فصل ۶- دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی در حالت کلی به صورت زیر است

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

یا به شکل ماتریسی

$$AX = b, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\ a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1} \qquad (2)$$

قضیه- دستگاه (۲) دارای جواب یکتا است اگر و تنها اگر $\det(A) \neq 0$.

حل دستگاه به روش های حذفی:

تعریف- دو دستگاه

$$AX = b, \qquad (3)$$

و

$$\tilde{A}X = \tilde{b}, \qquad (4)$$

را معادل گوییم هرگاه هر جواب (۳) جواب (۴) نیز باشد و برعکس.

تعریف- فرض کنید $AX = b$ یک دستگاه معادلات خطی باشد، اعمال زیر را اعمال سطری مقدماتی می نامند:

- ضرب معادله ای از دستگاه در یک عدد غیر صفر
- افزودن مضربی از یک معادله به معادله دیگر
- تعویض دو معادله دستگاه با هم

قضیه- دستگاه $AX = b$ را در نظر بگیرید و فرض کنید دستگاه $\tilde{A}X = \tilde{b}$ از انجام اعمال سطری مقدماتی بر روی دستگاه $AX = b$ حاصل شده باشد، در آنصورت دو دستگاه معادل هستند.

روش حذفی گوس:

در این روش ابتدا، ماتریس افزوده دستگاه را به صورت زیر تشکیل می دهیم

$$\left[A|b\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & b_3 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_4 \end{array}\right]$$

و سپس با استفاده از اعمال سطری مقدماتی ماتریس A را به یک ماتریس مثلثی تبدیل می کنیم.

حذف در ستون اول-

فرض کنید $a_{11} \neq 0$ ، (در غیر اینصورت سطر اول ماتریس افزوده را با سطری که اولین درایه‌اش مخالف صفر دارد تعویض می کنیم.) a_{11} را **عنصر محوری** می نامیم. حال ضریبگر های m_{i1} را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}, \qquad i = 2,3,...,n$$

سپس m_{i1} برابر سطر اول را به سطر i ام $(i = 2,3,...,n)$ اضافه می‌کنیم.

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + m_{i1}a_{1j}, \quad (i = 2,...,n, \quad j = 1,...,n)$$
$$b_i^{(1)} = b_i + m_{i1}b_1, \qquad i = 2,...,n$$

در این صورت تمام درایه‌های زیر قطر اصلی در ستون اول برابر با صفر خواهند شد و بقیه درایه‌های ماتریس افزوده به جز سطر اول تغییر می‌کنند.

$$\left[A|b\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & b_3 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n-1}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn-1}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

به طور مشابه برای صفر کردن درایه‌های زیر قطر اصلی ستون k ام با فرض $a_{kk} \neq 0$ داریم

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \qquad i = k+1,...,n$$
$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{ik}a_{kj}^{(k-1)}, \quad (i = k+1,...,n, \quad j = k+1,...,n)$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{ik}b_i^{(k-1)}$$

در نهایت ماتریس افزوده به ماتریس زیر تبدیل می‌شود (ماتریس A به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می‌شود.)

$$\left[A|b\right] == \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & b_3 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3n-1}^{(1)} & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn-1}^{(1)} & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n-1}^{(2)} & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array}\right]$$

دستگاه فوق یک دستگاه بالا مثلثی نام دارد. اکنون مقادیر $x_1, x_2, ..., x_n$ با جایگذاری پسرو در دستگاه زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + ... + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

مثال- دستگاه زیر را با استفاده از روش حذفی گوس حل نمایید.

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2+4x_3=6, \\ 6x_1+12x_2+7x_3=18, \\ -3x_1+6x_2-x_3=15. \end{cases}$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 6 & 12 & 7 & 18 \\ -3 & 6 & -1 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 12 & 5 & 24 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 0 & 12 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

ماتریس بالا مثلثی است.

عنصر محوری صفر شده است. بنابراین سطر دوم و سطر سوم را جابجا می کنیم.

$$\begin{cases} -5x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, \\ 12x_2 + 5x_3 = 24 \Rightarrow x_2 = 2, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 6 \Rightarrow x_1 = -1. \end{cases}$$

★ روش حذفی گوس-ژردان :

در این روش مانند روش گوس، ابتدا ماتریس افزوده دستگاه را می نویسیم و سپس با اعمال سطری مقدماتی ماتریس A را به یک ماتریس قطری (و یا همانی) تبدیل می کنیم.

