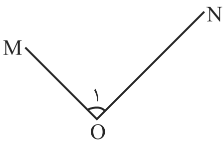
فصل اول: هندسه و استدلال

بخش اول : معرفی خود زاویه و انواع زاویه‌ها:

۱- زاویه: اگه دو تا نیم خط یه ابتدای مشترک داشته باشن، یه زاویه می‌سازن.

به اون دو تا نیم خط ضلع زاویه و به اون ابتدای مشترک (همون نقطه) رأس زاویه گفته می‌شه.



این زاویه رو به چند طریق اسم‌گذاری می‌کنن: زاویه‌ی $\hat{O}_{۱}$ یا زاویـه‌ی $M\hat{O}N$ یـا زاویـه‌ی $\hat{O}$ کـه اولی و دومی رایج‌ترن!

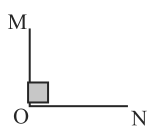
۲- واحدهای اندازه‌گیری زاویه: سه تا واحد خیلی مشهور و شـناخته شـده بـرای زاویـه درجـه- گراد- رادیان هستندکه رابطه‌ی بین این سه تا از قرار زیره:

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

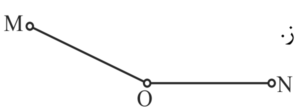
۳- انواع زاویه: توی حالت کلی می‌گیم که زاویه می‌تونه چهار تا حالت داشته باشه

- یا کمتر از ۹۰° درجه بوده که بهش می‌گیم زاویه‌ی **حاده** یا تند.

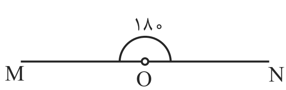
- اگه برابر خودِ ۹۰° درجه باشه بهش می‌گیم زاویه‌ی **قائمه**.



- اگه از ۹۰° درجه بیشتر باشه هم که می‌گیم زاویه‌ی **منفرجه** یا باز.

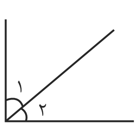


- حالت چهارم هم یه حالت خاص از حالت سومه که دقیقاً مـساوی ۱۸۰° درجه باشه که به اونم زاویه‌ی **نیم صفحه** گفته می‌شه.

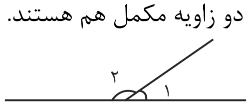


- دو تا تعریف مهم دیگه هم توی زاویه‌ها باید یاد بگیری:

دو تا زاویه‌ی متمم: اگه مجموع دو زاویه بشه ۹۰° بهـشون مـی‌گـیم دو تـا زاویه‌ی متمم. $\hat{۱}+\hat{۲}=۹۰^\circ$



دو تا زاویه‌ی مکمل: اگه مجموع دو تا زاویه ۱۸۰° بشه می‌گیم که این دو زاویه مکمل هم هستند.



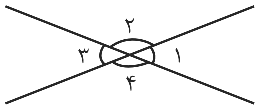
$\hat{۱}+\hat{۲}=۱۸۰^\circ$

بخش دوم : بررسی ۴ تا قضیه‌ی کتاب (در مورد زاویه) با اثباتاشون (توی این بخش نکته‌های خیلی مهمی وجود داره پس با دقت بخون)

قضیه‌ی I: زاویه‌های متقابل به رأس.

زاویه‌های متقابل به رأس قوی هر دو تا خط متقاطع با هم مساوین!

$$\begin{cases}\hat{۱}=\hat{۳}\\ \hat{۲}=\hat{۴}\end{cases}$$



اثبات:

$\hat{۱}+\hat{۲}=۱۸۰^\circ$

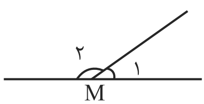
$\hat{۱}+\boxed{\hat{۲}}=\boxed{۱۸۰^\circ}\rightarrow$ زاویه ی نیم صفحه رو که یادته!

