فصل ۲

توابع برداری و رویه‌ها

۲-۱ تمرینات تشریحی

۱. خم C به معادله‌ی برداری

$$r(t) = \cosh t\,\overrightarrow{i} + \sinh t\,\overrightarrow{j} + (۱+t)\,\overrightarrow{k}$$

مفروض است. انحنای این خم و صفحه‌ی بوسان آن را در نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ پیدا کنید.

۲. نشان دهید کلیه‌ی صفحه‌های قائم بر خم

$$r(t) = a\sin^۲ t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\cos t\,\overrightarrow{j} + a\cos t\,\overrightarrow{k}$$

از مبدا مختصات می‌گذرد. هم‌چنین ثابت کنید خم فوق بر یک کره واقع است.

۳. خم C به معادله‌ی برداری

$$r(t) = e^t \sin ۲t\,\overrightarrow{i} + e^t \cos ۲t\,\overrightarrow{j} + ۲e^t\,\overrightarrow{k}$$

را در نظر بگیرید.
الف) معادله‌ی صفحه‌ی بوسان و انحنای منحنی را به ازای نقطه‌ی نظیر $t = ۰$ را به دست آورید.
ب) طول قوس منحنی C را برای $۰ \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{۴}$ محاسبه کنید.

۴. انحنای منحنی C حاصل از تلاقی رویه های $x^۲-y^۲+z^۲=۱$ و $y^۲-۲x+z=۰$ را در نقطه‌ی $(۱,۱,۱)$ بیابید.

۵. ماکزیمم انحنای منحنی $y=e^x$ را به دست آورید.

۶. نشان دهید شعاع انحنای $y=\cosh x$ در نقطه‌ی $P(x,y)$ برابر $y^۲$ است.

۷. در چه نقطه‌ای از سهمی $x^۲=۸y$ شعاع انحنای منحنی برابر $\frac{۱۲۵}{۱۶}$ است؟

۸. منحنی به معادله‌ی $y=a\cosh(\frac{x}{a}),\ a>۰$ مفروض است.
الف) ثابت کنید انحنا در هر نقطه‌ی (x,y) واقع بر این خم برابر $\frac{a}{y^۲}$ است..
ب) ثابت کنید انحنای این منحنی در نقطه‌ی $(۰,a)$ ماکزیمم مطلق است.

۹. ماکزیمم و مینیمم انحنای بیضی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ را بیابید و نقاطی که اکسترمم های انحنا در آن واقع می‌شوند را مشخص کنید.

۱۰. شعاع انحنای منحنی $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a$ را در هر نقطه واقع بر آن بیابید.

۱۱. مولفه‌های مماس و قائم a_N و a_T، انحنا و معادله‌ی صفحه‌ی بوسان خم نظیر تابع برداری زیر را بیابید.

$$r(t)=(t+\frac{۱}{۳}t^۳)\overrightarrow{i}+(t-\frac{۱}{۳}t^۳)\overrightarrow{j}+t^۲\overrightarrow{k}$$

۱۲. نشان دهید که خم های به معادلات

$$r(t)=e^t\overrightarrow{i}+e^{۲t}\overrightarrow{j}+(۱-e^{-t})\overrightarrow{k}$$

و

$$r(\theta)=(۱-\theta)\overrightarrow{i}+(\cos\theta)\overrightarrow{j}+(\sin\theta)\overrightarrow{k}$$

در نقطهٔ $P=(۱,۱,۰)$ متقاطعند و زاویهٔ بین خطوط مماس بر آنها را در این نقطه بدست آورید.

۱۳. یک مارپیچ توسط تابع مکان

$$\overrightarrow{r(t)}=(a\cos\omega t)\overrightarrow{i}+(a\sin\omega t)\overrightarrow{j}+(b\omega t)\overrightarrow{k}$$

توصیف می‌شود که ω, b, a اعداد ثابت و مثبت هستند.
الف) مطلوب است محاسبهٔ شعاع انحنای خم در یک نقطهٔ دلخواه.
ب) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ بوسان در $t = ۰$.
ج) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ قائم در $t = \frac{\pi}{۲}$.

