



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = m\ddot{y}$$

$$\sum \vec{F}_z = m\ddot{z}$$

$$\sum \vec{F}_z = m\ddot{z} = mg$$

$$\Rightarrow \ddot{z} = g \rightarrow \dot{z} = gt + C_1$$

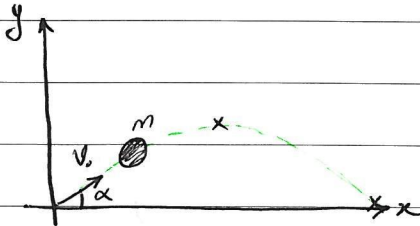
$$z = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

$$t=0 \begin{cases} z=0 \\ \dot{z}=0 \end{cases} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

$$\text{در حالت کلی} \rightarrow t=0 \begin{cases} z=z_0 \\ \dot{z}=v_0 \end{cases} \Rightarrow C_1, C_2 \checkmark$$

بال بذر هادی (چپ) در نقطه O با سرعت اولیه v_0 تحت زاویه α نسبت به افق پرتاب می‌شود. مطابق باست مطابق باست

این طرح



$$m\ddot{y} = -mg$$

$$\ddot{y} = -g$$

$$\dot{y} = -gt + C_3$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4$$

$$t=0 \begin{cases} \dot{y} = v_0 \sin \alpha \rightarrow C_3 = v_0 \sin \alpha \\ y=0 \rightarrow C_4=0 \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$$

$$\dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha$$

$$\text{پایان: } y_{\max} \rightarrow \dot{y} = 0$$

$$-gt_s + v_0 \sin \alpha = 0 \rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$y_{\max} = -\frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)$$

$$y_{\max} = -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$$

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$\text{زمان رسیدن به زمین} \rightarrow x_R = y = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}gt_R^2 + v_0 \sin \alpha t_R = 0$$

$$t_R \left(-\frac{1}{2}gt_R + v_0 \sin \alpha \right) = 0 \rightarrow t_R = 0, t_R = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$$

$$x_R = v_0 \cos \alpha \left(\frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \right) \quad x_R = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases} \quad y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)$$

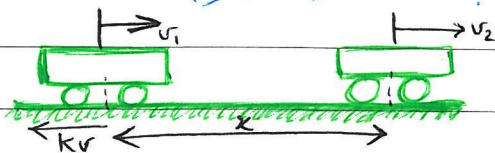
$$y = -\frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha$$

2. نیروهای تابع حرکت (مانند نیروی مقاومت هوا)

$$F = F(v) = ma = m \frac{dv}{dt}$$

$$\int \frac{dv}{F(v)} = \int \frac{dt}{m} \rightarrow \frac{t}{m} + C = \int \frac{dv}{F(v)}$$

مثال: کابین جرم m روی یک سطح افقی با اصطکاک حرکت در یک سیال با چسبندگی η و سرعت اولیه v_1 و سرعت نهایی v_2 می باشد. فاصله پیموده توسط کابین تا رسیدن به سرعت پایدار (نیروی اصطکاک در رابطه با $F = -kv$ سرعت می باشد)



$$\begin{aligned} \text{For the first cart: } F_x = m \ddot{x} \rightarrow -kv_1 = m \ddot{x} \\ -kv = m \frac{dv}{dt} = m \cdot \frac{dv}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right)^v \end{aligned}$$

$$-kv_x = m v \frac{dv}{dx}$$

$$-k \int_0^x dx = m \int_{v_1}^{v_2} dv$$

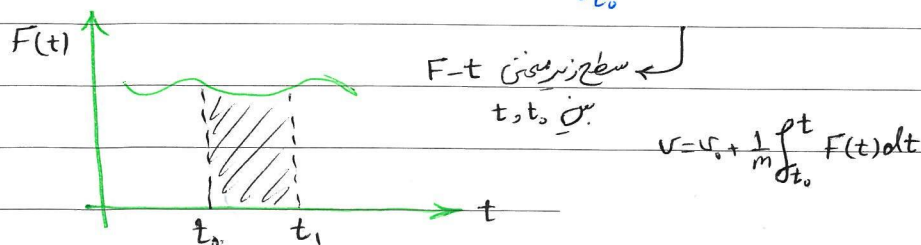
$$-kx = m(v_2 - v_1) \quad x = \frac{m(v_1 - v_2)}{k}$$

$$\begin{aligned} \text{For the second cart: } -kv_t = m \frac{dv}{dt} \\ -k \int_0^t dt = m \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v} \quad -kt = m \ln \left| \frac{v_2}{v_1} \right| \quad t = \frac{m}{k} \ln \left| \frac{v_1}{v_2} \right| \end{aligned}$$

$$F(t) = m\alpha = m \frac{dv}{dt}$$

3. نیروهای تابع زمان (مانند نیروهای ضربه)

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = \int_{v_0}^v m dv \Rightarrow m(v - v_0) = \int_{t_0}^t F(t) dt$$

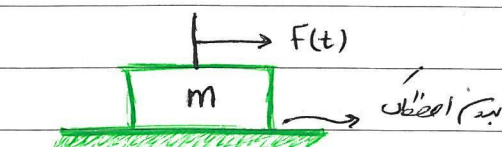


$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \rightarrow \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v_0 dt + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt$$

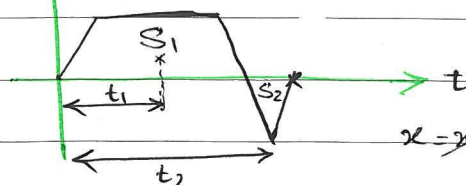
$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t \left[\int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{m} \left\{ \begin{array}{l} \text{کشور اول} \\ \text{سطح زیر} \\ \text{منحنی F-t} \\ \text{بین } t, t_0 \end{array} \right\}$$

مثال: جرمی در زمین به حالت سکون قرار دارد، نیرویی مطابق شکل در راستای نشان داده شده به آن وارد می شود.
محوریت این حرکت در جهت جابجایی جرم m در کجا $t=a$:



$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^a F(t) dt$$



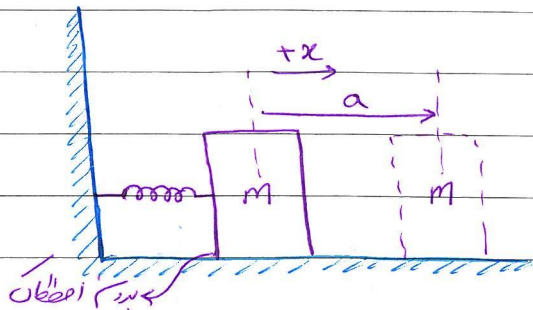
$$v = \frac{1}{m} [S_1 - S_2]$$

$$x = x_0 + v_0(a - 0) + \frac{1}{m} \int_0^a \left[\int_0^a F(t) dt \right] dt$$

$$x = \frac{1}{m} [t_1 S_1 - t_2 S_2]$$

4. نیروهای تابع مکان (ماتریسوی نشان می‌دهد)

مثال: جسمی متساوی الساقط جرم m موجود است، جسم را با انرژی a می‌زنند و در جهت اولیه‌های جسم، مطلوب است معادله حرکت جسم.



$$Kx \leftarrow [M] \rightarrow F_x = m\ddot{x} \rightarrow -Kx = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + Kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

$$x(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{K}{m}}t + C_2 \sin \sqrt{\frac{K}{m}}t$$

$$\dot{x}(t) = -C_1 \sqrt{\frac{K}{m}} \sin \sqrt{\frac{K}{m}}t + C_2 \sqrt{\frac{K}{m}} \cos \sqrt{\frac{K}{m}}t$$

$$I.C \begin{cases} x_0 = a \rightarrow C_1 = a \\ \dot{x}_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = -a \sqrt{\frac{K}{m}} \sin \sqrt{\frac{K}{m}}t$$

توان کار و انرژی (حاصل از هم)

طریقی را پیدا کردیم که در $\vec{dr}$ ضرب داخلی کنیم.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

کل کار انجام شده در مسیر بین نقاط 1 تا 2 → تغییرات انرژی جنبشی

اصل بقای انرژی

$$\frac{W}{12} = 0 \rightarrow \Delta K = 0$$

$$\frac{W}{12} = \Delta K \quad (2)$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{N} \quad (3)$$

$\vec{F}_1$: برای نیروهای تانسیل
 $\vec{F}_2$: برای نیروهای غیر تانسیل
 $\vec{N}$: برای نیروهای عمود بر مسیر

$$\text{curl } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

if $\text{curl } \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}$: نیروی تانسیل

if $\text{curl } \vec{F} \neq 0 \rightarrow \vec{F}$: نیروی غیر تانسیل

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

دستگاه کارتزی

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & r F_\varphi & F_z \end{vmatrix}$$

دستگاه استوانه‌ای

$$\vec{F} = F_\varphi \hat{e}_\varphi \quad \text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\varphi & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r F_\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + F_\varphi \hat{e}_z \neq 0$$

اصلی تانسیل و انرژی مکانیکی
 از جابجایی (2) در (3):

$$\int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \int_1^2 \vec{N} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (4)$$

$$\int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \varphi_2 - \varphi_1 = p_1 - p_2 \quad (5)$$

کار نیروهای تانسیل

کار نیروهای تانسیل وابسته به نقاط انتهای و ابتدای مسیر است و کار نیروی غیر تانسیل وابسته به مسیر است

$$\varphi = -p \quad (6)$$

انرژی تانسیل

$$\int_1^2 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + p_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + p_1 \right) \quad (7)$$

$$E = K + p$$

انرژی مکانیکی

(8)

کار برای نیروهای غیر تانسیل

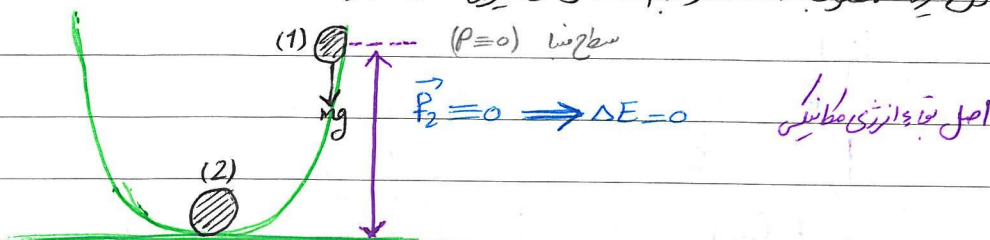
$$\int_1^2 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \Delta E$$

از (7) و (8):

نیروهای تانسیل و نیروی فنر، کشش فنر و ...
 نیروهای غیر تانسیل و اصطکاک، کشش طناب، مقاومت هوا و ...

$$\vec{F}_2 \equiv 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow \text{اصل بقای انرژی مکانیکی}$$

مثال: جرم m از ارتفاع h و از حالت سکون بر روی یک سطح با اصطکاک رها می شود و پس از مدتی در انتهای سطح به حالت سکون می رسد. مطلوب است: کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک:



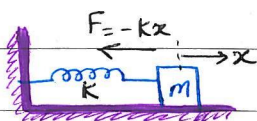
$$\int_1^2 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + P_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + P_1 \right)$$

$$\Delta P = - \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = P_2 - P_1 = - \int_1^2 (-mg) dz = mg(-h - 0) = -mgh$$

برای نیروهای پایدار

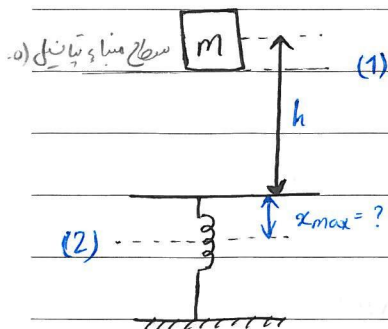
$$\Rightarrow \int_1^2 \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = (0 + P_2) - (0 + 0) = -mgh$$

کار نیروی کشش فنر:



$$\begin{aligned} -\Delta P &= \int_1^2 \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (-Kx) dx \\ -\Delta P &= -\frac{1}{2} Kx^2 \\ \Delta P &= \frac{1}{2} Kx^2 \end{aligned}$$

مثال: جرم m از حالت سکون بر روی فنری به جنس K از ارتفاع h رها می شود. مطلوب است حداکثر فشرده شدن فنر:



پایانه به اینکه سیستم متشکل از جرم و فنر می باشد و سیستم پایدار
به حساب می آید، می توان اصل بقای انرژی مکانیکی را برای آن نوشت

$$\vec{F}_2 \equiv 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2$$

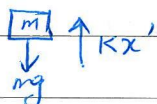
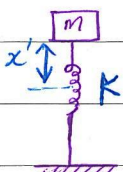
$$K_1 + P_1 = K_2 + P_2$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + P_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + P_2 \Rightarrow P_2 = 0$$

$$P_2 = mg(-h - x_{\max}) + \frac{1}{2} K x_{\max}^2 = 0 \rightarrow K x_{\max}^2 - 2mg(x_{\max} + h) = 0$$

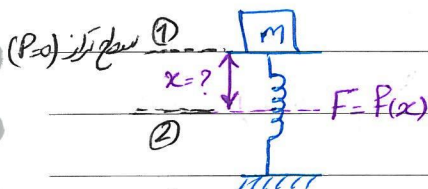
$$\text{if } h=0 \rightarrow x_{\max} = \frac{2mg}{K}$$

در حالت استتیک



$$\sum F_x = 0 \rightarrow mg = Kx' \\ x' = \frac{mg}{K}$$

مثال: جرم m از ارتفاع h روی فنری رها می شود که نیروی آن فنر از رابطه $F = F(x)$ به دست می آید. در این x اختلاف فنر از وزن آن آزاد است. مطلوب است حداکثر فشردگی فنر



با توجه به اینکه نیروی فنر در این مسئله تابع مکان جسم باشد پس باید نیروی فنر را به صورت تابعی از مکان بنویسیم.

$$\int_1^2 F(x) dx = \Delta E = E_2 - E_1 = (K_2 + P_2) - (K_1 + P_1) = P_2 = -mgx$$

اصل کنش جرمی

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

طریقی را در آذربایجان می بینم.

