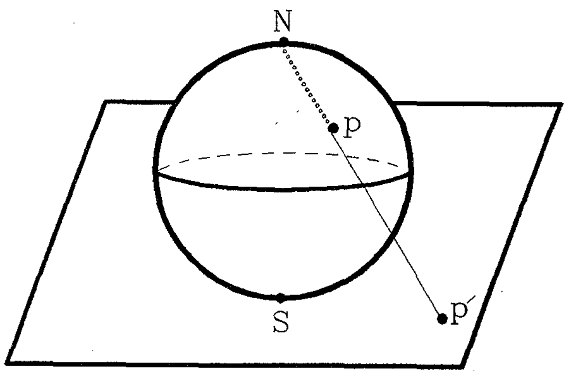
پیشگفتار: در دروس آنالیز فراگرفتیم که چگونه می‌توان محاسبات دیفرانسیل و انتگرال را روی بازهای $I\!R^n$ انجام داد .هندسه دیفرانسیل یا منیفلد در حقیقت عبارت از گسترش و تعمیم این محاسبات وبررسی هندسی آنها روی زیر مجموعه‌هایی از $I\!R^n$ است که بتوان بر روی آن یک **دستگاه مختصات** مناسب به طور موضعی (یعنی در همسایگی هر نقطه)تعریف نمود. به عنوان مثال می‌توان دستگاههای مختصات مختلفی روی کره $S^۲$ به عنوان زیر مجموعه‌ای از $I\!R^۳$ به صورت زیر تعریف نمود.

الف- فرض کنیم یک نقطه از کره $S^۲$ به عنوان نقطه‌ای از $I\!R^۳$ عبارت باشد از

$x = (x_۱, x_۲, x_۳)$ و در نتیجه $x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ = ۱$ لذا

$S^۲ = \{(x_۱, x_۲, x_۳) \in I\!R^۳ | f(x) = ۰\}$ که در آن تابع $f : I\!R^۳ \to I\!R$ به صورت

$f : (x_۱, x_۲, x_۳) \to x_۱^۲ + x_۲^۲ + x_۳^۲ - ۱$ تعریف می‌شود.



شکل ۱.۱ : *تصویر استریوگرافیک*

می‌توان از تصویر استریوگرافیک[1] به عنوان یک روش ارائه مختصات روی کره استفاده کرد در این روش مختصات هر نقطه P از کره را توسط مختصات P' از صفحه‌تعریف می‌نمائیم. به شکل ۱.۱ مراجعه شود.

با این روش تمام نقاط کره به جز قطب شمال N دارای یک مختصات خواهند شد و برای

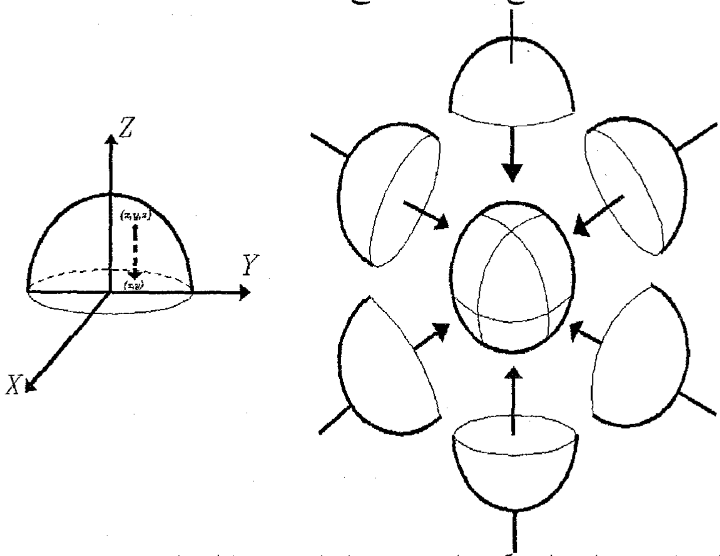
[1] *Stereographic projection*

معرفی کل کره می‌توان یک تصویر استریوگرافیک دیگر نسبت به قطب جنوب S تعریف نمود (که تمام کره بجز قطب جنوب را معرفی می‌نماید)سپس با استفاده از این دو دستگاه مختصات استریوگرافیک می‌توان کل کره را پوشانید.

ب- می‌توان دستگاه مختصات دیگری نیز برای کره معرفی نمود که نیمکره شمالی را توسط نمودار تابع $z = f_1(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ونیمکره جنوبی را توسط تابع زیر بپوشاند.

$$z = f_2(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

اما اگر در اینجا فرض را برآن بگذاریم که حوزه تعریف توابع فوق قرص بازی از صفحه $I\!R^2$ باشند این توابع روی کره S^2 دایره $x^2 + y^2 = 1$ را نمی‌پوشانند . لذا برای اینکه بتوانیم یک دستگاه مختصات به کره نسبت دهیم باید توابع دیگری نیز مشابه توابع فوق تعریف کنیم تا حوزه مقادیر توابع مذکور کل کره را بپوشاند .حدس می‌زنید برای اینکار احتیاج به چند تابع (یا نیمکره باز)داریم ؟ جواب این سؤال را می‌توانید با مراجعه به شکل زیر بدست آورید توجه کنید که وارون توابع بالا همان توابع مختصات هستند.