۱۴. منحنی $\gamma : r(t) = (t\cos t, t\sin t, e^t)$ را در نظر بگیرید.
الف) معادلهٔ رویه‌ای که γ بر آن واقع شده است را بیابید و رسم کنید.
ب) معادلهٔ خم حاصل از تصویر قائم γ را بر صفحهٔ xoy به دست آورید.

۱۵. خم C توسط تابع مکان

$$\overrightarrow{r(t)} = (\sin t + ۲\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sqrt{۲}(\sin t - \cos t))\,\overrightarrow{j} + (\sqrt{۳}\sin t)\,\overrightarrow{k}$$

توصیف می‌شود.
الف) مطلوب است محاسبهٔ انحنا و شعاع انحنای خم در یک نقطهٔ دلخواه .
ب) مطلوب است محاسبهٔ معادلهٔ صفحهٔ بوسان در $t = ۰$.

۱۶. معادلهٔ صفحهٔ بوسان، صفحهٔ نرمال و کرهٔ بوسان خم داده شده توسط $\overrightarrow{r(t)} = t\,\overrightarrow{i} + t^۲\,\overrightarrow{j} + t^۳\,\overrightarrow{k}$ را در نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ واقع بر آن حساب کنید.

۱۷. نقطه‌ای از منحنی $y = \ln x$ را تعیین کنید که دارای بیشترین انحنا باشد.

۱۸. نشان دهید که خم $R(t) = (\ln t)\,\overrightarrow{i} + (t\ln t)\,\overrightarrow{j} + t\,\overrightarrow{k}$ بر رویهٔ

$$xz^۲ - yz + \cos xy = ۱$$

در $P(۰,۰,۱)$ مماس است.

۱۹. خم C که محل تلاقی رویهٔ $x^۲ + y^۲ = ۵$ با صفحهٔ $z = x$ است را در نظر بگیرید و انحنای آنرا در نقطهٔ $P = (۱,۲,۱)$ محاسبه کنید.

۲۰. رویهٔ $S_۱$ به معادلهٔ $z = x^y$ و رویهٔ $S_۲$ به معادلهٔ $xy = e^{z-۱}$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر خم حاصل از تلاقی این دو رویه را در نقطهٔ $P = (۱,۱,۱)$ بدست آورید.

۲۱. فرض کنید C خم حاصل از برخورد سهمیگون $z = (x+۱)^۲ + y^۲$ و صفحهٔ $z = ۲x + ۲$ است. اگر κ_p انحنای خم C در نقطه‌ای چون $p \in C$ باشد، نشان دهید که $\frac{۱}{۵} \leq \kappa_p \leq \sqrt{۵} \quad \forall p \in C$.

۲۲. خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r}(t) = (e^t \sin t)\overrightarrow{i} + e^t \overrightarrow{j} + (e^t \cos t)\overrightarrow{k}$ مفروض است.
الف) بردارهای $\overrightarrow{T}$، $\overrightarrow{N}$ و $\overrightarrow{B}$ را در نقطهٔ $P(۰,۱,۱) \in C$ بدست آورید.
ب) معادلات پارامتری منحنی حاصل از تصویر قائم منحنی C بر صفحهٔ $x - y + ۲z = ۶$ را بدست آورید.

۲۳. اگر C خم به معادلهٔ $\overrightarrow{r}(t) = \cosh t \overrightarrow{i} + \sinh t \overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$ باشد، مولفه‌های a_T و a_N (مولفه های مماسی و قائم شتاب) و معادلهٔ صفحهٔ بوسان خم را در نقطهٔ $(۱,۰,۰)$ تعیین نمایید.

۲۴. فرض کنید منحنی C' تصویر قائم منحنی C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r}(t) = e^t \overrightarrow{i} + \sinh t \overrightarrow{j} + \cosh t \overrightarrow{k}$ بر صفحهٔ $\pi : x - y + z = ۳$ است. معادلات پارامتری خم C' را بدست آورید.

