سری سوم تمرینات تحویلی-درس آنالیز عددی(۱)   بسمه تعالی   مدرس: آقای دکتر محبی   اردیبهشت ۱۳۹۰

۱. احکام زیر را ثابت کنید:

۱. $\sum_{k=0}^{n} L_k(x) = 1$

۲. برای $0 \leq m \leq n$ $\sum_{k=0}^{n} x_k^m L_k(x) = x^m$

۲. نشان دهید:

۱. چند جمله ایهای لاگرانژ مستقل خطی هستند.

۲. نشان دهید چند جمله ایهای زیر مستقل خطی هستند.

$$1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \ldots, (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$$

۳. تابع $f(x)$ مفروض است. نشان دهید اگر چندجمله ای $p(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط $x_1, \ldots, x_{n-1}$ درونیابی کند و چندجمله ای $q(x)$ تابع $f(x)$ را در نقاط $x_2, \ldots, x_n$ درونیابی کند آن گاه چند جمله ای

$$r(x) = p(x) + \frac{x - x_1}{x_n - x_1}[q(x) - p(x)]$$

$f(x)$ را در نقاط $x_1, \ldots, x_n$ درونیابی می کند.

۴. اگر $p(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ باشد نشان دهید

$$f(x) - p(x) = \sum_{k=0}^{n} (f(x) - f(x_k)) L_k(x)$$

۵. رابطه زیر را نشان دهید:

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod_{j=0 j\neq k}^{n}(x_k - x_j)}$$

۶. ثابت اگر $y_0, y_1, \ldots, y_n$ یک جایگشت از $x_0, x_1, \ldots, x_n$ باشد آنگاه،

$$f[y_0, y_1, \ldots, y_n] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

۷. فرض کنید $f(t)$ یک چند جمله ای درجه ۳ باشد. نشان دهید

$$f[x,y,z]=\frac{1}{2}f''\left(\frac{x+y+z}{3}\right)$$

(x,y,z متمایز هستند)

۸. فرض کنید $x_0,x_1,\ldots,x_n$ نقاط متمایز باشند ، نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n}x_k^{n+1}L_k(0)=(-1)^n\prod_{k=0}^{n}x_k$$

۹. فرض کنید $f(x)=\frac{1}{x}$. ثابت کنید

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{x_k}$$

۱۰. فرض کنید $f(x)=\frac{1}{a-x}$ که در آن a عددی ثابت است نشان دهید

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{1}{(a-x_0)(a-x_1)\ldots(a-x_n)}$$

۱۱. در درونیابی لاگرانژ تابع $f(x)=x^{n+1}$، x_i در چه شرطی باید صدق کنند تا درجه چندجمله ای درونیاب دقیقا کمتر از n باشد.

۱۲. نشان دهید خطای درونیاب هرمیت به قرار زیر است

$$f(x)-p(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)^2$$

۱۳. فرض کنید $x_0,x_1,\ldots,x_n$ نقاط متمایز باشد و برای $0\leq k\leq n$ داشته باشیم $\alpha_k=\prod_{j=0\, j\neq k}^{n}(x-x_k)$ در اینصورت نشان دهید:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k^n}{\alpha_k}=1$$

۱۴. کران بالایی برای خطای چند جمله ای دونیاب خطی و درجه ۲ را در نقاط متمایز x_0,x_1,x_2 بیابید.

۱۵. فرض کنید $S_\triangle(x)$ یک تابع اسپلاین مکعبی طبیعی با گره های $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ باشد به طوری که تابع $f\simeq\in C^2[a,b]$ را در نقاط x_i، $i=0,1,\ldots,n$ درونیابی کند نشان دهید

$$\int_a^b(S''_\triangle)^2dx\leq\int_a^b(f''(x))^2dx$$

۱۶. فرض کنید $p(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha\}$ و $q(x)$ چند جمله ای درونیاب در نقاط $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\beta\}$ باشد مطلوبست چند جمله ای درونیاب $f(x)$ در نقاط $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\alpha,\beta\}$.

۱۷. برای تابع جدولی زیر مقدار $f(\frac{۱}{۲})$ را بانوشتن چندجمله ای درونیاب به روش های لاگرانژ، نویل و تفاضلات پیشرو نیوتن را حساب کنید با فرض $f(x) = \frac{۱}{۱+x}$ ، خطای ایت تقریب را بیابید.

۱۸. در مورد چند جمله ای درونیاب یک چندجمله ای چه می توان گفت.

۱۹. فرض $L_i(x)$ چند جمله ای های لاگرانژ باشند و $c_i = L_i(۰)$ نشان دهید

$$\sum_{i=۰}^{n} c_i x_i^j = \begin{cases} ۱ & j = ۰ \\ ۰ & j = ۱, ۲, \dots, n \\ (-۱)^n x_{۰n} & j = n + ۱ \end{cases}$$

۲۰. ثابت کنید به ازای هر چند جمله ای $q(x)$ با درجه کمتر از $n - ۱$ و به ازای نقاط متمایز $x_۰, x_۱, \dots, x_n$

$$\sum_{i=۰}^{n} \left(\prod_{j=۰ j \neq i} \frac{۱}{x_i - x_j} \right) = ۰$$

۲۱. فرض کنید $f(x)$ یک تابع دلخواه باشد اگر $g(x) = f[x_۰, \dots, x_n, x]$ نشان دهید

$$g'(x) = f[x_۰, \dots, x_n, x, x]$$

۲۲. نشان دهید اگر $f(x) = h(x)g(x)$ در اینصورت

$$f[x_۰, \dots, x_n] = \sum_{j=۰}^{n} g[x_۰, \dots, x_j] h[x_j, \dots, x_n]$$

۲۳. اسپلاین مکعبی و مقید تابع جدولی زیر را با فرض $f'(۰) = ۰, f'(۲) = -۱$ بیابید.

x_i	۰	۱-	۲
y_i	۱	۰	۱

۲۴. مطلوبست محاسبه چند جمله ای درونیاب تابع $f(x) = e^{۳x}$ با این شرایط که

$$f(۱) = p(۱) \qquad f(۲) = p(۲) \qquad f'(۱) = p'(۱) \qquad f'(۲) = p'(۲)$$

و محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده.

۲۵. به روش کمترین مربعات بهترین منحنی به شکل $y = ax^۲ + b$ را به دادههای جدولی زیر برازش کنید:

x_i	۲-	۱-	۲	۳
y_i	۱	۱	۳	۴

۲۶. فرض کنید $p_n(x)$ چند جمله ای درونیاب تابع $f(x)$ در نقاط $x_۰, x_۱, \ldots, x_n$ باشد نشان دهید برای هر x داریم:

$$det\begin{vmatrix} p_n(x) & ۱ & x & x^۲ & \ldots & x^n \\ f(x_۰) & ۱ & x_۰ & x_۰^۲ & \ldots & x_۰^n \\ f(x_۱) & ۱ & x_۱ & x_۱^۲ & \ldots & x_۱^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_n) & ۱ & x_n & x_n^۲ & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = ۰$$

۲۷. برای تابع اسپلاین زیر مقادیر a, b, c, d را بیابید.

$$S_{\triangle}(x) = \begin{cases} x^۲ + x^۳ & ۰ \leq x \leq ۱ \\ \\ a + bx + cx^۲ + dx^۳ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$