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) + \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3)$$

از (2) و (3) داریم:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) \quad (4)$$

$$\vec{M}_0 = \frac{dH_0}{dt} \quad (5)$$

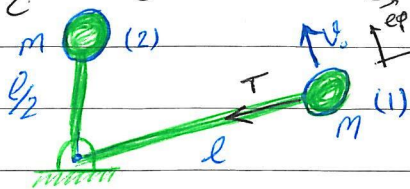
لگاریتم

لگاریتم

M_0 عبارت است از لگاریتم دایره ای حاصل از ضرب در هر حلقه ثابت. H_0 عبارت است از لگاریتم دایره ای حاصل از ضرب در هر حلقه ثابت. H_0 ثابت است.

$$\text{if } \vec{M}_0 = 0 \rightarrow \frac{dH_0}{dt} = 0 \rightarrow H_0 = cte \rightarrow \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2$$

مسئله: جرم m به انتهای طنابی با طول l متصل است، سیستم در وضعی افقی به اصطکاک است، این سیستم با حرکت افقی l حول نقطه O در حال دایره‌ای است. بوسیله این کد در شکل نشان داده شده طناب حول نقطه O جمع می‌شود. طوری که طول آن نصف می‌شود و در هر لحظه طناب در این عمل به یکدیگر می‌چسبند.



در این مسئله تغییراتی در نیروی کشش طناب است و می‌تواند به این دلیل از نقطه O جدا شود و به یک نقطه دیگر می‌چسبد.

$$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{r}_1 \times m \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m \vec{v}_2$$

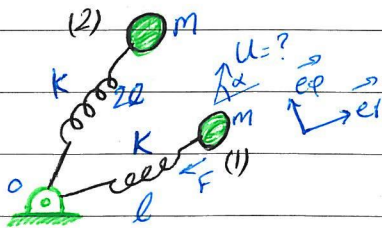
$$l \vec{e}_r \times m v_0 \vec{e}_\phi = \frac{l}{2} \vec{e}_r \times m v_2 \vec{e}_\phi$$

$$m l v_0 \vec{e}_\phi = m \frac{l}{2} v_2 \vec{e}_\phi \rightarrow v_2 = 2v_0 \rightarrow \frac{L}{T} = K_2 - K_1$$

$$K_2 - K_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m ((2v_0)^2 - v_0^2) = \frac{3}{2} m v_0^2$$

مسئله: جرم m به انتهای فنری با طول آزاد l و ضریب k متصل است. (سیستم در وضعی افقی به اصطکاک است) حال جرم l تحت نیروی α است. ابتدا اولی فنری در یک سطح افقی به حرکت محمول u به سمت چپ می‌کشیم و طوری که به $2l$ می‌رسد و مطلوب است محاسبه حرکت اولیه.

نیروی وارد شده به طول فنر $2l$ و فنر l در یک سطح افقی به حرکت محمول u به سمت چپ می‌کشیم و طوری که به $2l$ می‌رسد و مطلوب است محاسبه حرکت اولیه.



$$\vec{M}_O = 0$$

$$\vec{r}_1 \times m \vec{v}_1 = \vec{r}_2 \times m \vec{v}_2$$

$$l \vec{e}_r \times m (u \sin \alpha \vec{e}_r + u \cos \alpha \vec{e}_\phi)$$

$$= 2l \vec{e}_r \times m v_2 \vec{e}_\phi$$

$$m l u \sin \alpha \vec{e}_\phi = 2l m v_2 \vec{e}_\phi$$

$$v_2 = \frac{u}{2} \sin \alpha \quad (1)$$

چون $\alpha = 0$ است و نیروی فنر (نیروی پیاپی) کارشوی اصطکاک

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2$$

$$\frac{1}{2} m u^2 + p_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} m v_2^2 = p_2 - p_1$$

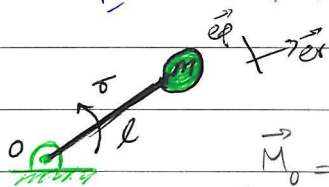
$$\frac{1}{2} m (u^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} k (2l - l)^2 \quad (2)$$

از (1) و (2)

$$m \left(u^2 - \frac{u^2}{4} \sin^2 \alpha \right) = k l^2 \quad m l u \sin \alpha \vec{e}_2 = 2 l m v_2 \vec{e}_2$$

$$u = \sqrt{\frac{k l^2}{m} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{4} \right)} \quad (v_2 = \frac{u}{2} \sin \alpha) \quad (1)$$

نکته: جرم m به انتهای بولهای به طول l جوش نهاده است، بر این سیم شرط ثابت T وارد می‌کنیم. مطلوب است ثابت زاویه سیم: (سیم در وضعی افقی به اصطلاح است)



$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{H}_0}{dt} = T \vec{e}_2 = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \vec{v})$$

$$T \vec{e}_2 = \frac{d}{dt} (l \vec{e}_r \times m v \vec{e}_\varphi)$$

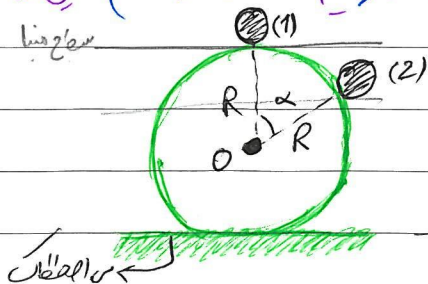
$$T \vec{e}_2 = \frac{d}{dt} (l \vec{e}_r) \times m v \vec{e}_\varphi + l \vec{e}_r \times \frac{d}{dt} (m v \vec{e}_\varphi)$$

$$T \vec{e}_2 = l \vec{e}_r \times \frac{d}{dt} (m l \omega \vec{e}_\varphi) = l \vec{e}_r \times m l \alpha \vec{e}_\varphi$$

$$T \vec{e}_2 = m l^2 \alpha \vec{e}_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{m l^2}$$

مسئله: طولی m از بالای حلقه به اصطلاحی به شعاع R رها می‌شود (سیم در وضعی قائم است) این طولی است

چه زاویه ای از حلقه جدا می‌شود؟ سطح صاف $p=0$

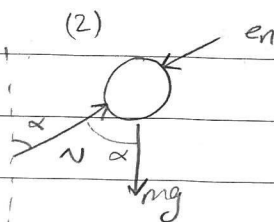


$$W_F = 0 \rightarrow \Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + p_1 = K_2 + p_2$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mg(R - R\cos\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - mgR(1 - \cos\alpha) = 0 \quad (1)$$



$$-N + mg\cos\alpha = ma_n$$

$$-N + mg\cos\alpha = m\frac{v_2^2}{R} \quad (2)$$

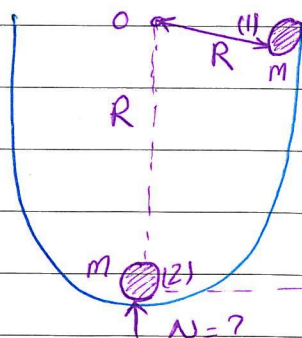
در نقطه (2) $N = 0$ (3)

از (2) $v_2^2 = gR\cos\alpha$ (4)

از (4) و (3)

$$\cos\alpha = 2(1 - \cos\alpha) \quad \cos\alpha = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

مثال: جسم m از ارتفاع h روی سطح به اصطکاک افقی R در نقطه (1) به سرعت اولیه v_1 می‌رسد. در نقطه (2) سطح به ارتفاع h می‌رسد. در نقطه (3) سطح به ارتفاع h می‌رسد. در نقطه (4) سطح به ارتفاع h می‌رسد.



سطح به ارتفاع h

$$W_f = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + P_1 = K_2 + P_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + P_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + P_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - mgh = 0$$

$$\sum F_y = m\ddot{y} \Rightarrow N - mg = m\frac{v_2^2}{R}$$

$$v_2^2 = 2gh$$

$$N = mg + m\frac{2gh}{R}$$

در مورد سوالات ②

Year.

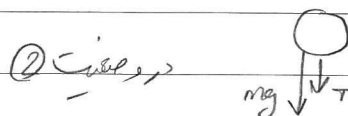
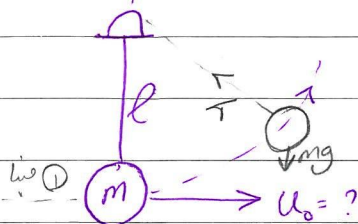
Month.

Day.

T=0

Subject.

مثال: طناب به طول l به انتهای آن یک جسم m متصل شده است. در حالی که جسم در حالت تعادل است، طناب را به سمت بالا می‌کشیم تا جایی که بالاترین نقطه به سمت بالا می‌رود. (پرسش: ...)



$$T + mg = m \frac{v_2^2}{R}$$

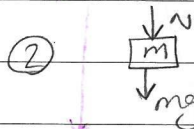
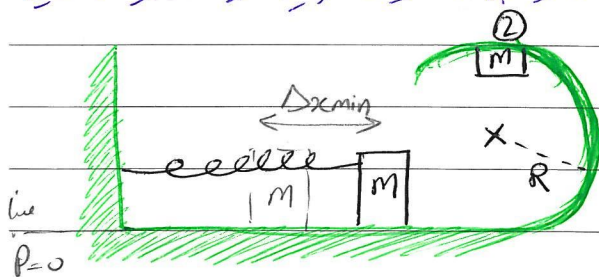
$$T = 0 \rightarrow v_2^2 = gl$$

اصل بقای انرژی: mg هم داریم $\times$ پس نمی‌شود
پس اصل بقای انرژی مناسب

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + p_2 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}mgl + mg(2l)$$

$$v_0 = \sqrt{5gl}$$

مثال: یک جسم m به جزیی به جنین k ضربه‌ای داده شد. در حالی که جسم در حالت تعادل است، طناب را به سمت بالا می‌کشیم تا جایی که بالاترین نقطه به سمت بالا می‌رود. (پرسش: ...)



$$\sum F = \max =$$

$$N + mg = m \frac{v_2^2}{R}$$

$$(2) \text{ به نقطه } N=0$$

$$mg = m \frac{v_2^2}{R} \Rightarrow v_2^2 = gR$$

$$\omega_{re} = 0$$

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_2 = E_1$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + p_2$$

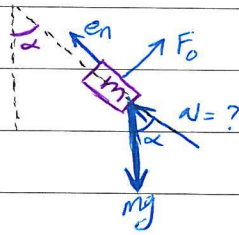
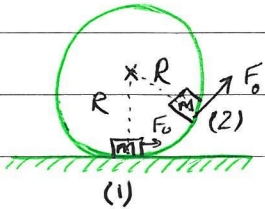
$$\frac{1}{2}k(\Delta x_{min})^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg(2R)$$

$$k\Delta x_{min}^2 - mgR + mg(4R)$$

$$\Delta x_{min} = \sqrt{\frac{5mg}{R}}$$

* توجه: هنگامی که جسم تحت تأثیر نیروی جاذبه در ساید و دوران شتاب می‌یابد، نه حرکت اولی، نه حرکتی است که در یک فاصله زمانی معین بر جسم اثر می‌کند.

مسئله: جسم m در انتهای حلقه ای به حالت سکون قرار دارد، سیستم در صفحه قائم به اصطکاک است نیروی تماسی P_0 را بر جسم وارد می‌کنیم، مطلوب است محاسبه انحراف α و نیروی وارده بر جسم تحت زاویه α .



$$\sum F = m a_n$$

$$N - mg \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$W_{nc} = \Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + P_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + P_1 \right)$$

$$+ F_0 R \alpha = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + m g R (1 - \cos \alpha) \right) - (0 + 0)$$

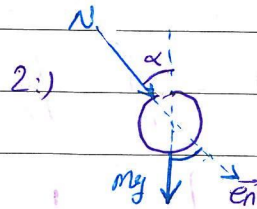
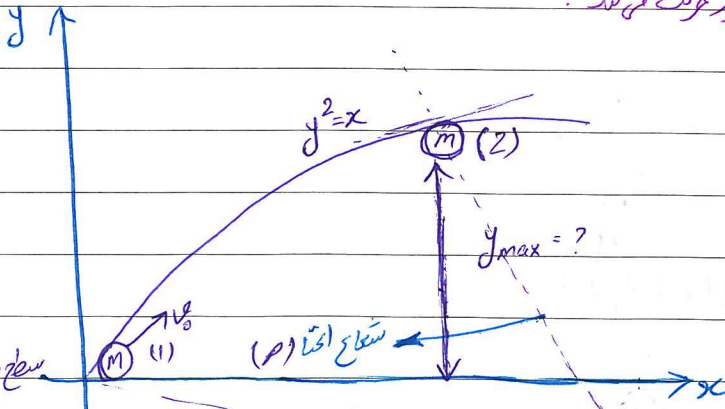
$$v_2^2 = \frac{2 F_0 R \alpha}{m} - 2 g R (1 - \cos \alpha)$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$N = 2 F_0 \alpha - 2 m g (1 - \cos \alpha) + m g \cos \alpha$$

$$N = 2 F_0 \alpha - 2 m g + 3 m g \cos \alpha$$

مسئله: جسم m با سرعت اولی v_0 روی سطح به مقدار $y^2 = x$ که در صفحه قائم است در اصطکاک می‌باشد برآورد کنیم مطلوب است محاسبه ارتفاعی که جسم روی این مسیر حرکت می‌کند.



