مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) خط d و دو نقطه A و B روی آن و نقطه‌ی O خارج از آن مفروض‌اند. از O به A و B وصل کرده و هر کدام را به اندازه‌ی خودشان امتداد می‌دهیم تا نقاط C و D حاصل شوند. ثابت کنید نقاط C و D از خط d هم فاصله‌اند.

۲) متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است. اوساط اضلاع AD و BC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر CE و AF قطر BD را به ترتیب در M و N قطع کنند، نشان دهید : $DM=BN$

۳) روی اضلاع AB , BC , CD و DA از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ به ترتیب چهار پاره‌خط AE , BF , CM و DN را بطور مساوی جدا می‌کنیم. ثابت کنید چهار ضلعی $EFMN$ متوازی‌الاضلاع است.

۴) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و درخارج از آن دو مثلث متساوی‌الساقین ABD و ACE را می‌سازیم بطوری‌که $AB=AD$ و $AC=AE$. اگر داشته‌باشیم $D\hat{A}E=\hat{B}+\hat{C}$ و M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید : $DE=2AM$

۵) نقطه دلخواه D را بر روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC انتخاب می‌کنیم. اگر E و F به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر اضلاع AB و AC و BH ارتفاع وارد بر AC باشد، ثابت کنید:

$$DE+DF=BH$$

۶) مربع $ABCD$ و نقطه E بر ضلع CD مفروض‌اند. نیمساز زاویه‌ی EAB را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در F قطع کند. ثابت کنید: $BF+DE=AE$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC عمودی بر نیمساز داخلی زاویه‌ی A رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC ویا امتداد آن‌ها را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید : $BE=CF$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، نقاط E و F را به ترتیب روی AC و امتداد AB طوری انتخاب می‌کنیم که $BE=CF$ باشد، نشان دهید BC، پاره خط EF را نصف می‌کند

۹) چهار ضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع است. از نقاط B , C و D عمودهای BB' , CC' و DD' را بر خط d که از نقطه‌ی A می‌گذرد، فرود می‌آوریم. نشان دهید: $CC'=BB'+DD'$

۱۰) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع ABC' , BCA' , $CB'A$ را می‌سازیم. ثابت کنید: $AA'=BB'=CC'$

۱۱) ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه

الف) میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

ب) اگریکی از زوایا برابر ۳۰° باشد ، ضلع روبروی زاویه ۳۰° برابر نصف وتر است.

۱۲) در مثلث ABC، $\hat{B}-\hat{C}=۹۰^\circ$ است. اگر نقطه‌ی H محل برخورد ارتفاع‌های مثلث باشد، ثابت کنید کـه دو مثلث ABC و HBC همنهشت هستند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نقاط اوساط اضلاع AB ، BC ، CD و DA از چهار ضلعی $ABCD$ را به ترتیب M، N، P و Q می‌نامیم. ثابت کنید چهار ضلعی $MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

۲) خط دلخواهی را از رأس C از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ می‌گذرانیم تا امتدادهای اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AB}{AE}+\frac{AD}{AF}=۱$

۳) امتداد ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ یکدیگر را در M قطع می‌کنند. از M خطی به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم تا امتدادهای AC و BD را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید:

$$EM=MF$$

۴) وسط ضلع BC از مثلث ABC را M می‌نامیم. نقطه دلخواه F را بر روی AC انتخاب می‌کنیم و BF را رسم می‌کنیم تا AM را در E قطع کند. ثابت کنید: $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BE}$

۵) مثلث ABC مفروض است. سه خط موازی یکدیگر از سه رأس A، B و C می‌گذرانیم تا اضلاع مقابل یا امتداد آنها را به ترتیب در A'، B' و C' قطع کند. اگر A' بین B و C باشد، ثابت کنید:

$$\frac{۱}{AA'}=\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{CC'}$$

۶) در مثلث ABC، M وسط ضلع BC و N وسط میانه‌ی AM است. محل تقاطع AC با امتداد BN را D می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AD=\frac{۱}{۳}AC$

ب) $ND=\frac{۱}{۴}BD$

۷) در مثلث ABC، از M وسط ضلع BC، خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا نیمساز رأس A را در N قطع کند. نشان دهید: $MN=\frac{|AC-AB|}{۲}$

۸) خطی که موازی قطر AC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ رسم می‌شود، اضلاع AB و BC را در E و F قطع می‌کند. محل برخورد دو خط CE و AD را P و محل برخورد دو خط AF و DC را Q می‌نامیم. ثابت کنید خط PQ نیز با قطر AC موازی است.

۹) در مثلث ABC، A را نسبت به نقطه‌ی وسط BC، قرینه می‌کنیم تا P و نقطه‌ی B را نسبت به C قرینه می‌کنیم تا Q بدست آید. ثابت کنید که اضلاع مثلث APQ دو برابر میانه‌های مثلث ABC است.

۱۰) اگر نقاط M و N اوساط ساق‌های AD و BC از ذوزنقه $ABCD$ باشند ثابت کنید :

الف) $MN \parallel AB \parallel CD$

ب) $MN = \frac{AB+CD}{۲}$

۱۱) دو نیم خط موازی Ax و By را از دو سر پاره خط AB و دریک طرف آن رسم می‌کنیم. نقاط M و N را به ترتیب روی این دو نیم خط طوری انتخاب می‌کنیم که $AM+BN=AB$. اگر D وسط MN باشد، ثابت کنید زاویه ADB قائمه است.

۱۲) در مثلث ABC، از نقطه‌ی دلخواه D روی ضلع BC، خطی موازی میانه AM رسم می‌کنیم تا AC و AB ویا امتداد آن‌ها را به ترتیب در N و P قطع کند. ثابت کنید:

الف) $DP+DN$ مقداری ثابت است.

ب) $\frac{AP}{AN}=\frac{AB}{AC}$

۱۳) در ذوزنقه $ABCD$، از P، محل برخورد اقطار، خطی موازی قاعده‌ی AB رسم می‌کنیم تا دو ساق AD و BC را به ترتیب در E و F قطع کند. ثابت کنید :

الف) $EP=PF$

ب) $\frac{۲}{EF}=\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{CD}$

۱۴) در مثلث قائم‌الزاویه ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$، پای ارتفاع نظیر رأس A را H و پای ارتفاع‌های وارد از H بر اضلاع AC و AB را به ترتیب E و F می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AH^۲=BH.CH$

ب) $AB^۲=BH.BC$

ج) $HB.HC=AE.EC+AF.FB$

۱۵) در متوازی‌الاضلاع $ABCD$، خطی که از A می‌گذرد BC, BD و امتداد CD را به ترتیب در M و N و L قطع می‌کند. نشان دهید: $AM^۲=MN.ML$

۱۶) دو مربع $ACEK$ و $ABFL$ را در خارج مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ می‌سازیم. محل برخورد دو پاره‌خط BE و AC را P و محل برخورد دو پاره‌خط CF و AB را Q می‌نامیم. نشان دهید:

الف) $AP=AQ$

ب) $AP^۲=BQ.CP$

۱۷) در مثلث ABC، AH ارتفاع می‌باشد. E و F را به ترتیب پای ارتفاع‌های وارد از H بر اضلاع AC و AB می‌نامیم. نشان دهید: $\widehat{BEH}=\widehat{CFH}$.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC $(AB=AC)$ مفروض است. از نقطه‌ی D واقع بر وتر BC، عمودهای DE و DF را به ترتیب بر AC و AB فرود می‌آوریم. اگر M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $ME=MF$

۲) در مثلث ABC، بر دو ضلع AB و AC و در خارج مثلث ABC، دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین طوری ایجاد می‌کنیم که AB و AC وترهای آن‌ها باشد. اگر رئوس این دو مثلث را D و E بنامیم و M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

الف) $MD=ME$

ب) $MD\perp ME$

۳) روی ضلع‌های AB و AC از مثلث ABC مربع‌های $ABDE$ و $ACKF$ را رسم می‌کنیم. اگر M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید:

الف) $EF=2AM$

ب) $EF\perp AM$

۴) نقطه‌ی P را درون مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که داشته‌باشیم $P\hat{B}A=P\hat{C}A$. پای عمودهای وارد از P بر اضلاع AB و AC را به ترتیب E و F می‌نامیم. اگر M وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید: $ME=MF$

۵) نقاط D و E را به ترتیب روی امتداد اضلاع AB و AC (از طرف B,C) از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $BD=CE$ باشد و محل تقاطع امتدادهای BC و DE را F می‌نامیم. ثابت کنید:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{EF}{DF}$$

۶) خطی که از اوساط اقطار چهار ضلعی $ABCD$ می‌گذرد، اضلاع AB و CD را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. ثابت کنید: $\frac{AE}{BE}=\frac{CF}{DF}$

۷) BH و CK ارتفاع‌های مثلث ABC هستند. نقاط P و Q را به ترتیب روی BH و CK طوری انتخاب می‌کنیم که داشته‌باشیم $\widehat{APC}=\widehat{AQB}=90^\circ$. ثابت کنید: $AP=AQ$

۸) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$، M وسط ضلع BC و H پای عمود وارد از M بر ضلع AC و N وسط MH می‌باشد. ثابت کنید: $AN\perp BH$

۹) در مثلث ABC، زاویه‌ی B منفرجه است. اگر AH ارتفاع مثلث باشد و بدانیم که $\hat{B}-\hat{C}=90^\circ$ ثابت کنید: $\left(\frac{AB}{AC}\right)^2=\frac{BH}{CH}$

۱۰) از G، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، خط دلخواهی می‌گذرد. تصاویر نقاط A, B و C روی این خط را به ترتیب A', B' و C' می‌نامیم. نشان دهید مجموع دو تا از طول‌های AA', BB' و CC' برابر سومی‌است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) از نقطه P مماس PT و قاطع **PAB** را بر دایره رسم می‌کنیم. نشان دهید: $TA\ .\ PT = TB\ .\ PA$

۲) ارتفاع های AA' و BB' از مثلث ABC یکدیگر را در H قطع می‌کنند. ارتفاع AA' را امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث ABC را در D قطع کند. ثابت کنید ضلع BC نیمساز زاویه HBD است.

۳) دو دایره در نقطه P بریکدیگر مماس خارج‌اند. دو خط دلخواه طوری رسم می‌کنیم که از نقطه P گذشته و دوایر رایکی در A و B و دیگری در C و D قطع کنند. نشان دهید: $AC \parallel BD$

۴) نیمساز AD از مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقطه E قطع کند. نشان دهید:

الف) $AB\ .\ AC = AD\ .\ AE$

ب) $CE^2 = AE\ .\ DE$

۵) اگر نیمساز زوایای A و B از مثلث ABC دایره محیطی مثلث را به ترتیب در E و F ویکدیگر را در I قطع کنند، ثابت کنید: $CE = BE = IE$

۶) دو دایره به مراکز O_1 و O_2 یکدیگر را در A و B قطع می‌کنند. خط دلخواهی از B می‌گذرانیم تا دو دایره را در E و F قطع کند. ثابت کنید: $\overset{\triangle}{AEF} \sim \overset{\triangle}{AO_1O_2}$

۷) روی امتداد قطر CD از نیم دایره به مرکز O (نزدیک به C) نقطه A را انتخاب می‌کنیم و خطی از A می‌گذرانیم تا نیم‌دایره را در دو نقطه B و E قطع کند بطوری که $AB = DO$. اگر $E\hat{O}D = 45^\circ$ باشد، اندازه زاویه A را بیابید.

۸) ارتفاع AH و نیمساز AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم. قطری از دایره محیطی مثلث را که از A می‌گذرد رسم می‌کنیم و انتهای دیگر قطر را A' می‌نامیم. نشان دهید AD زاویه $H\hat{A}A'$ را نصف می‌کند.

۹) روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو نقطه C و D را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ باشد. از نقطه D عمودی بر CD خارج می‌کنیم تا AC را در F قطع کند. اگر محل برخورد AC و BD را E بنامیم، نشان دهید: $AF = FE$

۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC را رسم کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره محیطی مثلث را در نقاط A'، B' و C' قطع کنند. اگر ارتفاع‌های مثلث در نقطه‌ی H همرس باشند، نشان دهید ارتفاع‌ها، نیمسازهای زوایای مثلث $A'B'C'$ هستند.