مثال - دستگاه زیر را با استفاده از روش حذفی گوس-ژردان حل نمایید.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

عنصر محوری صفر است. سطر اول را با سطر دوم جابجا می کنیم.

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right]$$

جواب دستگاه عبارت است از: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1, x_4 = 1$.

اگر در روش حذفی گوس و یا گوس-ژردان، یک سطر از ماتریس ضرایب صفر گردد در آن صورت دترمینال ماتریس ضرایب دستگاه برابر با صفر است و در نتیجه دستگاه یا فاقد جواب است و یا دارای بیشمار جواب است. اگر درایه متناظر با سطر صفر در ستون آخر ماتریس افزوده نیز صفر گردد دستگاه دارای بیشمار جواب است درغیر اینصورت دستگاه جواب ندارد.

مثال- دستگاه زیر را با استفاده از روش حذفی گوس حل نمایید.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+7x_2+8x_3=5. \end{cases}$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 3x_2+2x_3=3 \end{cases}$$

دستگاه فوق بی شمار جواب دارد. با در نظر گرفتن یک مقدار دلخواه برای یکی از متغیرها، سایر متغیر ها به دست می آیند. بعنوان مثال :

$$x_3=1 \Rightarrow \quad x_2=\frac{1}{3},\ x_1=\frac{-8}{3}$$

مثال- دستگاه زیر را با استفاده از روش حذفی گوس حل نمایید.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=2, \\ 2x_1+7x_2+8x_3=10. \end{cases}$$

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right]$$

در این حالت با توجه معادله سطر آخر داریم $0=-5$!!! . در نتیجه دستگاه جواب ندارد. ☺

محورگیری:

دستگاه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 10^{-5}x_1+x_2=1, \\ x_1+x_2=2, \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق به روش گوس و با ۴ رقم اعشار، داریم

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-5} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-5} & 1 & 1 \\ 0 & -99999 & -99998 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1=0, \\ x_2=0.999989999 \simeq 1. \end{cases}$$

که ملاحظه می شود که جواب اشتباه است. حال ترتیب دو معادله را عوض کرده و سپس دستگاه را حل می کنیم. داریم

$$[A|b]=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-5} & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-10^{-5} & 1-2(10^{-5}) \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=1. \end{cases}$$

☺ مشاهده می شود که تغییر جای معادلات می تواند در جواب دستگاه موثر باشد. اگر در یک دستگاه معادلات خطی، درایه محوری غیرصفر ولی در مقایسه با درایه های ستون خود و در زیر آن خیلی کوچک باشد، در آن صورت ضریبگر ها m_{ij} ، از نظر قدر مطلق خیلی بزرگتر از یک هستند. در نتیجه استفاده از این اعداد بزرگ خطاهای گردکردن را افزایش می دهند . بنابراین مناسب است که بزرگترین عنصر از نظر قدر مطلق بین عنصر قطری و عناصر زیر آن به عنوان عنصر محوری انتخاب شود. بدین منظور در هر مرحله از روش حذفی گوس و یا گوس-جردن سطری را که دارای بزرگترین عنصر از نظر قدرمطلق در ستونی که عناصر زیر قطر آن باید صفر شوند، می باشد، به عنوان سطر محوری انتخاب می کنیم . این عمل را **محورگیری** می نامند.

مثال . دستگاه های زیر را باروش حذفی گوس و با محورگیری حل نمایید.

$$\begin{cases}1.012x_1-2.132x_2+3.104x_3=1.984,\\ -2.132x_1+4.096x_2-7.013x_3=-5.049,\\ 3.104x_1-7.013x_2+0.014x_3=-3.895.\end{cases}$$

ابتدا ماتریس افزوده دستگاه فوق را به صورت زیر تشکیل می دهیم . چون بزرگترین عنصر ستون اول از لحاظ قدر مطلق در سطر سوم است ابتدا سطر اول و سطر سوم را تعویض می کنیم . داریم

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1.012&-2.132&3.104&1.984\\-2.132&4.096&-7.013&-5.049\\3.104&-7.013&0.014&-3.895\end{array}\right]\xrightarrow[|3.104|>|-2.012|]{|3.104|>|1.012|}\left[\begin{array}{ccc|c}3.104&-7.013&0.014&-3.895\\-2.132&4.096&-7.013&-5.049\\1.012&-2.132&3.104&1.984\end{array}\right]\xrightarrow[m_{31}=-0.3260]{m_{21}=0.6869}$$

در این مرحله چون عنصر محوری از سایر درایه های زیر آن از نظر قدر مطلق بزرگتر است نیازی به عویض سطر ها نیست.