$\hat{۳}+\boxed{\hat{۲}}=\boxed{۱۸۰^\circ}\rightarrow$ بازم نیم صفحه س

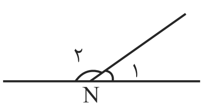
پس نتیجه می‌شه که $\hat{۳}=\hat{۱}$ و به همین ترتیب: $\hat{۴}=\hat{۲}$

قضیه‌ی II: قضیه‌ی زاویه‌های مکمل:

اگه دوتا زاویه‌ی مساوی داشته باشیم، مکمل‌های اون زاویه‌ها هم با هم برابرن.



$$\hat{N}_۱=\hat{M}_۱\Rightarrow\hat{N}_۲=\hat{M}_۲$$



اثبات:

$$\begin{cases}\hat{M}_۱+\hat{M}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{N}_۱+\hat{N}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\xrightarrow{\hat{N}_۱=\hat{M}_۱}\begin{cases}\boxed{\hat{N}_۱}+\hat{M}_۲=\boxed{۱۸۰^\circ}\\ \boxed{\hat{N}_۱}+\hat{N}_۲=\boxed{۱۸۰^\circ}\end{cases}$$

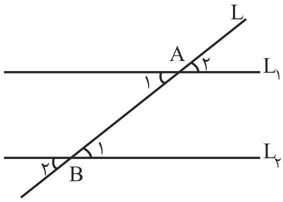
$\downarrow$

پس نتیجه میشه که : $\hat{M}_۲=\hat{N}_۲$

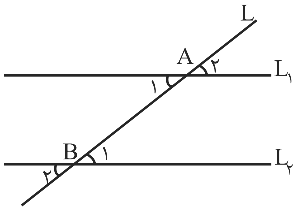
قضیه‌ی III: قضیه‌ی خطوط موازی و مورب:

اگه خط L دو خط موازیِ $L_۱$ و $L_۲$ رو به ترتیب در A و B قطع کنه و زاویه‌ی $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}_۱$ رو پدید بیاره داریم:

$$\hat{A}_۱=\hat{B}_۱$$



توی کتاب هندسه I صفحه‌ی ۹ و ۱۰ این قضیه بیان شده ولی به اثباتش اشاره‌ای نشده فقط می‌گه از روی تشابه مثلث که ما هم به همین اندازه اکتفا می‌کنیم.

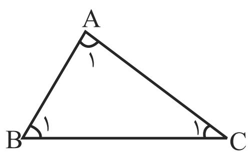


- عکس قضیه‌ی موازی مورب هم صادقه یعنی:

اگه خط L دو خط L_1 و L_2 رو به ترتیب در نقطه‌های A و B قطع کنه و زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{B}_1$ رو به وجود بیاره و بدونیم که $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ نتیجه می‌شه که $L_1 \parallel L_2$ (یعنی L_1 با L_2 موازی بوده)

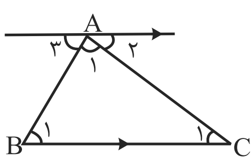
قضیه‌ی IV: مجموع زاویه‌ی داخلی مثلث

توی هر مثلث مجموع زاویه‌های داخلی 180° می‌شه.



$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$

اثبات: برای اثبات باید یه خط موازی BC که از A رد بشه رسم کنیم. بعدش خیلی راحته:



$\hat{C}_1 = \hat{A}_2 \rightarrow$ موازی و مورب یادت نره‌ها

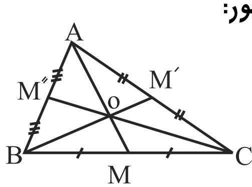
$\hat{B}_1 = \hat{A}_3 \rightarrow$ بازم موازی مورب

از طرفی هم زاویه‌ی نیم صفحه‌رو که خوب یادگرفتی:

حالا با یه جاگذاری ساده به جواب می‌رسیم:

حالا که این قضیه‌ها خوب براتون جا افتاد بریم سراغ مثلث و خرت و پرتای توش.

بخش سوم : خط‌های مهم توی مثلث و معرفی مثلث‌های مشهور:

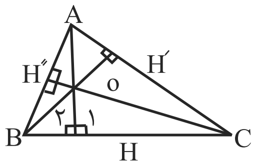


۱- میانه: اگه توی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، نقطه‌ی M رو که وسط BC قرارداره رو به رأس A وصل کنیم. $(BM = CM)$

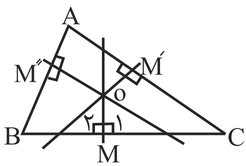
پاره خطی به وجود می‌یاد که بهش میانه می‌گیم، میانه‌ی AM.

لازم به ذکره که توی هر مثلث سه تا میانه داریم که هر سه تایی از یه نقطه رد می‌شن (یعنی همرسن).

