ریاضی عمومی

رابطه و تابع:

رابطه: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند هر زیر مجموعه از $A \times B$ را یک رابطه از A به B می‌گوییم. بنابراین R یک رابطه از A به B است هرگاه $R \subseteq A \times B$.

* فرض کنید $A = \{1,2\}$ و $B = \{a,b\}$ در این صورت کدامیک از گزاره های زیر یک رابطه از A به B است؟

$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

$R_1 = \{(1,a),(2,a),(2,b)\} \subseteq A \times B$ — R_1 یک رابطه از A به B می باشد

$R_2 = \{(1,b),(a,2)\} \not\subseteq A \times B$ — R_2 یک رابطه از A به B نمی باشد

$R_3 = \{(1,b)\} \subseteq A \times B$ — R_3 یک رابطه از A به B می باشد

* فرض کنید $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{1,2,3,4\}$ در این صورت رابطه "<" از A به B را بدست آورید.

$$< = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \text{ و } a < b\}$$
$$= \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,4)\} \subseteq A \times B$$

$$> = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B \text{ و } a > b\}$$
$$= \{(2,1),(3,1),(3,2)\} \subseteq A \times B$$

وارون رابطه: وارون یک رابطه یعنی جای مولفه های یک زوج مرتب را عوض کنیم و با نماد R^{-1} نمایش می دهیم. فرض کنید R یک رابطه از A به B باشد. وارون R را با R^{-1} نشان می دهیم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم: $R^{-1}=\{(b,a) \mid (a,b)\in R\}$

* فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a,b\}$ در این صورت وارون رابطهٔ زیر را

بدست آورید: $R=\{(1,a),(2,b),(1,b)\}$

$R^{-1}=\{(a,1),(b,2),(b,1)\}$

تابع: فرض کنید x و y دو مجموعه و F یک رابطه از x به y باشد. گوییم F یک تابع

از x به y است هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) بازای هر $x\in X$ وجود دارد $y\in Y$ به طوریکه $(x,y)\in F$

۲) اگر $(x,y)\in F$ و $(x,z)\in F$ آنگاه $z=y$.

قرارداد:

۱) هرگاه F یک تابع از x به y باشد آنرا با نماد $F:X\rightarrow Y$ نشان می دهیم

۲) اگر F یک تابع از X به Y باشد بجای $(x,y)\in F$ می نویسیم $y=F(x)$، تساوی اخیر را

ضابطهٔ تابع F می نامیم.

* فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ $B=\{a,b,c,d\}$ و F یک تابع از A به B باشد در این

صورت کدامیک از رابطه های زیر تابع می باشد؟

PAPCO

$1)\ F=\{(1,a),(2,b),(2,c)\}$ × .... شرط ۱ برقرار نیست.

$2)\ F=\{(1,a),(2,b),(3,b)\}$ ✓ .... شرط ۱ و ۲ برقرار است

$3)\ F=\{(1,a),(2,\alpha)\}$ × .... شرط ۱ برقرار نیست

$4)\ F=\{(1,a),(2,b),(3,c),(2,b)\}$ ✓ .... شرط ۱ و ۲ برقرار است

$5)\ F=\{(1,a),(2,b)\}$ × .... شرط ۱ برقرار نیست

انواع توابع :

توابع چند جمله ای - کسری - رادیکالی با فرجه زوج - رادیکالی با فرجه فرد.

$\boxed{1}$ توابع چند جمله ای : $D=\mathbb{R}$

$F(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0 \mid a_i\in R\ ,\ 0\leq i\leq n\ ,\ a_n\neq 0$

$F(x)$ را یک چند جمله ای از درجه n می نامیم.

دامنه یک تابع چند جمله ای مجموعه اعداد حقیقی می باشد. [دامنه یعنی مجموعه مقادیر مجاز x می باشد]

$\boxed{2}$ توابع کسری (گویا) :

$f(x)=\dfrac{P(x)}{q(x)}$ $\quad D=\mathbb{R}-\{$ ریشه های مخرج $\}$

خارج قسمت دو تابع چند جمله ای را یک تابع کسری یا گویا می گوییم. فرض کنید $F(x)=\dfrac{P(x)}{q(x)}$ که در آن

$P(x)$ و $q(x)$ دو تابع چند جمله ای اند. چون کسر زمانی تعریف می شود که مخرج آن مخالف صفر باشد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

بنابراین دامنه تابع گویا یعنی مقادیر مجاز x از فرمول زیر بدست می‌آید.