شکل ۱.۲ : با شش تابع یا نیمکره باز نیز می‌توان کره را پوشانید که در سمت چپ یکی از آنها را مشاهده می‌کنید

در اینجا مایل هستیم با انتخاب چند دستگاه مختصات مناسب روی S^2 شرایط لازم برای تعریف یک تابع دیفرانسیل‌پذیر (بعنوان مثال از S^2 در S^2) را فراهم آوریم. بررسی این مختصات روی زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$ و انتخاب بهترین آنها جهت محاسبات حساب دیفرانسیل و انتگرال ما را بر آن می‌دارد که در این فصل به تعریف یکی از اساسی‌ترین مفاهیم جدید ریاضی به نام منیفلد بپردازیم.

۱.۱ § کارت‌های موضعی و اطلس [1]

در اینجا به تعریف نگاشتی می‌پردازیم که از آن برای تعیین مختصات روی مجموعه با استفاده می‌شود.

تعریف: فرض کنیم M یک مجموعه ناتهی، O زیر مجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ و $U \subseteq M$ باشد. نگاشت دوسویی $x : U \mapsto x(U) = O \subset \mathbb{R}^n$ را یک **کارت** n **بعدی**، U را حوزه کارت و زوج (x, U) را یک **کارت موضعی** می‌نامیم.

اگر تابع $P^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به صورت $P^i : (t^1, \cdots, t^n) \mapsto t^i$ تعریف شود آنگاه توابع $x^i = P^i \circ x : U \longrightarrow \mathbb{R}$ را **توابع مختصاتی**[2] می‌گویند. به همین دلیل زوج (x, U) را **دستگاه مختصات موضعی**[3] نیز می‌نامند . لذا هر نقطه روی U توسط n تایی از توابع حقیقی $(x^1, \cdots, x^n)$ معرفی می‌شود.

تذکر ۱: همانطوری که ملاحظه نمودید درتعریف کارت موضعی (x, U) دو موضوع مطرح است، اولاً x دوسویی باشد، ثانیاً $x(U)$ باز باشد.

مثال ۱: فضای $M = \mathbb{R}^n$ همراه با نگاشت همانی $x = Id$ یک کارت موضعی nبعدی بدیهی روی $\mathbb{R}^n$ تشکیل می‌دهد.

$$x = Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad ; x(p) = p$$

---

[1] *Local chart (Carte locale) – Atlas*

[2] *Coordinate functions (Fonctions des coordonne'es)*

[3] *Local coordinate system*

مثال ۲: نیمکره باز S^{2}_{+} با نگاشت تصویر روی صفحه $\mathbb{R}^{2}$ (مثال ج در پیشگفتار) یک کارت ۲بعدی روی S^{2} تعریف می‌نماید. (شکل ۱.۲ : سمت چپ)

در حقیقت نگاشت دو سویی تصویر f را از نیمکره باز S^{2}_{+} در دیسک باز D^{2} زیر در نظر گرفته‌ایم

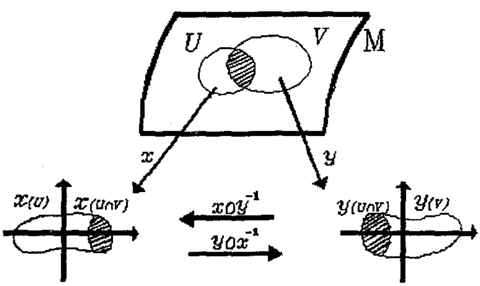
$$f:\ S^{2}_{+} \longrightarrow D^{2} \subset \mathbb{R}^{2}$$
$$(x, y, \sqrt{1 - x^{2} - y^{2}}) \longrightarrow (x, y)$$

لذا (f, S^{2}_{+}) یک کارت دوبعدی روی S^{2} تعریف می‌کنند.

مثال ۳: $M = M_{n,p}(\mathbb{R})$ مجموعه ماتریس‌های $n \times p$ حقیقی همراه با نگاشت

$$x : M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{np}$$
$$[a_{ij}] \longmapsto (a_{11}, a_{12}, \cdots a_{ij}, \cdots, a_{np})$$

یک کارت npبعدی روی تمام M تعریف می‌نماید.



شکل ۱.۳ : کارت‌های مرتبط و نگاشت تغییر کارت

تعریف: فرض کنیم (x, U) و (y, V) دو کارت موضعی n- بعدی روی M باشند، گوئیم این دو کارت C^{k}- مرتبط [1] هستند اگر **نگاشت زیر که آنرا نگاشت تغییر کارت می‌نامیم**

[1] $k - related\ (k - relie')$

$$y \circ x^{-۱} : x(U \cap V) \to y(U \cap V)$$

و معکوس آن توابعی از کلاس C^k بین **دو باز** $I\!R^n$ باشند. به عبارت دیگر $x(U \cap V)$ و $y(U \cap V)$ **بازهایی** از $I\!R^n$ بوده و $y \circ x^{-۱}$ و $x \circ y^{-۱}$ از **کلاس** C^k باشند. درحالت $U \cap V = \phi$ بنا به تعریف این دو کارت را C^k- مرتبط می‌نامیم.