۲- ارتفاع: اگه از رأس A توی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ به ضلع BC عمود کنیم تا BC رو در نقطه‌ی H قطع کنه، پاره خط AH به وجود می‌یاد که ارتفاع نام داره. توی هر مثلثی سه تا ارتفاع وجود داره که از یه نقطه عبور می‌کنن.
$(\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ)$



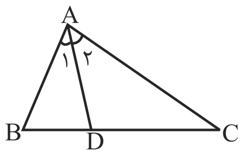
۳- عمود منصف: اگه توی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ از نقطه‌ی M وسط ضلع BC خطی عمود رد کنیم، این خط هم ضلع BC رو نصف می‌کنه و هم بهش عموده که به این خط عمود منصف نامیده می‌شه.
سه تا عمود منصف هم همرس‌ان.



$(\hat{M}_1=\hat{M}_2=90)$

$(BM=CM)$

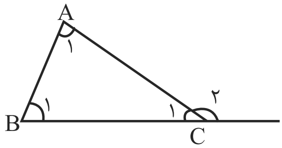
۴- نیمساز: نیم‌خطی که زاویه رو به دو زاویه‌ی مساوی تقسیم کنه بهش نیمساز گفته می‌شه حالا اگه نیمساز زاویه‌ی A توی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، ضلع BC رو در نقطه‌ی AD قطع کنه، به AD نیمساز زاویه A می‌گیم $(\hat{A}_1=\hat{A}_2)$.



دانش‌آموزهای عزیز توجه داشته باشین که این ۴ تا خط توی مثلث خیلی مهم‌ان و باید خوب بهشون توجه کنین.

حالا که بحث مثلث شده بزارید یه تعریف مهم و یه قضیه‌ی مهم رو مطرح کنیم:

زاویه خارجی: اگه توی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ یکی از اضلاع رو (مثل BC) در راستای خودش امتداد بدیم زاویه‌ی خارجی به وجود می‌یاد (این‌جا C_2).



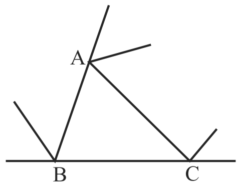
قضیه: قضیه‌ی زاویه‌ی خارجی مثلث: اندازه‌ی زاویه‌ی خارجی در هر مثلث برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلیِ غیرمجاور: $\hat{C}_2=\hat{A}_1+\hat{B}_1$

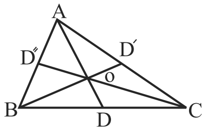
اثبات: اثباتشو ببین خیلی راحته:

$$\begin{cases}\hat{A}_1+\hat{B}_1+\hat{C}_1=\boxed{180^\circ}\to \text{قضیه ی زوایای داخلی مثلث}\\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=\boxed{180^\circ}\to \text{زاویه ی نیم صفحه}\end{cases}$$

پس نتیجه می‌شه که: $\hat{A}_1+\hat{B}_1=\hat{C}_2$

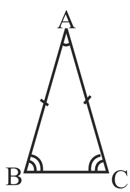
راستی تا از بحث نیمساز دور نشدیم بگم که هر مثلث سه تا نیمساز نداره!!!
بلکه هر مثلث شش تا نیمساز داره می‌دونی چرا؟! آره دیگه سه تا داخلی، سه تا خارجی که سه تا داخلیا همرسن





حالا بریم سراغ معرفی مشهورترین مثلث‌ها

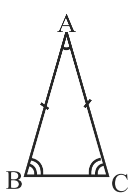
I مثلث متساوی‌الساقین:



همون‌طوری که از اسمش معلومه به مثلثی متساوی‌الساقین گفته می شه که دو ضلعِ (دوساقِ) برابر داشته باشه. (به ضلع سوم قاعده می‌گن) توی صفحه‌ی ۲۲ کتاب هندسه‌ی I یه قضیه‌ی خیلی مهم به نام قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین وجود داره و اثباتشم هست. منم این‌جا این قضیه‌رو براتون می‌گم ولی اثباتش باشه تا موقعی که بهتون همنهشتی رو یاد بدم.