$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_n$$

$$N + m g \cos \alpha = m \frac{v^2}{R}$$

$$U=0$$

$$W_{nc}=0 \Rightarrow \Delta E=0 \Rightarrow E_1=E_2 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + p_2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_2^2 + m g y_{\max}$$

$v_2^2 = v_0^2 - 2 g y_{\max}$

$$y' = \tan \alpha \quad \text{pb: } 2 y y' = 1 \rightarrow y' = \frac{1}{2y}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2y}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y'' \rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2}}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \right)$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$= \frac{d^2 y}{dx^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{dy}{dx} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

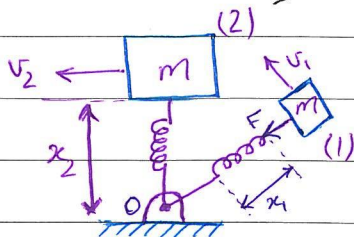
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \left(-\frac{2}{4y^2} \right) \frac{1}{2y}$$

$$y'' = \frac{-1}{4y^3} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{-\frac{1}{4y^3}}{\left(1 + \left(\frac{1}{2y} \right)^2 \right)^{3/2}}$$

$$0 + mg \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2y_{\max}}\right)^2}} = m(v_0^2 - 2gy_{\max}) \frac{-\frac{1}{4y_{\max}^3}}{\left[1 + \left(\frac{1}{2y_{\max}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$y_{\max}$

مسئله ۳۴۴: به انتهای فنری جوش شده است، سیم در حالی که فنر به اصطکاک است، سیم را به طول در آن آوریم چه برابر است این عمل متناظر می شود؟



$$x_2 > x_1$$

$$M_0 = 0 \Rightarrow \vec{x}_1 \times m\vec{v}_1 = \vec{x}_2 \times m\vec{v}_2 \Rightarrow x_1 v_1 = x_2 v_2$$

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{H}_0}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{H} = C\vec{t} \Rightarrow \vec{H}_1 = \vec{H}_2$$

$$W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

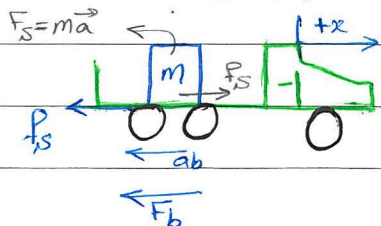
$$\frac{1}{2} m v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + p_2$$

$$\text{if } v_1 > v_2 \Rightarrow x_2 > x_1$$

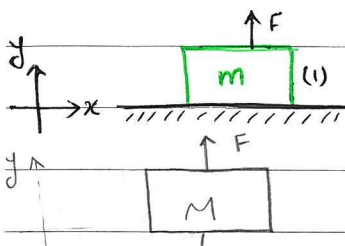
$$\frac{1}{2} m (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

$$m(v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = k \Delta x^2 > 0 \Rightarrow v_1 > v_2$$

مثال: یک قطار در حال حرکت چپ به راست می آید. ما می بینیم که قطار به سمت چپ حرکت می کند.



مثال: جرم m بر روی زمین به حالت سکون قرار دارد نیروی عمودی F با سرعت زیری بر آن وارد می‌شود. مطلوب است: ارتفاع اوج جرم m (فاصله جسم از زمین در هر لحظه است)



$$\vec{F} = (2mg - y) \vec{j}$$

$$W_{1/2} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$$

$$W_{1/2} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{y_{\max}} (2mg - y - mg) dy = 0$$

$$W_{1/2} = (mgy - \frac{y^2}{2}) \Big|_0^{y_{\max}} = 0 \Rightarrow mgy_{\max} - \frac{y_{\max}^2}{2} = 0 \Rightarrow y_{\max} (mg - \frac{y_{\max}}{2}) = 0$$

$$y_{\max} = 0 \vee y_{\max} = 2mg$$

مسئله: جرم M روی زمین به حالت سکون قرار دارد نیروی افقی F با سرعت زیری بر آن وارد می‌شود. مطلوب است: ارتفاع اوج جرم M (فاصله از افق 50°).

$$\vec{F} = t i \vec{j} + t j \vec{j}$$

$$W_{1/2} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

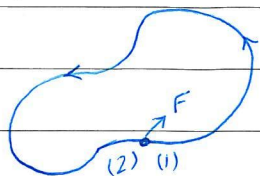
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow \int_0^t \vec{F} \cdot d\vec{t} = \int_{v_1}^{v_2} m d\vec{v}$$

$$v_2 = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t \vec{F} \cdot d\vec{t} = \frac{1}{m} \int_0^t \sqrt{t^2 + t^2} dt = \frac{1}{m} \int_0^a \sqrt{2} t dt = \frac{\sqrt{2}}{2m} t^2 \Big|_0^a$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2} a^2}{2m}$$

$$W_{1/2} = \frac{1}{2} m \left(\frac{\sqrt{2} a^2}{2m} \right)^2 = \frac{a^4}{4m}$$

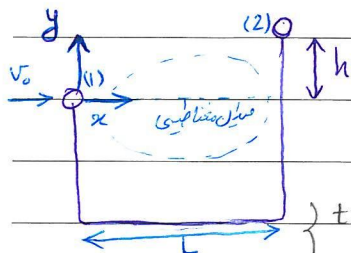
مسئله ۴: یک جسم m روی زمین در حالت سکون قرار دارد. سطحی با اصطکاک است. نیروی پتانسیل F را در این نقطه وارد کرده و حرکتی را میسر می‌دهد. در حالیکه در صورت حرکت جسم اصطکاک عبور از نقطه اولیه.



If $F = \text{potential} : \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 = \Delta_1 \omega_2 = 0$

$\omega_{1/2} = \Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = 0 = \Delta U_2 = 0 = \Delta U_2 = 0$

مسئله ۵: یک جسم m با سرعت اولیه v_0 وارد یک میدان مغناطیسی می‌شود. نیروی وارد بر آن از رابطه زیر بدست می‌آید. مطلوب است رابطه بین پارامترهای داده شده برای آنکه التیول از سوراخ بالایی عبور کند.



$F = (t - mg) \vec{j}$

$\Sigma \vec{F} = m \vec{a} \rightarrow (t - mg) \vec{j} = m (\ddot{x} \vec{i} + \ddot{y} \vec{j})$

$t - mg = m \ddot{y} \rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{m} (t - mg) \rightarrow \ddot{y} = \frac{1}{m} \left[\frac{t^2}{2} - mgt \right] + C_3$
 $\rightarrow y = \frac{1}{m} \left[\frac{t^3}{6} - mg \frac{t^2}{2} \right] + C_3 t + C_4$
 $m \ddot{x} = 0 = \Delta \ddot{x} = C_1 \rightarrow x = C_1 t + C_2$

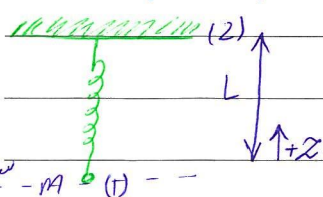
شرایط اولیه I.C
 $x_0 = 0 \rightarrow C_2 = 0$
 $x'_0 = v_0 \rightarrow C_1 = v_0$
 $t = 0 \quad y_0 = 0 \rightarrow C_4 = 0$
 $\ddot{y}_0 = 0 \rightarrow C_3 = 0$

$x = v_0 t \rightarrow t = \frac{x}{v_0}$
 $y = \frac{1}{m} \left[\frac{t^3}{6} - mg \frac{t^2}{2} \right]$
 $= \frac{1}{m} \left[\frac{x^3}{6 v_0^3} - mg \frac{x^2}{2 v_0^2} \right]$

$x = l \quad y = h$

$h = \frac{1}{m} \left[\frac{l^3}{6 v_0^3} - mg \frac{l^2}{2 v_0^2} \right]$

مسئله ۶: یک جسم m از طریق یک چوب در وضعیت یک بالایی در دمای اتاق می‌رود. یک چوب مقدار کار انجام می‌دهد.

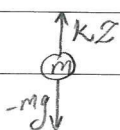


$\Sigma F_z = 0$

$k_z z - mg = 0$

$k_z z = mg$

$z = \frac{mg}{k}$

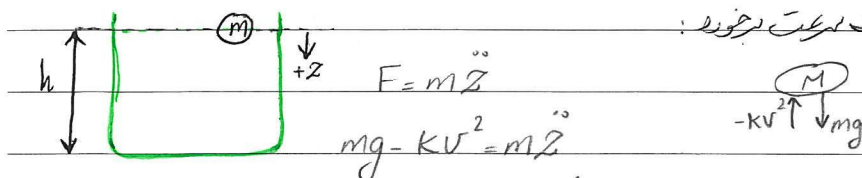


تغییرات انرژی پتانسیل k_z را در نظر بگیرید.

$\omega_{1/2} = \Delta p = p_2 - p_1 = p_2 - mg l + \frac{1}{2} k_z z^2 = mg l + \frac{1}{2} k_z \left(\frac{mg}{k} \right)^2$

تعیین: طول ایستاده M بدنه حرکت اولیه در داخل ظرف روغن به همراه شود که رابطه نیروی مقادیرت روغن $F = -kV^2$

(نیروی در کوزه روغن) مطلوب است حرکت به خورد:



$$F = m\ddot{z}$$

$$mg - kV^2 = m\ddot{z}$$

$$mg - k\dot{z}^2 = m\ddot{z} = m \frac{d\dot{z}}{dt}$$

$$mg dz - k\dot{z}^2 dz = m\ddot{z} dz = m \frac{d\dot{z}}{dt} dz = m \dot{z} d\dot{z}$$

$$dz = \frac{m\dot{z}d\dot{z}}{mg - k\dot{z}^2} \rightarrow \int dz = \int \frac{m\dot{z}d\dot{z}}{mg - k\dot{z}^2}$$

$$mg - k\dot{z}^2 = u \rightarrow \dot{z} = 0 = \Delta mg = u$$

$$-2k\dot{z}d\dot{z} = du \quad \dot{z} = V_f = \Delta mg - kV_f^2 = u$$

$$\int_0^h dz = \int_{mg}^{mg - kV_f^2} m \left(\frac{-du}{2u} \right) = \Delta h = \int_{mg}^{mg - kV_f^2} \left(\frac{-m}{2k} \right) \frac{du}{u}$$

$$h = -\frac{m}{2k} \ln \left| \frac{mg - kV_f^2}{mg} \right|$$

$$\frac{-2kh}{m} = \ln \left| \frac{mg - kV_f^2}{mg} \right|$$

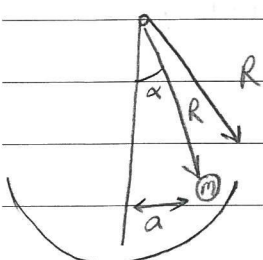
$$mg - kV_f^2 = e^{\frac{-2kh}{m}} = \Delta V_f = \pm \sqrt{\frac{mg(1 - e^{\frac{-2kh}{m}})}{k}}$$

تعیین: طول ایستاده M روی سطح گوی به شعاع R قرار دارد، اصطکاک بین گوی و سطح گوی از طریق نیروی اصطکاک است. مطلوب است جابجایی حرکت زاویه ای سطح گوی برای انداختن شست به آن ثابت بماند و از این شعاع حرکت کند

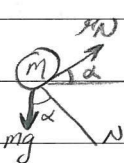
$R =$ شعاع اصطکاک

$$\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$$

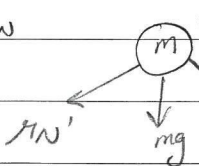
$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{a}{R} \right)$$



$$\omega_{min} = ?$$



$$\begin{cases} F_x = m\ddot{x} \rightarrow N \sin \alpha - N \cos \alpha = m a \omega_{min}^2 \\ -F_y = m\ddot{y} \rightarrow N \cos \alpha - mg + N \sin \alpha = 0 \end{cases}$$



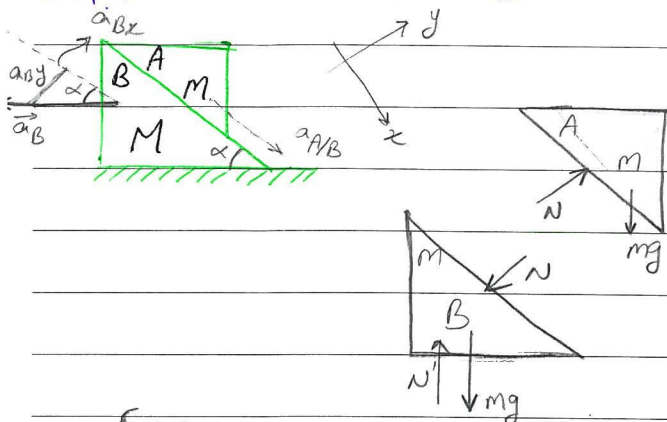
$$\begin{cases} \Sigma F_x = m\ddot{x} \rightarrow N' \cos \alpha + N' \sin \alpha = m a \omega_{max}^2 \\ \Sigma F_y = m\ddot{y} \rightarrow N' \cos \alpha - N' \sin \alpha - mg = 0 \end{cases}$$

$N, \omega_{max} \checkmark$

دینامیک ذرات

برای حل مسائل دینامیک ذرات فقط کافیست بدانیم که اگر آزاد حرکت در یک سیستم و قانون دوم نیوتون را بنویسیم تا تعداد معادلات با مجهولات برابر شود.