۲۵. خم C محل تلاقی صفحهٔ $x + y + z = ۱$ با هذلولیگون دو پارچه به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - z^۲ = -۱$ است. برای نقطهٔ $P = (۰,۰,۱)$ برروی این خم
الف) معادلهٔ خط مماس بر C در نقطهٔ P را بنویسید.
ب) انحنای خم C در نقطهٔ P را بدست آورید.

۲۶. فرض کنید $\overrightarrow{a}$، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ سه بردار یکهٔ دوبه‌دو متعامد باشند. فرض کنید C منحنی نمایش تابع برداری $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t)\overrightarrow{a} + (\sin t)\overrightarrow{b} + t\overrightarrow{c}$ باشد. نشان دهید که انحنای منحنی C در نقاط مختلف مقداری ثابت است.

۲۷. منحنی C حاصل تلاقی دو رویه به معادلات $z = x^۲ - y^۲$ و $y = x^۲$ است. مطلوبست تعیین معادلهٔ خط مماس و صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطهٔ $(۱,۱,۰)$ از این منحنی.

۲۸. منحنی C با معادلات پارامتری $x(t) = t - t^۲$ و $y(t) = ۲t + ۴$ و $z(t) = t + t^۲$ مفروض است.
الف) نقطه ای از منحنی C را تعیین کنید که دارای بیشترین مقدار انحنا باشد.
ب) تصویر قائم منحنی C را بر صفحهٔ $x - y + z + ۴ = ۰$ به دست آورید. چه

نتیجه ای می گیرید؟
ج) خطوط مماس بر منحنی C در نقاط مختلف، صفحهٔ $x - y + z + ۴ = ۰$ را در امتداد یک منحنی قطع می کنند. مطلوب است تعیین معادلات پارامتری منحنی اخیر.

۲۹. خم $r(t) = \sqrt{e^{۲t} - ۱}\,\vec{i} + (e^t \sec t)\,\vec{j} + (e^t \tan t)\,\vec{k}$ را در نظر بگیرید.
الف) نشان دهید خم r روی یک رویهٔ درجهٔ ۲ واقع است. معادلهٔ رویه را به دست آورید و آنرا توصیف کنید.
ب) نشان دهید که در هیچ نقطه ای از این خم، خط مماس بر خم، نمی تواند بر صفحهٔ $y = ۰$ عمود باشد.

۳۰. فرض کنید C یک منحنی در صفحهٔ xoy با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ باشد که $x(t)$ و $y(t)$ دو بار مشتق پذیر هستند. ثابت کنید انحنای منحنی C از رابطهٔ زیر به دست می آید.

$$k = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^{۲} + y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

۳۱. فرض کنید C منحنی با تعریف زیر باشد

$$r(t) = (e^t \cos t)\,\vec{i} + (e^t \sin t)\,\vec{j} + (e^t + ۱)\,\vec{k} \qquad (۰ \leqslant t \leqslant ۲\pi)$$

الف) نقطه ای از C را تعیین کنید که صفحهٔ بوسان در آن نقطه بر صفحهٔ $x - y + z = ۱$ عمود باشد.
ب) نشان دهید تمام خطوط واصل از نقطهٔ $(۰, ۰, ۱)$ به نقاط منحنی C روی یک مخروط قرار دارند.

۲-۲ تمرینات تستی

۳۲. انحنای خم $\gamma : \; y = \tan^{-۱} x$ در نقطهٔ $(۱, \frac{\pi}{۴})$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ ب) $\frac{۵\sqrt{۵}}{۴}$ ج) $\frac{۴}{\sqrt{۵}}$ د) $\frac{۴}{۵\sqrt{۵}}$

۳۳. خم C به معادلات پارامتری $\begin{cases} x &= 2e^t \sin t \\ y &= 3e^t \cos t \\ z &= e^t \end{cases}$ روی کدام یک از رویه‌های زیر واقع است؟