قضیه: قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین:

توی هر مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو اضلاع مساوی، با هم مساوین:



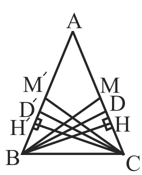
$$AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

شاگرد خوب: چرا این علامت نتیجه‌گیری دو طرفه‌س؟

آها!! چون می‌خواد بهمون بگه که این قضیه دو طرفه‌س یعنی اگه یه مثلثی دیدی که توش دو تا زاویه‌ی مساوی داره. نتیجه می‌گیری که دو تا ساقِ روبه‌رو به این دو زاویه با هم مساوی‌ان یعنی مثلثه متساوی‌الساقینه دیگه!

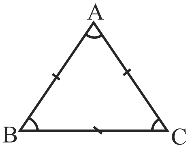
یه نکته‌ی قابل اهمیت در مثلث متساوی‌الساقین:

توی مثلث متساوی‌الساقین، دو ارتفاع وارد بر ساق‌ها، دو میانه‌ی ساق‌ها و دو نیمساز درونی زاویه‌های متقابل به ساق‌ها با هم برابرن.



$$AB = AC \Rightarrow \begin{cases} BM = CM' \\ BH = CH' \\ BD = CD' \end{cases}$$

II مثلث متساوی‌الاضلاع



این یکی هم از روی اسمش می‌شه حدس زد که چه شکلی می‌شه، مثلثی که اضلاعش با هم برابره بهش مثلث متساوی‌الاضلاع گفته می‌شه.

با توجه به قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین که بالاتر مطرح شد این‌جا داریم:

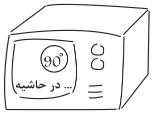
$$AB = AC = BC \Leftrightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$$

(دقت کن که این جا هم فلش دو طرفه‌س)

از این نکته که $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱$ و قضیه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث یه نتیجه‌ی خیلی باحال به دست می‌یاد:

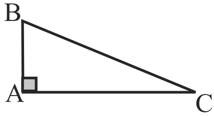
$$\begin{cases} \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = x \\ \hat{A}_۱ + \hat{B}_۱ + \hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow ۳x = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ = ۶۰^\circ$$

یعنی هر زاویه توی مثلث متساوی‌الاضلاع ۶۰ درجه‌س.



یه نکته‌ی خیلی مهم و کاربردی: توی مثلث متساوی‌الاضلاع، میانه، ارتفاع، نیمساز و عمود منصف هر ضلع بر هم منطبقن (یعنی یکی هستن).
در ضمن توی مثلث متساوی‌الاضلاع، سه میانه، سه ارتفاع و سه نیمساز زاویه‌های داخلی با هم برابر هستن.

III مثلث قائم‌الزاویه:

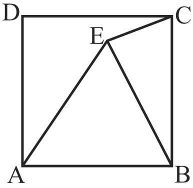


اگه مثلث، یه دونه زاویه‌ی قائمه (۹۰ درجه) داشته باشه بهش قائم‌الزاویه گفته می‌شه. توی این نوع مثلث به ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی قائمه وتر گفته می‌شه که این وتر بزرگترین ضلع مثلثه (این‌جا BC وتره) و به دو ضلع دیگه اضلاع قائم گفته می‌شه.

(برای مثلثات خیلی از این مثلث استفاده می‌شه، یعنی خیلی اهمیت داره هم این‌جا هم اون‌جا)

حالا بریم سراغ چندتا مثال خوب:

مثال ۱: چهارضلعی ABCD یه مربعه و ABE هم یه مثلث متساوی‌الاضلاع. خواسته ثابت کنید $\overset{\Delta}{BCE}$ متساوی‌الساقینه



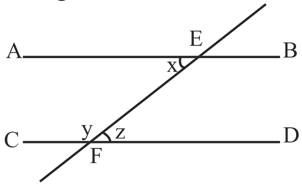
خب، چون ABCD یه مربعه، پس: $AB = CB$

و چون مثلث ABE متساوی‌الاضلاعه، پس: $AB = EB$

پس: $CB = EB$

در نتیجه BCE یه مثلث متساوی‌الساقینه.