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}3.1040&-7.0130&0.0140&-3.8950\\0&-0.7209&-7.0034&-7.7243\\0&0.1545&3.0994&3.2539\end{array}\right]\xrightarrow{m_{32}=0.2142}\left[\begin{array}{ccc|c}3.1040&-7.0130&0.0140&-3.8950\\0&-0.7209&-7.0034&-7.7243\\0&0&1.5990&1.5990\end{array}\right]$$

$$\to\begin{cases}1.5990x_3=1.5990 & \Rightarrow x_3=1\\ -0.7209x_2-7.0034x_3=-7.7243 & \Rightarrow x_2=1\\ 3.1040x_1-7.0130x_2+0.0140x_3=-3.8950 & \Rightarrow x_1=1\end{cases}$$

مثال- دستگاه زیر را با استفاده از روش حذفی گوس با محور گیری و بدون محور گیری حل نمایید.

$$\begin{cases}1.133x_1-5.281x_2=6.414,\\ 24.14x_1-1.210x_2=22.93.\end{cases}$$

بدون محورگیری:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1.133&5.281&6.414\\24.14&-1.210&22.93\end{array}\right]\xrightarrow{m_{21}=-\frac{24.14}{1.133}}\left[\begin{array}{cc|c}1.133&5.281&6.414\\0&-113.7&-113.8\end{array}\right]$$

$$\to\begin{cases}-113.7x_2=-113.8 & \Rightarrow x_2=1.001\\ 1.133x_1+5.281x_2=6.414 & \Rightarrow x_1=0.9956\end{cases}$$

با محور گیری:

$$\left[\begin{array}{cc|c}1.133&5.281&6.414\\24.14&-1.210&22.93\end{array}\right]\xrightarrow{|24.14|>|1.133|}\left[\begin{array}{cc|c}24.14&-1.210&22.93\\1.133&5.281&6.414\end{array}\right]\xrightarrow{m_{21}=-\frac{1.133}{24.14}}\left[\begin{array}{cc|c}24.14&-1.210&22.93\\0&5.338&5.338\end{array}\right]$$

$$\to\begin{cases}5.338x_2=5.338 & \Rightarrow x_2=1\\ 24.14x_1-1.210x_2=22.93 & \Rightarrow x_1=1\end{cases}$$

حل دستگاه با استفاده از تجزیه ماتریس:

تجزیه ماتریس:

در این بخش، هدف به دست آوردن ماتریس های پایین مثلثی L و بالا مثلثی U است به طوری که $A=LU$. برای تجزیه ماتریس باید داشته باشیم

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&0&\cdots&0\\l_{21}&l_{22}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\l_{n1}&l_{n2}&\cdots&l_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&\cdots&u_{1n}\\0&u_{22}&\cdots&u_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&u_{nn}\end{bmatrix}$$

حال باید مقادیر مجهول l_{ij} و u_{ij} را از رابطه فوق محاسبه نماییم . با توجه به رابطه بالا ، تعداد مجهولات n^2+n و تعداد معادله ها n^2 است. بنابراین می توان n مجهول از مجهولات فوق را به دلخواه انتخاب کرد. راه های مختلفی برای این کار وجود دارد. دو روشی که در این جا مطرح می شود روش های دولیتل (Doolittle) و کرات (Crout) است.

★ روش دولیتل:

در روش دولیتل، تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس L را برابر با یک در نظر میگیریم.

$$l_{ii}=1, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

★ روش کروت:

در روش کروت، تمام عناصر روی قطر اصلی ماتریس U را برابر با یک در نظر میگیریم.

$$u_{ii}=1, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

فرض کنید بخواهیم دستگاه $AX=b$ را حل کنیم. ابتدا A را به صورت $A=LU$ تجزیه می کنیم. پس داریم

$$LUX=b$$

قرار می دهیم

$$UX=y$$

پس داریم

$$Ly=b.$$

پس حل دستگاه $AX=b$ منجر می شود به حل دو دستگاه مثلثی $UX=y$ و $Ly=b$. ابتدا دستگاه پایین مثلثی $Ly=b$ را حل کرده و بردار y را به دست می آوریم سپس از حل دستگاه $UX=y$ بردار X به دست می آید.