۱۱) خطی که از رأس B از مثلث ABC به موازات ضلع AC رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در C را در نقطه‌ی B' قطع می‌کند و خطی که از رأس C از مثلث ABC به موازات ضلع AB رسم می‌شود، خط مماس بر دایره محیطی مثلث در B را در نقطه‌ی C' قطع می‌کند ثابت کنید:

$$BC^{۲} = CB'.BC'$$

۱۲) نقطه‌ی P را روی دایره ای به مرکز O انتخاب می‌کنیم و تصویر آن بر روی قطر AB از دایره را N می‌نامیم روی شعاع PO پاره خط PQ را برابر $۲AN$ جدا می‌کنیم اگر AQ دایره را در نقطه دیگری مانند R قطع کند، ثابت کنید: $\widehat{AOR} = ۳\widehat{AOP}$

۱۳) دایره ای به قطر AB مفروض است . وتر دلخواه AC و نیمساز زاویه‌ی $C\hat{A}B$ را رسم می‌کنیم تا این نیمساز وتر BC را در F و دایره را در H و مماسی که در نقطه‌ی B بر دایره رسم می‌شود را در D قطع کند . ثابت کنید: $FH = DH$, $BD = BF$

۱۴) سه دایره $(O_۱), (O_۲), (O_۳)$ دو به دو در نقاط D, E, F مماس خارج اند . امتداد های DE, DF دایره $(O_۱)$ را در نقاط A, B قطع می‌کنند. ثابت کنید:

الف) AB قطر دایره $(O_۱)$ است.

ب) خط المرکزین دو دایره $(O_۲)$ و $(O_۳)$ موازی AB است.

۱۵) دو دایره $(O_۱), (O_۲)$ در نقطه A بریکدیگر مماس خارج اند. از نقطه دلخواه B بر روی دایره $(O_۱)$ مماس BD را بر دایره $(O_۲)$ رسم می‌کنیم تا دایره $(O_۱)$ را در C قطع کند. اگر امتداد پاره خط BA دایره $(O_۲)$ را در F قطع کند، ثابت کنید AD نیمساز زاویه $\widehat{CAF}$ است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) به قطر ساق BC از ذوزنقه‌ی قائم الزاویه $ABCD$ دایره ای رسم کرده ایم تا ساق قائم AD را در M و N قطع کند. اگر $CD=۷, AB=۳$ باشند مقدار $AM.MD$ را بیابید.

۲) دو دایره‌ی $C(O), C'(O')$ در نقاط M, N متقاطع اند. ثابت کنید امتداد خط MN مماس مشترک خارجی دو دایره را نصف می‌کند.

۳) از نقطه‌ی دلخواه A در خارج دایره‌ی $C(O)$ مماس AB را بر دایره رسم می‌کنیم و نقطه‌ی E را طوری در نظر می‌گیریم که $AB=AE$ باشد. اگر D نقطه ای دلخواه روی دایره باشد، محل برخورد AD با دایره را C نامیده و محل برخورد خطهای ED, EC با دایره را به ترتیب G, F می‌نامیم. ثابت کنید: $AE \parallel FG$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) دو دایره‌ی C_1, C_2 در نقاط A, B متقاطع اند . نقطه‌ی M را روی خط AB در نظر می‌گیریم و دو خط از آن می‌گذرانیم تایکی دایره‌ی C_1 را در E, F و دیگری دایره‌ی C_2 را در P, Q قطع کند. ثابت کنید چهار نقطه‌ی P, Q, F, E هم دایره‌اند.

۲) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است . نقطه‌ی وسط کمان AB را P می‌نامیم و دو وتر PM, PN را چنان رسم می‌کنیم که AB را به ترتیب در D, E قطع کند. ثابت کنید چهارضلعی $DENM$ محاطی است.

۳) دو نقطه‌ی C, D را طوری روی نیم دایره‌ی به قطر AB انتخاب می‌کنیم که $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$ باشد. P را نیز نقطه‌ای دلخواه روی نیم دایره در نظر می‌گیریم و محل تلاقی AD, AC با PC, PB را بـه ترتیب F, E می‌نامیم. ثابت کنید: $EF \perp AD$

۴) بر روی ضلع AC از مثلث متساوی الاضلاع ABC مربعی بنا می‌کنیم . مرکز مربـع را E و وسط ضلع AB را D می‌نامیم. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{D}E$ را بیابید.

۵) ثابت کنید که در هر مثلث خطی که پای ارتفاع‌های وارد از دو رأس را به‌یکدیگر وصل مـی‌کنـد، بـر شعاعی از دایره‌ی محیطی که از رأس سوم رسم شود، عمود است.

۶) چهار دایره مطابق شکل، هر کدام دو دایره‌ی مجاور خود را در دو نقطه قطع می‌کند. ثابت کنید اگـر چهارضـلعی $ABCD$ محاطی باشد، چهارضلعی $A'B'C'D'$ نیز محاطی خواهد بود.

۷) در نیم دایره‌ی روبرو اگر O مرکز دایـره بـوده و $\hat{M} = \hat{N} = ۱۰^{\circ}$ و $\overset{\frown}{AM} = ۴۰^{\circ}$ باشـند، انـدازه‌ی کمـان $\overset{\frown}{BN}$ را پیدا کنید.

۸) از دو رأس B, C از مثلـث ABC عمودهـای BB', CC' را بـر AO (O مرکـز دایـره‌ی محیطـی ABC) رسم می‌کنیم. ثابت کنید نقاط B', C' از وسط ضلع BC به‌یک فاصله اند.

۹) ارتفاع‌های AA', BB', CC' از مثلث ABC یکدیگر را در نقطه‌ی H قطع می‌کنند. نشان دهید ارتفاع AA' نیمساز زاویه‌ی $\widehat{B'A'C'}$ است.

۱۰) دایره ای که از رأس‌های A, B, C از متوازی الاضلاع $ABCD$ می‌گذرد ضـلع AD را در A' و ضلع CD را در C' قطع می‌کند. نشان دهید : $\dfrac{A'D}{A'C'} = \dfrac{A'C}{A'B}$

۱۱) قضیه‌ی بطلمیوس : در هر چهار ضلعی محاطی $ABCD$ نشان دهید:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$

۱۲) مثلث‌های ناپلئونی : بر روی اضلاع مثلث ABC سه مثلث BCA',ACB',ABC' را طوری بنا کرده ایم که $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180^\circ$. ثابت کنید دایره‌های محیطی این سه مثلث دریک نقطه همرس اند.

۱۳) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی الاضلاع ABC',ACB',BCA' را بنا می‌کنیم . نشان دهید سه پاره خط CC',BB',AA' دریک نقطه همرس اند.

۱۴) در چهار ضلعی محاطی $ABCD$ اقطار BD ,AC بریکدیگر عمودند. نشان دهید فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی چهارضلعی از ضلع AB برابر نصف طول ضلع CDاست.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مکان هندسی نقاطی را بیابید که قوت یکسانی نسبت به دایره مفروض دارند.

۲) ضلع BC از مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض اند و رأس A بر روی کمان $B\widehat{A}C$ تغییر می‌کند. ضلع AB را از طرف A به اندازه AC امتداد می‌دهیم تا نقطه‌ی M بدست آید. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.

۳) نشان دهید مکان هندسی نقطه ای درون‌یک زاویه‌ی مفروض که فاصله‌های آن از دو ضلع این زاویه مقدار مفروض K است، خط راست ثابتی است که از رأس این زاویه می‌گذرد.

۴) BB',AA' دو قطر عمود بر هم از دایره‌ی مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد (O) را در AA',M را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطه‌ی برخورد مماسی که در M بر دایره‌ی (O) رسم می‌شود و خطی که در N بر AA' عمود می‌شودیک خط راست را می‌پیماید.

۵) مثلث متساوی الاضلاع ABC مفروض است . دو نقطه‌ی متغیر D, E به ترتیب بر امتدادهای اضلاع AB, AC (نزدیک به B, C) قرار دارند به طوری که $BD.CE = BC^2$. اگر محل تلاقی BE, CD را K بنامیم مکان هندسی نقطه‌ی K را پیدا کنید.

۶) قطرهای عمود بر هم BD, AC از دایره‌ی (O) مفروض اند. وتر متغیر AP از این دایره قطر BD را در E قطع می‌کند. از E خطی موازی قطر AC رسم می‌کنیم تا خط BP را در M قطع کند. مکان هندسی نقطه‌ی M را بیابید.

۷) نقطه‌ی A و دو خط عمود بر هم d',d مفروض اند. مستطیل متغیر $ABCD$ را طوری رسم می‌کنیم که رئوس B, D از آن به ترتیب روی خطوط d',d قرار داشته باشند. مکان هندسی رأس C از این مستطیل را بیابید.

۸) دایره‌ی متغیری که ازیک رأس‌یک زاویه‌ی مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های A, B قطع می‌کند. نشان دهید مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایره متشکل از دو خط راست است.

۹) دایره‌ی (O) و دو نقطه‌ی B, C بر روی آن مفروض‌اند. نقطه‌ی A روی کمان BAC از این دایره تغییر می‌کند. نقطه‌ی وسط AB را K می‌نامیم و عمود KH را بر AC فرود می‌آوریم . مکان هندسی نقطه‌ی H را بیابید.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) در مثلث ABC, AA' ارتفاع ، AM میانه و AD نیمساز زاویه‌ی A می‌باشد. پای عمودهای وارد از B, C بر نیمساز رأس A را به ترتیب B', C' می‌نامیم . ثابت کنید:

الف) دو مثلث ABC, $A'B'C'$ متشابه اند.

ب) مثلث $MB'C'$ متساوی الساقین است.

ج) چهارضلعی $A'B'MC'$ محاطی است.

۲) نقطه‌ی دلخواه P روی نیمساز زاویه‌ی A از مثلث ABC مفروض است . A', B', C' به ترتیب تصاویر نقطه‌ی P براضلاع BC, AC, AB می‌باشند . امتداد PA' ، پاره خط $B'C'$ را در N قطع می‌کند. نشان دهید نقطه‌ی N بر روی میانه‌ی AM از مثلث ABC قرار دارد.

۳) دایره ای در B بر ضلع AB از مثلث ABC مماس است و از I محل برخورد نیمسازهای داخلی مثلث می‌گذرد. این دایره AC را در H و K قطع می‌کند. ثابت کنید که IC نیمساز زاویه‌ی HIK است.

۴) D نقطه‌ای دلخواه روی ضلع BC از مثلث متساوی الساقین $ABC (AB = AC)$ است. پای عمودهای وارد از نقطه‌ی D بر اضلاع AC, AB را به ترتیب E, F می‌نامیم. اگر M وسط قاعده‌ی BC باشد، ثابت کنید: $ME = MF$

۵) ثابت کنید مراکز نیمسازی (محل برخورد نیمسازهای داخلی) چهار مثلثی که رئوسشان، رئوس یک چهارضلعی محاطی است یک مستطیل تشکیل می‌دهند.

۶) نیم دایره ای به قطر AB و مرکز O مفروض است . نقطه‌ی P را روی امتداد AB انتخاب می‌کنیم (A بین B, P). از P قاطعی رسم می‌کنیم تا نیم دایره را در C, D قطع کند (C بین D, P) . نقطه‌ی تقاطع دوایر محیطی دو مثلث OAC, OBD را Q می‌نامیم. ثابت کنید: $O\hat{Q}P = ۹۰^\circ$

۷) DE قطری از دایره‌ی محیطی مثلث ABC است که بر ضلع BC در نقطه‌ی M عمود است. H تصویر نقطه‌ی A روی قطر DE و K تصویر نقطه‌ی E روی AC است. ثابت کنید EK بر دایره‌ی محیطی مثلث HMK مماس است.