مثال ۲: دو خط BA و DC موازی‌ان و خط L اونا رو به ترتیب در نقطه‌های E و F قطع کرده، خواسته از ما تا ثابت کنیم که $x+y$ می‌شه ۱۸۰°:



برای حل باید یاد موازی مورب بیافتی:

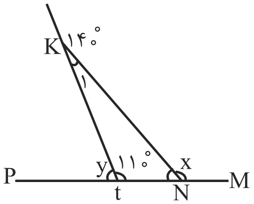
$AB \parallel CD$ و مورب $L \Rightarrow \hat{x} = \hat{z}$

از طرفی می‌دونیم که $\hat{y}+\hat{z} = ۱۸۰^\circ$ (زاویه‌ی نیم صفحه)

پس به جای $\hat{z}$ و $\hat{x}$ قرار می‌دیم و داریم:

$\hat{y}+\hat{x} = ۱۸۰^\circ$

مثال ۳: می‌خوایم مقدار $\hat{x}$ و $\hat{y}$ رو حساب کنیم.



برای بدست آوردن y که فقط کافیه نیم‌صفحه رو بلد باشی:

$\hat{y}+۱۱۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{y} = ۷۰^\circ$

برای محاسبه‌ی x هم توجه شما عزیزان رو به مثلث $\overset{\Delta}{KJN}$ جلب می‌کنم. با توجه به نکته‌ی نیم‌صفحه $\hat{K}_۱ = ۴۰^\circ$ و هم چنین باید به یاد قضیه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث هم بیافتی پس:

$\underbrace{\cancel{\hat{K}_۱}}_{۴۰^\circ} + ۱۱۰^\circ + \hat{N}_۱ = ۱۸۰^\circ$

پس: $\hat{N}_۱ = ۳۰^\circ$

می‌دونیم که $\hat{x}$ مکمل زاویه $\hat{N}_۱$ بوده پس: $\hat{x} = ۱۵۰^\circ$

مثال ۴: اگه زاویه‌های A و B مکمل هم باشن و زاویه‌ی A دو برابر B باشه، حاصل $۲A-۳B$ رو خواسته.

گفته که زوایای A و B مکمل هم‌اند پس: $\hat{A}+\hat{B} = ۱۸۰^\circ$

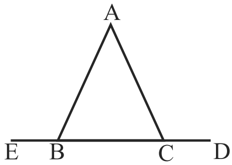
$\hat{A} = ۲\hat{B} \Rightarrow ۲\hat{B}+\hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۳\hat{B} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ \Rightarrow \hat{A} = ۱۲۰^\circ$

بقیه‌ش دیگه محاسبه‌س:

$۲\hat{A} - ۳\hat{B} = ۲(۱۲۰^\circ) - ۳(۶۰^\circ)$

$= ۲۴۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۶۰^\circ$

مثال ۵: توی شکل داده شده $AB = AC$ (یعنی مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقینه دیگه!!) بعـد ازت خواسته بگی چرا: $A\hat{B}E = A\hat{C}D$.

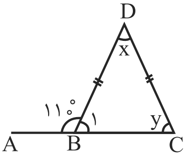


خداوکیلی خیلی راحته، ببین:

بنابر قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین $A\hat{B}C = A\hat{C}B$

و بنا به قضیه‌ی زاویه‌های مکمل داریم: $A\hat{B}E = A\hat{C}D$

دیدی که چقدر راحت بود!



مثال ۶: توی شکل مقابل ازت خواسته شده که x و y رو بدست بیاری:

زاویه‌ی $\hat{B}_۱$ که خیلی راحت حساب می‌شه:

چون $A\hat{B}C$ یه زاویه‌ی نیم صفحه بوده، پس: $۱۱۵^\circ + \hat{B}_۱ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}_۱ = ۷۰^\circ$

حالا ببینیم که دیگه توی صورت چه داده‌ای داریم که ازش کمک بگیریم؟!

آها نگاه کن روی شکل داره بهت می‌گه $BD = DC$ یعنی $\overset{\Delta}{BDC}$ متساوی‌الساقینه پس از قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین نتیجه می‌گیریم که: $BD = CD \Rightarrow \hat{y} = \hat{B}_۱$ پس: $\hat{y} = ۷۰^\circ$

خُب، حالا چون اطلاعات هندسیمون زیاد شده برای بدست آوردن $\hat{x}$ از دو راه مسئله رو حل می‌کنیم.