مثال: سیستم نشان داده شده زیر که سطح آن کاملاً صاف است از حال سکون رها می شود. مطلوب است شتاب جسم A نسبت به B و شتاب مطلق جسم B:



$$A: \begin{cases} \sum F_x = m a_{Ax} \Rightarrow mg \sin \alpha = m a_{Ax} \\ \sum F_y = m a_{Ay} \Rightarrow N - mg \cos \alpha = m a_{Ay} \end{cases}$$

$$\vec{a}_{Ax} = \vec{a}_{A/B} + \vec{a}_{Bx}$$

$$a_{Ax} = a_{A/B}$$

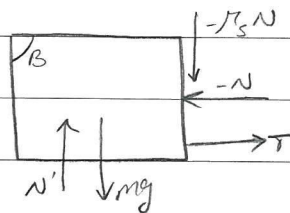
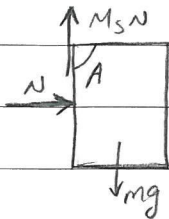
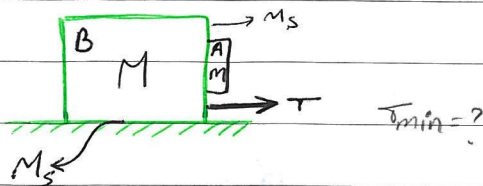
$$a_{Ax} = a_{A/B} - a_B \cos \alpha$$

حرکت نسبی یک جسم نسبت به جسم دیگر بر این اساس است که یک جسم را ثابت در نظر می گیریم و جسم دیگر را حرکت می دهیم.

$$\vec{a}_{Ay} = 0 + a_{By} = -a_B \sin \alpha$$

$$B: \begin{cases} \sum F_x = M a_B \rightarrow N \sin \alpha = M a_B \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \quad N, a_B, a_{A/B} = ?$$

قال: جسم A را با نیروی اصطکاک جسم B متصل است. مطابق با شکل نشان بدهید که جهت حرکت جسم A مثبت است. جسم B ساکن بماند (یعنی حد درجه جسم با شتاب کمترین حرکت کند)

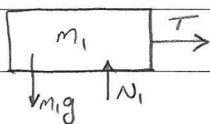
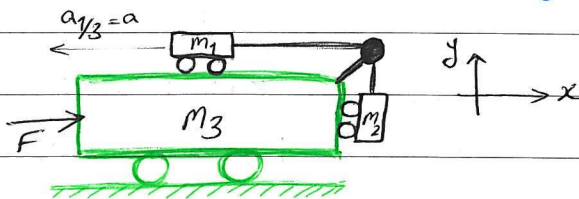


$$A: \begin{cases} \sum F_x = -ma \\ \sum F_y = m(0) \end{cases}$$

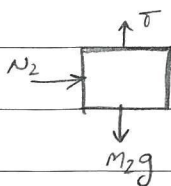
$$A: \begin{cases} N = ma \\ mg - f_s N = 0 \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \sum F_x = Ma \Rightarrow T - N = Ma \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N' - Mg - f_s N = 0 \end{cases}$$

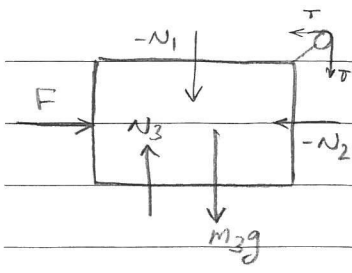
مسئله: به منظور است نیروی F برای اینکه شتاب N مثبت و N_3 دارای مقدار معادل a در جهت نشان داده شده باشد. (از اصطکاک صرف نظر کنید)



$$m_1: \begin{cases} T = m_1 a_1 \end{cases}$$



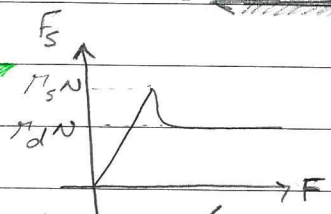
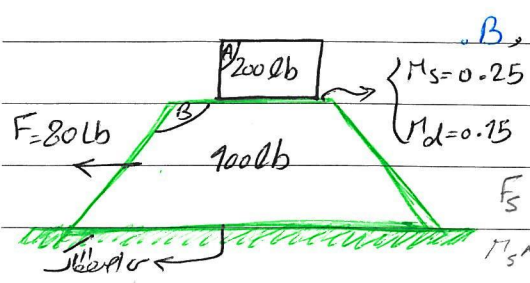
$$m_2: \begin{cases} N_2 = m_2 a_{2x} \\ T - m_2 g = m_2 a_{2y} \end{cases}$$



$$m_3 \left\{ \begin{aligned} F - N_2 - T &= m_3 a_3 \end{aligned} \right.$$

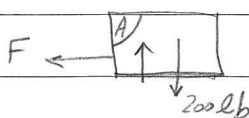
معادلات: $a_3, N_2, T, F, a_{2y}, a_{2x}, a_1$

$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= a_{2y} \\ a_{1/3} &= a_1 = a_3 = -a \\ a_{2x} &= a_3 \end{aligned} \right.$$



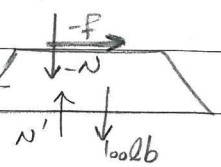
حل: هر چه استافرن می کنیم جسم A ثابت و جسم B ساکن است یعنی شتاب و سرعت در هر دو جسم برابر است با این فرض می کنیم اصطفاک \$F\$ سن جسم A و B را بدست می آوریم اگر \$F\$ کوچکتر از \$F_{max}\$ باشد یعنی در حالت سکون است و شتاب با هم حرکت می کنند اگر \$F > F_{max}\$ باشد یعنی در حالت سکون نیست و جسم A ثابت و B حرکت می کند و در دو حالت از ابتدا با هم حرکت می کنند و در هر دو اصطفاک سن این دو را می نویسیم

استافرن می کنیم A ثابت و B ساکن است:



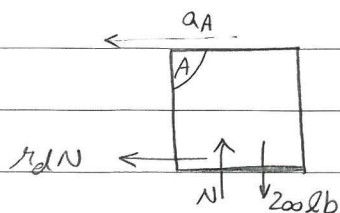
$$g = 32.2 \text{ lb/slug}$$

$$A_2 \left\{ \begin{aligned} P = m_A a &= \frac{200}{32.2} a \rightarrow a = \frac{32.2}{200} P \\ N - 200 &= 0 \rightarrow N = 200 \text{ lb} \end{aligned} \right. \quad F = 80 \text{ lb}$$



$$B_2 \left\{ \begin{aligned} 80 - F &= \frac{100}{32.2} a \rightarrow 80 - F = \frac{100}{32.2} \times \frac{32.2}{200} P \Rightarrow 80 = \frac{1}{2} P \rightarrow F = \frac{160}{3} \text{ lb} \\ N' - 100 - N &= 0 \end{aligned} \right.$$

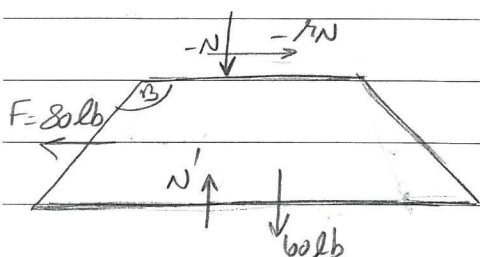
در این حالت \$P > P_{max}\$ پس $P_{max} = \mu_s N = 0.25 \times 200 = 50 \text{ lb}$



فرض اصلاح شده و جسم A نسبت به B حرکت می کند

$$A: \begin{cases} 12N - \frac{200}{32.2} a_A \\ N - 200 = 0 \rightarrow N = 200 \text{ lb} \end{cases}$$

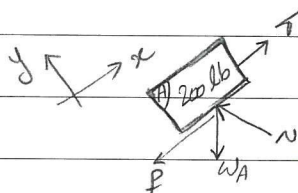
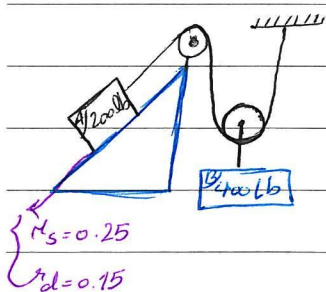
$$\rightarrow 0.15 \times 200 = \frac{200}{32.2} a_A \rightarrow a_A = 32.2 \times 0.15$$



$$B: \begin{cases} 80 - 0.15 \times 200 = \frac{100}{32.2} a_B \rightarrow 32.2 \frac{50}{100} = 16.1 \text{ ft/s}^2 \\ N' - 100 - N = 0 \end{cases}$$

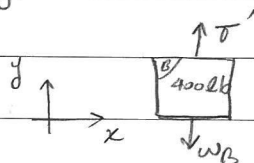
استاد: سیستم نشان داده شده را از حالت سکون رها می کنیم. مطلوب است: نتایج مطلق و نسبی A و B.

فرض اولی: سیستم ساکن است:



$$A: \begin{cases} \sum F_x = m_A a_A = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$

$$A: \begin{cases} T - P - W_A \sin 30^\circ = 0 \quad (1) \\ N - W_A \cos 30^\circ = 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$B: \begin{cases} \sum F_y = m_B a_B = 0 \\ T' - W_B = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} T & T \\ | & | \\ \circ & \\ | & | \\ -T' & \end{matrix} \quad 2T - T' = 0 \quad (4)$$

$$(4), (3): 2T = W_B = 400 \text{ lb}$$

$$T = 200 \text{ lb} \quad (5) \quad (1), (5): 200 - P - 200 \sin 30^\circ = 0 \quad P = 200(1 - \sin 30^\circ)$$

$$P = 100 \text{ lb}$$

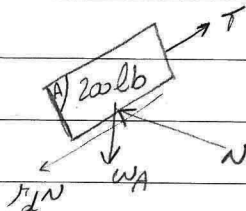
حداکثر کشش: $F_{\max} = \mu_s N$

(2) از: $N = W_A \cos 30^\circ = 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 170 \text{ lb}$

$F_{\max} = 0.25 \times 170 = 42.5 \text{ lb}$

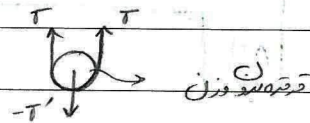
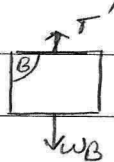
در اینجا $F > F_{\max}$

در نتیجه جسم در حال حرکت می باشد:



A: $\sum F_x = m_A a_A \rightarrow T - \frac{1}{2} N - W_A \sin 30^\circ = m_A a_A \quad (6)$

$\sum F_y = 0 \rightarrow N - W_A \cos 30^\circ = 0 \quad (7)$



$2T - T' = 0 \rightarrow T' = 2T \quad (8)$

B: $\sum F_y = m_B a_B$
 $T' - W_B = m_B a_B \quad (9)$

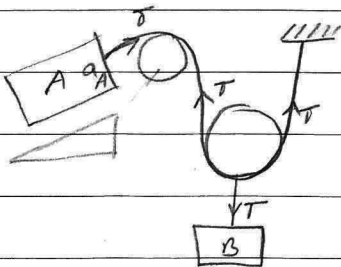
نکته: اگر از انتهای طناب یک جسم متصل داشته باشیم و بخواهیم

موصل باشد، ما دو جسم است. طناب را به دو طرف وصل می کنیم

با یک سیستم می توانیم بگوییم $a_A + n a_B = 0$

معادلات a_A, N, T, T', a_B

در اینجا: $\sum F = 0 \rightarrow a_B = 0$ $a = a_A + a_B = 0$



$a_A + 2a_B = 0 \quad (10)$

اصل بقای اندازه حرکت (اصل بقای مومنتوم) (Momentum Conservation)

اگر برآیند نیروهای خارجی برابر صفر باشد در این صورت اصل بقای اندازه حرکت برقرار است.

