a, b]$ از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$E(S(h)) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in [a, b]$$

نتیجه ۱: خطای $S(h)$ متناسب با h^4 بوده و این نشان می‌دهد که خطا برای چندجمله‌ای تا درجه سه صفر است.

نتیجه ۲: با فرض $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)| \leq M_4$ کران بالای خطا بدست می‌آید:

$$|E(S(h))| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M_4$$

مثال: تقریبی از $\int_1^2 x e^x dx$ به روش سیمپسون چنان تعیین کنید که خطای آن حداکثر 10^{-3} باشد.

حل: ابتدا باید مقدار h را تعیین نمود. چون $f(x) = x e^x$ لذا $f^{(4)}(x) = (x+4)e^x$ از آنجا که $f^{(4)}(x)$ تابعی صعودی می‌باشد، لذا $f^{(4)}(2) = 6e^2 = \max_{1 \leq x \leq 2} f^{(4)}(x)$ و این

یعنی $M_4 = 6e^2$ بنابراین

$$E(S(h)) \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{b-a}{180} h^4 M_4 \leq 10^{-3} \Rightarrow \frac{6e^2}{180} h^4 \leq 10^{-3} \Rightarrow h \leq 0.2524$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n} \leq 0.2524 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 0.2524 \Rightarrow n \geq 3.96$$

n باید عددی زوج باشد، پس با فرض $n = 4$ و در نتیجه $h = 0.25$ داریم:

$$\int_1^2 x e^x dx \approx \frac{0.25}{3} (f(1) + 4(f(1/25) + 2f(1/5) + 4f(1/75) + f(2)))$$

$$\Rightarrow \int_1^2 x e^x dx \approx S(0.25) = 7.38962$$

روش نقطه میانی

روش‌های انتگرال‌گیری سیمپسون و دوزنقه‌ای از نقاط ابتدا و انتهای بازه انتگرال‌گیری استفاده می‌کنند. لذا برای محاسبه انتگرال‌هایی که در ابتدا یا انتهای بازه انتگرال‌گیری تعریف نشده‌اند، مناسب نیستند. برای محاسبه تقریبی چنین انتگرال‌هایی می‌توان روش نقطه میانی را به کار برد. در این روش

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx h f(x_i + \frac{h}{2}) \quad \text{بنابراین}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h [f(x_0 + \frac{h}{2}) + f(x_1 + \frac{h}{2}) + \dots + f(x_{n-1} + \frac{h}{2})] \quad (12.4)$$

خطای روش نقطه میانی نصف خطای روش دوزنقه است؛ یعنی

$$|E(M(h))| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2$$

$$|f''(x)| \leq M_2 \quad \forall x \in [a, b] \quad \text{که در آن}$$

مثال: تقریبی از $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ را به روش نقطه میانی و به ازای $h = 0.2$ محاسبه کنید.
حل: بنا به رابطه (12.4) داریم:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx 0.2 \left(\frac{\sin 0.1}{0.1} + \frac{\sin 0.3}{0.3} + \frac{\sin 0.5}{0.5} + \frac{\sin 0.7}{0.7} + \frac{\sin 0.9}{0.9} \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \approx M(0.2) = 0.94658$$

روش رامبرگ

به کمک روش رامبرگ و با توجه به مقادیر بدست آمده از روش‌های ذوزنقه‌ای یا سیمپسون می‌توان تقریب بهتری برای $\int_a^b f(x) dx$ بدست آورد. اساس این روش این است که می‌دانیم:

$$I = \int_a^b f(x) dx = T(h) + c_1 h^2 + c_2 h^4 + c_3 h^6 + \dots \quad (13.4)$$

اگر در این رابطه h را به $\frac{h}{4}$ تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$I = T\left(\frac{h}{4}\right) + c_1 \left(\frac{h}{4}\right)^2 + c_2 \left(\frac{h}{4}\right)^4 + c_3 \left(\frac{h}{4}\right)^6 + \dots \quad (14.4)$$

برای حذف c_1 از رابطه فوق و رسیدن به تقریبی از انتگرال که خطایی از مرتبه $O(h^4)$ دارد، کافیت که چهار برابر رابطه (14.4) را از معادله (13.4) کم کنیم:

$$\begin{aligned} 3I &= 4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h) - \frac{3}{4} c_1 h^2 - \frac{15}{16} c_2 h^4 + \dots \\ \Rightarrow I &= \frac{4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h)}{3} - \frac{c_1}{4} h^2 - \frac{5}{16} c_2 h^4 + \dots \end{aligned}$$

این رابطه نشان می‌دهد که $I = \frac{4T\left(\frac{h}{4}\right) - T(h)}{3}$ تقریبی از I بوده که خطای آن متناسب با

h^4 است. با ادامه این روند می‌توان فرمول‌هایی بدست آورد که خطای آنها متناسب با h^6 ، h^8 یا ... باشد.