مثال- دستگاه $\begin{cases}5x_1+x_2-x_3=11,\\ x_1-4x_2+x_3=1,\\ -x_1+x_2+4x_3=-6.\end{cases}$ را به روش تجزیه دولیتل حل کنید.

$$A=\begin{bmatrix}5&1&-1\\1&-4&1\\-1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\l_{21}&1&0\\l_{31}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}\\0&u_{22}&u_{23}\\0&0&u_{33}\end{bmatrix}$$

گام اول- ضرب سطر اول ماتریس L در ستون های ماتریس U.

$$\begin{cases}u_{11}=5\\u_{12}=1\\u_{13}=-1\end{cases}$$

گام دوم- ضرب سطر دوم ماتریس L در ستون های ماتریس U.

$$\begin{cases}l_{21}u_{11}=1 & \Rightarrow & l_{21}=\frac{1}{5}=0.2\\ l_{21}u_{12}+u_{22}=-4 & \Rightarrow & u_{22}=\frac{-21}{5}=-4.2\\ l_{21}u_{13}+u_{23}=1 & \Rightarrow & u_{23}=\frac{6}{5}=1.2\end{cases}$$

گام سوم- ضرب سطر سوم ماتریس L در ستون های ماتریس U.

$$\begin{cases}l_{31}u_{11}=-1 & \Rightarrow & l_{31}=\frac{-1}{5}=-0.2\\ l_{31}u_{12}+l_{32}u_{22}=1 & \Rightarrow & l_{32}=\frac{-6}{21}=-0.2857\\ l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+u_{33}=4 & \Rightarrow & u_{33}=\frac{29}{7}=4.1429\end{cases}$$

پس داریم

$$\begin{bmatrix}5&1&-1\\1&-4&1\\-1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.2&1&0\\-0.2&-0.2857&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&1&-1\\0&-4.2&1.2\\0&0&4.1429\end{bmatrix}$$

برای حل دستگاه داریم

$$Ly=b\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0.2&1&0\\-0.2&-0.2857&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\\-6\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}y_1=11\\0.2y_1+y_2=1\Rightarrow y_2=-1.2\\-0.2y_1-0.2857y_2+y_3=-6\Rightarrow y_3=-4.1429\end{cases}$$

$$Ux=y\Rightarrow\begin{bmatrix}5&1&-1\\0&-4.2&1.2\\0&0&4.1429\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\-1.2\\-4.1429\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}4.1429x_3=-4.1429\Rightarrow x_3=-1\\-4.2x_2+1.2x_3=-1.2\Rightarrow x_2=0\\5x_1+x_2-x_3=11\Rightarrow x_1=2\end{cases}$$

مثال- دستگاه مثال قبل را در نظر بگیرید. دستگاه را به روش تجزیه و با فرض $\begin{cases}u_{11}=1\\u_{22}=2\\u_{33}=3\end{cases}$ حل نمایید.

$$\begin{bmatrix}5&1&-1\\1&-4&1\\-1&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&0&0\\l_{21}&l_{22}&0\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&u_{12}&u_{13}\\0&2&u_{23}\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}l_{11}=5\\l_{11}u_{12}=1\Rightarrow u_{12}=\frac{1}{5}=0.2\\l_{11}u_{13}=-1\Rightarrow u_{13}=\frac{-1}{5}=-0.2\end{cases}\qquad\begin{cases}l_{21}=1\\l_{21}u_{12}+2l_{22}=-4\Rightarrow l_{22}=-2.1\\l_{21}u_{13}+l_{22}u_{23}=1\Rightarrow u_{23}=-0.5714\end{cases}\qquad\begin{cases}l_{31}=-1\\l_{31}u_{12}+2l_{32}=1\Rightarrow l_{32}=0.6\\l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+3l_{33}=4\Rightarrow l_{33}=1.3809\end{cases}$$