راه اول: چون قضیه‌ی زاویه‌های داخلی مثلث رو بلدی پس می‌دونی:

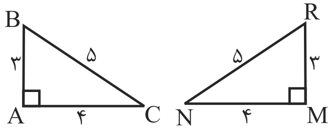
$$\hat{B}_۱ + \hat{y} + \hat{x} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow ۷۰^\circ + ۷۰^\circ + \hat{x} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{x} = ۴۰^\circ$$

راه دوم: همه‌ی عزیزان نکته‌ی (قضیه‌ی) زاویه‌ی خارجی رو یادشونه دیگه: چون $A\hat{B}D$ یه زاویه‌ی خارجیه برای مثلث $\overset{\Delta}{BDC}$ پس: $A\hat{B}D = \hat{x} + \hat{y} \Rightarrow ۱۱۰^\circ = \hat{x} + ۷۰^\circ \Rightarrow \hat{x} = ۴۰^\circ$

بخش چهارم : هم نهشتی مثلث

دو تا شکل هم نهشت هم چیزشون باهم برابره! یعنی اضلاع، مساوی دارن، در نتیجه محیط‌های برابر دارن، زاویه‌های نظیر به نظیر مساوی و همچنین مساحت‌های اونا هم با هم برابره.

یعنی اگه بخوایم یه تعریف خوب و کامل برای هم نهشتی براتون بگیم، می‌شه اینطوری تعریف کرد که:



«کاملاً روی هم قرار بگیرن به طوری که دقیقاً روی هم منطبق بشن و هم دیگرو بپوشونن»

برای اینکه نشون بدیم دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{MNR}$ هم نهشتن، می‌نویسیم:

$$\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MRN}$$

حالا الان فرض کن که ثابت کردیم که $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{MRN}$ پس می‌تونیم $\overset{\Delta}{ABC}$ رو طوری روی $\overset{\Delta}{MRN}$ قرار بدیم که؛ A روی M، B روی R و C روی N قرار بگیره. پس از هم نهشتی ۶ تا نتیجه حاصل می‌شه:

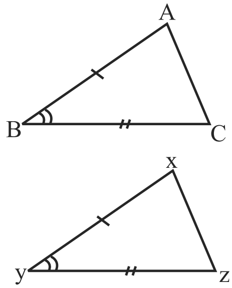
$$\begin{cases} AB = MR \\ AC = MN \\ BC = RN \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{A} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{R} \\ \hat{C} = \hat{N} \end{cases}$$

حالا ببینم که چه جوری می‌شه ثابت کرد که دو تا مثلث هم نهشتن؟!

نمی‌تونیم که تک تک زاویه‌ها و اضلاع رو بررسی کنیم. سه تا راه کوتاه وجود داره!

حالت I: حالت (ض ز ض)

هر وقت که دو ضلع از یه مثلث با زاویه‌ی بینشون با دو ضلع از یه مثلث دیگه با زاویه‌ی بینشون با هم برابر باشه



اون وقت می‌تونیم نتیجه بگیریم که این دوتا مثلث با هم هم نهشتن یعنی دیگه لازم نیست برابری بقیه‌ی اجزای متناظر رو چک کنیم.

پس توی این راه از سه تساوی استفاده کردیم:

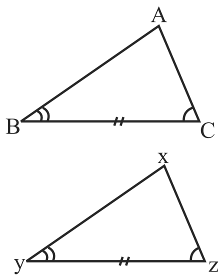
(۱) $AB = xy$ (۲) $BC = yz$ (۳) $\hat{B} = \hat{y}$

ولی اگه یادت باشه گفتم هم نهشتی ۶ تا نتیجه داره پس اون سه تا چی شد؟

اون سه تای دیگه از هم نهشتی نتیجه می‌شن یعنی اگه تونستیم اون سه تا بالایی‌ها رو ثابت کنیم پس اون سه‌تایی دیگه هم نتیجه می‌شه:

(۴) $AB = xz$ (۵) $\hat{C} = \hat{z}$ (۶) $\hat{A} = \hat{x}$

حالت II: حالت (ز ض ز)

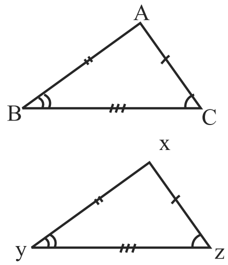


هر وقت که دو زاویه و ضلع بین اون‌ها از یه مثلث با دو زاویه و ضلع بین از یه مثلث دیگه برابر باشه بازم می‌شه نتیجه گرفت که این دو تا مثلث هم نهشتن.