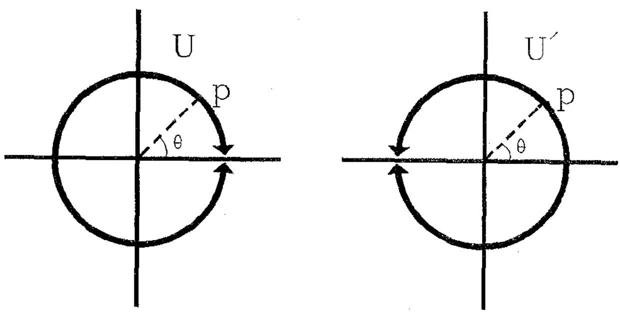
تعریف: گوئیم یک خانواده از کارت‌های C^k مرتبط $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ تشکیل یک **اطلس** C^k n بعدی روی M می‌دهند اگر حوزه تعریف آنها M را بپوشاند، یعنی $M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$

مثال ۴: فرض کنیم $M = S^۱ = \{(x,y) \in I\!R^۲ : x^۲ + y^۲ = ۱\}$

$$U = \{(\cos\theta, \sin\theta) : ۰ < \theta < ۲\pi\} \subseteq M$$

$$x : U \longrightarrow]۰, ۲\pi[$$

$$p = (\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۴ : تعریف دو کارت که دایره را می‌پوشاند

x یک تابع دوسویی از U روی بازی از $I\!R$ است بنابراین (x, U) یک کارت روی $S^۱$ تعریف می‌نماید. فرض کنیم

$$U' = \{(\cos\theta, \sin\theta) : -\pi < \theta < \pi\}$$

$$x' : U' \longrightarrow] -\pi, \pi[$$

$$(\cos\theta, \sin\theta) \longrightarrow \theta$$

(x', U') کارت دیگری روی S^1 تعریف می‌کند.

در نتیجه دو دستگاه مختصات موضعی روی دایره تعریف نمودیم که کل M را می‌پوشانند.

حال نگاشت تغییر کارت را بررسی کنیم.

در اینجا $x(U \cap U') =]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$ یک باز از $\mathbb{R}$ بوده و به همین صورت $x'(U \cap U') =]0, \pi[\cup]-\pi, 0[$ نیز یک باز از $\mathbb{R}$ می‌باشد.

بنابراین روی فاصله $]0, \pi[$ داریم $x = x'$ و در نتیجه $x' \circ x^{-1}|_{]0,\pi[} = Id$ و روی فاصله $]\pi, 2\pi[$ داریم $x'(p) = x(p) - 2\pi$ چون $x(p) = \theta$ پس $p = x^{-1}(\theta)$ لذا $x' \circ x^{-1}(\theta) = \theta - 2\pi$ در نتیجه

$$x' \circ x^{-1}(\theta) = \begin{cases} \theta & \theta \in]0, \pi[\\ \theta - 2\pi & \theta \in]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

چون نگاشت تغییر کارت از کلاس C^∞ می‌باشد، یک اطلس C^∞ یک‌بعدی روی S^1 که از دو کارت تشکیل شده است تعریف نمودیم.

مثال ۵: فرض کنیم $M = A \cup B$ به طوری که A و B دو پاره خط زیر باشند.

$$A = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 | -1 < t < 1\}$$

$$B = \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < 1\}$$

فرض کنیم دو کارت (x, A) و (y, V) به صورت زیر تعریف شوند

$$x : A \longrightarrow]-1, 1[\subset \mathbb{R}$$

$$(t, 0) \longmapsto t$$

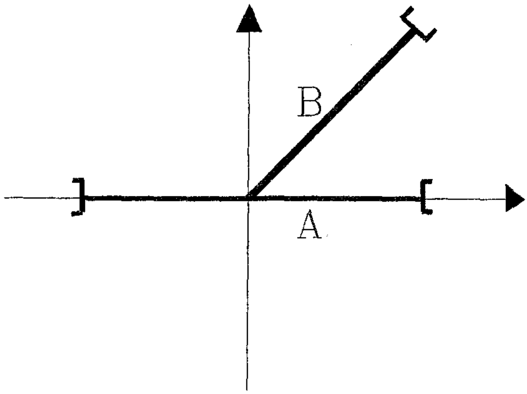
$$V = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 | -1 < t \leq 0\} \cup \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 | 0 < t < 1\}$$

به طوری که

$$y : V \rightarrow]-1, 1[$$

$(t, \circ) \longmapsto t$

$(t, t) \longmapsto t$



شکل ۱.۵ : دو کارت غیر مرتبط

حوزه تعریف این دو کارت M را می‌پوشاند و همین طور داریم $y \circ x^{-1} = Id$ بنابراین نگاشت تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشد .اما حوزه تعریف $y \circ x^{-1}$ (یعنی $x(A \cap V)$) عبارت است از فاصله $[\circ, 1] - [$ که باز نیست و در نتیجه این دو کارت C^k- مرتبط نبوده و تشکیل یک اطلس نمی‌دهند.

تمرین: نشان دهید C^k- مرتبط بودن یک رابطه هم‌ارزی نیست.(کافی است عدم برقراری شرط تعدی را بررسی کنید)

۲.۱ § اطلس ماکزیمال ـمنیفلد دیفرانسیل‌پذیر

همانطور که دیدیم ارائه یک اطلس به ما اجازه می‌دهد که یک دستگاه مختصات روی یک مجموعه تعریف نمائیم . فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ دو اطلس C^k nبعدی از M باشند. ممکن است مجموعهٔ کارت‌های $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ به روی هم یک اطلس C^k از M نباشند زیرا اگر $x \in \mathcal{A}$ و $y \in \mathcal{A}'$ آنگاه ممکن است $y \circ x^{-1}$ یا معکوس آن از کلاس C^k نباشد برای آنکه $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ نیز یک اطلس C^k باشد تعریف زیر را می‌آوریم.