تعمیم روش رامبرگ

با بکارگیری مجدد روش رامبرگ یک آرایه مثلثی به صورت زیر شکل می‌گیرد، که هر درآیه آن

تقریبی برای $\int_a^b f(x) dx$ است.

$$\begin{array}{llll}
T_1 & \rightarrow & \text{بازه را نصف نمی کنیم} & \\
T_2^{(1)} & \rightarrow & T_2 & \text{بازه را یک بار نصف می کنیم} \\
T_4^{(1)} & \rightarrow & T_4 & \text{بازه را دو بار نصف می کنیم} \\
T_8^{(1)} & \rightarrow & T_8 & \text{بازه را سه بار نصف می کنیم} \\
& \vdots & & \\
& & & \vdots
\end{array}$$

ستون اول این آرایه تقریب‌های دوزنقه‌ای بوده که در آنها بازه $[a, b]$ به ترتیب به ۱، ۲، ۴، ۸، ...

زیر بازه یکسان تقسیم شده و خطای تقریب‌های حاصل $O(h^2)$ می‌باشد. ستون دوم آرایه از ستون اول و بنا به فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$T_{2k}^{(1)} = \frac{4T_{2k} - T_k}{4-1} \quad k = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

که دارای خطای $O(h^4)$ است.

به طور کلی ستون $(m+1)$ ام این آرایه از ستون m ام و از رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$T_{2^m k}^{(m)} = \frac{4^m T_{2^{m-1} k}^{(m-1)} - T_{2^{m-1} k}^{(m-1)}}{4^m - 1} \quad k = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots \quad (15.4)$$

که دارای خطای $O(h^{2m})$ است.

مثال: مقدار تقریبی $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ را به روش رامبرگ محاسبه کنید. بازه اولیه را سه بار نصف نمایید.

حل: در گام اول با فرض $h = 1$ مقدار تقریبی انتگرال را از روش دوزنقه و با توجه به رابطه (۱۰.۴) محاسبه می‌کنیم:

$$T_1 = \frac{1}{3} (f(0) + f(1)) = 0.75$$

در گام بعد بازه را نصف کرده؛ لذا $h = \frac{1}{2}$ و

$$T_7 = \frac{1}{4} (f(0) + 2f(0.5) + f(1)) = 0.81944$$

با نصف کردن مجدد بازه و قرار دادن $h = \frac{1}{4}$ داریم:

$$T_8 = \frac{1}{8} (f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + 2f(0.75) + f(1)) = 0.83170$$

و سرانجام با فرض $h = \frac{1}{8}$ خواهیم داشت:

$$T_8 = \frac{1}{16} (f(0) + 2f(\frac{1}{8}) + 2f(\frac{1}{4}) + 2f(\frac{3}{8}) + 2f(\frac{1}{2}) + 2f(\frac{5}{8}) + 2f(\frac{3}{4}) + 2f(\frac{7}{8}) + f(1)) = 0.83467$$

به این ترتیب ستون اول آرایه رامبرگ تشکیل می‌شود. اینک با به کار بردن رابطه (۱۵.۴) ستون دوم تعیین می‌شود:

$$T_7^{(1)} = \frac{4T_7 - T_1}{3} = 0.84259$$

$$T_8^{(1)} = \frac{4T_8 - T_7}{3} = 0.83579$$

$$T_8^{(1)} = \frac{4T_8 - T_8}{3} = 0.83566$$

اینک ستون سوم را تشکیل می‌دهیم:

$$T_8^{(2)} = \frac{4^2 T_8^{(1)} - T_7^{(1)}}{15} = 0.83533$$

$$T_8^{(2)} = \frac{4^2 T_8^{(1)} - T_8^{(1)}}{15} = 0.83565$$

و تنها درآیه ستون چهارم چنین است:

$$T_{\lambda}^{(2)} = \frac{4^3 T_{\lambda}^{(1)} - T_{\phi}^{(2)}}{4^3 - 1} = 0.83566$$

پس $I \approx 0.83566$. مقدار واقعی این انتگرال $I = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$ می باشد، که تا ۵ رقم

اعشار برابر است با 0.86566

مثال: مقدار تقریبی $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ را از روش رامبرگ چنان تعیین کنید که خطا از 10^{-4} کمتر باشد.