پس شروط لازم برای این حالت چی شه؟ (توی شکل بالا)

(۱) $\hat{C} = \hat{z}$ (۲) $BC = yz$ (۳) $\hat{B} = \hat{y}$

حالت III: حالت (ض ض ض)

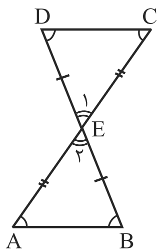


هر وقت که سه ضلع مثلثی با سه ضلع از یه مثلث دیگه مساوی باشه، می‌تونیم نتیجه بگیریم که این دو مثلث هم‌نهشت هستن.

این‌جا هم که سه شرطمون معلومه دیگه:

(۱) $AB = xy$ (۲) $AC = xz$ (۳) $BC = yz$

حالا بریم سراغ چند تا مثال خوبِ دیگه:



مثال ۱: توی شکل زیر گفته که E وسطِ AC و BD قرار داره ازت خواسته بگی چرا $AB = CD$.

خب وقتی می‌گه E وسطِ AC و BD یعنی:

(۱) $DE = EB$ (۲) $CE = EA$

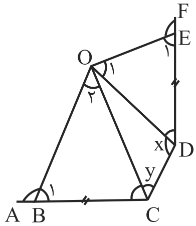
زاویه‌ی E_1 و E_2 هم که معلومه چرا مساوین: چون متقابل به رأسن:

پس مثلث‌های $\overset{\Delta}{DCE}$ و $\overset{\Delta}{ABE}$ هم نهشتن دیگه (به حالت ض ز ض). حالا اول تا آخر جواب رو به صورت ریاضی این جوری می‌نویسن:

$$\begin{cases} BE = EB \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \\ CE = EA \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \overset{\Delta}{ABE} \cong \overset{\Delta}{DCE} \xrightarrow{\text{نتایج}} \begin{cases} \hat{C} = \hat{A} \\ \boxed{DC = AB} \Rightarrow \\ \hat{D} = \hat{B} \end{cases}$$

اینم جواب مسأله که با هم نهشتی تونیستیم ثابتش کنیم.

مثال ۲: توی شکل زیر گفته که $BC = ED$ و $O\hat{B}A = O\hat{E}F$ و $O\hat{C}B = O\hat{D}E$ و خواسته که ثابت کنی زاویه‌ی $\hat{x}$ و $\hat{y}$ با هم برابرن.



$$O\hat{B}A = O\hat{E}F \xrightarrow[\text{زاویه های مکمل}]{\text{طبق قضیه ی}} \hat{E}_1 = \hat{B}_1 \qquad (I)$$

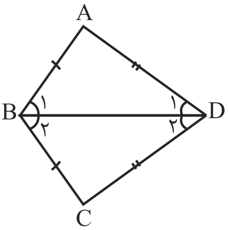
$O\hat{C}D = O\hat{D}E$ (II) $BC = DE$ (III) این دو تا رو هم که خودش گفته پس:

$$\begin{cases} \hat{E}_1 = \hat{B}_1 \\ BC = DE \\ O\hat{C}B = O\hat{D}E \end{cases} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \overset{\Delta}{OBC} \cong \overset{\Delta}{ODE} \xrightarrow{\text{نتایج}} \begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OE = OB \\ \boxed{OD = OC} \end{cases}$$

خب این یکی داره به ما می‌گه که مثلث $\overset{\Delta}{OCD}$ یه مثلث متساوی‌الساقینه پس طبق قضیه‌ی مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$OD = OC \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$$

مثال ۳: توی شکل زیر گفته که $AB = BC$ و $AD = DC$ و خواسته که بگی چرا $\hat{A} = \hat{C}$



خیلی تابلوِ ـ که مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABD}$ و $\overset{\Delta}{BCD}$ باهم هم نهشتن، چرا؟!!

$$\begin{cases} AB = BC & \text{خودش گفته} \\ AD = DC & \text{اینم خودش گفته} \\ BD = BD & \text{برای اینم توضیحی ندارم} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{BCD} \xrightarrow{\text{نتایج}} \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ \boxed{\hat{A} = \hat{C}} \end{cases}$$

$\downarrow$

اینم اون چیزی که خواسته بود.