الف) کره ب) مخروط بیضوی ج) هذلولی‌گون یک پارچه د) سهمیگون

۳۴. در چه نقطه‌ای از خم $\begin{cases} x &= \sin t \\ y &= \cos t \\ z &= -\sin t \end{cases} \quad |t| < \frac{\pi}{2}$ خط مماس بر خم به موازات صفحهٔ $x + y + z = 1$ است؟

الف) $(0, 1, 0)$ ب) $(1, 0, -1)$ ج) $(-1, 0, 1)$ د) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

۳۵. فرض کنید خم C تقاطع دایرهٔ $x^2 + y^2 = 16$ و صفحهٔ $x + y + z = 5$ باشد. انحنای خم C در نقطهٔ $(0, 4, 1)$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب) $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$ ج) $\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

۳۶. طول کمانی از خم به معادلهٔ $\begin{cases} x &= \frac{t^2}{2} \\ y &= \ln t \\ z &= \sqrt{2}t \end{cases}$ بین دو نقطه متناظر با $t = 1$ و $t = 3$ برابر است با:

الف) $4 + \ln 3$ ب) $4 - \ln 3$ ج) $\frac{9}{2} + \ln 3$ د) $\frac{9}{2} - \ln 3$

۳۷. زاویه‌ای که خطوط مماس بر خم $\begin{cases} x &= t^2 \\ y &= t - t^2 \\ z &= t \end{cases}$ در هر نقطه با صفحهٔ $x + y - z = 1$ می‌سازد کدام است؟

الف) π ب) 0 ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $\frac{\pi}{2}$

۳۸. معادلهٔ دایرهٔ بوسان خم $y = e^{-x^2}$: γ در نقطهٔ $(0, 1)$ کدام است؟

الف) $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ب) $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

ج) $x^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4}$ د) $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

۳۹. خم C با معادلات پارامتری $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \\ z = ۱ \end{cases}$ مفروض است. طول قوس این خم از مبدا مختصات تا نقطهٔ نظیر t کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}(e^t - ۱)$ ب) $\sqrt{۳}(e^t - ۱)$ ج) $\sqrt{۲}e^t - ۱$ د) $\sqrt{۲}e^{۲t} - ۱$

۴۰. معادلهٔ صفحهٔ بوسان‌خم $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \ln t \\ z = t \end{cases}$ در نقطهٔ $(\frac{۱}{e}, ۰, ۱)$ کدام است؟

الف) $ex - y = \frac{۱}{e}$ ب) $ex + y = ۱$

ج) $ex + y = e$ د) $ex - y = e$

۴۱. خم C به معادلات پارامتری $\begin{cases} x(t) = \sinh t \\ y(t) = \cosh t \\ z(t) = t \end{cases}$ مفروض است. مولفهٔ قائم شتاب در هر نقطهٔ دلخواه کدام است؟

الف) ۱ ب) $\frac{۱}{۲\cosh^۲ t}$ ج) -۱ د) $۲\cosh^۲ t$

۴۲. طول خم C به معادلات پارامتری $x(t) = a\sin t$، $y(t) = a\cos t$ و $z(t) = bt$ (a و b ثابت) در فاصلهٔ $۰ \le t \le ۱$ کدام است؟

الف) a ب) b ج) $a^۲ + b^۲$ د) $\sqrt{a^۲ + b^۲}$

۴۳. خم C به معادلات پارامتری $x(t) = a\sin t$ ، $y(t) = a\cos t$ ($a > ۰$ ثابت) مفروض است. بردار قائم یکهٔ منحنی در نقطهٔ کلی نظیر پارامتر t عبارت است از

الف) $\mathbf{N}(t) = (\sin t)\,\overrightarrow{i} + (\cos t)\,\overrightarrow{j}$

ب) $\mathbf{N}(t) = (-\sin t)\,\overrightarrow{i} + (-\cos t)\,\overrightarrow{j}$

ج) $\mathbf{N}(t) = (\cos t)\,\overrightarrow{i} + (-\sin t)\,\overrightarrow{j}$

د) $\mathbf{N}(t) = (-\cos t)\,\overrightarrow{i} + (\sin t)\,\overrightarrow{j}$