۸) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. محل تقاطع امتداد اضلاع AB, CD را E و محل تقاطع امتداد اضلاع AD, BC را F می‌نامیم. نیمساز زاویه‌ی $\hat{E}$ اضلاع AD, BC را به ترتیب در P, Q و نیمساز زاویه‌ی $\hat{F}$ اضلاع AB, CD را به ترتیب در K, L قطع می‌کند. ثابت کنید چهارضلعی $PLQK$ یک لوزی است.

۹) از نقطه‌ی P خارج دایره‌ی (O) مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. نقطه‌ی Q را بر امتداد OP طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $PQ = PT$. مماس QS را بر دایره رسم می‌کنیم و تصویر نقطه‌ی S روی OP را K می‌نامیم. ثابت کنید: $PQ = PK$

۱۰) دو دایره در نقطه‌ی P بر هم مماس داخل اند. وتر AB از دایره‌ی بزرگتر بر دایره‌ی کوچکتر در نقطه‌ی Q مماس است . ثابت کنید PQ از وسط کمان AB می‌گذرد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) سه دایره‌ی برابر از نقطه‌ی H می‌گذرند. ثابت کنید H مرکز ارتفاعی مثلثی است که رئوسش بر سه نقطـه‌ی دیگر برخورد دو به دو دایره‌ها منطبق است.

۲) ثابت کنید که اگریکی از اضلاع مثلثی بر خط ثابتی در صفحه و مرکز ارتفاعی آن بر نقطـه ای ثابـت قـرار گیـرد آنگاه دایره‌ی محیطی این مثلث هم از نقطه ای ثابت می‌گذرد.

۳) در مثلث ABC، H مرکز ارتفاعی و M وسط‌یکی از اضلاع مـی‌باشـد. HM را از طـرف M امتـداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید M وسط HK است.

۴) متوازی الاضلاع $ABCD$ را در نظر گرفته، دایره‌ی محیطی مثلث ABC و قطر BOB' از این دایـره را رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط DB' بر AC عمود است.

۵) خطی که مرکز ارتفاعی مثلث ABC را به وسط ضلع BC از آن وصل می‌کنـد، دایـره‌ی محیطـی آن را در نقاط A_1 ، A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC ، A_1BC ، A_2BC رئوس‌یک مثلث قائم الزاویه هستند.

۶) ثابت کنید قرینه‌ی مرکز ارتفاعی نسبت به‌یک رأس و قرینه‌ی آن رأس نـسبت بـه وسـط ضـلع مقابـل و مرکـز دایره‌ی محیطی مثلث بریک استقامت هستند.

۷) نشان دهید مثلثی که رأس‌های آن، پای ارتفاع وارد بر قاعده و نقاط وسط ارتفـاع‌هـای وارد بـر دو ضـلع دیگـر ازیک مثلث مفروض هستند، با مثلث مفروض متشابه است و دایره‌ی محیطی این مثلث از مرکز ارتفاعی و وسـط قاعده‌ی مثلث مفروض می‌گذرد.

۸) ثابت کنید تصاویر مرکز ارتفاعی مثلث روی دو نیمساز داخلی و خارجی یک زاویه‌ی آن مثلث، روی خطـی قـرار دارند که از وسط ضلع روبروی آن زاویه می‌گذرد.

۹) نقاط A', B', C' را به ترتیب بر اضلاع BC ، AC ، AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که دو مثلث $ABC, A'B'C'$ بایکدیگر متشابه باشند $(\hat{B} = \hat{B}', \hat{A} = \hat{A}')$ نشان دهید که مرکز ارتفـاعی مثلث $A'B'C'$ بر مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC منطبق است.

۱۰) ارتفاع‌های مثلث ABC دایره‌ی محیطی مثلث را در نقاط A', B', C' قطع می‌کننـد . همچنـین اضـلاع مثلث‌های $ABC, A'B'C'$ یکدیگر را به ترتیب در نقاط M ، N ، P ، Q ، R ، S قطع مـی‌کننـد. ثابـت کنید خطوط MQ ، NR ، PS یکدیگر را در مرکز ارتفاعی مثلث ABC قطع می‌کنند.

۱۱) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. مراکز ارتفاعی مثلث‌هـای ABC ، BCD ، CDA ، DAB را به ترتیب H_d, H_a, H_b, H_c می‌نامیم . ثابت کنیـد خطـوط AH_a ، BH_b ، CH_c ، DH_d دریـک نقطه همرس بوده ویکدیگر را نصف می‌کنند.

۱۲) خط دلخواه ℓ از مرکز ارتفاعی مثلث ABC می‌گذرد. اگر خطوط ℓ_a ، ℓ_b ، ℓ_c قرینه‌های خط ℓ نسبت به اضلاع مثلث باشند، ثابت کنید این سه خط همرس اند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) در مثلث ABC، G مرکز ثقل مثلث و H پای‌یک ارتفاع می‌باشد. HG را از طرف G امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید : $KG = ۲HG$

۲) فرض کنید K معرف نقطه‌ی قرینه‌ی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC نسبت به ضلع BC باشد. ثابت کنید که خط اویلر مثلث ABC پاره خط AK را نصف می‌کند.

۳) نشان دهید خطی که از مرکز ثقل مثلث به نقطه‌ی P بر روی دایره‌ی محیطی وصل شود، از وسط خطی می‌گذرد که مرکز ارتفاعی مثلث را به روبروی قطری P وصل می‌کند.

۴) خطی که به موازات میانه‌ی AA' از مثلث ABC رسم می‌شود، اضلاع BC, CA, AB را به ترتیب در نقاط H, N, D قطع می‌کند. ثابت کنید که نقاط متقارن H نسبت به نقاط وسط NC, BD، نسبت به رأس A متقارن اند.

۵) از G مرکز ثقل مثلث ABC خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB, AC را به ترتیب در A_b, A_c قطع کند. به همین ترتیب از G خطی به موازات CA رسم می‌کنیم تا BC, BA را به ترتیب در B_c, B_a قطع کند و از G خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا CA, CB را به ترتیب در C_a, C_b قطع کند. ثابت کنید که دو مثلث $A_b B_c C_a$, $A_c B_a C_b$ همنهشت اند.

۶) نقطه‌ی دلخواه M را بر روی نیمساز رأس A از مثلث ABC انتخاب می‌کنیم و عمودهای MR, MQ را به ترتیب بر اضلاع AB, AC رسم می‌کنیم. اگر عمود خارج شده از M بر BC، پاره خط QR را در N قطع کند ثابت کنید N روی میانه نظیر رأس A قرار دارد.

۷) فرض کنید همه‌ی زوایای داخلی مثلث ABC کمتر از ۱۲۰° باشد و P نقطه ای در درون مثلث ABC باشد به طوری که هریک از زاویه‌های APB, BPC, CPA برابر ۱۲۰° است. ثابت کنید که خطوط اویلر مثلث‌های APB, BPC, CPA دریک نقطه همرس اند.

۸) اگر a, b, c طول اضلاع مثلث ABC و m_a طول میانه‌ی وارد بر ضلع BC باشد ثابت کنید:

$$m_a^۲ = \frac{۱}{۲}b^۲ + \frac{۱}{۲}c^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲ \quad m_a^۲ = \frac{۱}{۲}B^۲ + \frac{۱}{۲}c^۲ - \frac{۱}{۴}a^۲$$

۹) (قضیه استوارت) اگر در مثلث ABC، قاطع AD به طول d، پاره خط BC را به طول‌های x, y $(BD = x\ , CD = y)$ تقسیم کند خواهیم داشت :

$$a(d^۲ + xy) = b^۲x + c^۲y$$

۱۰) در مثلث ABC، به قرینه‌ی میانه‌ی ضلع BC نسبت به نیمساز زاویه‌ی A، زیر میانه‌ی ضلع BC گفته می‌شود. اگر AK زیر میانه‌ی مثلث ABC باشد ثابت کنید $\frac{BK}{CK} = (\frac{AB}{AC})^۲$. همچنین اگر E, F به ترتیب تصاویر نقطه‌ی K بر اضلاع AB, AC باشد ثابت کنید: $\frac{KE}{KF} = \frac{AB}{AC}$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) از رأس A از مثلث ABC عمودهای AN, AM را بر نیمسازهای خارجی رئوس C, B فرود می‌آوریم . ثابت کنید که طول پاره خط MN برابر نصف محیط مثلث ABC است.

۲) AD، نیمساز داخلی زاویه‌ی A در مثلث ABC رسم شده است. در نقطه‌ی A مماس ℓ را بر دایره‌ی محیطی مثلث رسم می‌کنیم . ثابت کنید که خط رأست مرسوم از D به موازات ℓ، بر دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC مماس است.

۳) ثابت کنید اگر D نقطه ای در درون مثلث ABC باشد و خط‌های CD ,BD ,AD به ترتیب از مرکز دایره‌های محیطی مثلث‌های ADB ,CDA ,BDC بگذرند، آنگاه D مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC است.

۴) در مثلث ABC مرکز دایره‌ی محاطی را I و وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی را M می‌نامیم. ثابت کنید :

$$MB = MC = MI$$

۵) در مثلث ABC ضلع BC دو برابر ضلع AB است. ثابت کنید که میانه‌ی AD نیمساز زاویه ای است که ضلع AC با میانه‌ی AE از مثلث ABD تشکیل می‌دهد.

۶) S ,R ,Q ,P تصاویر رأس A روی نیمسازهای داخلی و خارجی زوایای C ,B از مثلث ABC می‌باشند . ثابت کنید چهار نقطه‌ی مذکور روی‌یک خط واقع اند.

۷) ثابت کنید هر دو نقطه از چهار مرکز دوایر محاطی خارجی و داخلی، با دو رأس غیر هم خط از مثلث روی دایره‌ای قرار دارند که مرکزش وسط‌یکی از کمان‌های دایره‌ی محیطی است که آن دو رأس دو انتهای آن هستند.(بطوری که نقاط I_b ,I_c ,B ,C روی‌یک دایره و به همین ترتیب I_b ,I_a ,B ,A؛ I_a ,I_c ,A ,C؛ I ,B ,C ,I_a؛ I ,C ,A ,I_b؛ I ,A ,B ,I_c نیز هر کدام روی‌یک دایره می‌باشند.)

۸) ثابت کنید:

الف) مجموع شعاع‌های دوایر محاطی خارجی مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محاطی داخلی و چهار برابر شعاع دایره‌ی محیطی.

ب) مجموع فاصله‌های مرکز دایره‌ی محیطی از سه ضلع مثلث برابر است با مجموع شعاع دایره‌ی محیطی و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث.

۹) اگر d فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و d_a فاصله‌ی مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز دایره‌ی محاطی خارجی مثلث باشد، ثابت کنید:

$$d^{2} = R(R - 2r)\ ,\ d_a^{2} = R(R + 2r_a)$$

۱۰) اگر JJ' قطری از دایره‌ی محاطی داخلی باشد که بر OI، خط واصل مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی عمود باشد، ثابت کنید که محیط مثلث OJJ' با قطر دایره‌ی محیطی مثلث مفروض برابر است.

۱۱) ثابت کنید نسبت مساحت یک مثلث به مساحت مثلثی که توسط نقاط تماس اضلاع مثلث با دایره‌ی محاطی داخلی آن تعیین می‌شود، برابر است با نسبت قطر دایره‌ی محیطی مثلث به شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن.

۱۲) دایره‌ای که از D، پای ارتفاع AD و نقاط I و I_a، مراکز دوایر محاطی داخلی و خارجی از مثلث ABC می‌گذرد، AD را در L هم قطع می‌کند. نشان دهید که AL با قطر دایره‌ی محیطی مثلث ABC برابر است.

۱۳) خطی که پای نیمساز داخلی AD از زاویه‌ی A در مثلث ABC را به نقطه‌ی K، محل تماس دایره‌ی محاطی داخلی با ضلع AC وصل می‌کند، خطی را که در نقطه‌ی A بر AC عمود است در نقطه‌ی F قطع می‌کند. ثابت کنید که $AF = h_a$. (h_a طول ارتفاع نظیر رأس A می‌باشد.)

۱۴) فرض کنید BE و CF نیمسازهای زوایای داخلی مثلث ABC و K نقطه‌ای دلخواه روی پاره‌خط EF باشد. ثابت کنید مجموع فواصل نقطه‌ی K از اضلاع AB و AC برابر فاصله‌ی نقطه‌ی K از ضلع BC است.