$F(x) = \frac{P(x)}{q(x)}$ $D_f = \mathbb{R} - \{x \mid q(x) = 0\}$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1) $F(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $x^2 - 1 = 0$

$\Delta = 4 > 0$ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$ $D_F = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

2) $F(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-x-20} = 0$

$x^2 - x - 20 = 0$ $a = 1$ $b = -1$ $c = -20$

$\Delta = b^2 - 4ac = 81 > 0$

$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -4 \end{cases}$ $D_F = \mathbb{R} - \{-4, 5\}$

$\boxed{3}$ توابع رادیکالی با فرجه فرد:

اعداد زوج $= 2k$

اعداد فرد $= 2k \pm 1$

با توجه به این که زیر تابع رادیکالی با فرجه فرد می‌تواند اعداد $+$ ، $-$ و 0 قرار بگیرد

$(0)^3 = 0$ ، $(-)^3 = -$ ، $(+)^3 = +$

لذا دامنه تابع رادیکالی با فرجه فرد از فرمول زیر بدست می‌آید.

$f(x) = \sqrt[2k+1]{h(x)}$

$D_F =$ دامنه عبارت زیر رادیکال $\Rightarrow D_F = D_h$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1) $F(x) = \sqrt[7]{\frac{1}{x-1}}$ $D_F = D_{\frac{1}{x-1}} = \mathbb{R} - \{1\}$

2) $F(x) = \sqrt[99]{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}}$ $D_F = D_{\frac{x^2-2x+4}{x^2-6x+9}} = \mathbb{R} - \{3\}$

PAPCO

$x^2-6x+9=0 \qquad a=1 \quad b=-6 \quad c=9$

$\Delta=b^2-4ac \rightarrow \Delta=0$

$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-6)}{2(1)}=\frac{6}{2}=3$

$\boxed{4}$ تابع رادیکالی با فرجه زوج :

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad \sqrt[2k]{+,0}$

چون یک رادیکال با فرجه زوج زمانی تعریف می‌شود که عبارت زیر رادیکال + و ۰ باشد.

بنابراین برای تعیین دامنه تابع رادیکالی با فرجه زوج باید عبارت زیر رادیکال را بزرگتر مساوی صفر

قرار داده تا مقادیر مجاز x بدست آید.

$f(x)=\sqrt[2k]{g(x)} \qquad D_f=$ عبارت زیر رادیکال ≥ 0

$=\{x \mid g(x)\geq 0\}$

* دامنه توابع زیر را بدست آورید :

1) $f(x)=\sqrt{2x-6}$

$2x-6\geq 0 \Rightarrow 2x\geq 6 \Rightarrow x\geq \frac{6}{2} \Rightarrow x\geq 3$

$D_f=\{x \mid 2x-6\geq 0\}=\{x \mid x\geq 3\}=[3,+\infty)$

2) $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}}$

$\dfrac{x^2-3x}{-x^2+2x+3}\geq 0 \qquad \begin{cases} x^2-3x=0 \\ -x^2+2x+3=0 \end{cases}$

$x^2-3x=0$

$\Delta=b^2-4ac=9>0 \qquad x_1, x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=0 \end{cases}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$-x^2+2x+3=0 \qquad a=-1 \quad b=2 \quad c=3$

$\Delta = b^2-4ac = 16 > 0$

$x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=3 \end{cases}$

$D_f = (-1, 0]$

		-1		0		3	
x^3-3x	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$-x^2+2x+3$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$\dfrac{x^3-3x}{-x^2+2x+3}$	$-$	$\varnothing$	$+$	0	$-$	$\varnothing$	$-$
≥ 0	////		ج		////		///

تعریف: فرض کنید f و g دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند توابع جدید $f+g$ و $f-g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

1. $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

2. $(f-g)(x) = f(x)-g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

3. $(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$

4. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \qquad x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x)=0\}$

* فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\sqrt{4-x}$ در این صورت ضابطه و دامنه توابع $f\pm g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید.