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v})$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

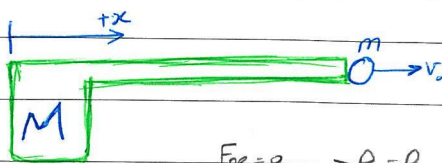
$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{اندازه حرکت (مومنتوم)}$$

$\vec{F}_0$ برآیند نیروهای خارجی

$$\text{if } \vec{F} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{p} = \text{const}$$

$$p_1 = p_2$$

مثلاً: از زمانه تعقیب برچرخ M که در حال حرکت به سمت چپ با سرعت v است، به طور افقی شلیک می‌شود. مطلوب است حرکت به سمت چپ.



$$F_{\text{ext}} = 0 \rightarrow p_1 = p_2$$

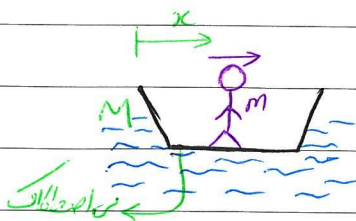
$$p = m(0) + M(0)$$

$$p = m\vec{v} + M\vec{v}'$$

در لحظه شلیک

$$0 + 0 = m\vec{v}_0 + M\vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = -\frac{m}{M} \vec{v}_0$$

مثلاً: فردی به جرم m در قایق به جرم M ایستاده است و می‌خواهد به سمت راست حرکت کند. در این لحظه فرد به سمت چپ با سرعت u شروع به حرکت می‌کند. مطلوب است حرکت قایق در لحظه شروع حرکت فرد.



$$F_{\text{ext}} = 0 \rightarrow p = \text{const} \rightarrow p_1 = p_2$$

$$\text{قبل از حرکت: } p_1 = m(0) + M(0)$$

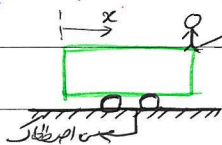
$$\text{در لحظه حرکت: } p_2 = m(u + v) + Mv$$

$$0 + 0 = m(u + v) + Mv$$

$$v = -\frac{mu}{m + M}$$

$$u = -v'v$$

شماره کلاسکالی برچشم M بر روی زمین در حال سکون است. نیروی جرم m تحت زاویه α نسبت به جهت u نسبت به کلاسکالی بر روی زمین
مطلوب است سرعت کلاسکالی در لحظه برخورد



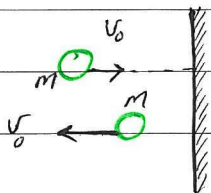
$$F_x = 0 \Rightarrow p = \text{const} \Rightarrow p_1 = p_2$$

قبل از برخورد: $p_1 = m(u) + M(u)$

بعد از برخورد: $p_2 = m(u \cos \alpha + v) + Mv$

$$0 + 0 = m(u \cos \alpha + v) + Mv \Rightarrow v = -\frac{mu \cos \alpha}{m + M}$$

مثال: توپ جرم M با سرعت افقی v_0 به دیواری برخورد می کند و با همان سرعت بر می گردد. مطلوب است نیروی ضربه وارده از دیوار به توپ



$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_0^t \vec{F} dt = \int_{v_1}^{v_2} m d\vec{v}$$

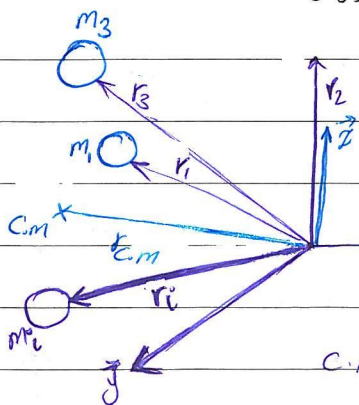
$$\int_0^t \vec{F} dt = mv_2 - mv_1 = \Delta p$$

نیروی ضربه

$$\int_0^t \vec{F} dt = m(-v_0) - mv_0 = -2mv_0$$

توضیح: طبق نیروهای دینامیکی در یک فاصله زمانی معین بر جسم اثر می کند و جسم با شتاب حرکت در می آید. چیزی که کمیتی است که در یک فاصله زمانی در آن تغییر می کند و جسم با سرعت اولیه حرکت در می آید.

به دست آوردن مختصات نقطه نسبت به دستگاه ایزوگال
Center of mass (مرکز جرم)

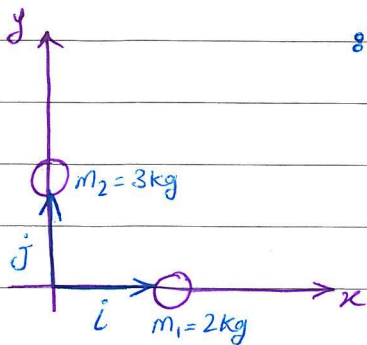


C.M = center of mass

$$\vec{R}_{C.M} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \Rightarrow \vec{v}_{C.M} = \frac{d\vec{R}_{C.M}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\vec{a}_{C.M} = \frac{d\vec{v}_{C.M}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{a}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\vec{a}_{C.M} = \frac{\sum \vec{F}_i}{\sum m_i}$$

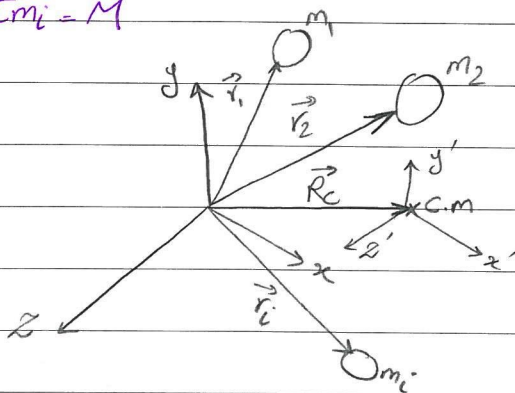


مثال: دو جسم هر یک فقط از ذرات زیرات، مطلوب است تعیین مرکز جرم آن:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum_{i=1}^2 m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^2 m_i} = \frac{2\vec{i} + 3\vec{j}}{2+3} = 0.4\vec{i} + 0.6\vec{j}$$

$$\begin{cases} \sum F_i = F_{ext} \\ \sum m_i = M \end{cases}$$

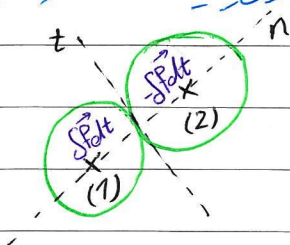
قضیه اثبات کنید: $\sum_{i=1}^N m_i \vec{p}_i = 0$
 (C.M) = موقعیت هر ذره نسبت به مرکز جرم



موقعیت مرکز جرم جدید: $R'_C = \vec{R}_C + \vec{R}_C = 0$ $R_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$

$$\vec{R}_C - \vec{R}_C = \frac{\sum m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_C)}{\sum m_i} \rightarrow \sum m_i \vec{p}_i = 0$$

برخورد اجسام نسبت به یکدیگر به منظور تحلیل مسائل مربوط به برخورد اجسام باید تحلیل نیرویی در صورت برخورد آنها در فضا
 زیر تحلیل برخورد اجسام در نظر میگیریم



- ① ابتدا نیروی هندسی همان اندازه خط المذنب دو جسم می باشد
 - ② صفتی برخورد قبل و بعد از برخورد یکسان می باشد
- اکنون برای حل مسائل برخورد دو جرمی را در نظر میگیریم:

$$1): m_1 \vec{v}_{1n} + m_2 \vec{v}_{2n} = m_1 \vec{v}'_{1n} + m_2 \vec{v}'_{2n}$$

$$2): \vec{v}_{1t} = \vec{v}'_{1t} \text{ و } \vec{v}_{2t} = \vec{v}'_{2t}$$

$$3): \mathcal{E} = \frac{\vec{v}'_{2n} - \vec{v}'_{1n}}{\vec{v}_{1n} - \vec{v}_{2n}}$$

به ضربه برخورد

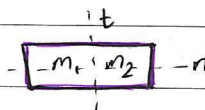
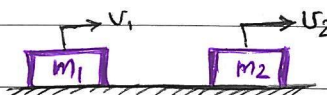
$$\Delta p = 0 \Rightarrow p = p'$$

$$\begin{cases} p = m_1 \vec{v}_{1n} + m_2 \vec{v}_{2n} \\ p' = m_1 \vec{v}'_{1n} + m_2 \vec{v}'_{2n} \end{cases}$$

n امتداد خط المماس در ذره می باشد + امتداد عمود بر آن است، جهت نامی داریم در صورتی که به یکدیگر برخورد و حرکتی برای بدو نیست
 داریم قبل از برخورد و نشان می دهیم، $\mathcal{E}$ ضربه برخورد است و در حالتی که برخورد کششانی و یا الاستیک باشد (هیچگونه اتلاف انرژی من برخورد و وجود ندارد) $\mathcal{E} = 1$ و در صورتی که برخورد الاستیک باشد (دو جسم پس از برخورد در جهت مخالف و با یک سرعت
 یکدیگر حرکت کنند) $\mathcal{E} = 0$

$$\mathcal{E} = 1 \text{ برخورد الاستیک} \quad \mathcal{E} = 0 \text{ برخورد پلاستیک} \quad \mathcal{E} < 1$$

مثال: مطلوب است حرکت اجسام زیر پس از برخورد در صورتی که بدانییم ضربه برخورد آنها $\mathcal{E}$ است.



$$\begin{cases} \text{قبل از برخورد} \\ \vec{v}_{1n} = \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{2n} = \vec{v}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{پس از برخورد} \\ \vec{v}'_{1n} = \vec{v}'_1 \\ \vec{v}'_{2n} = \vec{v}'_2 \end{cases}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

$$\mathcal{E} = \frac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \quad v'_1, v'_2 \checkmark$$

حالت خاص:

$$\text{if } \mathcal{E} = 1; m_1 = m_2; v_2 = 0, v_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow v'_1 = 0; v'_2 = v_1$$



$$E = 1 \rightarrow \frac{v_{2n}' - v_{1n}'}{v_{1n} - v_{2n}} = 1 \rightarrow v_{2n}' - v_{1n}' = v_{1n} - v_{2n} \xrightarrow{v_{2n} = 0} v_{2n}' - v_{1n}' = v_{1n} \xrightarrow{v_{1n}' = 0} v_{2n}' = v_{1n}$$

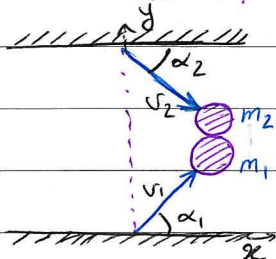
$$m_1 v_{1n}' + m_2 v_{2n}' = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} \quad v_{1n} = v_{2n}' - v_{1n}' \quad (1)$$

$$v_{1n}' + v_{2n}' = v_{1n} + v_{2n} \xrightarrow{v_{2n} = 0} v_{1n}' + v_{2n}' = v_{1n} \quad v_{1n} = v_{1n}' + v_{2n}' \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2)} \rightarrow v_{2n}' - v_{1n}' = v_{1n}' + v_{2n}' \quad 2v_{1n}' = 0 \rightarrow v_{1n}' = 0$$

if $v_{1n}' = 0 \rightarrow v_{2n}' = v_{1n}$

مثال: دو جسم مطابق شکل با یکدیگر برخورد می‌کنند. محاسبه کنید سرعت آنها پس از برخورد:

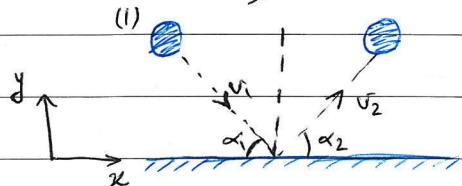


$$E = 0 \rightarrow v_{1n}' = v_{2n}' = v'$$

$$m_1 (v_1 \cos \alpha_1 \vec{i} + v_1 \sin \alpha_1 \vec{j}) + m_2 (v_2 \cos \alpha_2 \vec{i} - v_2 \sin \alpha_2 \vec{j}) = (m_1 + m_2) \vec{v}'$$

?