۱۵) اگر a، b و c طول اضلاع مثلث ABC باشند و d_a طول نیمساز زاویه‌ی A باشد، ثابت کنید:

$$d_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

۱۶) پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث قائم الزاویه ABC $(A = 90^\circ)$ را H می‌نامیم. اگر I، I_1 و I_2 به ترتیب مراکز دوایر محاطی مثلث‌های ABC، ABH و ACH باشند، نشان دهید: $AI = I_1I_2$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ارتفاع مرسوم بر ضلع BC از مثلث ABC، دایره‌ی محیطی آن را در نقطه‌ی D قطع می‌کند. ثابت کنید که فاصله‌ی مرکز دایره‌ی نه نقطه تا ضلع BC، برابر $\frac{1}{4}AD$ است.

۲) در مثلث ABC، AH ارتفاع مرسوم از رأس A بر ضلع BC و M و N تصاویر نقاط B و C روی نیمساز داخلی زاویه‌ی A هستند. ثابت کنید مرکز دایره‌ی محیطی مثلث HMN روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.

۳) از سه رأس مثلث ABC سه خط موازی در راستای دلخواه، و از هر رأس خطی عمود بر این خطوط رسم می‌کنیم. به این ترتیب سه مستطیل حاصل می‌شود که اضلاع AB، CA و BC قطرهای آن‌ها هستند. ثابت کنید که سه قطر دیگر این مستطیل‌ها در نقطه‌ای روی دایره‌ی نه نقطه مثلث ABC همرس‌اند.

۴) فرض کنید ℓ معرف خطی دلخواه باشد که از مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC می‌گذرد و A'، B' و C' تصویر نقطه‌های A، B و C روی ℓ باشند. ثابت کنید عمودهای وارد از نقاط A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB، در یک نقطه روی دایره نه نقطه مثلث ABC همرس‌اند.

۵) اگر O و H به ترتیب مراکز دایره‌ی محیطی و ارتفاعی مثلث ABC باشند، ثابت کنید که دوایر نه نقطه‌ی سه مثلث AOH، BOH و COH در دو نقطه متقاطع‌اند.

۶) دایره‌ای که به قطر BC رسم می‌کنیم اضلاع AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کند. خط دلخواهی که از E می‌گذرد، دایره‌ی محیطی مثلث AEF و دایره‌ی به قطر BC را در نقاط P و Q (غیر از E) قطع می‌کند. ثابت کنید وسط پاره‌خط PQ روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC قرار دارد.

۷) فرض کنید نقاط D، E و F پای ارتفاع‌های مثلث ABC باشند. ثابت کنید خط‌های اویلر سه مثلث AEF، BDF و CDE در یک نقطه روی دایره‌ی نه نقطه‌ی مثلث ABC همرس‌اند.

۸) خط دلخواه ℓ را از N مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC می‌گذرانیم. از چهار نقطه‌ی A، B، C و H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمودهایی بر خط ℓ رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع طول‌های این چهار عمود رسم شده بر ℓ، با در نظر گرفتن جهت همواره برابر صفر است.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید در مثلث ABC، نیمساز زاویه‌ی A، خطی که اوساط اضلاع AB و BC را به هم وصل می‌کند و خط واصل نقطه‌های تماس دایره‌ی محاطی با اضلاع BC و AC، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) در مثلث ABC، پاره‌خط‌های AD و BE را به ترتیب روی پاره‌خط‌های AC و BC برابر ضلع AB جدا می‌کنیم. اگر O و I به ترتیب مراکز دایره‌ی محیطی و دایره‌ی محاطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید:

الف) $DE \perp OI$

ب) شعاع دایره‌ی محیطی مثلث CDE برابر OI است.

۳) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط B_1 و C_1 بر اضلاع AB و AC مماس است و دایره‌ی محاطی خارجی نیز در نقاط B_2 و C_2 بر امتداد اضلاع ABو AC مماس است. فرض کنید M نقطه‌ی وسط ضلع BC باشد و خط AM، پاره‌خط‌های B_1C_1 و B_2C_2 را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. ثابت کنید که چهارضلعی $BECF$، متوازی‌الاضلاع است.

۴) نقاط A'، B' و C' را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC طوری انتخاب می‌کنیم که $\widehat{CC'B} = \widehat{BB'A} = \widehat{AA'C}$. نشان دهید مرکز دایره‌ی محیطی مثلثی که از برخورد پاره‌خط‌های AA'، BB' و CC' تشکیل می‌شود بر مرکز ارتفاعی مثلث ABC منطبق است.

۵) در مثلث ABC، مرکز دایره‌ی محاطی داخلی را نسبت به نقطه‌ی وسط ضلع BC قرینه می‌کنیم تا نقطه‌ی T حاصل شود. از نقطه‌ی D وسط کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC به T وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره‌ی محیطی مثلث ABC را در K قطع کند. ثابت کنید مجموع طول دو تا از پاره‌خط‌های KA، KB و KC برابر طول سومی است.

۶) نقطه‌ی دلخواه D را روی ضلع BC از مثلث ABC در نظر می‌گیریم و دایره‌ای را رسم می‌کنیم که بر ضلع BC و پاره‌خط AD و بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC مماس باشد. ثابت کنید:

الف) خطی که از محل تماس دایره‌ی مذکور با دو پاره‌خط BC و AD می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC نیز می‌گذرد.

ب) خط‌المرکزین دو دایره‌ای که به روش بالا در طرفین AD رسم می‌شوند از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC می‌گذرد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) فرض کنید P معرف نقطه‌ای دلخواه در صفحه‌ی مثلث ABC باشد و A_1 و A_2 پای عمودهای وارد از P بر نیمسازهای داخلی و خارجی A از مثلث ABC باشند. به همین نحو B_1، B_2، C_1 و C_2 را تعریف می‌کنیم. ثابت کنید خط‌های A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) ثابت کنید برای اینکه قطرهای AD، BE و CF از شش‌ضلعی $ABCDEF$، که در دایره‌ای محاط شده است، در یک نقطه به هم برسند، شرط لازم و کافی این است که برابری $AB.CD.EF = BC.DE.FA$ برقرار باشد.

۳) فرض کنید I مرکز دایره‌ی محاطی مثلث ABC و A_0، B_0 و C_0 نقطه‌های تماس این دایره به ترتیب با اضلاع BC، AC و AB باشند. روی نیم‌خط‌های IA_0، IB_0 و IC_0 به ترتیب، نقطه‌های A'، B' و C' را به فاصله‌های برابر از I، اختیار می‌کنیم. ثابت کنید که خط‌های AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۴) ثابت کنید که مماس‌های مرسوم از رأس‌های مثلث بر دایره‌ی محیطی آن، اضلاع مقابل آن را در سه نقطه‌ی هم خط قطع می‌کنند.

۵) دایره‌ای ضلع AB از مثلث ABC را در نقطه‌های C_1 و C_2، ضلع AC را در نقطه‌های B_1 و B_2 و ضلع BC را در نقطه‌های A_1 و A_2 قطع می‌کند. ثابت کنید که اگر خط‌های AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه به هم برسند خط‌های AA_2، BB_2 و CC_2 هم در یک نقطه متقاطع‌اند.

۶) روی اضلاع AB، AC و BC از مثلث ABC، نقاط C_1، B_1 و A_1 را اختیار می‌کنیم. فرض کنید C_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AB و A_1B_1، A_2 نقطه‌ی برخورد خطوط BC و B_1C_1 و B_2 نقطه‌ی برخورد خطوط AC و A_1C_1 باشد. ثابت کنید اگر خطوط AA_1، BB_1 و CC_1 در یک نقطه همرس باشند، آنگاه نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 بر یک خط راست واقع‌اند.

۷) خط راستی، ضلع‌های AB و AC و امتداد ضلع BC از مثلث ABC را به ترتیب در نقاط F، E و D قطع می‌کند. ثابت کنید که وسط پاره‌خط‌های AD، BE و CF بر یک خط راست واقع‌اند. (به عبارت دیگر اوساط اقطار هر چهارضلعی کامل هم‌خط‌اند. در هر چهارضلعی کامل امتداد اضلاع روبرو یکدیگر را قطع می‌کنند و دارای سه قطر است. در شکل مسأله BE، FC و AD اقطار چهارضلعی کامل $FECB$ هستند.)

۸) نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC و نقطه‌های A_2، B_2 و C_2 را بر اضلاع B_1C_1، A_1C_1 و A_1B_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ اختیار می‌کنیم. می‌دانیم که خطوط AA_1، BB_1 و CC_1 همرس‌اند. ثابت کنید که خطوط AA_2، BB_2 و CC_2 همرس‌اند اگر و فقط اگر A_1A_2، B_1B_2 C_1C_2 همرس باشند.

۹) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن، سه مثلث متساوی الساقین $A'BC$، $B'CA$ و $C'AB$ را طوری رسم می‌کنیم که این سه مثلث با هم متشابه باشند و داشته باشیم $A'B=A'C$، $B'A=B'C$ و $C'A=C'B$. ثابت کنید سه خط AA'، BB' و CC' همرس‌اند.

۱۰) جفت نقاط D و D'؛ E و E'؛ F و F' را به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC و متقارن نسبت به اوساط اضلاع متناظر انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید که دو مثلث DEF و $D'E'F'$ هم‌ارزند. (دو مثلث با مساحت‌های برابر را دو مثلث هم‌ارز یا معادل گویند.)

۱۱) دایره‌ای که به مرکز نقطه‌ای روی عمود منصف ضلع BC از مثلث ABC رسم می‌شود اضلاع AB و AC را به ترتیب در جفت نقاط P و P'، Q و Q' قطع می‌کند. خطوط PQ و $P'Q'$، خط BC را به ترتیب در نقاط K و K' قطع می‌کنند. ثابت کنید K و K' از نقطه‌ی وسط ضلع BC به یک فاصله‌اند.

۱۲) اگر سه خط سوایی AD، BE و CF در نقطه‌ی P همرس باشند، ثابت کنید: $\frac{AP}{PD}=\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}$

۱۳) سه خط موازی توسط سه مورب موازی در نقاط A، B، C؛ A'، B'، C'؛ A''، B''، C'' قطع شده‌اند. نشان دهید که خطوط $B''C$، $C'A''$ و AB' همرس‌اند.

۱۴) دو خط سوایی BE و CF یکدیگر را در نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC قطع می‌کنند. ثابت کنید DA نیمساز زاویه‌ی EDF است.

۱۵) دایره‌ی به قطر ارتفاع AD از مثلث ABC، اضلاع AC و AB را در E و F قطع می‌کند. پای تصویر رأس A بر خط EF را A' می‌نامیم. B' و C' را به طور مشابه تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که خطوط AA'، BB' و CC' همرس‌اند

۱۶) در مثلث ABC نیم دایره‌ای را چنان محاط می‌کنیم که قطر آن بر ضلع BC باشد و بر اضلاع AC و AB به ترتیب در نقاط E و F مماس باشد. اگر محل تقاطع دو خط BE و CF را K بنامیم ثابت کنید که AK بر BC عمود است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید که اگر عمودهای وارد از نقطه‌های A'، B' و C' به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC در یک نقطه متقاطع باشند، آنگاه عمودهای وارد از نقطه‌های A، B و C به ترتیب بر خط‌های $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ هم، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۲) ثابت کنید که عمودهای مرسوم بر اضلاع مثلث در نقاط تماس دوایر محاطی خارجی با اضلاع مثلث، همرس‌اند.

۳) فرض کنید A'، B' و C' معرف پای عمودهای وارد از رئوس A، B و C از مثلث ABC بر خط ℓ باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A'، B' و C' به ترتیب بر BC، AC و AB، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۴) مثلث متساوی الاضلاع ABC و نقطه‌ی دلخواه D مفروض‌اند. فرض کنید A'، B' و C' به ترتیب معرف مرکز دایره‌های محاطی داخلی مثلث‌های BCD، CAD و ABD باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از رأس‌های A، B و C به ترتیب بر $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$، در یک نقطه متقاطع‌اند.