۴۴. فرض کنید $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^۳$ یک تابع برداری مشتق پذیر باشد. اگر اندازهٔ $\mathbf{r}(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t باشد آنگاه کدام‌یک از گزینه های زیر در حالت کلی درست است؟

الف) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$ ب) $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)=0$

ج) $\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)=\vec{o}$ د) $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)=\vec{o}$

۴۵. طول قوس خم C به معادلات پارامتری $x(t)=at-a\sin t$ ، $y(t)=a-a\cos t$ ($a>0$ ثابت) روی بازه $0\le t\le 2\pi$ کدام است؟

الف) $4\pi a$ ب) $8\pi a$ ج) $2\pi\sqrt{3}a$ د) $8a$

۴۶. اگر $\mathbf{r}(t)$ یک تابع برداری مشتقپذیر دلخواه باشد، آن‌گاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر همواره درست است؟

الف) $\|\mathbf{r}(t)\|\ \|\mathbf{r}(t)\|'=0$ ب) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=0$

ج) $\|\mathbf{r}(t)\|'=\|\mathbf{r}'(t)\|$ د) $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)=\|\mathbf{r}(t)\|\ \|\mathbf{r}(t)\|'$

۴۷. اگر $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\,\vec{i}+(\sin t)\,\vec{j}+t\,\vec{k}$ آن‌گاه مقدار $\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)\Big)$ در $t=0$ برابر است با

الف) صفر ب) ۲ ج) ۱ د) -2

۴۸. در چه نقطه‌ای از سهمی $x^2=8y$ شعاع انحنای خم برابر ۴ است؟

الف) $(0,0)$ ب) $(1,\frac{1}{8})$ ج) $(2,\frac{1}{2})$ د) $(-1,\frac{1}{8})$

۴۹. صفحهٔ بوسان منحنی C، به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t)=e^t\,\vec{i}+e^{-t}\,\vec{j}+t\,\vec{k}$، در نقطهٔ $P(1,1,0)$ از این منحنی به موازات کدام‌یک از صفحات زیر است؟

الف) $x+y-z=0$ ب) $x+2y-z=1$

ج) $x-y-2z=2$ د) $x-y+z=-1$

۵۰. فرض کنید C خمی هموار با معادلهٔ برداری $\mathbf{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ بوده، نمودار C تماماً برروی کره‌ای به مرکز مبدا مختصات قرار داشته باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در حالت کلی درست است؟

الف) انحنای منحنی C در نقاط مختلف، مقداری ثابت است.

ب) مرکز انحنای منحنی نظیر نقاط مختلف، ثابت و همان مرکز کره است.

ج) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}'(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

د) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}''(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

۵۱. منحنی C به معادلات $x(t)=t^۲-۱$، $y(t)=t^۲+t$ و $z(t)=۱-t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این منحنی، صفحهٔ قائم بر C به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $P(-۱,۰,۱)$ ب) $P(۰,۲,۰)$ ج) $P(۳,۶,-۷)$ د) $P(۰,۰,۲)$

۵۲. منحنی C به معادلهٔ برداری $r(t)=t\overrightarrow{i}+(t^۲-t)\overrightarrow{j}+(t^۳-t)\overrightarrow{k}$ مفروض است. صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطه $P(۱,۰,۰)$ به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $\pi: x-y+z=۰$ ب) $\pi: x-۳y+z=۱$

ج) $\pi: x+۲y-z=۲$ د) $\pi: x+۲y+۲z=۳$

۵۳. منحنی C به معادلهٔ برداری $r(t)=t^۲\overrightarrow{i}+t\overrightarrow{j}+t\overrightarrow{k}$ مفروض است. معادلهٔ تصویر قائم C بر صفحه $x+y-z=۰$ کدام است؟

الف) $r_p(t)=\frac{۲t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

ب) $r_p(t)=\frac{۲t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

ج) $r_p(t)=\frac{۴t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

د) $r_p(t)=\frac{۴t^۲}{۳}\overrightarrow{i}+(t-\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{j}+(t+\frac{t^۲}{۳})\overrightarrow{k}$