تمرین: برای دو جسم M مطابق شکل پس از برخورد سرعت آنها را محاسبه کنید. ضربه جداره به صورت از طرف راست:



$$x \text{ جهت: } \int F_x dt = m v_{2x}' - m v_{1x} = m v_2 \cos \alpha_2 - m v_1 \cos \alpha_1$$

$$y \text{ جهت: } \int F_y dt = m v_{2y}' - m v_{1y} = m v_2 \sin \alpha_2 - (-m v_1 \sin \alpha_1)$$

$$\int \vec{F} dt = \int F_x dt \vec{i} + \int F_y dt \vec{j}$$

$$|\int \vec{F} dt| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

تعیین: در سندی فوق کین v_2 و α_2 محاسبه و سندی اصطکاک μ و همچنین سندی برخورد ϵ در تقاطع، مقادیر α_2 و v_2 مقادیر α_2 و v_2 در برخورد ϵ سیم با زمین همواره یک جسم در زمین با انهم جابجا در دو رویه در برخورد با سیم به

$$\int P_x dt = m v_{2x} - m v_{1x} = m v_2 \cos \alpha_2 - m v_1 \cos \alpha_1$$

$$① - \int P_x dt = m v_2 \cos \alpha_2 - m v_1 \cos \alpha_1$$

$$y: \int P_y dt = m v_2 \sin \alpha_2 - (-m v_1 \sin \alpha_1)$$

$$② \int v dt = m v_2 \sin \alpha_2 + m v_1 \sin \alpha_1$$

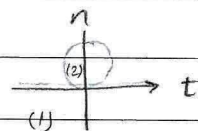
$$② \text{ و } ①: -1(m v_2 \sin \alpha_2 + m v_1 \sin \alpha_1) = m v_2 \cos \alpha_2 - m v_1 \cos \alpha_1$$

③

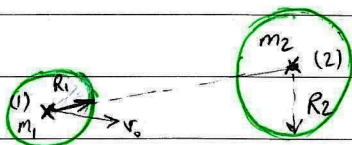
$$④ \epsilon = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} = \frac{v_2 \sin \alpha_2 - 0}{0 - (-v_1 \sin \alpha_1)}$$

مقادیر α_2 و v_2

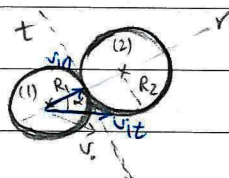
از روابط ③ و ④ مقادیر α_2 و v_2



تعیین: در شغل متقابل سندی برخورد ϵ در تقاطع، مقادیر α_2 و v_2 محاسبه و سندی اصطکاک μ و همچنین سندی برخورد ϵ در تقاطع، مقادیر α_2 و v_2 مقادیر α_2 و v_2 در برخورد ϵ سیم با زمین همواره یک جسم در زمین با انهم جابجا در دو رویه در برخورد با سیم به



$$\alpha = \sin^{-1} \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$$



$$v'_{2n} = v'_{2t} = 0$$

$$v'_{1t} = -v_0 \sin \alpha$$

$$v'_{1n} = v_0 \cos \alpha$$

$$m_1 \vec{v}'_{1n} + m_2 \vec{v}'_{2n} = m_1 \vec{v}'_{1n} + m_2 \vec{v}'_{2n} \rightarrow m_1 v_0 \cos \alpha + m_2 (0) = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n} \quad ①$$

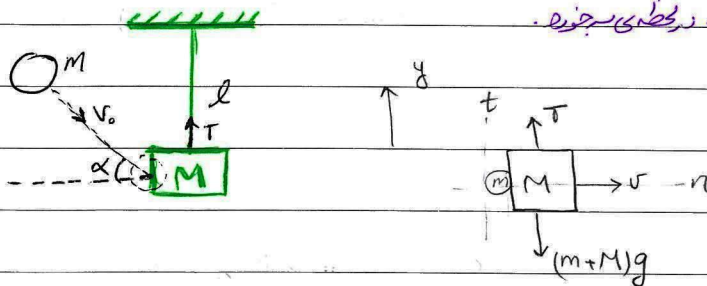
$$\begin{cases} v'_{1t} = v'_{2t} \\ v'_{2t} = v'_{1t} \end{cases} \quad \epsilon = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}} \rightarrow \epsilon = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_0 \cos \alpha - 0} \quad (2)$$

$$\begin{cases} V'_{1t} = -v_0 \sin \alpha & (3) \\ V'_{2t} = 0 & (4) \end{cases}$$

$$t=0 \rightarrow v_2=0$$

$$\text{حفظیات: } v'_{2n}, v'_{1n}, v'_{2t}, v'_{1t}$$

مسئله: اگر شتری در ابتدا ساکن است، قطره‌ای جرم m تحت زاویه α نسبت به افق مطابق شکل با کوبش برخورد می‌کند. حرکت مورد نیاز است. شتری که شش قطره در محلی برخورد.



$$\Sigma F = may$$

$$T - (m+M)g = (m+M) \frac{v^2}{l}$$

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n}$$

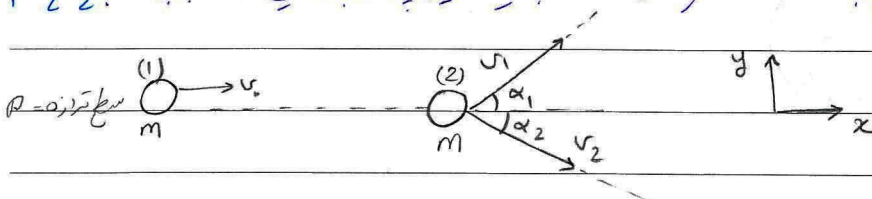
$$mv_0 \cos \alpha + m(0) = (m+M)^2 v$$

$$v = \frac{mv_0 \cos \alpha}{m+M} \quad (2)$$

$$T = (m+M)g + \frac{(m+M)}{l} \left(\frac{mv_0 \cos \alpha}{m+M} \right)^2$$

$$T = (m+M) \left[g + \frac{m^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{l(m+M)} \right]$$

مسئله: دو جسم مطابق شکل زیر با یکدیگر برخورد می‌کنند. ثابت کنید نامای پس از برخورد این دو جسم برابر است با $\alpha = \alpha_1 - \frac{\pi^2}{2}$.



$x:$

$$m_1 v_0 + m_2(0) = m v_1 \cos \alpha_1 + m v_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

$y:$

$$m_1(0) + m_2(0) = m v_1 \sin \alpha_1 - m v_2 \sin \alpha_2 \quad (2)$$

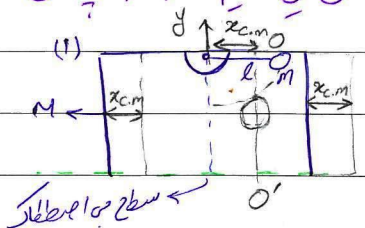
$$E \rightarrow 1 \rightarrow W_{n.c} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + P_1^{\text{rot}} = K_2 + P_2$$

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 \quad (3)$$

توجه: 1) از رابطه 1 و 2 سرعت آهسته و در 3) قرار می‌دهیم

سیستم زیر از حال سکون در می‌آید، مطلوب است محاسبی تغییر مکان این سیستم هنگام عبور پهنای از وضعیت نام.



$$\sum F_x = (m+M)a_{(C.M.)x} = 0 \Rightarrow a_{(C.M.)x} = 0$$

اگر اتاق و پهنای را یک‌دسته در نظر بگیریم، با توجه به اینکه زمین به اصطلاح فرضی شده است، برای تغییر دای و وارده بر سیستم در راستای x برابر با صفر می‌باشد.

$$a_{(C.M.)x} = \frac{d v_{(C.M.)x}}{dt} = 0 \Rightarrow v_{(C.M.)x} = \text{const} = 0$$

$$v_{(C.M.)x} = \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow x_{cm} = \text{const}$$

راستای سکون تغییر نمی‌کند

$$x_{cm} = \frac{m x_1 + M x_2}{m+M}$$

$$x_{cm} = \frac{m l + M(0)}{m+M}$$

$$x_{cm} = \frac{m l}{m+M}$$

انرژی جنبشی ذرات

انرژی جنبشی ذرات از 2 رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\left. \begin{array}{l} m_i = \text{جرم هر ذره} \\ v_i = \text{سرعت مطلق هر ذره} \\ M = \text{جرم کل سیستم} \\ v_c = \text{سرعت مرکز جرم سیستم} \end{array} \right\}$$

$$K_E = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (1)$$

$$K_E = \frac{1}{2} M v_c^2 + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad (2)$$

از رابطه 1) می‌توان استفاده کرد که سرعت مطلق ذرات معلوم باشد.

از رابطه 2) می‌توان استفاده کرد که سرعت مرکز جرم مشخص باشد.

تشریح دستگاه‌ها

$$\vec{H}_O = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\vec{H}_A = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) \quad \text{برای نقطه ثابت به مرکز جرم} \quad \text{نقطه ثابت } O$$

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$$

$$\vec{M}_C = \frac{d\vec{H}_C}{dt}$$

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{H}_A}{dt} = \vec{v}_A \times \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

$$\vec{H}_A = \vec{H}_C + \vec{R}_C \times \vec{M}_C$$

در روابط فوق :

$\vec{H}_O$ عبارت است از تکمیل دستگاه‌ها نسبت به نقطه ثابت O .

$\vec{H}_A$ عبارت است از تکمیل دستگاه‌ها نسبت به نقطه متحرک A .

$\vec{H}_C$ عبارت است از تکمیل دستگاه‌ها نسبت به مرکز جرم.

$\vec{M}_O$ عبارت است از تکمیل نیروهای خارجی وارده بر دستگاه‌ها نسبت به نقطه ثابت O .

$\vec{M}_A$ عبارت است از تکمیل نیروهای خارجی وارده بر دستگاه‌ها نسبت به نقطه متحرک A .

$\vec{M}_C$ عبارت است از تکمیل نیروهای خارجی وارده بر دستگاه‌ها نسبت به مرکز جرم.

$\vec{R}_C$ عبارت است از بردار موقعیت ذره A نسبت به نقطه متحرک C و یا مرکز جرم.

$\vec{v}_A$ عبارت است از سرعت ذره A نسبت به نقطه متحرک C و یا مرکز جرم.

$\vec{r}_i$ عبارت است از ثابت مطلق نقطه متحرک A .

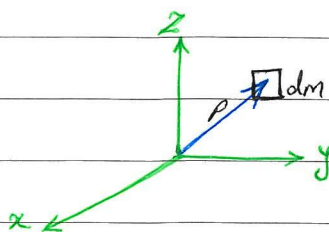
$\vec{R}_C$ عبارت است از بردار موقعیت C (مرکز جرم) نسبت به نقطه متحرک A .

$\vec{R}_C$ عبارت است از بردار سرعت C نسبت به نقطه متحرک A .

M : جرم کل سیستم

((در اینجا جسم صلب))

تغییرات در دینامیک جسم صلب، جسم است که فاصله نقاط آن نسبت به هم تغییر نکند و حرکت و شتابی صلبی بین نقاط



برای محاسبه باریک، در بر روی باریک چرخش جسم صلب در نظر گرفته می شود

$$d\vec{H} = \vec{r} \times dm \vec{\omega}$$

$$d\vec{H} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times dm (\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) = \underbrace{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}_{=0} dm$$

پ: سرعت جسم صلب در اثر چرخش

اگر از طول اشغال کنیم:

$$\vec{H} = \int d\vec{H} = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

گ: اینرسی نسبت به نقطه متحرک A
سرعت مرکز جرم

$$I_{xx} = \iint (y^2 + z^2) dm; \quad I_{xy} = \iint xy dm$$

$$I_{yy} = \iint (x^2 + z^2) dm; \quad I_{xz} = \iint xz dm$$

$$I_{zz} = \iint (x^2 + y^2) dm; \quad I_{yz} = \iint yz dm$$

در محاسبات بالا A نقطه ای است بر روی جسم و باید در محاسبه اش فرض کنیم و فواصل آن از مراکز نقاط دیگر جسم صلب ثابت است

است

تاثیر اولیه

$$\vec{M}_A = \left(\frac{d\vec{H}}{dt} \right)_{xyz} = (\vec{H}^0)_{xyz} + \vec{\omega} \times (\vec{H})_{xyz}$$

$$\begin{aligned} & \vec{M}_A = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} = (I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\vec{i} \\ & + (I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\vec{j} \\ & + (I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\vec{k} \\ & + (\omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}) \times [(I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z)\vec{i} + (I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z)\vec{j} \\ & + (I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z)\vec{k}] \end{aligned}$$

اگر دستگاه مختصات متحرک منطبق بر دستگاه مختصات اصلی باشد در این صورت :

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

$$M_x = I_{xx} \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy})$$

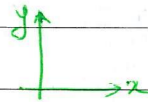
$$M_y = I_{yy} \dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x (I_{xx} - I_{zz})$$

$$M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx})$$

اگر حرکت به طور مثال در صفحه xy باشد :

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

$$M_z = I_{zz} \dot{\omega}_z \Rightarrow \boxed{M = I \alpha} \quad \text{قانون ادیسر}$$



نقطه A که رابطه بین نیروها نسبت به آن نوشته می شود می تواند یکی از نقاط زیر باشد :

① نقطه ثابت - ثابت نگه داشتن گاه های منصف

② مرکز جرم

③ نقطه ای که ابعاد ثابت آن از مرکز جرم باشد

به طور کلی از رابطه قانون ادیسر به حوله قانون دوم نیوتون برای تحلیل دینامیک جسم صلب استفاده می شود.

$$\vec{F} = m \vec{a}_C \quad \vec{M} = I \alpha$$

توجه : انرژی جنبش جسم صلب از رابطه زیر بدست می آید :

$$K_E = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

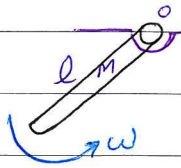
$$P = mg z_C$$

حجم فاصله مرکز جرم تا سطح تراز پتانسیل (سطح)

$$H_C = I_C \omega$$

سرچشمه جسم صلب نسبت به مرکز جرم

مثال: یک جسم به جرم M و طول l حول نقطه ثابت O می‌گردد. مطلوب است انرژی جنبشی آن را



$$K_E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\Rightarrow \vec{M} = I \vec{\alpha}$$

$$K_E = \frac{1}{2} \int dm (v)^2$$

$$K_E = \frac{1}{2} \int \frac{m}{l} dx (x\omega)^2$$

$$m_i = dm = \frac{m}{l} dx \quad \leftarrow \quad dx = \frac{dm}{\frac{m}{l}}$$

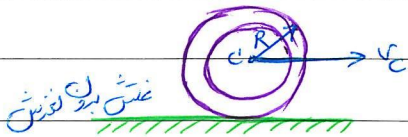
$$K_E = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \omega^2 \int_0^l x^2 dx$$

$$K_E = \frac{1}{2l} m \omega^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^l$$

$$K_E = \frac{1}{2l} m \omega^2 \frac{l^3}{3}$$

$$K_E = \frac{1}{6} m l^2 \omega^2$$

مثال: یک دایره به جرم M و شعاع R روی زمین غلتش می‌کند. مطلوب است انرژی جنبشی آن را:



$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2$$

$$\omega = \frac{v_c}{R}$$

$$K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \underbrace{(MR^2)}_{I_c} \left(\frac{v_c}{R} \right)^2$$

$$I_c = \iint r^2 dA$$

$$I_c = \iint \rho r^2 dA$$

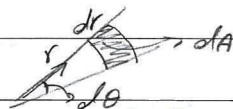
$$I_c = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho r^2 (R d\theta)$$

$$I_c = 2\pi \rho R^3 = MR^2$$

$$\rho \pi R^2 = m$$

$$m = \rho (\pi R^2)$$

$$I_c = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho r^2 (r dr d\theta) = \frac{\rho R^4}{4} (2\pi) = \frac{1}{2} m R^2$$



تخمین دهنده برای سرعت

در سطح مشاعی از دوزده با جرم این زیرایست. مطلوب است محاسبه انرژی جنبشی در نقطه محل تعادلات 0:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2 \text{ kg} & \vec{r}_1 &= \vec{i} & \vec{v}_1 &= \vec{j} \\ m_2 &= 2 \text{ kg} & \vec{r}_2 &= \vec{k} & \vec{v}_2 &= \vec{i} \end{aligned}$$

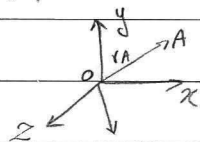
$$H_0 = \sum_{i=1}^2 (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = \vec{i} \times 2\vec{j} + \vec{k} \times (2\vec{i}) = 2\vec{k} + 2\vec{j}$$

در نقطه ای فوق سرعتی داشته باشد. به نقطه مرکز A با جرم و سرعت و حرکت زیر بیست آورده:

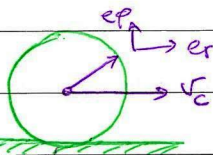
$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= \vec{i} + \vec{j} \\ \vec{v}_A &= -\vec{j} + \vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= \vec{r}_1 - \vec{r}_A = \vec{i} - (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{j} \\ \vec{v}_1' &= \vec{v}_1 - \vec{v}_A = \vec{j} - (-\vec{j} + \vec{k}) = 2\vec{j} - \vec{k} \\ \vec{r}_2' &= \vec{r}_2 - \vec{r}_A = \vec{k} - (\vec{i} + \vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v}_2' &= \vec{v}_2 - \vec{v}_A = \vec{i} - (-\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{aligned}$$

$$H_A = \sum_{i=1}^2 (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$



مثال: دو کروی زیر بیست و دو جرم و این در زمین غلتش به لغزش دارد مطلوب است سرعت آن در محل در زمان 0:



در نقطه بیست و دو

$$dH_c = \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$H_c = \int \vec{r} \times \rho \vec{v} dV$$

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \left(-\frac{v_c}{a} \vec{e}_z\right) \times r \vec{e}_r$$

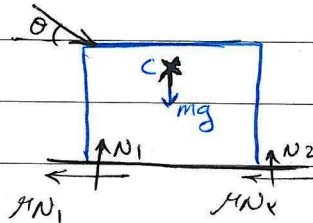
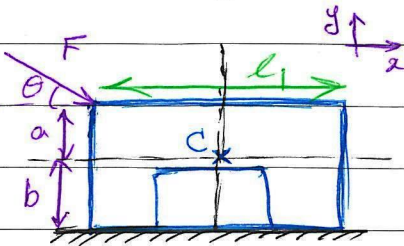
$$\vec{v} = -\frac{r v_c}{a} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{H}_c = \frac{m}{4\pi a^2} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^a r \vec{e}_r \times \left(-\frac{r v_c}{a} \vec{e}_\phi\right) r dr d\phi dz m$$

$$m = \rho V \rightarrow \rho = \frac{m}{V_{\text{part}}}$$

$$\vec{H}_C = -\frac{1}{r} m v_0 a \vec{e}_\theta$$

حسب نشان داده شده یی مقدار این سطح این حرکت کند، مطلوب است نشان بزرگترین:

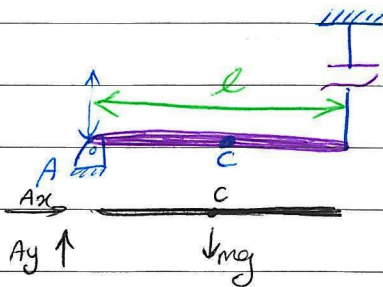


$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_C \rightarrow F \cos \theta \vec{e}_x - F \sin \theta \vec{e}_y - mg \vec{e}_y + (N_1 + N_2) \vec{e}_y - (\mu N_1 + \mu N_2) \vec{e}_x = m \vec{a}_C$$

$$\sum \vec{M}_C = I_C \vec{\alpha} \rightarrow -F \cos \theta a + F \sin \theta \frac{l}{r} + N_1 \frac{l}{r} - \mu N_1 b - N_2 \frac{l}{r} - \mu N_2 b = 0$$

مطلوبات: $N_1, N_2, a_C = ?$

مسئله ۲: سیم نشان داده شده یی در وضعی قائم است. یک بار هم سیم را بایست که در نقطه A در خط پاره شدن طناب.

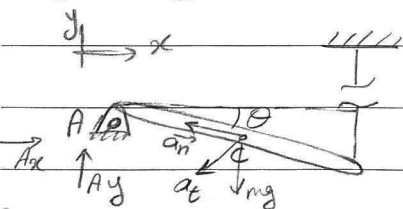


$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_C \rightarrow A_x \vec{e}_x + (A_y - mg) \vec{e}_y = m \left(-\frac{l}{r} \alpha \vec{e}_y \right)$$

$$\sum M_A = I_A \vec{\alpha} \rightarrow -mg \frac{l}{r} \vec{k} = \frac{1}{3} m l^2 (-\alpha \vec{k})$$

مطلوبات: A_x, A_y, α

مسئله ۳: سیم نشان داده شده یی پس از پاره شدن طناب با اندازه theta دوران کرده است. مطلوب است محاسبه سرعت و شتاب مرکز جرم در این لحظه.



$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_C \rightarrow A_x \vec{e}_x + (A_y - mg) \vec{e}_y = m \left[\frac{l}{r} \omega^2 (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) + \frac{l}{r} \alpha (-\sin \theta \vec{e}_x - \cos \theta \vec{e}_y) \right]$$

$$\odot \sum M_A = I_A \ddot{\alpha} \Rightarrow -mg \frac{\ell}{r} \cos \theta \vec{k} = \frac{1}{r} m \ell^r (-\ddot{\theta} \vec{k}) \Rightarrow mg \frac{\ell}{r} \cos \theta = \frac{1}{r} m \ell^r \ddot{\theta} \quad (1)$$

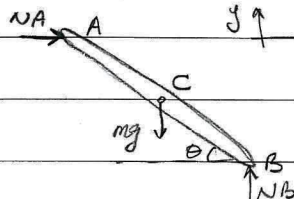
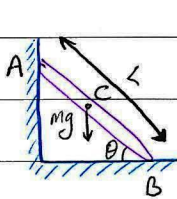
مغضلات: $A_x, A_y, \theta, \dot{\theta}$

پس از ضرب در $d\theta$ و انتگرال گیری از (2) به (1) می‌رسیم: $\int mg \frac{\ell}{r} \cos \theta d\theta = \frac{1}{r} m \ell^r \ddot{\theta} d\theta = \frac{1}{r} m \ell^r \frac{d\dot{\theta}}{dt} d\theta$

$$mg \frac{\ell}{r} \sin \theta = \frac{1}{r} m \ell^r \dot{\theta}^2 + C \quad (1')$$

در $t=0$: $\theta = \theta^0 = 0 \rightarrow C=0$

مثال: سیستم شغل زیر در حالت تعادل، مطابق این مشابیه زیر این مسئله در محله هانی (از نیروی اصطکاک صرف نظر شود)



$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_C \Rightarrow N_A \vec{i} + (N_B - mg) \vec{j} = m \vec{a}_C$$

$$\textcircled{2} N_A \vec{i} + (N_B - mg) \vec{j} = m(a_{Cx} \vec{i} + a_{Cy} \vec{j})$$

$$\textcircled{1} \odot \sum \vec{M}_C = I_C \ddot{\alpha} \Rightarrow (N_B \frac{\ell}{2} \cos \theta - N_A \frac{\ell}{2} \sin \theta) \vec{k} = \frac{1}{12} m \ell^2 (\ddot{\alpha} \vec{k})$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{CA})$$

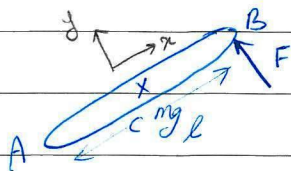
در نظر داریم: $\omega = 0 \Rightarrow \vec{a}_A = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CA}$

$$\textcircled{2} -a_A \vec{j} = a_{Cx} \vec{i} + a_{Cy} \vec{j} + \alpha \vec{k} \times (-\frac{\ell}{2} \cos \theta \vec{i} + \frac{\ell}{2} \sin \theta \vec{j})$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CB}$$

$$\textcircled{2} a_B \vec{i} = a_{Cx} \vec{i} + a_{Cy} \vec{j} + \alpha \vec{k} \times (\frac{\ell}{2} \cos \theta \vec{i} - \frac{\ell}{2} \sin \theta \vec{j})$$

مثال: سیستمی در سطح افقی می‌باشد. نیروی عمودی F بر انتهای B وارد می‌شود. مطلوب است شتاب نقطه A .

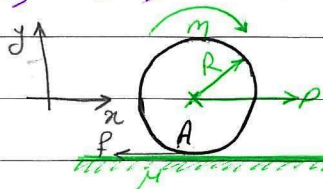


$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_c \Rightarrow F \vec{j} = m \vec{a}_c \Rightarrow \vec{a}_c = \frac{F}{m} \vec{j}$$

$$\sum \vec{M}_C = I_C \vec{\alpha} \Rightarrow F \frac{l}{2} \vec{k} - \frac{1}{12} m l^2 (\alpha \vec{k}) \Rightarrow \alpha = \frac{F l / 2}{\frac{1}{12} m l^2} = \frac{6F}{m l}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_c + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{CB} = \frac{F}{m} \vec{j} + \left(\frac{6F}{m l} \vec{k} \right) \times \left(\frac{l}{2} \vec{i} \right) = \frac{F}{m} \vec{j} + 3 \frac{F}{m} \vec{j} = \frac{4F}{m} \vec{j}$$

مثال: یک چرخ دایره‌ای به جرم m و شعاع R بر روی P حرکت می‌کند. شتاب مرکز A را پیدا کنید. فرض کنید چرخ بدون لغزش می‌چرخد.



$$F_x = m a_c \Rightarrow P \vec{i} - f \vec{i} = m \vec{a}_c$$

$$a_c = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{AC} = (-\alpha \vec{k}) \times R \vec{j} = R \alpha \vec{i}$$

$$P - f = m R \alpha \quad \sum \vec{M}_C = I_C \vec{\alpha} \Rightarrow -f R \vec{k} = \frac{1}{2} m R^2 (-\alpha \vec{k}) \quad (2)$$

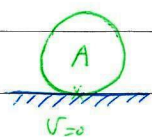
if $F < \mu N$ → فرض کنید چرخ بدون لغزش می‌چرخد. در این حالت $f = P$ و از (1) و (2) می‌توانیم پیدا کنیم.

else if $F > \mu N$ → فرض کنید چرخ با لغزش می‌چرخد. در این حالت $f = \mu N$ و از (1) و (2) می‌توانیم پیدا کنیم.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg$$

$$F_x = m a_c \Rightarrow (P - \mu N) \vec{i} = m \vec{a}_c \Rightarrow a_c = \frac{P - \mu mg}{m} \vec{i} \Rightarrow \vec{a}_c = \frac{P - \mu mg}{m} \vec{i}$$

توضیح: دلیل اصل غلتش بدون لغزش نیروی اصطکاکی است. با توجه اینکه حرکت در نقطه‌ای غلتش بدون لغزش صورت می‌گیرد. کار نیروی اصطکاکی در این حالت صفر می‌باشد و می‌توان اصل تبدیلی انرژی مکانیکی را برای غلتش بدون لغزش نوشت.



$$W_{nc} = P t$$

$$P = \frac{dW_{nc}}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F v$$

$$v = 0 \Rightarrow P = 0 \Rightarrow W_{nc} = 0$$

مثال: یک توپ به جرم m و شعاع R روی سطح شیبی غلتش بدون لغزش دارد. شتاب مرکز A را پیدا کنید. فرض کنید چرخ بدون لغزش می‌چرخد.