تعریف: دو اطلس C^k ‏nبعدی از M را **هم ارز**[1] گوئیم اگر اجتماع آنها نیز یک اطلس C^k باشد.

مثال ۶: می‌خواهیم یک اطلس C^∞ دیگر روی S^1 تعریف نموده و هم ارزی آنرا با اطلسی که قبلاً روی S^1 تعریف کردیم بررسی نمائیم. فرض کنیم $U_1 = \{(x,y) \in S^1 | x > 0\}$

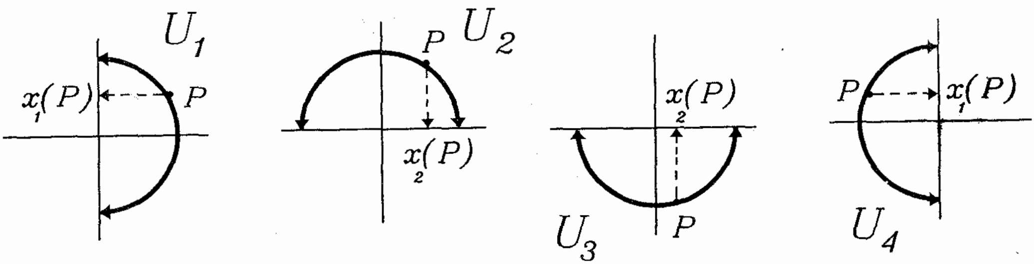
$x_1 : U_1 \to]-1,1[$

$(x,y) \longmapsto y$

در این صورت (x_1, U_1) یک کارت موضعی برای S^1 می‌باشد. به همین صورت فرض کنیم $U_2 = \{(x,y) \in S^1 | y > 0\}$

$x_2 : U_2 \to]-1,1[$

$(x,y) \longmapsto x$



شکل ۱.۶ : اطلس چهار کارتی روی دایره

در این صورت (x_2, U_2) نیز کارت دیگری روی S_1 می‌باشد. و به همین ترتیب اگر فرض کنیم

$U_3 = \{(x,y) \in S^1 | y < 0\}$

$U_4 = \{(x,y) \in S^1 | x < 0\}$

$x_4 : U_4 \to]-1,1[\quad , \quad x_3 : U_3 \to]-1,1[$

$(x_4, U_4), (x_3, U_3)$ کارت‌های دیگری روی S^1 می‌باشند حوزه تعریف این چهار

[1] equivalent

کارت S^1 را می‌پوشاند و نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^k می‌باشند. به عنوان مثال نگاشت $x_2 \circ x_1^{-1}$ را بررسی می‌کنیم. روی $U_1 \cap U_2$ داریم $y = \sqrt{1 - x^2}$ بنابراین اگر

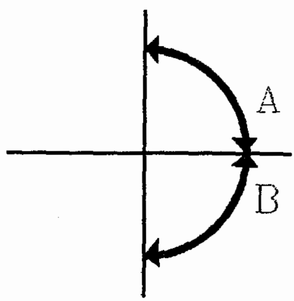
$$x_1 : U_1 \cap U_2 \to]0, 1[$$
$$p \longmapsto x_1(p) = t$$

نگاشت $x_2 \circ x_1^{-1}$ از کلاس C^∞ است زیرا

$$x_2 \circ x_1^{-1} :]0, 1[\to]0, 1[$$
$$t \longmapsto \sqrt{1 - t^2}$$

در نتیجه یک اطلس C^∞ دیگر روی S^1 تعریف نمودیم .حال این سوال را مطرح می‌کنیم که آیا این اطلس با اطلس ارائه شده در مثال ۴ هم‌ارز می‌باشد؟ برای پاسخ به این سوال نگاشت تغییر کارت روی $U \cap U_1$ را در نظر می‌گیریم. داشتیم

$$x : U \to]0, 2\pi[\qquad x' : U' \to]-\pi, \pi[$$
$$(\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta \quad (\cos\theta, \sin\theta) \longmapsto \theta$$
$$0 < \theta < 2\pi \qquad -\pi < \theta < \pi$$
$$U \cap U_1 = A \cup B$$



شکل ۱.۷ : حوزه تعریف نگاشت تغییر کارت

رجوع شود به شکل زیر

$$A = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y > 0\}$$
$$B = \{(x, y) \in S^1 | x > 0, y < 0\}$$

روی A داریم : $x_1(p) = \sin x(p)$ بنابراین اگر $p = x^{-1}(\theta)$ آنگاه

$$\begin{aligned} x_1 \circ x^{-1} :]0, \pi/2[&\to]0, 1[\\ \theta &\longmapsto \sin\theta \end{aligned}$$

یک نگاشت C^∞ است. روی B نیز چنین است.

به همین صورت می‌توان بررسی نمود که نگاشت‌های تغییر کارت بین کارتهای دو اطلس $\mathcal{A}$ و $\mathcal{A}'$ از کلاس C^∞ می‌باشند بنابراین $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ یک اطلس C^∞ می‌باشد.لذا $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ دو اطلس هم‌ارز هستند.