۵۴. خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r(t)}=\sin(t)\overrightarrow{i}+\cos(t)\overrightarrow{j}+۲\overrightarrow{k}$ مفروض است. تصویر منحنی C بر صفحهٔ xy در جهت مشخص شده توسط بردار $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ کدام است؟

الف) $\begin{cases} x = \cos t + t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$ ب) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$

ج) $\begin{cases} x = \cos t - t \\ y = \sin t \\ z = ۰ \end{cases}$ د) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t + t \\ z = ۰ \end{cases}$

۵۵. فرض کنید $f(t)=t\overrightarrow{i}+t^۲\overrightarrow{j}+t^۳\overrightarrow{k}$ و $g(t)=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+t\overrightarrow{k}$. مقدار $\frac{d}{dt}(f\times g)(t)$ در $t=۰$ کدام است؟

الف) $\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k}$ ب) $\overrightarrow{k}$ ج) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ د) $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$

۵۶. طول کمانی از خم به معادلهٔ $\begin{cases} x &= e^t \cos t \\ y &= e^t \sin t \end{cases}$ بین دو نقطهٔ نظیر $t = ۰$ و $t = ۴$ برابر است با:

الف) $e^۴ - ۱$ ب) $۲(e^۴ - ۱)$ ج) $\sqrt{۲}(e^۴ - ۱)$ د) $\sqrt{۲}(e^۴ + ۱)$

۵۷. نقطه‌ای از منحنی $y = \ln x$ را تعیین کنید که دارای بیشترین مقدار انحنا باشد.

الف) $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \ln(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))$ ب) $(۱, ۰)$ ج) $(\sqrt{۲}, \ln(\sqrt{۲}))$ د) $(۲, ۲\ln(\sqrt{۲}))$

۵۸. معادلهٔ کرهٔ بوسان خم C به معادلهٔ برداری $\overrightarrow{r(t)} = t\overrightarrow{i} + t^۲\overrightarrow{j} + t^۳\overrightarrow{k}$ در نقطهٔ $(۰, ۰, ۰)$ کدام است؟

الف) $x^۲ + y^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

ب) $(x - \frac{۱}{۲})^۲ + y^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

ج) $x^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۲}$

د) $x^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ + z^۲ = \frac{۱}{۴}$

۵۹. خم C با معادلات پارامتری $C : \ x = e^t cost \ , \quad y = e^t sint \ , \quad z = t$ مفروض است.طول قوس این خم از مبدا مختصات تا نقطهٔ نظیر t کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}e^t$ ب) $\sqrt{۳}e^t$ ج) $\sqrt{۳}e^{t^۲}$ د) $\sqrt{۳}e^{۲t}$

۶۰. معادلهٔ صفحهٔ بوسان‌خم C با معادلات پارمتری

$$C : \ x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

(a, b ثابت) در نقطهٔ نظیر $t = ۰$ کدام است؟

الف) $by - az = ۰$ ب) $by + az = ۰$

ج) $ay - bz = ۰$ د) $ay + bz = ۰$

۶۱. خم C به معادلات $x(t) = \cos t$ ،$y(t) = \sin t$ و $z(t) = t$ مفروض است. مولفهٔ قائم شتاب حرکت در هر نقطهٔ دلخواه کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ج) ۱ د) ۰

۶۲. معادلهٔ صفحهٔ بوسانِ خم C با معادلات پارامتری

$$C : \ x = te^t, \quad y = e^{-t}, \quad z = e^{۲t}$$

در نقطهٔ $(۰,۱,۱)$ کدام گزینه است؟

الف) $۲y - x + ۱ = ۰$ ب) $۲x - z + ۱ = ۰$

ج) $۲z - y + ۱ = ۰$ د) $۲z - x + ۱ = ۰$

۶۳. اگر $\mathbf{r}$ یک تابع برداری باشد که مشتق دوم آن روی $I \subseteq \mathbb{R}$ موجود است، کدام یک از گزاره های زیر همواره درست است؟