$$W_{nc} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + P_1 = K_2 + P_2$$

$$0 + mg l \sin \alpha = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + 0$$

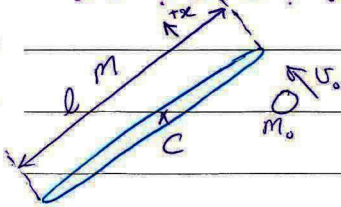
$$K_1 = 0, P_2 = 0$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC} = 0 + (-\omega \vec{k}) \times (R \sin(90-\alpha) \vec{i} + R \cos(90-\alpha) \vec{j})$$

$$|\vec{v}_C| = R \omega \quad mg l \sin \alpha = \frac{1}{2} m (R \omega)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m R^2 \right) \omega^2 = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4 g l}{3 R^2} \sin \alpha}$$

مثال: یک میله یی به جرم m و طول l روی سطح افقی در اصطکاک است. جرم m به حرکت v_0 به طرف چپ می آید. به طور عادی به انتهای میله برخورد می کند. به طور عادی به حرکت v_0 از چپ می آید.



$$m_0 v_0 = \int P dt = m v' + m v_c \quad (1)$$

$$m_0 v_0 = \int P dt = m v_c = 0 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow m v_0 - m v' = m v_c \quad (3)$$

$$\Delta E = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 \Rightarrow K_1 + P_1 = K_2 + P_2$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 ; K_2 = \frac{1}{2} m v'^2 + \left(\frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \right)$$

$$\left[\frac{1}{2} m v_0^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_c \omega^2 \right] \quad (4)$$

$$\vec{M}_c = \frac{dH_c}{dt} \Rightarrow \vec{M}_c dt = dH_c$$

$$\int_0^t \vec{M}_c dt = \frac{dH_c}{dt} = 0 \quad (5) ; \quad \int_0^t \vec{M}_c dt = \frac{l}{2} \left(\int_0^t P dt \right) \vec{e}_z \quad (6)$$

$$(6), (5) \rightarrow \frac{l}{2} \left(\int_0^t P dt \right) \vec{e}_z = I_c \omega \vec{e}_z \quad (7)$$

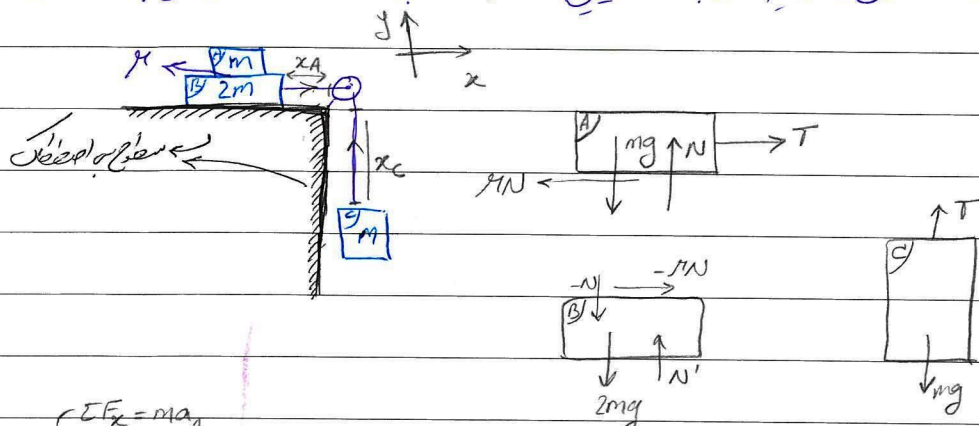
$$(7), (2) \rightarrow \frac{l}{2} m v_c = I_c \omega \quad (8)$$

$$(8), (3) \rightarrow v_0 \text{ و } v' \text{ به سمت چپ می آیند}$$

homework: در فکرتون فرض کنید برخورد کاملاً الاستیک باشد و در این حالت حرکت زوای این میله را بیابید.

اتلاف انرژی داریم و با جزی اصل بقا و انرژی کاملاً حفظ می شود، در اینجا با هم حرکت طولی است، در نقطه برخورد با هم حرکت میله ها به موازین جاذبه بین اصل بقا و انرژی می شود.

مسئله ۳ سیستم زیر از حالات سکون رها می‌شود. مطلوب است تعیین شتاب اجسام A، B و C (طبق سطحی اصطکاک نزن شود)



$$A: \begin{cases} \sum F_x = ma_A \\ T - 2N = ma_A \quad (1) \\ \sum F_y = 0 \rightarrow N - mg = 0 \quad (2) \end{cases}$$

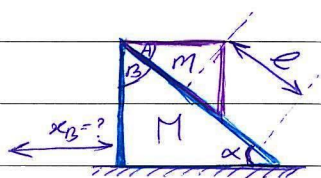
تجهیزات: T, N, a_A, a_B, a_C

$$B: \begin{cases} 2N = 2ma_B \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_A + \vec{x}_C &= l = \text{const} \\ \vec{x}_A + \vec{x}_C &= 0 \\ \ddot{x}_A + \ddot{x}_C &= 0 \rightarrow |a_A| = |a_C| \quad (5) \end{aligned}$$

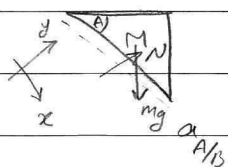
$$C: \begin{cases} mg - T = ma_C \quad (4) \end{cases}$$

مسئله ۴ سیستم زیر از حالات سکون رها می‌شود. وقتی جسم A با اندازه α روی جسم B پائین بیاید جسم B روی سطح اصطکاک نزن حرکت می‌کند. (از اصطکاک در سطح صرف نظر شود)



$$\begin{cases} v = \frac{dx}{dt}, a = \frac{d^2x}{dt^2} \\ a = \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2 \\ x = \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

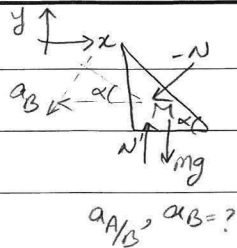
$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_{A/B}t^2 \\ x_B = \frac{1}{2}a_Bt^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_B}{x_{A/B}} = \frac{a_B}{a_{A/B}}$$



$$A: \begin{cases} \sum F_x = Ma_{Ax} \\ \sum F_y = Ma_{Ay} \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \sum F_x = Ma_B \\ N \cos(90 - \alpha) = Ma_B \end{cases}$$

$$N \sin \alpha = Ma_B \quad (1)$$



$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_A - \vec{a}_B$$

$$\vec{a}_{Ax} = \vec{a}_{A/Bx} + \vec{a}_{Bx}$$

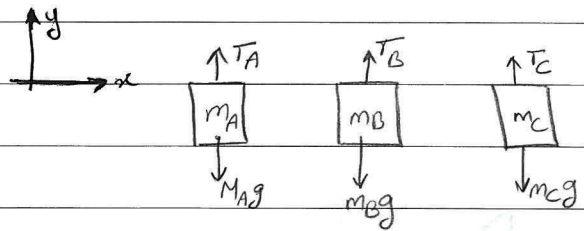
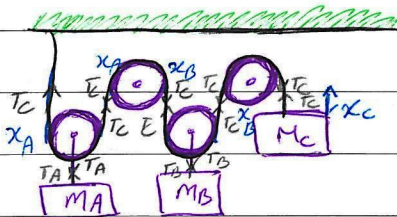
$$\vec{a}_{Ay} = \vec{a}_{A/By} + \vec{a}_{By}$$

$$\vec{a}_{Ax} = a_{A/B} + (-a_B \cos \alpha) = a_{A/B} - a_B \cos \alpha$$

$$\vec{a}_{Ay} = 0 + (-a_B \sin \alpha) = -a_B \sin \alpha$$

$$A: \begin{cases} \sum F_x = m_A a_{Ax} \Rightarrow mg \sin \alpha = m (a_{A/B} - a_B \cos \alpha) \quad (2) \\ \sum F_y = m_A a_{Ay} \Rightarrow 10 - mg \cos \alpha = m (-a_B \sin \alpha) \quad (3) \end{cases}$$

استفاده: سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم، منظور از این است که در ابتدا C، B، A



$$① \quad -T_A + 2T_C = 0$$

$$⑤ \quad C: \quad T_C - m_C g = m_C a_C$$

$$② \quad -T_B + 2T_C = 0$$

$$\text{شرایط: } T_A, T_B, T_C \rightarrow a_A, a_B, a_C$$

$$③ \quad A: \quad m_A g - T_A = m_A a_A$$

$$④ \quad B: \quad m_B g - T_B = m_B a_B$$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \text{const}$

$$\frac{x}{C} + 2\frac{x}{B} + 2\frac{x}{A} = 1$$

$$\rightarrow x_C' + 2x_B' + 2x_A' = 0$$

~~$$\rightarrow x'' + 2x' + 2x = 0$$~~

$$a_c + 2a_B + 2a_A = 0 \rightarrow a_c = 2(a_A + a_B) \quad (6)$$

$$\textcircled{3} \text{ 22 } A: m_{A}g - \frac{2T}{C} = m_{A}a \rightarrow m_{A}g - \frac{2m_{C}}{C}(g + 2(a_{A} + a_{B})) = m_{A}a_{A}$$

$$B: m_{B,D} g - 2 \frac{m}{C} = m_{B,B} a \longrightarrow m_{B,B} g - 2 \frac{m}{C} (g + 2(a_A + a_B)) = m_{B,B} a_B$$

$$C_g T_C - m_C g = m_C a_C = m_C 2(a_A + a_B) \rightarrow T_C = m_C (g + 2(a_A + a_B))$$

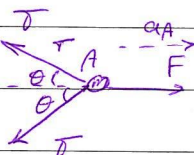
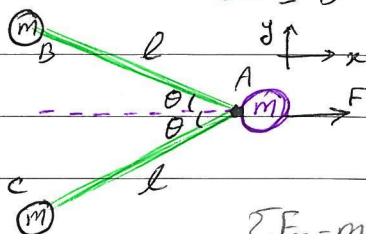
$$\{ m_A g - 2m_C g = (4m_C + m_A) a_A + 4m_C a_B$$

$$-m_B g - 2m_C g = (4m_C + m_B) a_B + 4m_C a_A$$

مضل ذوات A, B, C توسط دو ضلع و طاق شکل به هم متصل شده اند. نیم به ابعاط افقین هر شش و نقطه A به صورت عمود

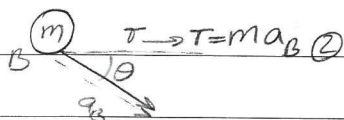
هر باشد و برای افعی F و حریم A قرار می شود. مطلوب است نشان دهیم A در خطی افعال می رود.

(سید محمد رفیع افشار است)



$\vec{v}_1, T, a_A, a_B$

$$\sum F_x = ma_A \rightarrow F - 2T \cos \theta = ma_A \quad (1)$$



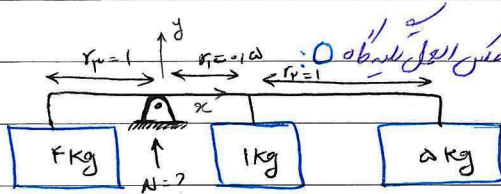
$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \alpha \times \vec{r}_{BA}$$

$$a_A \vec{i} = a_B (\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}) + \alpha k \times (l \cos\theta \vec{i} - l \sin\theta \vec{j})$$

$$a_A = a_B \cos\theta + l \alpha \sin\theta \quad (3)$$

$$-a_B \sin\theta + \alpha l \cos\theta = 0 \quad (4)$$

نکته: حلیم (۲۷)



اینجا مکاترینیت (اگر جواب مجلات نزنیم)

$$\sum F_y = m \vec{a}_c \Rightarrow [N - (5+1+F)g] \vec{j} = (5+1+5) \vec{a}_c$$

$$(N - 10g) \vec{j} = 10 \vec{a}_c \quad (1)$$

$$\vec{R}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

$$\vec{a}_c = \alpha \times \vec{R}_c \quad (2)$$

$$\vec{R}_c = \frac{1 \times 10 \vec{i} + 5 \times 1 \vec{i} - F \times 1 \vec{i}}{5+1+5} = \frac{115}{10} \vec{i} \quad (3)$$

جوابی (3) در (2) و

$$\vec{a}_c = (-\alpha k) \times \left(\frac{115}{10} \vec{i} \right) = -\frac{115\alpha}{10} \vec{j} \quad (4)$$

قرار دادن 4 در 1 و

$$(N - 10g) \vec{j} = 10 \left(-\frac{115\alpha}{10} \right) \vec{j}$$

$$N - 10g = -115\alpha \quad (5)$$

$$\sum \vec{M} \frac{d\vec{H}_0}{dt}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 + \vec{r}_3 \times m_3 \vec{v}_3)$$

$$\rightarrow 10 \vec{i} \times (-g \vec{j}) + 1 \vec{i} \times (-5g \vec{j}) - 1 \vec{i} \times (-Fg \vec{j}) = \vec{r}_1 \times m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + \vec{r}_2 \times m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + \vec{r}_3 \times m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} \quad (7)$$