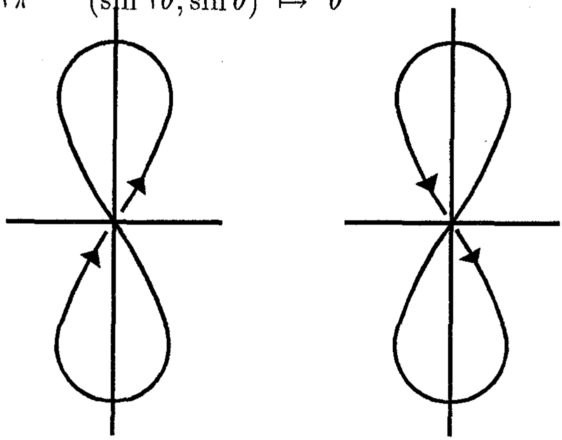
حال در اینجا مثالی از دو اطلس می‌آوریم که هم ارز نمی‌باشند.

مثال ۷: فرض کنیم

$$H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = \sin 2\theta, x_2 = \sin\theta, \theta \in]0, 2\pi[\}$$

$$x : H \longrightarrow]0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$$

$$0 < \theta < 2\pi \qquad (\sin 2\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$$



شکل ۱.۸ : یک مجموعه با دو اطلس غیر هم‌ارز

در اینجا یک اطلس داریم که از یک کارت تشکیل می‌شود می‌توان اطلس دیگری در نظر گرفت

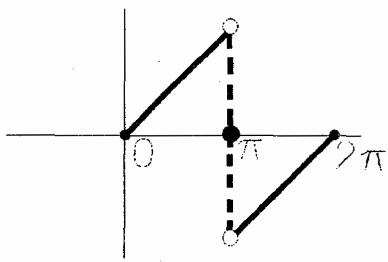
$x' : H \longrightarrow]-\pi, \pi[\subset \mathbb{R}$

$(\sin ۲\theta, \sin\theta) \mapsto \theta$

$-\pi < \theta < \pi$

نشان می‌دهیم این دو اطلس هم‌ارز نمی‌باشند. در حقیقت نگاشت تغییر کارت عبارت است از

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-۱} : x(H) &\longrightarrow x'(H) \\ ]\circ, ۲\pi[&\mapsto]-\pi, \pi[\end{aligned}$$



شکل ۱.۹ : نمودار نگاشت تغییر کارت

به عبارت دیگر
$$x' \circ x^{-۱}(\theta) = \begin{cases} \theta & \circ < \theta < \pi \\ \circ & \theta = \pi \\ \theta - ۲\pi & \pi < \theta < ۲\pi \end{cases}$$

این تابع C^∞ نیست زیرا نمودار آن در نقطه $\theta = \pi$ پیوسته نیست . بنابراین این دو اطلس هم ارز نمی‌باشند.

تعریف: یک اطلس C^k از M را **ماکزیمال**[۱] یا **کامل** گوئیم اگر زیرمجموعهٔ یک اطلس C^k دیگر نباشد.

قضیه: فرض کنیم A یک اطلس C^k باشد. در این صورت یک وتنها یک اطلس C^k ماکزیمال $\overline{A}$ وجود دارد که شامل A باشد.

---

[۱] *maximal , complet*

اثبات: اثبات واضح است کافی است ابتدا به عنوان تمرین ثابت کنید رابطه هم‌ارز بودن اطلسها یک رابطه هم‌ارزی است، سپس قرار دهید:

$$\overline{\mathcal{A}} = \cup \mathcal{A}'$$

در اینجا $\mathcal{A}'$ کلیه اطلس‌های هم‌ارز با اطلس $\mathcal{A}$ است. یکتایی $\overline{\mathcal{A}}$ از هم‌ارزی بودن رابطه اطلسهای هم‌ارز نتیجه می‌شود. □

گاهی اوقات اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ را اطلس اشباع شده $\mathcal{A}$ نیز می‌گویند.

تعریف: مجموعه M همراه با یک اطلس C^k ماکزیمال nبعدی را یک **منیفلد دیفرانسیل‌پذیر**[۱] n بعدی از کلاس C^k می‌گوئیم (ما غالبا" برای اختصار آن را منیفلد می‌نامیم). یک اطلس ماکزیمال روی M را **یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری**[۲] نیز می‌گویند.

تذکر ۲: برای تعریف نمودن ساختار یک منیفلد دیفرانسیل پذیر روی مجموعه M کافی است بعد از قضیه فوق یک اطلس C^k در نظر گرفت، سپس اطلس C^k ماکزیمالی را که شامل آن می‌باشد را در نظر گرفت. در واقع می‌توان ثابت کرد بعد از مشخص نمودن اطلس $\mathcal{A}$ کافی است تمام کارت‌های C^k- مرتبط را به آن اضافه کنیم تا اطلس ماکزیمال شامل $\mathcal{A}$ بدست آید.