الف) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}'') = ۲(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')$ ب) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') = \mathbf{r} \times \mathbf{r}''$

ج) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'') = ۲(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'')$ د) $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}'')) = \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}''$

۶۴. برای خم C نمودار تابع برداری $r(s) = (\sinh^{-۱} s - ۱)\overrightarrow{i} + \sqrt{۱+s^۲}\,\overrightarrow{j}$، بردار یکهٔ مماس کدام است؟

الف) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{i} + \frac{s}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{j}$ ب) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{i} + s\overrightarrow{j}$

ج) $s\overrightarrow{i} + \frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}\overrightarrow{j}$ د) $\frac{۱}{\sqrt{۱+s^۲}}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$

۶۵. برای تابع برداری $r = r(t)$ کدام گزینه همواره درست است؟

الف) $\mathbf{r}''(\mathbf{t}) \perp \mathbf{r}'(\mathbf{t})$ ب) $\mathbf{r}''(\mathbf{t}) \perp \mathbf{B}(\mathbf{t})$

ج) $\mathbf{r}'(\mathbf{t}) \times \mathbf{r}(\mathbf{t}) || \mathbf{B}(\mathbf{t})$ د) $\mathbf{r}'(\mathbf{t}) || \mathbf{N}(\mathbf{t})$

۶۶. اگر خم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \mathbf{t}\overrightarrow{i} + (\ln\cos\mathbf{t})\overrightarrow{j}$، $۰ \le t \le \pi/۲$ و $s(t)$ طول کمان اندازه‌گیری شده از نقطه $(۰,۰)$ تا نقطهٔ نظیر t باشد، در این صورت $s(t)$ کدام است؟

الف) $\ln|\sec t + \tan t|$ ب) $\ln|\csc t + \tan t|$

ج) $\ln|\sec t + \cot t|$ د) $\ln|\csc t + \cot t|$

۶۷. خم C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ داده شده است. اگر $s(t)$ طول قوس از نقطهٔ نظیر $t = ۰$ تا نقطهٔ نظیر t روی خم باشد، $s(t)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

الف) $s'^۲ - s^۲ = ۲ss'$ ب) $s'^۲ + s^۲ = s + s'$

ج) $s'^۲ + s^۲ = ۲$ د) $s'^۲ - s^۲ = ۲$

۶۸. برای ماکزیمم و مینیمم انحنای خم $y = x^۲$ کدام گزینه درست است؟

الف) ماکزیمم ۲ و مینیمم صفراست

ب) ماکزیمم وجود ندارد ومینیمم صفر است

ج) ماکزیمم ۲ و مینیمم وجود ندارد

د) ماکزیمم ۱ و مینیمم $\frac{۱}{۲}$ است.

۶۹. انحنای خم C با معادلات پارامتری $C : \ x = t^۲ \ , \quad y = t^۳$ در نقطهٔ $(۱, ۱)$ برابر است با:

الف) $\frac{۱۲}{۵\sqrt{۵}}$ ب) $\frac{۸}{۱۱\sqrt{۱۱}}$ ج) $\frac{۶}{۱۳\sqrt{۱۳}}$ د) $\frac{۱۳}{۷\sqrt{۷}}$

۷۰. کدام گزاره همواره درست است؟

الف) فصل مشترک سه صفحه با بردارهای نرمال غیر واقع در یک صفحه، یک خط است.

ب) زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{r}'(t)$ و $\mathbf{r}''(t)$ مقداری ثابت و مستقل از t است.

ج) تابع طول قوس برای یک خم هموار، همواره معکوس‌پذیر است.

د) هر تابع برداری مشتق‌پذیر، بر مشتق خود عمود است.

