

سوالات مبانی ریاضی

۱	فرض کنید B زیر مجموعه‌ای از مجموعه جزئاً مرتب (A, \leq) است ثابت کنید که کوچکترین کران بالا (بزرگترین کران پایین) B در صورت وجود، یکتاست.
۲	مثالی بیاورید از زیر مجموعه‌ی کران دار مجموعه‌ی جزئاً مرتب که کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین نداشته باشد.
۳	مثالی از یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب بیاورید که بیش از یک عنصر ماکسیمال و نیز بیش از یک عنصر مینیمال داشته باشد.
۴	ثابت کنید اگر مجموعه‌ی کلاً مرتب عنصر ماکسیمال (مینیمال) داشته باشد، آنگاه این عنصر منحصر به فرد است.
۵	مثالی از یک مجموعه‌ی کلاً مرتب بیاورید که ماکسیمال و مینیمال نداشته باشد.
۶	گیریم (A, \leq) یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است که هر زنجیر در آن کران پایین دارد. ثابت کنید A عنصر مینیمال دارد.
۷	شمارا و ناشمارا بودن هر یک از مجموعه‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید. الف) مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های متناهی از اعداد طبیعی ب) مجموعه‌ی تمام بازه‌هایی که نقاط انتهایی آنها گویا باشد.
۸	ثابت کنید مجموعه‌ی تمام دنباله‌هایی که جملات آنها فقط از صفر و یک تشکیل شده است نا شماراست. $S = \{ (a_n) : a_n = 0 \text{ یا } 1 \}$
۹	فرض کنید a یک عدد اصلی ترامتناهی است ثابت کنید عدد اصلی b وجود دارد به طوری که $a = \aleph_0 b$. و با استفاده از این مطلب نشان دهید $a = \aleph_0 a$
۱۰	ثابت کنید الف) $c^{\aleph_0} = c$ ب) $c^c = 2^c$
۱۱	مطلوب است \aleph_0^c و $\text{card}(P(\mathbb{N} \times \mathbb{N}))$
۱۲	ثابت کنید مجموعه $A = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{Q}\}$ شماراست.
۱۳	ثابت کنید مجموعه‌ی تمام دایره‌ها در صفحه که مختصات مراکزشان اعداد گویا و شعاعها نیز گویا باشد شماراست.

۱۴	ثابت کنید مجموعه‌ی تمام چندجمله‌ایهای $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ با ضرایب صحیح شمارای نامتناهی است.
۱۵	هر ریشه حقیقی معادله $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ با ضرایب صحیح را یک عدد جبری می‌نامیم. ثابت کنید مجموعه‌ی تمام اعداد جبری شمارای نامتناهی است.
۱۶	رابطه‌ی عاد کردن را روی مجموعه‌ی $A = \{x \in \mathbb{N} : x \leq 10\}$ در نظر بگیرید. اینفیمم و سوپریمم مجموعه‌ی $B = \{2, 5\}$ را بدست آورید.
۱۷	تابع $f: A \rightarrow B$ را در نظر بگیرید. تابع $g: B \rightarrow P(A)$ به صورت $g(b) = \{x \in A \mid b = f(x)\}$ تعریف می‌کنیم. گزاره‌ی درست را مشخص کرده و آن را اثبات کنید. الف) اگر f یک به یک باشد آنگاه g پوشاست. ب) اگر f یک به یک باشد آنگاه g یک به یک است. ج) اگر f پوشا باشد آنگاه g پوشاست د) اگر f پوشا باشد آنگاه g یک به یک است.
۱۸	فرض کنید (A, \leq) کلاً مرتب باشد ثابت کنید $a \in A$ کوچکترین عضو A است اگر و تنها اگر a عنصر مینیمال A باشد.
۱۹	الف) رابطه \subseteq را روی مجموعه $A = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ در نظر بگیرید عنصرهای مکسیمال و مینیمال A را مشخص کنید. ب) اگر $A = \{1, 2, 3\}$ کوچکترین و بزرگترین عضو مجموعه جرئاً مرتب $(P(A), \subseteq)$ را مشخص کنید.
۲۰	ثابت کنید هیچ تناظر یک به یکی بین \mathbb{N} و $P(\mathbb{N})$ وجود ندارد.