مثال ۸: فرض کنیم $M = \mathbb{R}^n$ و $\mathcal{A} = Id$. ساختار دیفرانسیل پذیر C^∞ تعریف شده توسط $\mathcal{A}$ عبارت است از اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \begin{array}{lcl} x : U \subset \mathbb{R}^n \to \quad O \subset \mathbb{R}^n & | & x \text{دوسویی}\ ,\ x \circ Id^{-1}\ ,\ Id \circ x^{-1} \text{ یعنی} \\ O \text{ باز } \mathbb{R}^n & | & x \text{ و } x^{-1} \text{ از کلاس } C^\infty \text{ باشند} \end{array} \right\}$$

بدین صورت اشباع نمودن اطلس طبیعی $(\mathbb{R}^n, Id)$ عبارت است از در نظر گرفتن تمام دستگاههای مختصات موضعی (x, U) روی $\mathbb{R}^n$ (به نحوی که x دیفئومورفیسم- C^∞ باشد، یعنی x و x^{-1} از کلاس C^∞ باشند.)

تذکر ۳: بجای $\mathbb{R}^n$ در تعریف منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌توان یک فضای باناخ با بعد احیاناً

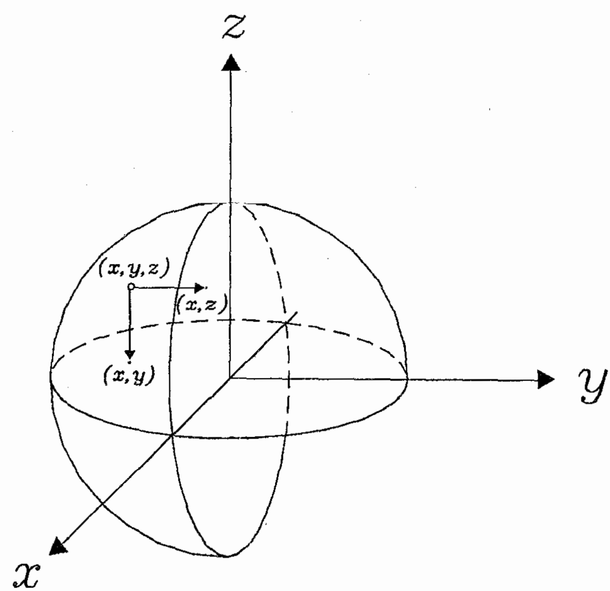
---

[۱] *Differentiable manifold (Varie'te' différentiable)*

[۲] *Differentiable structure (Structure différentiable)*

نامتناهی در نظر گرفت. در این صورت دامنه تعریف منیفلد گسترده می‌شود ولی مطالعه آن کمی پیچیده‌تر می‌گردد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به [۱۸] صفحه ۴۲۱ مراجعه نمود.

مثال ۹: در مقدمه این فصل شکل ۱.۲ دیدیم کره را می‌توان توسط شش نیمکره باز پوشانید. اگر فرض کنیم هر نیمکره باز حوزه تعریف یک کارت باشد نشان می‌دهیم که این کارت‌ها C^∞ مرتبط هستند. فرض کنیم U_1 نیمکره باز شمالی و φ_1 نگاشتی باشد که U_1 را بر قرص بازی از صفحه که در زیر آن قرار دارد تصویر نماید.



شکل ۱.۱۰ : *رابطه بین دو کارت در روی کره*

$$\begin{array}{lcl}\varphi_1 : U_1 \subset S^2 & \longrightarrow & O_1 \subset \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x,y)\end{array}$$

φ_1 یک به یک بوده تصویر آن باز است لذا (φ_1, U_1) یک کارت روی S^2 تعریف می‌کند. در این صورت اگر U_2 نیمکره باز شرقی بوده و توسط φ_2 بر روی قرص بازی از صفحه

مقابل خود تصویر گردد زوج (φ_2, U_2) یک کارت ۲ـ بعدی روی S^2 است.

$$\varphi_2 : U_2 \subset S^2 \longrightarrow \sigma_2 \subset I\!R^2$$
$$(x, y, z) \longrightarrow (x, z)$$

لذا نگاشت تغییر کارت بصورت زیر می‌باشد

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$
$$(x, y) \longrightarrow (x, z)$$

از $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ نتیجه می‌شود نگاشت تغییر کارت و معکوس آن دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^∞ بوده باز را به باز می‌برند بنابراین دو کارت فوق C^∞ـ مرتبط هستند. به همین صورت ثابت می‌شود که شش کارت فوق تشکیل یک اطلس ـ C^∞ ۲ ـ بعدی روی S^2 می‌دهند که آنرا با $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم.

$\overline{\mathcal{A}}$ اطلس ماکزیمالی که از اشباع نمودن $\mathcal{A}$ بدست می‌آید یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی S^2 تعریف می‌کند. بنابراین S^2 یک منیفلد C^∞ ۲ـ بعدی است.

منیفلد حاصلضرب[1]

فرض کنیم M_1 و M_2 دو منیفلد از کلاس C^k با اطلس‌های C^∞، $\mathcal{A}_1$ و$\mathcal{A}_2$ باشند.آنگاه حاصلضرب $M_1 \times M_2$ به طور طبیعی دارای یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری از کلاس C^k می‌باشد که توسط حاصلضرب اطلس‌های $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{A}_1 = \{(x_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A} \qquad \mathcal{A}_2 = \{(x_\beta, U_\beta)\}_{\beta \in B}$$
$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 = \{x_\alpha \times x_\beta, U_\alpha \times U_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in A \times B}$$
$$x_\alpha \times x_\beta : U_\alpha \times U_\beta \to I\!R^{n_1} \times I\!R^{n_2}$$

[1] *Product manifold (Variété de produit)*

نگاشت فوق دوسویی است و حوزه مقادیر آن حاصلضرب دو باز در $I\!R^{n_1+n_2}$ بوده لذا یک کارت است.