۵) فرض کنید AD، BE و CF ارتفاع‌های مثلث ABC و A'، B' و C' تصویرهای A، B و C به ترتیب روی EF، DF و DE باشند. ثابت کنید که عمودهای وارد از A'، B' و C' به ترتیب بر BC، AC و AB در یک نقطه متقاطع‌اند.

۶) رئوس مثلث $A'B'C'$ بر روی ارتفاع‌های مثلث ABC قرار دارد. اگر از وسط اضلاع مثلث $A'B'C'$ عمودهایی بر اضلاع متناظر مثلث ABC رسم کنیم، نشان دهید که این سه عمود همرس‌اند.

۷) پاره‌خط BE را بر امتداد ضلع AB از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ برابر ضلع BC جدا می‌کنیم. عمودی که از E بر BE اخراج می‌شود نیمساز زاویه‌ی DAB را در K قطع می‌کند. ثابت کنید خط KC بر قطر BD عمود است.

۸) نقطه‌ی P را روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC انتخاب کرده‌ایم. عمودهای PD و PE را بر اضلاع AC و BC فرود آورده و اوساط AE و BD را M و N می‌نامیم. نشان دهید MN بر DE عمود است.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مثلث ABC و نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و A' پای عمود وارد از P بر ضلع BC و K محل تلاقی خط سیمسون نظیر نقطه‌ی P نسبت به مثلث ABC و ارتفاع AD باشند، نشان دهید PK با $A'H$ موازی است.

۲) دو مثلث ABC و $A'B'C'$ در دایره‌ی (O) محاط شده‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین خطوط سیمسون هر نقطه‌ی دلخواه P روی دایره‌ی (O) نسبت به این دو مثلث، همواره مقداری ثابت است.

۳) دایره‌ی (O) و سه وتر PA، PB و PC از آن مفروض‌اند. سه دایره‌ی (PA)، (PB) و (PC) را به قطر این سه وتر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را دو به دو در سه نقطه‌ی D، E و F قطع کنند. نشان دهید این سه نقطه هم‌خط‌اند.

۴) مثلث متغیری دایره‌ی محیطی و مرکز ثقل ثابتی دارد. نشان دهید که خط سیمسون نقطه‌ی مفروض P روی دایره‌ی محیطی نسبت به این مثلث، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۵) چهار خط دو به دو ناموازی در صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید دوایر محیطی چهار مثلثی که از تقاطع سه به سه این خطوط بوجود می‌آیند در یک نقطه همرس هستند. این نقطه به نقطه‌ی میشل معروف است.

۶) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. اگر A'، B' و C' پای ارتفاع‌ها و A''، B'' و C'' محل تلاقی امتداد ارتفاع‌ها با دایره‌ی محیطی مثلث باشند نشان دهید:

الف) خطوط سیمسون نظیر نقاط A''، B'' و C'' نسبت به مثلث ABC به ترتیب با خطوط مماس بر دایره در نقاط A، B و C موازی می‌باشند.

ب) اضلاع مثلث حاصل از تلاقی خطوط سیمسون نظیر نقاط A''، B'' و C'' نسبت به مثلث ABC با اضلاع مثلث ارتفاعیه مثلث ABC دو به دو موازی‌اند.

۷) اگر خط سیمسون نقطه‌ی P از روبروی قطری P در دایره‌ی محیطی مثلث بگذرد، نشان دهید که این خط سیمسون از مرکز ثقل مثلث نیز می‌گذرد.

۸) از نقطه‌ی P روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC، عمودهایی بر اضلاع BC، AC و AB رسم می‌کنیم تا آن‌ها را به ترتیب در نقاط L، M و N و دایره‌ی محیطی را در A'، B' و C' قطع کنند. خط سیمسون LMN خطوط $B'C'$، $A'C'$ و $A'B'$ را به ترتیب در L'، M' و N' قطع می‌کند. ثابت کنید که خطوط AL'، BM' و CN' همرس‌اند.

۹) چهارضلعی محاطی $ABCD$ مفروض است. اگر P، Q و R به ترتیب پای عمودهای وارد از D بر AB، BC و CA باشند و داشته باشیم $PR=QR$، ثابت کنید نیمسازهای زاویای $\widehat{ABC}$ و $\widehat{CDA}$ روی خط AC یکدیگر را قطع می‌کنند. (المپیاد ریاضی جهانی سال ۲۰۰۳)

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نقاط B' و C' را به ترتیب روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC در نظر می‌گیریم. اگر خطوط BB' و CC' دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در نقاط M و N قطع کنند ثابت کنید خط مماس بر دایـره‌ی محیطی مثلث ABC در نقطه‌ی A و خطوط $B'C'$ و MN در یک نقطه همرس‌اند.

۲) چهارضلعی محـاطی $ABCD$ مفـروض اسـت. نقـاط E و F را بـه ترتیـب روی اضـلاع AB و CD در نظـر می‌گیریم. اگر DE و AF دایره‌ی محیطی چهارضلعی محاطی $ABCD$ را به ترتیـب در نقـاط M و N قطـع کنند نشان دهید خطوط MN ،EF و BC در یک نقطه همرس‌اند.

۳) چهارضلعی $ABCD$ مفروض است به نحوی که $\widehat{DAB}=\widehat{ABC}=\widehat{BCD}$ می‌باشد. اگـر نقـاط O و H به ترتیب مرکز دایره‌ی محیطی و مرکز ارتفاعی مثلث ABC باشند، نشان دهید نقاط H ،O و D بر یـک خـط راست واقع‌اند.

۴) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض‌اند. دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم که در نقاط D و E بـه ترتیـب بـر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه‌ی P بر دایره‌ی محیطی مثلث ABC ممـاس داخـل باشـد. ثابت کنید نقطه‌ی وسط پاره‌خط DE بر مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC منطبق می‌باشد.

۵) چهارضـلعی محـاطی $ABCD$ مفـروض اسـت. نقطـه‌ی P درون چهارضـلعی چنـان قـرار گرفتـه کـه $\widehat{DAP}+\widehat{DCP}=\widehat{CBP}+\widehat{CDP}=90^{\circ}$ می‌باشد. اگـر نقـاط E و O بـه ترتیب محـل تلاقـی اقطـار چهارضلعی و مرکز دایره‌ی محیطی آن باشند نشان دهید نقاط P ،E و O هم خط‌اند.

۶) خط دلخواه d اضلاع BC ،AC و AB از مثلث ABC را در A_1، B_1 و C_1 قطع کرده است. نقطه‌ی دلخـواه M را روی خط d در نظر گرفته و خطوط AM ،BM و CM را امتداد مـی‌دهیـم تـا دایـره‌ی محیطـی مثلـث ABC را به ترتیب در نقاط A_2، B_2 و C_2 قطع کنند. نـشان دهیـد خطـوط A_1A_2، B_1B_2 و C_1C_2 در نقطه‌ای روی دایره‌ی محیطی مثلث ABC همرس‌اند.

۷) نیم دایره‌ای به قطر BC مفروض است. از نقطه‌ی A در خارج آن مماس‌های AM و AN را بر نیم دایره رسـم کرده و امتداد می‌دهیم تا امتداد قطر BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند. اگر BN و CM یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع کنند ثابت کنید خط AP بر EF عمود است.

۸) چهارضلعی محاطی و محیطی $ABCD$ مفروض می‌باشد. اگر I ،O و E بـه ترتیـب مرکـز دایـره‌ی محـاطی و مرکز دایره‌ی محیطی و محل تلاقی قطرهای چهارضلعی باشند، نشان دهید این سه نقطه بر یک استقامت قـرار دارند.

۹) ارتفاع AH از مثلث ABC را رسم کرده‌ایم. دایره‌ای به قطر AH رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیـب در M و N قطع کند. مماس‌های مرسوم در نقاط M و N بر این دایره یکدیگر را در نقطه‌ی P قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطه‌ی P بر امتداد میانه‌ی نظیر ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نشان دهید محورهای اصلی دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم محور، با دایره‌ای که متعلق به این دسته دایره نیست، همرس‌اند و نقطه‌ی همرسی آن‌ها روی محور اصلی دسته دایره قرار دارد.

۲) نشان دهید دایره‌های متعامد با دایره‌های یک دسته دایره‌ی هم محور، یک دسته دایره‌ی هم محور تشکیل می‌دهند.

۳) نشان دهید سه یا بیش از سه دایره که با یک دایره متعامد باشند و مرکزشان روی خط ثابتی قرار داشته باشند، یک دسته دایره‌ی هم محور تشکیل می‌دهند.

۴) نشان دهید که مماس مشترک دو دایره‌ی یک دسته دایره‌ی هم محور غیر متقاطع، از یک نقطه‌ی حدی دسته، با زاویه‌ی قائمه دیده می‌شود.

۵) برای هر رأس یک مثلث، دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از آن رأس بگذرد، با دایره محیطی مثلث متعامد باشد، و مرکزش روی ضلع مقابل آن رأس باشد. نشان دهید ای سه دایره هم محورند.

۶) مماس‌هایی که در رأس‌های A ، B و C از مثلث حاده‌الزاویه بر دایره محیطی آن مثلث رسم شده‌اند، به ترتیب اضلاع BC ، AC و AB را در U ، V و W قطع کرده‌اند. ثابت کنید دایره‌هایی که AU ، BV و CW قطرشان هستند هم‌محورند، و محور اصلی آن‌ها خط اویلر مثلث است.

۷) سه دایره با مراکز ناهم‌خط و یک نقطه مفروض‌اند. سه دایره رسم می‌کنیم که از نقطه مفروض بگذرند و هر کدام با دو دایره از سه دایره مفروض هم محور باشند. نشان دهید که این سه دایره یک نقطه مشترک دیگر نیز دارند.

۸) چهار نقطه‌ی A ، B ، C و D که هیچ سه نقطه‌ای بر یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. دو خط AB و CD با یکدیگر در نقطه‌ی E و دو خط BC و DA با یکدیگر در نقطه‌ی F متقاطع‌اند. ثابت کنید سه دایره به قطرهای AC ، BD و EF یا از دو نقطه می‌گذرند یا هیچ یک از دو تای آن‌ها هیچ نقطه‌ی مشترکی ندارند.

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) دایره‌ای به مرکز O از رأس‌های B و C از مثلث ABC می‌گذرد و اضلاع AB و AC را در نقاط M و N قطع می‌کند. اگر دوایر محیطی مثلث‌های ABC و AMN یکدیگر را دوباره در K قطع کنند، نشان دهید: $\hat{AKO} = 90^\circ$ (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۸۵)

۲) مثلث ABC و H مرکز ارتفاعی آن مفروض‌اند. به ترتیب اوساط اضلاع BC ,AC و AB را M , N و P می‌نامیم. از A خطی عمود بر MH رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در A' قطع کند. اگر نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم، نشان دهید نقاط A', B' و C' بر خطی عمود بر خط اویلر مثلث ABC قرار دارند.

۳) مثلث ABC و میانه AM از آن مفروض‌اند. دایره‌ای به قطر AM رسم می‌کنیم تا اضلاع AB و AC را به ترتیب در D و E قطع کند. اگر مماس‌های مرسوم بر دایره در نقاط D و E یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید: $PB = PC$

۴) دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقاط M و N بر دایره‌ی C مماس داخل‌اند. و مرکز C_2 روی C_1 قرار دارد. وتر مشترک دوایر C_1 و C_2، دایره‌ی C را در نقاط A و B قطع می‌کند. MA و MB نیز C_1 را در نقاط D و E قطع می‌کنند. ثابت کنید خط DE بر C_2 مماس است. (المپیاد جهانی ریاضی ۱۹۹۹)

۵) مثلث ABC را در نظر بگیرید. دایره‌ای از رأس‌های B و C می‌گذرد و اضلاع AB و AC را به ترتیب در C' و B' قطع می‌کند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABC و $AB'C'$ باشند، ثابت کنید خطوط BB', CC' و HH' همرس‌اند.