۷۱. خم C به معادلات $x(t) = t^۲ - ۱$، $y(t) = t^۲ + t$ و $z(t) = ۱ - t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این خم، صفحهٔ قائم به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $(-۱, ۰, ۱)$ ب) $(۰, ۲, ۰)$ ج) $(۳, ۶, -۷)$ د) $(۰, ۰, ۲)$

۷۲. منحنی C به معادلات $x(t) = t^۲ - ۱$، $y(t) = t^۲ + t$ و $z(t) = ۱ - t^۳$ مفروض است. در کدام نقطه از این منحنی، صفحهٔ قائم بر C به موازات صفحهٔ xoz است؟

الف) $P(-۱, ۰, ۱)$ ب) $P(۰, ۲, ۰)$ ج) $P(۳, ۶, -۷)$ د) $P(۰, ۰, ۲)$

۷۳. منحنی C به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t) = t\overrightarrow{i} + (t^۲ - t)\overrightarrow{j} + (t^۳ - t)\overrightarrow{k}$ مفروض است. صفحهٔ بوسان منحنی C در نقطهٔ $P(۱, ۰, ۰)$ به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $\pi : x - y + z = ۰$ ب) $\pi : x - ۳y + z = ۱$

ج) $\pi : x + ۲y - z = ۲$ د) $\pi : x + ۲y + ۲z = ۳$

۷۴. صفحهٔ بوسان منحنی C، به معادلهٔ برداری $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$، در نقطهٔ $P(۱,۱,۰)$ از این منحنی به موازات کدامیک از صفحات زیر است؟

الف) $x + y - z = ۰$ ب) $x + ۲y - z = ۱$

ج) $x - y - ۲z = ۲$ د) $x - y + z = -۱$

۷۵. خم C به معادلات پارامتری $x(t) = t$ ، $y(t) = \sin t$ ، $z(t) = \cos t$ مفروض است. انحنای این خم به عنوان تابعی از پارامتر t عبارتست از:

الف) $\kappa(t) = \frac{t}{۲}$ ب) $\kappa(t) = \frac{۱}{۲}$

ج) $\kappa(t) = \sqrt{۱ + t^۲}$ د) $\kappa(t) = ۱$

۷۶. فرض کنید C خم حاصل از برخورد رویه‌های $x^۲ + y^۲ - z^۲ = ۱$ و $x^۲ + z^۲ = ۱$ است. اگر C' تصویر خم C بر صفحهٔ yoz باشد، آنگاه خم C' برروی کدامیک از منحنی‌های دکارتی زیر از صفحهٔ yoz قرار گرفته است.

الف) $y^۲ + z^۲ = ۱$ ب) $y^۲ - z^۲ = ۱$

ج) $y^۲ - ۲z^۲ = ۱$ د) $y^۲ - ۲z^۲ = ۰$

۷۷. انحنای منحنی C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = ۲t\mathbf{i} + t^۲\mathbf{j} - \frac{۱}{۳}t^۳\mathbf{k}$ در نقطهٔ نظیر t عبارتست از

الف) $\kappa(t) = \frac{۱}{(t^۲+۱)^۲}$ ب) $\kappa(t) = \frac{t}{(t^۲+۱)^۲}$

ج) $\kappa(t) = \frac{۲}{(t^۲+۲)^۲}$ د) $\kappa(t) = \frac{t}{(t^۲+۲)^۲}$

۷۸. منحنی C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + (e^{-t}\cos t)\mathbf{j} + (e^{-t}\sin t)\mathbf{k}$ روی کدامیک از رویه‌های زیر قرار دارد؟

الف) $z^۲ = x^۲ + y^۲$ ب) $x^۲ = z^۲ + y^۲$

ج) $y^۲ = x^۲ + z^۲$ د) $z^۲ = x^۲ - y^۲$

۷۹. خم C به معادلهٔ $\mathbf{r}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ داده شده است. اگر $s(t)$ طول قوس از نقطه نظیر $t = ۰$ تا نقطه نظیر t روی منحنی باشد، $s(t)$ در کدام معادله صدق می‌کند؟

الف) $s'^۲ - s^۲ = ۲ss'$ ب) $s'^۲ + s^۲ = s + s'$

ج) $s'^۲ + s^۲ = ۲$ د) $s'^۲ - s^۲ = ۲$