حل: برای حل چنین مسایلی آرایه روش رامبرگ را به صورت سطری انجام داده و در هر مرحله مقدار بدست آمده در آن سطر را با مقدار سطر پیشین مقایسه نموده تا به دقت خواسته شده دست یابیم.

ابتدا روش دوزنقه را با $h = \pi$ و $h = \frac{\pi}{4}$ به کار برده، با فرض $f(x) = x \sin x$ از رابطه (۱۰.۴) داریم:

$$h = \pi \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{4} \{f(0) + f(\pi)\} = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{4} \{f(0) + 2f(\frac{\pi}{2}) + f(\pi)\} = 2.46740$$

اینک با توجه به رابطه (۱۵.۴) خواهیم داشت:

$$T_3^{(1)} = \frac{4T_2 - T_1}{3} = 3.28987$$

از آنجا که $|T_3^{(1)} - T_2| > 10^{-4}$ لذا لازم است که محاسبات را به منظور تشکیل سطر بعدی آرایه رامبرگ ادامه دهیم:

$$h = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T_4 = \frac{\pi}{8} \{f(0) + 2f(\frac{\pi}{4}) + 2f(\frac{\pi}{2}) + 2f(\frac{3\pi}{4}) + f(\pi)\} = 2.97842$$

و بنابراین

$$T_4^{(1)} = \frac{4T_3 - T_2}{3} = 3.14876$$

$$T_4^{(2)} = \frac{16T_4^{(1)} - T_3^{(1)}}{15} = 3.14335$$

چون $10^{-4} > |T_{\text{f}}^{(2)} - T_{\text{f}}^{(1)}|$ لذا سطر بعدی آرایه را تشکیل داده که مقادیر زیر حاصل می شوند:

$$h = \frac{\pi}{\lambda} \Rightarrow T_{\lambda} = \frac{\pi}{16} \{ f(0) + 2f\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) + 2f\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) + \dots + 2f\left(\frac{14\pi}{\lambda}\right) + f(\pi) \} = 3/10.112$$

$$T_{\lambda}^{(1)} = \frac{4T_{\lambda} - T_{\text{f}}}{3} = 3/14201$$

$$T_{\lambda}^{(2)} = \frac{16T_{\lambda}^{(1)} - T_{\text{f}}^{(1)}}{15} = 3/14156$$

$$T_{\lambda}^{(3)} = \frac{64T_{\lambda}^{(2)} - T_{\text{f}}^{(2)}}{63} = 3/14160$$

اینک چون $10^{-4} < |T_{\lambda}^{(3)} - T_{\lambda}^{(2)}|$ لذا مقدار تقریبی انتگرال $T_{\lambda}^{(3)} = 3/14160$ می باشد که به مقدار دقیق این انتگرال یعنی $I = \pi \square 3/1415927$ بسیار نزدیک است.

تمرین :

۱- مطلوب است تعیین خطای فرمول های تقریبی زیر

$$f_i'' \square \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad \text{الف:}$$

$$f_{i+1}'' \square \frac{\Delta^2 f_i}{h^2} \quad \text{ب:}$$

$$f_i''' \square \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2h^3} \quad \text{ج:}$$

$$f_i' \square \frac{-f_{i+2} + 8f_{i+1} - 8f_{i-1} + f_{i-2}}{12h} \quad \text{د:}$$

۲- مقادیر a, b, c و d را طوری تعیین کنید که تقریب زیر برای محاسبه $f'(x_0)$ دارای خطا از مرتبه ۴ باشد.

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} (af(x_0 + h) + bf(x_0 + 2h) + cf(x_0 - h) + df(x_0 - 2h))$$

۳- تقریبی از مقدار $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ را به قاعده دوزنقه‌ای چنان محاسبه کنید که خطای آن کمتر از 10^{-4} باشد.

۴- مطلوب است محاسبه $\int_3^4 x^2 \ln x \, dx$ از دو روش سیمپسون و دوزنقه با $h = \frac{1}{4}$ و محاسبه خطای مرکب شده.

۵- مقدار تقریبی $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} \, dx$ را با فرمول دو نقطه‌ای گوس بدست آورید.

۶- مطلوب است محاسبه تعداد زیر بازه‌های لازم برای تقریب $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ با حداکثر خطای 0.0002 به روش های سیمپسون و دوزنقه‌ای.

۷- قاعده رامبرگ را برای روش سیمپسون بکار برده و نشان دهید که $\frac{16S(\frac{h}{2}) - S(h)}{15}$ تقریبی از

I است که خطای آن متناسب با h^6 است.

راهنمایی: در قاعده سیمپسون داریم:

$$I = \int_a^b f(x) \, dx = S(h) + a_4 h^4 + a_6 h^6 + \dots$$