$$L=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&-2.1&0\\-1&0.6&1.3809\end{bmatrix}\qquad U=\begin{bmatrix}1&0.2&-0.2\\0&2&-0.5714\\0&0&3\end{bmatrix}$$

$$Ly=b\Rightarrow\begin{bmatrix}5&0&0\\1&-2.1&0\\-1&0.6&1.3809\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\\-6\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_1=2.2\\y_1-2.1y_2=1\Rightarrow y_2=0.5714\\-y_1+0.6y_2+1.3809y_3=-6\Rightarrow y_3=-3\end{cases}$$

$$Ux=y\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0.2&-0.2\\0&2&-0.5714\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.2\\0.5714\\-3\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{cases}3x_3=-3\Rightarrow x_3=-1\\2x_2-0.5714x_3=0.5714\Rightarrow x_2=0\\x_1+0.2x_2-0.2x_3=2.2\Rightarrow x_1=2\end{cases}$$

حل دستگاه به روش های تکراری:

روش هایی که تا اینجا مطرح کردیم جزء روش های مستقیم حل دستگاه هستند. اکنون می خواهیم روش های تکراری برای حل دستگاه معرفی نماییم.

دستگاه معادلات خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}$$

فرض کنید $a_{ii}\neq 0,\ \forall i$ ، دستگاه فوق را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3\dots-a_{1n}x_n), \\ x_2=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3-\dots-a_{2n}x_n), \\ \vdots \\ x_n=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\dots-a_{nn-1}x_{n-1}). \end{cases} \Rightarrow \quad x_i=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j), \qquad i=1,2,\dots,n$$

★ روش تکراری ژاکوبی:

ابتدا $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ را به عنوان حدس اولیه برای جواب دستگاه در نظر گرفته و جواب جدید دستگاه را با استفاده از فرمول تکراری زیر به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)}\dots-a_{1n}x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k)}-a_{23}x_3^{(k)}-\dots-a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)}=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1^{(k)}-a_{n2}x_2^{(k)}-\dots-a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}). \end{cases} \Rightarrow \quad x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),$$

مثال. تقریبی از جواب دستگاه زیر را با روش ژاکوبی و با حدس اولیه $x_1=1, x_2=1, x_3=1$ و تا ۲ تکرار به دست آورید.

$$\begin{cases} -6x_2+14x_3=0 \\ -4x_1+12x_2-6x_3=0, \\ 7x_1-4x_2=12. \end{cases}$$

از آنجا که معادله اول فاقد x_1 و معادله سوم فاقد x_3 است، ابتدا دو معادله اول و سوم را تعویض می کنیم. داریم

$$\begin{cases} 7x_1-4x_2=12, \\ -4x_1+12x_2-6x_3=0, \\ -6x_2+14x_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{12}(0+4x_1^{(k)}+6x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{14}(0+6x_2^{(k)}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(0)})=\frac{1}{7}(12+4(1))=2.285712 \\ x_2^{(1)}=\frac{1}{12}(4x_1^{(0)}+6x_3^{(0)})=\frac{1}{12}(4(1)+6(1))=0.8333, \\ x_3^{(1)}=\frac{1}{14}(6x_2^{(0)})=\frac{1}{14}(6(1))=0.428574. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(1)})=\frac{1}{7}(12+4(0.8333))=2.190472 \\ x_2^{(2)}=\frac{1}{12}(4x_1^{(1)}+6x_3^{(1)})=\frac{1}{12}(4(2.285712)+6(0.428574))=0.976187, \\ x_3^{(2)}=\frac{1}{14}(6x_2^{(1)})=\frac{1}{14}(6(0.8333))=0.357144 \end{cases}$$

★ روش تکراری گوس - سایدل:

در این روش نیز ابتدا $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_n^{(0)})$ را به عنوان حدس اولیه برای جواب دستگاه در نظر گرفته و جواب جدید دستگاه را با استفاده از فرمول تکراری زیر به دست می آوریم.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(k)}-a_{13}x_3^{(k)}\ldots-a_{1n}x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(k+1)}-a_{23}x_3^{(k)}-\ldots-a_{2n}x_n^{(k)}), \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)}=\frac{1}{a_{nn}}(b_n-a_{n1}x_1^{(k+1)}-a_{n2}x_2^{(k+1)}-\ldots-a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}). \end{cases} \Rightarrow \quad x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}),$$

در روش گوس – سایدل، در واقع در محاسبه جواب در یک مرحله، از مقادیر محاسبه شده در همان مرحله استفاده می گردد در صورتی که در روش ژاکوبی از مقادیر محاسبه شده در مرحله قبل استفاده می شود.)