داریم

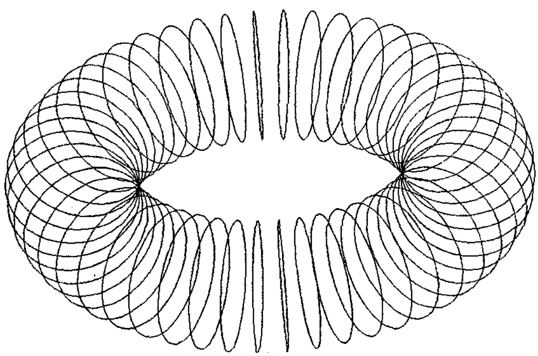
$$(x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'} \times x_{\beta'})^{-1} = (x_\alpha \times x_\beta)\circ(x_{\alpha'}^{-1} \times x_{\beta'}^{-1}) = (x_\alpha \circ x_{\alpha'}^{-1} \times x_\beta \circ x_{\beta'}^{-1})$$

نگاشت تغییر کارت C^∞ است در نتیجه $M_1 \times M_2$ منیفلد C^∞ به بعد $n_1 + n_2$ است.

$$\dim(M_1 \times M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

مثال ۱۰: چنبره[1] دو بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T^2 = S^1 \times S^1$$



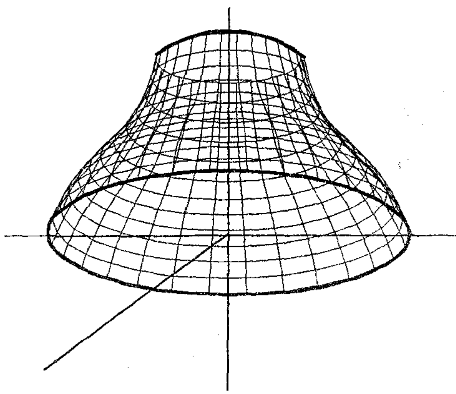
شکل ۱.۱۱ : *نمایش دوایری از چنبره*

چنبره T^2، منیفلدی دیفرانسیل‌پذیر با بعد ۲ است. برای مشخص نمودن اطلس آن ابتدا اطلس S^1 را که از دو کارت (x, U) و (x', U') تشکیل گردیده است در نظر می‌گیریم(رجوع

[1] $Torus\ (Tore)$

شود به مثال ۴). اطلس حاصلضرب T^{2} از کارت‌های $x \times x$ ، $x' \times x$ ، $x \times x'$ و $x' \times x'$ تشکیل می‌گردد. چون نگاشت‌های تغییر کارت از کلاس C^{∞} هستند، T^{2} از کلاس C^{∞} می‌باشد. (شکل ۱.۱۰) به همین صورت چنبره n بعدی $T^{n} = S^{1} \times \cdots \times S^{1}$ منیفلدی با بعد n می‌باشد.

مثال ۱۱: سطح دوار[1] که از حاصلضرب یک منحنی در یک دایره پدید می‌آید نیز یک منیفلد دوبعدی است. (شکل ۱.۱۲)



شکل ۱.۱۲ : نمایش خطوطی از سطح دوّار

تمرین

۱ـ با استفاده از تصویر **استریوگرافیک**[2] بشرح زیر ثابت کنید کره S^{n} یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$S^{n} = \{(x_{1}, \cdots, x_{n+1}) \in I\!R^{n+1} | x_{1}^{2} + \cdots + x_{n+1}^{2} = 1\}$$

ابتدا کره S^{2} را در نظر گرفته فرض کنیم $U_{1} = S^{2} - \{N\}$ کره بدون قطب شمال و $U_{2} = S^{2} - \{S\}$ کره بدون قطب جنوب باشد. تصویر استریوگرافیک نقطه p روی کره

Surface of revolution (Surface de revolution)[1]

sterographic projection (Projection stéréographic)[2]

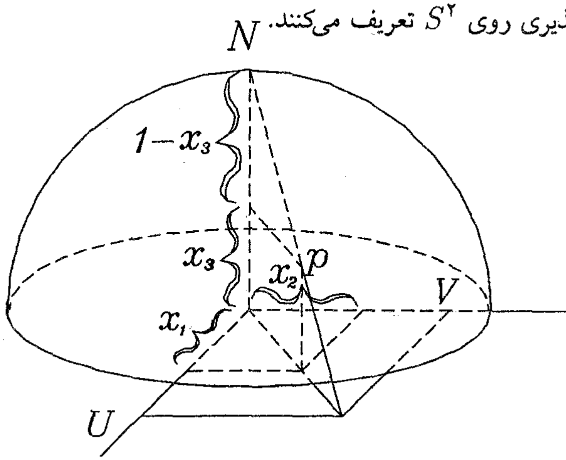
نسبت به قطب شمال و جنوب را با $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ نمایش می‌دهیم.