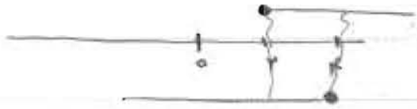
$f(x)=\sqrt{x-2} \Rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

$D_f = \{x \mid x-2 \geq 0\} = \{x \mid x \geq 2\} = [2, +\infty)$

$D_g = \{x \mid 4-x \geq 0\} = \{x \mid 4 \geq x\} = (-\infty, 4]$

$(f\pm g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}$

$x \in D_f \cap D_g = [2, 4]$



$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{4-x}$

$x \in D_f \cap D_g = [2, 4]$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{4-x}}$

$x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

$x \in [2, 4] - \{4\} = [2, 4)$

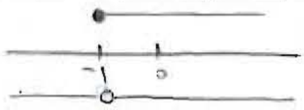
* فرض کنید تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ ، ضابطه و دامنه توابع $f\pm g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را حساب کنید؟

$D_f = \{x \mid x+1 \geq 0\} = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty)$

$D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$(f\pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \sqrt{x+1} \pm \frac{2x+1}{x+1}$

$x \in D_f \cap D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$



$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = \sqrt{x+1} \times \frac{2x+1}{x+1}$

$x \in D_f \cap D_g = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}}$

$x \in (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\} \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) - \{2\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* دامنه توابع زیر را بدست آورید.

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2x}$ $\quad x^2+2x\geq 0 \quad x^2+2x=0 \quad a=1 \quad b=2 \quad c=0$

$\Delta=b^2-4ac=4>0 \Rightarrow x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases}x_1=0\\ x_2=-2\end{cases}$

	-2		0	
$\sqrt{x^2+2x}$	$+$ 0	$-$	0	$+$
$\sqrt{x^2+2x}\geq 0$	ق	$-$		ق

$D_f=(-\infty,-2)\cup[0,+\infty)$

2. $f(x)=\sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$x+1\geq 0 \to x\geq -1$

$4-x^2\geq 0 \Rightarrow \begin{cases}x_1=2\\ x_2=-2\end{cases}$

$D_f=\{x \mid x\geq -1\}=[-1,+\infty)-\mathbb{R}-\{2,-2\}$

3. $f(x)=\frac{4x^2-9}{2x-3}$

$2x-3=0 \to x=\frac{3}{2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{\frac{3}{2}\}$

4. $f(x)=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-x}}$

$x^2-x=0 \quad a=1 \quad b=-1 \quad c=0$

$\Delta=b^2-4ac=1>0$

$x_1, x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\end{cases}$

$D_f=D_{\frac{1}{x^2-x}}=\mathbb{R}-\{0,1\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

5. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x\sqrt{x^2-9}}$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \sqrt{x^2-9} \geq 0 \Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$D_{f(x)} = \mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$

6. $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{x}$

$\sqrt{x+1} \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$

$x = 0$

$D_f = \{x \mid x \geq -1\} = [-1, +\infty) - \mathbb{R} - \{0\}$

تعریف 8 دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را مساوی اند که دو شرط زیر برقرار باشد:

1) $D_f = D_g$

2) $(x \in D_f = D_g) \quad f(x) = g(x)$

* کدامیک از توابع داده شده برابرند؟

1) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x}{x}$ $\qquad g(x) = 2x+5$

$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) \neq g(x) \Leftarrow$ چون شرط 1 برقرار نیست

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ( )

2. $f(x) = \frac{2x-4}{2x-4}$ $g(x) = 1$

$2x-4=0 \rightarrow 2x=4 \rightarrow x=2$ $D_f = \mathbb{R} - \{2\} \neq D_g = \mathbb{R}$

3. $f(x) = \frac{(2x+5)(x^2+1)}{(x^2+1)}$ $g(x) = 2x+5$

$x^2+1=0$ $a=1$ $b=0$ $c=1$

$\Delta = -4$ $\Delta < 0$ ریشه حقیقی ندارد $D_f = \mathbb{R} - \{\} = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_f = D_g$ شرط (۱) برقرار است ✓

$f(x) = \frac{(2x+5)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{(x^2+1)}} = 2x+5 = g(x)$ شرط (۲) برقرار است ✓

$\Leftarrow$ $f(x) = g(x)$

ترکیب توابع :

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

$(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$(g \circ g)(x) = g(g(x))$

* فرض کنید $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ دامنه و ضابطه $f \circ g$, $g \circ f$

و $f \circ f$, $g \circ g$ را بیابید.

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{2}{1}} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-2x}{x}} = \frac{x}{x(1-2x)} = \frac{1}{1-2x}$$

$$D_{f\circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R}-\{0\} \mid \frac{1}{x} \in \mathbb{R}-\{2\}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}-\{0\} \mid x \in \mathbb{R}-\{\tfrac{1}{2}\}\} = \mathbb{R}-\{0, \tfrac{1}{2}\}$$

- $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}-\{2\} \Rightarrow \frac{1}{x} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow 2x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$

$$g\circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{x-2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\frac{x}{x-2}} = \frac{x-2}{x}$$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \left\{x \in \mathbb{R}-\{2\} \mid \frac{x}{x-2} \in \mathbb{R}-\{0\}\right\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}-\{2\} \mid x \in \mathbb{R}-\{0\}\} = \mathbb{R}-\{0, 2\}$$

- $\frac{x}{x-2} \in \mathbb{R}-\{0\} \Rightarrow \frac{x}{x-2} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}-\{0\}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* توابع $f(x)=\sqrt{2x}$ ($D_f=[0,+\infty)$) و $g(x)=x^2+1$ ($D_g=\mathbb{R}$) در این صورت fog ، gof و دامنه آنها را تعیین کنید.