مثال- تقریبی از جواب دستگاه مثال قبل را با استفاده از روش گوس – سایدل تا سه تکرار به دست آورید.

$$\begin{cases} 7x_1-4x_2=12, \\ -4x_1+12x_2-6x_3=0, \\ -6x_2+14x_3=0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)}=\frac{1}{12}(0+4x_1^{(k+1)}+6x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)}=\frac{1}{14}(0+6x_2^{(k+1)}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(0)})=\frac{1}{7}(12+4(1))=2.2857 \\ x_2^{(1)}=\frac{1}{12}(4x_1^{(1)}+6x_3^{(0)})=\frac{1}{12}(4(2.285712)+6(1))=1.2619, \\ x_3^{(1)}=\frac{1}{14}(6x_2^{(1)})=\frac{1}{14}(6(1.2619))=0.5408. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(1)})=\frac{1}{7}(12+4(1.2619))=2.4354 \\ x_2^{(2)}=\frac{1}{12}(4x_1^{(2)}+6x_3^{(1)})=\frac{1}{12}(4(2.4354)+6(0.5408))=1.0822, \\ x_3^{(2)}=\frac{1}{14}(6x_2^{(2)})=\frac{1}{14}(6(1.0822))=0.4638 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^{(3)}=\frac{1}{7}(12+4x_2^{(2)})=\frac{1}{7}(12+4(1.0822))=2.333 \\ x_2^{(3)}=\frac{1}{12}(4x_1^{(2)}+6x_3^{(1)})=\frac{1}{12}(4(2.333)+6(0.4638))=1.0096, \\ x_3^{(2)}=\frac{1}{14}(6x_2^{(2)})=\frac{1}{14}(6(1.0096))=0.4327 \end{cases}$$

همگرایی روش های تکراری حل دستگاه

تعریف- ماتریس مربعی مرتبه ی n ، A را اکیدا غالب قطری می نامند هرگاه داشته باشیم

$$|a_{ij}|>\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}|a_{ij}|, \qquad \forall i=1,2,\ldots,n.$$

قضیه- اگر در دستگاه $Ax=b$ ماتریس A اکیدا غالب قطری باشد، آنگاه روش ژاکوبی و گوس-سایدل به ازای هر حدس اولیه $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$ به جواب دستگاه همگرا است.

مثال- دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} x_1+6x_2-2x_3=7, \\ x_1-3x_2+7x_3=16, \\ 5x_1+x_2+x_3=10. \end{cases}$$

روش ژاکوبی و گوس – سایدل برای حل دستگاه فوق همگرا نیست. ترتیب معادلات را به گونه ای تعویض کنید که روش ژاکوبی و گوس –سایدل همگرا باشند.

حل- کافیست معادلات را به گونه ای جابجا کنیم که ماتریس ضرایب دستگاه غالب قطری اکید گردد.

$$\begin{cases} x_1+6x_2-2x_3=7, \\ x_1-3x_2+7x_3=16, \\ 5x_1+x_2+x_3=10. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1+x_2+x_3=10, \\ x_1+6x_2-2x_3=7, \\ x_1-3x_2+7x_3=16. \end{cases}$$

خلاصه فصل ٦:

روش های حل دستگاه معادلات خطی

- ۱- روش های مستقیم
  - ۱- روش های حذفی
    - ۱- روش گوس: $\left[A\middle|b\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \times & \cdots & \times & \times \\ & \times & \vdots & \times \\ 0 & & \times & \times \end{array}\right]$
    - ۲- روش گوس-جردان: $\left[A\middle|b\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} \times & & 0 & \times \\ & \times & & \times \\ 0 & & \times & \times \end{array}\right]$
  - ۲- روش های تجزیه ماتریس
    - ۱- تجزیه دولیتل: $A = LU, \quad \forall i, l_{ii} = 1$
    - ۲- تجزیه کرات: $A = LU, \quad \forall i, u_{ii} = 1$
- ۲- روش های تکراری
  - ۱- روش ژاکوبی: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),$
  - ۲- روش گوس - سایدل: $x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}),$