۶) در مثلث ABC، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ی به قطر BC، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را ℓ_a می‌نامیم. خطوط ℓ_b و ℓ_c نیز بطور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید خطوط ℓ_a , ℓ_b و ℓ_c همرس‌اند.

۷) دو دایره‌ی C_1 و C_2 مفروض‌اند بطوری که نقطه‌ی A مرکز دایره‌ی C_1 روی C_2 قرار می‌گیرد. BC را وتر مشترک دو دایره می‌گیریم. وتر AD ، BC را در E قطع می‌کند. از نقطه‌ی D، مماس‌های DF و DG را بر C_1 رسم می‌کنیم. ثابت کنید F , E و G روی یک خط راست قرار دارند.

۸) چهار ضلعی $ABCD$ مفروض است. نقطه P درون چهار ضلعی چنان قرار گرفته که داشته باشیم:
$\widehat{DAP}+\widehat{DCP}=\widehat{CBP}+\widehat{CDP}=90^\circ$. اگر نقاط E و O به ترتیب محل تلاقی اقطار چهار ضلعی و مرکز دایره محیطی آن باشند، نشان دهید نقاط E , P و O هم خطاند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) ثابت کنید مرکز ثقل هر n ضلعی (یا چند وجهی) یکتا و منحصربه فرد است.

۲) اگر G مرکز ثقل n ضلعی (یا چند وجهی) $A_1A_2...A_n$ بوده و P نیز نقطه‌ای دلخواه باشد، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{PG}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+...+\overrightarrow{PA_n})$$

۳) اگر G و G' مراکز ثقل مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ باشند، ثابت کنید:

$$\overrightarrow{GG'}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'})$$

۴) سه صفحه موازی a، a'', a' در فضا مفروض‌اند. سه خط دلخواه درنظر می‌گیریم تا صفحات را قطع کنند. محل تقاطع خطوط با صفحه a را A، B و C و با صفحه a' را C',B',A' و با صفحه $\mathbf{a''}$ را $\mathbf{C'',B'',A''}$ می‌نامیم. اگر G، $\mathbf{G'',G'}$ به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ABC، $A'B'C'$ و $A''B''C''$ باشند، ثابت کنید G'',G',G هم‌خطاند.

۵) با استفاده از هندسه برداری ثابت کنید در هر مثلث نقاط O، G و H هم خط بوده و $HG=2GO$ می‌باشد. (قضیه اویلر)

۶) ثابت کنید در هر چهارضلعی دلخواه، میانه‌ها و خطی که اوساط اقطار را به هم وصل می‌کند یکدیگر را نصف می‌کنند. (میانه چهارضلعی پاره‌خطی است که اوساط دو ضلع مقابل را به یکدیگر متصل می‌کند.)

۷) ثابت کنید در هر متوازی‌الاضلاع مجموع مربعات اضلاع با مجموع مربعات اقطار برابر است.

۸) ثابت کنید قطرهای یک چهارضلعی برهم عمودند اگر و تنها اگر میانه‌های آن با یکدیگر برابر باشند.

۹) برای هر نقطه دلخواه P و مستطیل $ABCD$ ثابت کنید:

الف) $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PD}$

ب) $PA^2+PC^2=PB^2+PD^2$

۱۰) مستطیل‌های $ABDE$، $BCFG$ و $CAHI$ را به طرف خارج روی اضلاع مثلث ABC می‌سازیم. ثابت کنید عمود منصف‌های پاره‌خط‌های HE، DG و FI در یک نقطه همرس‌اند.

۱۱) n ضلعی $A_1A_2...A_n$ مفروض است. مرکز ثقل $n-1$ ضلعی حاصل از کنار گذاشتن رأس A_i را G_i می‌نامیم. ثابت کنید n ضلعی $G_1G_2...G_n$ با n ضلعی $A_1A_2...A_n$ به نسبت $-\frac{1}{n-1}$ متجانس می‌باشد.

۱۲) نقطه دلخواه P را درون مثلث ABC درنظر می‌گیریم. اگر مساحت مثلث‌های PBC، PAC و PAB به ترتیب برابر S_1,S_2,S_3 باشند، نشان دهید: $S_1.\overrightarrow{PA}+S_2.\overrightarrow{PB}+S_3.\overrightarrow{PC}=\vec{o}$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی الساقین MAB و NAC ($\hat{M} = \hat{N} = ۹۰^\circ$) را روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن می‌سازیم و نقطه وسط ضلع BC را P می‌نامیم. ثابت کنید مثلث MPN قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۲) دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و $AB'C'$ در رأس A مشترک‌اند. اگر P، Q و R به ترتیب اوساط AB', AC, BC' باشند، ثابت کنید مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است.

۳) در مثلث ABC ضلع BC ثابت و رأس A متغیر است. در نقطه B عمودی بر AB اخراج می‌کنیم و MB را به اندازه AB روی آن جدا می‌کنیم. در نقطه C نیز عمودی بر AC اخراج کرده و NC را روی آن به اندازه AC جدا می‌کنیم. اگر نقطه وسط MN را P بنامیم، ثابت کنید در صورت تغییر A، نقطه P همواره ثابت است.

۴) سه مثلث متساوی‌الاضلاع OAB، $OA'B'$ و $OA''B''$ در رأس O مشترک‌اند. اگر M، N و P به ترتیب اوساط $A'B$، $A''B'$ و AB'' باشند، ثابت کنید مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است.

۵) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج از آن مربع‌هایی می‌سازیم. اگر مراکز این مربع‌ها را M، N، P و Q بنامیم، ثابت کنید MN بر PQ عمود و با یکدیگر مساوی هستند.

۶) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج از آن دو مربع $ABMN$ و $ACDE$ را می‌سازیم. اگر نقطه وسط DM را P بنامیم ثابت کنید مثلث PBC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۷) روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ به ترتیب مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی یک در میان به سوی خارج و داخل می‌سازیم. رئوس این مثلث‌ها را نقاط X، Y، Z و W می‌نامیم. ثابت کنید چهارضلعی $XYZW$ یک متوازی‌الاضلاع است.

۸) نقطه دلخواه P را روی دایره محیطی مثلث ABC انتخاب می‌کنیم. از نقطه P دو عمود PE و PF را بر BC و AC فرود می‌آوریم و اوساط AE و BF را به ترتیب N و M می‌نامیم. ثابت کنید MN بر EF عمود است.

۹) بر روی اضلاع مثلث ABC ($\hat{A} < ۹۰^\circ$) دو مربع $ABDE$ و $ACGF$ را می‌سازیم و مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین PBC ($\hat{P} = ۹۰^\circ$) را نیز روی BC (نزدیک به A) بنا می‌کنیم. ثابت کنید مثلث PEF نیز قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۸)

۱۰) مستطیل $ABCD$ مفروض است. عمود BK را بر AC فرود می‌آوریم. اگر M وسط AK و N وسط CD باشند، ثابت کنید: $MN \perp BM$

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) چهاروجهی $ABCD$ مفروض است. مراکز ثقل مثلث‌های ABC، BCD، CDA، DAB را به ترتیب G_d, G_a, G_b, G_c می‌نامیم. ثابت کنید خطوط AG_a, BG_b, CG_c, DG_d در یک نقطه همرس‌اند و یکدیگر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کنند.

۲) در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC)$ نقطه D وسط ضلع AB و نقطه E مرکز ثقل مثلث ADC و نقطه O مرکز دایره محیطی مثلث ABC می‌باشند. ثابت کنید: $EO \perp CD$

۳) نقاط D، E و F به ترتیب روی اضلاع BC، AC و AB از مثلث ABC قرار دارند. نشان دهید مراکز ثقل مثلث‌های DEF و ABC بر هم منطبق‌اند اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{AF}{FB}=\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}$ (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۹)

۴) چهارضلعی $ABCD$ و نقطه دلخواه X مفروض‌اند. مراکز ثقل مثلث‌های ABC، BCD و CDA و DAB را به ترتیب G_d, G_a, G_b, G_c می‌نامیم. d_a خطی است که از رأس A به موازات پاره‌خط XG_a رسم می‌شود. ثابت کنید اگر d_b, d_c, d_d را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم این چهار خط در یک نقطه با یکدیگر همرس خواهند بود.

۵) مجموعه S شامل $m+n$ نقطه را به دو مجموعه‌ی m و n عضوی افراز می‌کنیم. اگر G_m, G_n به ترتیب مراکز ثقل این دو مجموعه باشند، نشان دهید مرکز ثقل S روی خط واصل G_m, G_n قرار دارد و پاره‌خط G_nG_m را به نسبت $\frac{n}{m}$ تقسیم می‌کند.

۶) روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متساوی‌الاضلاع با مراکز M، N و P ساخته‌ایم. ثابت کنید مثلث MNP نیز متساوی‌الاضلاع می‌باشد.

۷) ارتفاع AD از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از نقطه D بر ضلع AC را E می‌نامیم. نقطه F را چنان روی DE انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم $\frac{EF}{FD}=\frac{BD}{DC}$. نشان دهید: $AF \perp BE$

۸) بر روی اضلاع چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن چهار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به ترتیب $O_۱, O_۲, O_۳, O_۴$ می‌نامیم. اگر اقطار AC و BD از چهارضلعی با یکدیگر برابر باشند، ثابت کنید:

$O_۱O_۳ \perp O_۲O_۴$

۹) اقطار چهارضلعی $ABCD$ یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند. اگر H و H' به ترتیب مراکز ارتفاعی مثلث‌های ABO و DOC و G و G' به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های ADO و BCO باشند، نشان دهید:

$HH' \perp GG'$

۱۰) بر روی اضلاع مثلث ABC و در خارج آن سه مثلث متشابه ABD، ACE و BCF را چنان می‌سازیم که $\widehat{DBA}=\widehat{ECA}=\widehat{FBC},\widehat{DAB}=\widehat{CAE}=\widehat{FCB}$ باشند. اگر D' قرینه‌ی رأس D نسبت به ضلع AB باشد، ثابت کنید چهارضلعی $D'ECF$ متوازی‌الاضلاع است.

۱۱) نقطه‌ای مانند M، بر ضلع AB از مثلث ABC طوری اختیار شده است که خط راستی که مرکز دایره محیطی مثلث ABC را به نقطه‌ی میانه‌ای مثلث BCM وصل می‌کند، بر CM عمود است. اگر $\frac{BC}{BA}=k$، نسبت $\frac{BM}{BA}$ را پیدا کنید.

۱۲) در مثلث ABC، نقاط N و M به ترتیب روی اضلاع BC و AC طوری انتخاب شده‌اند که $AM=BN=AB$. اگر O و I به ترتیب مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC باشند، نشان دهید: $IO \perp MN$

۱۳) مثلث ABC و نقطه‌ی M وسط ضلع BC مفروض است. خط دلخواه ℓ ، خطوط AC، AM و AB را به ترتیب در R، Q و P قطع می‌کند. نشان دهید: $\frac{AM}{AQ}=\frac{1}{2}(\frac{AC}{AR}+\frac{AB}{AP})$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقطه K بر ضلع BC مماس است. ثابت کنید وسط AK و وسط BC و مرکز دایره محاطی بر یک استقامت‌اند.

۲) دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F مماس است. D'، قرینه‌ی نقطه‌ی D نسبت به نیمساز داخلی زاویه‌ی A است و نقاط E' و F' نیز به ترتیب مشابه تعریف می‌شوند. اگر M، N و P به ترتیب اوساط اضلاع BC، AC و AB باشند ثابت کنید PF', NE', MD' همرس‌اند.

۳) دایره محاطی داخلی مثلث ABC بر اضلاع BC، AC و AB به ترتیب در نقاط D، E و F مماس است. اگر F', E', D' به ترتیب اوساط کمان‌های BC، AC و AB از دایره محیطی مثلث ABC باشند، ثابت کنید FF', EE', DD' همرس‌اند.

۴) اگر P نقطه‌ای در صفحه‌ی مثلث ABC و G_A، G_B و G_C به ترتیب مراکز ثقل مثلث‌های PBC، PCA و PAB باشند، ثابت کنید AG_A، BG_B و CG_C همرس‌اند.