$(fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{2(x^2+1)}$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+1\in[0,+\infty)\}=\mathbb{R}$

$(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{2x})=(\sqrt{2x})^2+1=2x+1$

$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\in[0,+\infty) \mid \sqrt{2x}\in\mathbb{R}\}=[0,+\infty)$

* برای توابع f و g هریک از موارد زیر توابع مرکب gof و fog را با دامنه‌اش تعیین کنید.

۱) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad g(x)=\frac{3}{x^2+1}$

۲) $f(x)=\frac{x+1}{x+2}$ $\quad g(x)=\frac{x+1}{x}$

۳) $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad g(x)=3-x$

PAPCO

Subject :

Year . Month Date . ( )

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

توابع خاص :

۱- تابع ثابت $f(x)=c$

۲- تابع همانی $f(x)=x$

۳- تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$

۴- تابع فاکتوریل $f(n)=n!$

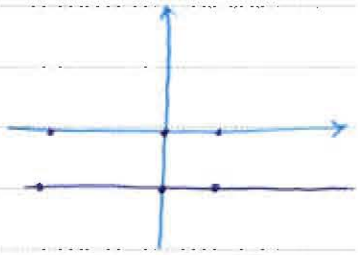
۵- تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$

تعریف : اگر برد تابع f یک مجموعه تک عضوی باشد آنگاه f را تابع ثابت می نامیم و آن را با $f(x)=c$ نشان می دهیم. (c عدد ثابت) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\{c\}$

$y=f(x)=-2$

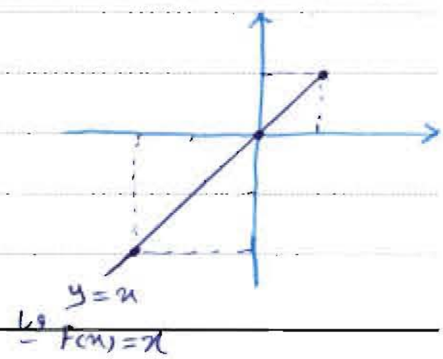
$f(0)=-2$ $f(1)=-2$ $f(-2)=-2$

* همواره موازی محور xها



تعریف : اگر دامنه و برد تابع f مجموعه اعداد حقیقی باشد و برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $f(x)=x$ آنگاه تابع f را یک تابع همانی می نامیم.

$f(0)=0$ $f(1)=1$ $f(-2)=-2$



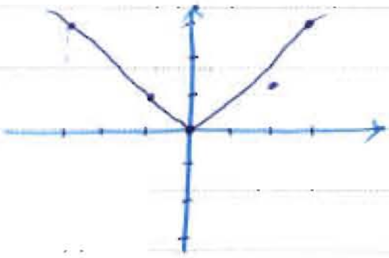
PAPCO

تعریف : تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\cup\{0\}$ با ضابطه $F(x)=|x|$ را تابع قدرمطلق می‌نامیم.

$F(2)=|2|=2$ $\quad F(3)=|3|=3$

$F(-3)=|-3|=-(-3)=3$ $\quad F(-1)=|-1|=1$

$F(0)=|0|=0$



$$F(x)=|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

تعریف : تابع فاکتوریل تابع مانند $F: W\cup\{0\}\to\mathbb{N}$ با ضابطه $F(n)=n!$ می‌باشد که در آن

$0!=1$

$1!=1$

$2!=2\times 1$

$3!=3\times 2\times 1$

$6!=6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

$n!=n(n-1)(n-2)\times\dots\times 1$

خواص قدرمطلق :

$|x|=|-x|$

$|xy|=|x||y|$

$|x+y|\leq |x|+|y|$

$|x+y|=|(-7)+5|=|-2|=2$ ، $|(-2)+(-3)|=|-5|=5$

$|x|+|y|=|-7|+|5|=7+5=12$ ، $|-2|+|-3|=2+3=5$

$\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

$|x|-|y|\leq |x-y|$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \leq -a$ یا $x \geq a$