۵) رئوس A، B و C از مثلث ABC را نسبت به اضلاع روبه‌رو قرینه می‌کنیم تا نقاط D، E و F بدست آیند. D', E', F' پای تصاویر N – مرکز دایره نه نقطه‌ی مثلث ABC– بر اضلاع BC، AC و AB می‌باشند. ثابت کنید دو مثلث DEF و $D'E'F'$ به مرکز G – مرکز ثقل مثلث ABC– و نسبت $\frac{1}{4}$ متجانس هستند.

۶) مثلث ABC مفروض است. نقاط A', A'' بر روی AC و AB قرار داشته و $A'A''$ با BC موازی است. نقاط B' و B'' روی AB و BC قرار داشته و $B'B''$ با AC موازی است. نقاط C' و C'' روی BC و AC قرار داشته و $C'C''$ با AB موازی است. نقاط برخورد $B'C''$ با BC را D و $C'A''$ با AC را E و $A'B''$ با AB را F می‌نامیم. ثابت کنید سه نقطه‌ی D، E و F بر یک خط واقع‌اند.

۷) نقاط D، E و F اوساط اضلاع BC، CA و AB از مثلث ABC می‌باشند. قرینه نقطه دلخواه P را نسبت به سه نقطه‌ی D، E و F به ترتیب K، L و M می‌نامیم. ثابت کنید پاره‌خط‌های AK، BL و CM در یک نقطه مانند Q همرس‌اند و در حالتی که نقطه P بر یک دایره حرکت نماید مکان هندسی Q را پیدا کنید.

۸) ثابت کنید که خط‌های سیمسون دو انتهای یک قطر از دایره محیطی مثلث ABC، یکدیگر را روی دایره‌ی نه نقطه ی مثلث مفروض قطع می‌کنند.

۹) مثلث ABC با مساحت S مفروض است. فرض کنید دو مثلث با مساحت‌های S_1, S_2 یکی محاط و دیگری محیط بر مثلث ABC باشند طوری که اضلاع آن‌ها نظیر به نظیر موازی باشند. ثابت کنید: $S^2 = S_1 . S_2$

۱۰) می‌دانیم سه خط که هر کدام یک رأس مثلث را به محل تماس دایره‌ی محاطی خارجی با ضلع روبه‌رو وصل می‌کند در یک نقطه به نام نقطه‌ی ناگل همرس‌اند. فرض کنید G مرکز ثقل، I مرکز دایره‌ی محاطی داخلی، J مرکز دایره محاطی داخلی مثلث میانه‌ای و K نقطه‌ی ناگل مثلث مفروضی باشند. ثابت کنید که نقاط G، I، J و K بر یک خط واقع‌اند و $GK = ۲IG$ ، $IJ = JK$.

۱۱) مثلث ABC و دایره‌ی محیطی آن مفروض است. دایره‌ای چنان رسم می‌کنیم که بر اضلاع AB و AC مماس بوده و همچنین در نقطه A' بر دایره محیطی مثلث ABC مماس داخل باشد. نقاط B' و C' نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. نشان دهید سه خط AA', BB', CC' همرس‌اند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) روی اضلاع AB و AC از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABM و ACN را رسم می‌کنیم به طوری که $\widehat{MAB}=\widehat{NAC}=90^\circ$. همچنین روی ضلع BC، مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه PBC را طوری رسم می‌کنیم که $\widehat{BPC}=90^\circ$ و نقاط A و P در یک طرف BC باشند. نشان دهید نقاط M ،P و N رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه هستند. (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۷۸)

۲) فاصله نقطه P که داخل مربع $ABCD$ قرار دارد، از رئوس A، B و C به ترتیب برابر ۱، ۲ و ۳ می‌باشد. مساحت مربع $ABCD$ را بدست آورید.

۳) نقطه E در صفحه متوازی‌الاضلاع $ABCD$ و بیرون آن طوری قرار گرفته که مثلث ABE متساوی‌الاضلاع است. اگر P نقطه‌ای دلخواه باشد نشان دهید: $PC+PD+AD\geq PE$

۴) روی اضلاع AC و AB از مثلث ABC و در خارج آن، مثلث‌های قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین DAC و EAB را بنا می‌کنیم. ($\widehat{ADC}=\widehat{AEB}=90^\circ$) اگر K وسط ضلع BC باشد، ثابت کنید مثلث KDE، متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است.

۵) روی اضلاع AB، BC، CD و DA از چهارضلعی $ABCD$ و در خارج آن، چهار مربع می‌سازیم و مراکز آن‌ها را به ترتیب P، R، Q و S می‌نامیم. ثابت کنید دو پاره‌خط PQ و RS با هم برابر و بر هم عمودند.

۶) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ABC، CDE و EFG طوری در صفحه قرار گرفته‌اند که D وسط AG است. ثابت کنید BFD متساوی‌الاضلاع است. (برای نام‌گذاری رئوس مثلث‌ها، جهت ثابتی را درنظر بگیرید.)

۷) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع PBC، QCA و RAB روی اضلاع مثلث ABC طوری ساخته شده‌اند که P، Q و R خارج آن قرار دارند. اگر D، E و F مراکز ثقل این مثلث‌ها باشند، ثابت کنید DEF مثلثی متساوی‌الاضلاع است که آن را مثلث ناپلئون مثلث ABC می‌نامیم.

۸) مثلث‌های متساوی‌الاضلاع OA_1A_2، OB_1B_2 و OC_1C_2 در رأس O مشترک هستند. ثابت کنید اوساط پاره‌خط‌های A_2B_1، B_2C_1 و C_2A_1 رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع هستند. (برای نام‌گذاری مثلث‌ها جهت ثابتی را درنظر بگیرید.)

۹) مثلث‌های متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه ABC'، BCA' و CAB' را در خارج مثلث ABC طوری بنا می‌کنیم که داشته باشیم: $\widehat{AC'B}=\widehat{BA'C}=\widehat{CB'A}=90^\circ$. ثابت کنید دو پاره‌خط AA' و $B'C'$ با هم برابر و بر هم عمودند.

۱۰) C_1 و C_2 دو دایره متقاطع در نقاط M و N هستند. A را نقطه‌ای دلخواه بر C_1 می‌گیریم و دومین نقطه برخورد خط AM با دایره C_2 را B، دومین نقطه برخورد خط BN با C_1 را C، دومین نقطه برخورد CM با C_2 را D، و بالاخره دومین نقطه برخورد DN با C_1 را E می‌نامیم. ثابت کنید که طول AE به انتخاب نقطه اولیه A بر C_1 بستگی ندارد.

۱۱) از نقطه دلخواه P بر روی دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، سه خط موازی اضلاع BC، CA و AB رسم می‌کنیم تا به ترتیب خطوط CA، AB و BC را در نقاط D، E و F قطع کنند. ثابت کنید این سه نقطه بر یک خط واقع‌اند.

۱۲) دو مثلث همنهشت ABC و $A'B'C'$ در یک دایره محاط می‌باشند. نقاط برخورد اضلاع متناظر را D، E و F می‌نامیم. ثابت کنید دو مثلث ABC و DEF متشابه بوده و مرکز ارتفاعی مثلث DEF بر O، مرکز دایره محیطی مثلث ABC منطبق است.

۱۳) نقطه P بر کمان BC از دایره‌ی محیطی مثلث ABC قرار دارد. اگر I_1 و I_2 مراکز دوایر محاطی مثلث‌های PAB و PAC باشند، ثابت کنید دایره محیطی مثلث PI_1I_2، از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد.

۱۴) P نقطه‌ای داخل چهارضلعی $ABCD$ است به طوری که $\widehat{PAD}=\widehat{PBC}$, $\widehat{PDA}=\widehat{PCB}$. اگر K محل برخورد عمود منصف‌های دو پاره خط AB و CD باشد ثابت کنید $\widehat{DKC}=2\widehat{DAP}$.

۱۵) دو دایره مفروض یکدیگر را در نقاط K و L قطع می‌کنند. خط متغیری که از K می‌گذرد دو دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. اوساط دو کمان BL و AL که K بر آن قرار ندارد را به ترتیب C و D می‌نامیم. ثابت کنید دایره محیطی مثلث CKD از وسط پاره‌خط AB می‌گذرد.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) قاطع d اضلاع مثلث ABC را در M ، N و P قطع می‌کند. اگر A' ، B' و C' را روی اضلاع طوری انتخاب کنیم که هرکدام به همراه نقطه حاصل از تقاطع d با آن ضلع،ضلع مورد نظر را به نسبت همساز تقسیم کنند، ثابت کنید AA' ، BB' و CC' همرس‌اند.

۲) خط d و دو نقطه A و B در طرفین آن مفروض‌اند. نشان دهید نقطه‌ای مانند P روی خط d وجود دارد که خط d نیمساز زاویه APB باشد.

۳) نشان دهید در هر مثلث ABC همواره $A(HOII_b) = -1$ است.

۴) چهار نقطه هم خط A ، B ، C و D مفروض‌اند. نقاط P و Q را روی این خط طوری پیدا کنید که داشته باشیم $(ABPQ) = -1$ و $(CDPQ) = -1$.

۵) دردایره ای دو وتر AB و AC را رسم می‌کنیم. قطر عمود بر AB ، وتر AC را در H و امتداد BC را در K و دایره را در M و N قطع می‌کند. ثابت کنید که M و N ، پاره خط HK را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند.

۶) ثابت کنید در هر ذوزنقه محل تلاقی دو ساق، محل تلاقی دو قطر و اوساط دو قاعده، چهار نقطه هم خط می‌باشند که یک گستره‌ی همساز را تشکیل می دهند.

۷) D و E را پای نیمسازهای داخلی و خارجی نظیر رأس A از مثلث ABC در نظر بگیرید. اگر میانه نظیر ضلع BC بر دایره‌ای به قطر DE مماس باشد ثابت کنید مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است.

۸) نشان دهید اگر در گستره توافقی $(ABCD) = -1$ همه پاره خط‌ها از یک نقطه‌ی گستره، مثلاً A ،اندازه گرفته شوند آنگاه داریم: $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

۹) ثابت کنید در دو دایره متخارج نقاط برخورد مماس‌های مشترک داخلی و خارجی با خط المرکزین دو دایره، نسبت به مرکزهای این دو دایره مزدوج توافقی‌اند.

۱۰) نشان دهید $O(ABCD) = -1$ اگر و فقط اگر داشته باشیم: $\frac{\sin \widehat{AOC}}{\sin \widehat{BOC}} = \frac{\sin \widehat{DOA}}{\sin \widehat{DOB}}$

۱۱) AD و AA' به ترتیب ارتفاع و میانه مثلث ABC هستند. از نقطه A' خطوطی به موازات اضلاع AB و AC رسم می‌کنیم تا ارتفاع AD را به ترتیب در P و Q قطع کنند. ثابت کنید: $(ADPQ) = -1$

۱۲) در مثلث ABC نقطه M وسط ضلع AC و $\widehat{A} = 2\widehat{C}$ است. در نقطه C عمودی بر ضلع BC خارج می‌کنیم تا امتداد ضلع AB را در F قطع کند. نشان دهید: $\widehat{AMB} = \widehat{FMC}$

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خط‌های قطبی آن نسبت به دو دایره مفروض بر هم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایره قطر آن است.

۲) فرض کنید H نقطه‌ای روی ارتفاع AD از مثلث ABC باشد. اگر BH و CH اضلاع AC و AB را در E و F قطع کنند ثابت کنید AD نیمساز زاویه EDF است.

۳) نقطه دلخواه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. در نقطه P عمودهایی بر PA ، PB و PC خارج می کنیم تا اضلاع مقابل را به ترتیب در A' ، B' و C' قطع کنند. نشان دهید نقاط A' ، B' و C' هم‌خط‌اند.

۴) نقطه P در صفحه مثلث ABC مفروض است. خط دلخواه l اضلاع BC ، AC و AB یا امتداد آن‌ها را به ترتیب در A_1 ، B_1 و C_1 قطع کرده است. در نقطه P عمودهایی بر خطوط PA_1 ، PB_1 و PC_1 خارج می‌کنیم تا خط l را به ترتیب در نقاط A_2 ، B_2 و C_2 قطع کنند. نشان دهید خطوط AA_2 ، BB_2 و CC_2 در یک نقطه همرس‌اند.

۵) قطر AB از دایره C مفروض است. نقطه P را روی خط مماس گذرنده از A در نظر گرفته و مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر TH خط عمود وارد از T بر قطر AB باشد، نشان دهید PB پاره خط TH را نصف می‌کند.

۶) دایره (O') از مرکز دایره (O) گذشته و آن را در نقاط A و B قطع می‌کند. از نقطه دلخواه T روی دایره (O') مماس‌های TC و TD را بر دایره (O) فرود می‌آوریم. اگر AB و TO یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید نقاط C ، D و P هم‌خط‌اند.

۷) از نقطه M مماس‌های MD و MA و از نقطه N مماس‌های NC و NB را مطابق شکل بر دایره C رسم کرده‌ایم. محل تلاقی امتدادهای MA و BC را P و محل تلاقی امتدادهای NB و AD را Q و محل تلاقی AB و PQ را S می‌نامیم. ثابت کنید نقاط S ،M و N بر یک استقامت‌اند.

۸) نیمساز داخلی زاویه A از مثلث ABC ضلع BC و دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه D دایره‌ای به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویه XAY را نصف می‌کند. (مرحله دوم المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۳)

۹) مثلث ABC و نقطه دلخواه P مفروض‌اند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC عمود بر AP رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل A را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به همین ترتیب مشخص می کنیم. نشان دهید سه نقطه A' ، B' و C' هم‌خط‌اند.

۱۰) قضیه پروانه: در دایره $C(O,R)$ وتر MN مفروض است. از نقطه P وسط این وتر دو وتر دلخواه AB و CD را می‌گذرانیم. اگر AD و BC با MN در نقاط E و F برخورد نمایند، ثابت کنید: $PE = PF$

۱۱) در مثلث ABC ، مماس‌های مرسوم از رأس A بر دایره‌ی به قطر BC ، در نقاط P و Q بر آن دایره مماس شده‌اند. خط PQ را در l_a می نامیم. خطوط l_b و l_c نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. ثابت کنید خطوط l_a ، l_b و l_c همرس‌اند.

مسایل (راه حل کامل این مسایل را در کتاب ببینید)

۱) چهار نقطه در یک صفحه مفروض‌اند. منعکس هر دسته سه‌تایی را نسبت به نقطه‌ی چهارم می یابیم. نشان دهید که چهار مثلث منعکس حاصل متشابه‌اند.

۲) قضیه بطلمیوس: برای هر چهار نقطه‌ی دلخواه A، B، C و D در صفحه ثابت کنید:

$$AB\cdot CD+AD\cdot BC\geq AC\cdot BD$$

۳) اگر (O,R) و (I,r) به ترتیب دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث باشند، ثابت کنید:

$$OI^{2}=R^{2}-2Rr$$

۴) دو دایره ی ثابت (C_1) و (C_2) یکدیگر را در نقاط E و F قطع می‌کنند. دایره‌ی متغیر (C) بر دوایر (C_1) و (C_2) در نقاط C و D مماس است و خط EF را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید چهار خط AC، AD، BC و BD از چهار نقطه‌ی ثابت در صفحه عبور می‌کنند.

۵) خط ثابت d از مرکز دایره‌ی ثابت $C(O,R)$ می‌گذرد و دایره‌ی متغیر $C'(O',R')$ از نقطه O می‌گذرد و مرکزش روی خط d قرار دارد. مکان هندسی محل تماس مماس مشترک دو دایره‌ی C و C' را با دایره ی متغیر بیابید.

۶) D نقطه‌ای دلخواه روی قاعده BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC است. ثابت کنید مرکز دایره‌ای که بر دوایر محیطی مثلث‌های ABC، ADC و ABD مماس داخل است، روی AD قرار دارد.

۷) وتر AB از دایره‌ی C مفروض است. دو دایره‌ی C_1 و C_2 در نقطه‌ی K بر یکدیگر مماس خارج و بر دایره C مماس داخل و بر وتر AB نیز مماس هستند. اگر مماس مشترک C_1 و C_2 در نقطه‌ی K، دایره‌ی C را در نقطه‌ی P قطع کند ، (P و K در یک طرف وتر AB قرار دارند) ثابت کنید KP نیمساز زاویه‌ی APB است.

۸) دو نقطه‌ی ثابت A و B و دایره‌ی C مفروض‌اند. قاطعی متغیر از B می‌گذرانیم تا دایره‌ی C را در C و D قطع کند. E و F محل تلاقی دیگر دایره‌ی C با AC و AD می‌باشند. مکان هندسی مرکز دایره‌ی محیطی مثلث AEF را بیابید.

۹) در مثلث ABC داریم $\hat{B}=2\hat{C}$ و خط BD نیمساز زاویه $\hat{B}$ است. P را مرکز دایره‌ای می‌گیریم که بر ضلع BC مماس است و همچنین بر دوایر محیطی مثلث‌های ABD و BCD مماس خارج است. ثابت کنید :

$$BP\perp AC$$

۱۰) اگر A' ، B' و C' به ترتیب منعکس‌های نقاط A ، B و C به مرکز H – مرکز ارتفاعی مثلث ABC – و مقدار ثابت k باشند ثابت کنید H مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ است.

۱۱) اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایره‌ی محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد ، ثابت کنید خطی که از نقاط تماس آن با اضلاع می‌گذرد، از مرکز دایره‌ی محاطی داخلی (یا دایره‌ی محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

۱۲) قضیه فوئر باخ : نشان دهید دایره‌ی نه نقطه‌ای مثلث بر دایره‌ی محاطی داخلی (و دوایر محاطی خارجی) مثلث مماس است.

۱۳) فرض کنید ABC ، یک مثلث و Ω دایره محاطی آن باشد. Ω_a دایره‌ای است که از نقاط B و C می‌گذرد و بر Ω عمود است. دوایر Ω_b و Ω_c نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. دوایر Ω_a و Ω_b یکدیگر را دوباره در C' قطع می‌کنند و به همین ترتیب نقاط A' و B' بدست می‌آیند. ثابت کنید شعاع دایره محیطی $A'B'C'$ برابر است با نصف شعاع Ω .

تمرینات تکمیلی (راه حل کامل این تمرینات را در کتاب ببینید)

۱) زوایای B و D در چهارضلعی $ABCD$، برابر 135° است. عمودهای خارج شده از نقطه‌ی C بر اضلاع BC و DC، امتداد اضلاع AB و AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می کنند. دوایر محیطی مثلث‌های ABD و AEF یکدیگر را در P قطع می‌کنند. نشان دهید: $\widehat{APC}=90^\circ$ (مرحله دوم المپیاد ریاضی ۱۳۸۱)

۲) در چهارضلعی $ABCD$، دو ضلع AD و BC با هم برابرند. خط متغیری دو ضلع BC و AD را به ترتیب در نقاط Eو F قطع می‌کند به طوری که داریم $CE=AF$. این خط دو قطر AC و BD را نیز در نقاط P و Q قطع می‌کند. اگر محل تقاطع دو قطر AC و BD را K بنامیم نشان دهید که با تغییر خط مذکور، دایره محیطی مثلث KPQ همواره از نقطه‌ی ثابتی می‌گذرد. (المپیاد جهانی ریاضی سال ۲۰۰۵)

۳) ثابت کنید در مثلث ABC، وسط ارتفاع AH و محل تماس دایره محاطی خارجی نظیر رأس A با ضلع BC و نقطه I مرکز دایره محاطی داخلی مثلث با یکدیگر هم خطاند.

۴) فرض کنید دایره محاطی داخلی مثلث ABC در نقاط D، E و F به ترتیب بر اضلاع BC، CA و AB مماس باشد. ثابت کنید O و I مراکز دوایر محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC بر خط اویلر مثلث DEF قرار دارند.

۵) وتر AB از دایره‌ی (O) مفروض است. دو دایره (O_1) و (O_2) بر دایره‌ی (O) مماس داخل و بر پاره‌خط AB در نقطه‌ی C مماس می‌باشند. ثابت کنید که نسبت شعاع‌های دو دایره‌ی (O_1) و (O_2) مستقل از مکان نقطه C مقداری ثابت است.

۶) مسأله چاقوی کفاشی: فرض کنید C نقطه‌ای روی پاره‌خط AB باشد. ثابت کنید شعاع دو دایره، که هر کدام هم بر دو دایره از دوایر به قطرهای AB، ACو BC و هم بر خط عمود بر AB که از C می‌گذرد، مماس است، با یکدیگر برابرند.

۷) نقطه‌ی E را در چهارضلعی محاطی $ABCD$ طوری درنظر می‌گیریم که داشته باشیم: $\widehat{EAD}+\widehat{ECD}=\widehat{EBC}+\widehat{EDC}=90^\circ$ اگر O مرکز دایره محیطی چهار ضلعی $ABCD$ و F محل برخورد اقطار AC و AB باشد نشان دهید که نقاط O، E و F هم‌خطاند.

۸) نیم‌دایره‌ای به قطر AB و مرکز O مفروض است. از نقطه‌ی M روی امتداد AB که $MA<MB$، قاطعی رسم می کنیم تا نیم دایره را در نقاط C و D قطع کند به طوری که $MC<MD$. دوایر محیطی مثلث‌های OAC و OBD یکدیگر را در K قطع می‌کنند. ثابت کنید: $\widehat{OKM}=90^\circ$.

۹) دایره محاطی مثلث ABC، در نقاط D، E و F بر اضلاع BC، AC و AB مماس است. AD این دایره را در نقطه‌ی M قطع می کند. نقطه‌ی M را به نقاط B و C وصل می‌کنیم تا دایره محاطی را به ترتیب در نقاط P و Q قطع کنند. اگر $AM=MD$، ثابت کنید: $PF \parallel QE$

۱۰) اوساط اضلاع BC ، AC و AB از مثلث ABC را به ترتیب A' ، B' و C' می نامیم. از رأس A عمودی بر $A'H$ رسم می‌کنیم تا ضلع مقابل را در A_1 قطع کند. اگر B_1 و C_1 را نیز به همین ترتیب تعریف کنیم نشان دهید سه نقطه A_1 ، B_1 و C_1 هم‌خط‌اند و این خط بر خط اویلر مثلث ABC عمود است.

۱۱) نشان دهید عمودهایی که در مرکز دایره محاطی مثلث بر سه نیمساز داخلی این مثلث رسم می شوند ، اضلاع متناظر را در سه نقطه روی خطی که بر OI عمود است قطع می‌کنند.

۱۲) AD ، BE و CF ارتفاع های مثلث ABC می‌باشند. از H مرکز ارتفاعی مثلث ABC ، خطی موازی EF رسم می‌کنیم تا خط BC را در A' قطع کند. نقاط B' و C' را نیز به طور مشابه تعریف می کنیم. ثابت کنید نقاط A' ، B' و C' بر روی خطی که بر OH عمود است قرار دارند.

۱۳) H مرکز ارتفاعی مثلث ABC و P نقطه دلخواهی در صفحه می‌باشد. ارتفاع AH و خط AP دایره محیطی مثلث ABC را به ترتیب در A_1 و A_2 قطع می کنند. خط A_1A_2 را در نقطه BC قطع می‌کند. اگر A' ، B' و C' نیز به طور مشابه تعریف شوند ثابت کنید نقاط A' ، B' و C' بر خطی که بر $P'H$ عمود است ، واقع‌اند. P' مزدوج هم‌زاویه نقطه‌ی P (مسأله ۴-۴) نسبت به مثلث ABC می‌باشد.

۱۴) خط l اضلاع مثلث ABC را در A' ، B' و C' قطع کرده است. پای عمودهای وارد از A ، B و C بر $A'H$ ، $B'H$ و $C'H$ را به ترتیب A'' ، B'' و C'' می‌نامیم. نشان دهید AA'' ، BB'' و CC'' روی خط عمودی که از H بر l رسم می‌شود همرس‌اند.