الف) اگر $(x_۱, x_۲, x_۳)$ مختصات نقطه p باشد با توجه به شکل و خواص مثلثهای متشابه ثابت کنید.

$$\varphi_۱(p) = \left(\frac{x_۱}{۱ - x_۳}\ ,\ \frac{x_۲}{۱ - x_۳}\right)$$

$$\varphi_۲(p) = \left(\frac{x_۱}{۱ + x_۳}\ ,\ \frac{x_۲}{۱ + x_۳}\right)$$

ب) نشان دهید $(\varphi_۱, U_۱)$ و $(\varphi_۲, U_۲)$ دو کارت C^∞ مرتبط بوده و یک ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی $S^۲$ تعریف می‌کنند.



شکل ۱.۱۳ : جزئیات تصویر استریوگرافی

ج) با استفاده از تصویر استریوگرافیک نسبت به قطب شمال و جنوب نشان دهید کره S^n با دو کارت $(\varphi_۱, U_۱)$ و $(\varphi_۲, U_۲)$ که بشرح زیر تعریف می‌شوند یک منیفلد $n-$ بعدی است.

$$U_۱ = S^n - \{N\} \quad , \quad U_۲ = S^n - \{S\}$$
$$\varphi_۱(p) = \left(\frac{x_۱}{۱ - x_{n+۱}}, \cdots, \frac{x_n}{۱ - x_{n+۱}}\right)$$
$$\varphi_۲(p) = \left(\frac{x_۱}{۱ + x_{n+۱}}, \cdots, \frac{x_n}{۱ + x_{n+۱}}\right)$$

۲ـ نشان دهید هر فضای برداری حقیقی به بعد n یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر nبعدی است.

۳ـ فرض کنیم $M = GL(n$ و $\mathbb{R})$ گروه خطی ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ (یا مجموعه تبدیلات خطی وارون‌پذیر حقیقی $\mathbb{R}^n$)باشد. نشان دهید M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است.

راهنمایی: چون دترمینان این ماتریس‌ها مخالف صفر است از خاصیت نگاشت پیوسته دترمینان نتیجه می‌شود که تصویر M توسط نگاشت Id در $\mathbb{R}^{n^2}$ باز است و با یک کارت کلی M منیفلد دیفرانسیل‌پذیر می‌شود.

۴ـ با ارائه یک مثال نشان دهید عکس تمرین ۲ برقرار نیست.

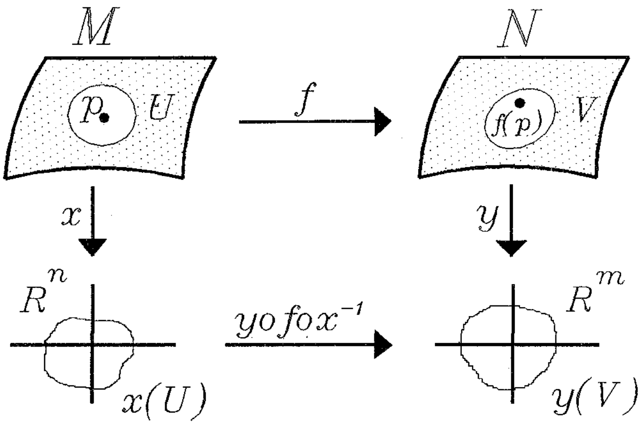
۳.۱ § توابع دیفرانسیل پذیر روی منیفلدها

یکی از مهمترین دلایل تعریف منیفلدهای دیفرانسیل‌پذیر ایجاد شرایطی روی مجموعه M بود که تحت آن شرایط ما بتوانیم روی این مجموعه تابع دیفرانسیل‌پذیر را تعریف نمائیم. در اینجا به تعریف نگاشت دیفرانسیل پذیر از یک منیفلد به منیفلد دیگر می‌پردازیم.

تعریف: *فرض کنیم M و N دو منیفلد از کلاس C^k باشند. نگاشت f از M در N را درنقطه $p \in M$ ،**دیفرانسیل‌پذیر از کلاس** C^r $(r \leq k)$ گوئیم اگر یک کارت موضعی (x, U) در اطلس ماکزیمال M شامل نقطه p ویک کارت موضعی (y, V) شامل نقطه $f(p)$ در اطلس ماکزیمال N موجود باشد به طوری که نگاشت زیر*

$$y \circ f \circ x^{-1} : x(U) \subset \mathbb{R}^n \to y(V) \subset \mathbb{R}^m$$

در نقطه $x(p)$ از کلاس C^r باشد.



شکل ۱.۱۴ : *تعریف تابع دیفرانسیل‌پذیر بین دو منیفلد*

اگر f در تمام نقاط M دیفرانسیل‌پذیر باشد گوئیم **f** روی **M** **دیفرانسیل‌پذیر** است. این تعریف بستگی به انتخاب کارت‌های موضعی ندارد یعنی اگر این شرایط برای دو کارت x, y برقرار شوند برای هر دو کارت x', y' دیگری نیز برقرار خواهند بود، زیرا اگر x' و y' دو کارت دیگر در اطراف نقطه p و $f(p)$ باشند آنگاه

$$y' \circ f \circ x'^{-1} = \underbrace{(y' \circ y^{-1})}_{\text{از کلاس } C^k} \circ \underbrace{(y \circ f \circ x^{-1})}_{\text{از کلاس } C^r} \circ \underbrace{(x \circ x'^{-1})}_{\text{از کلاس } C^k}$$

در نتیجه نگاشت $y' \circ f \circ x'^{-1}$ از کلاس C^r می‌باشد.

تعریف: نگاشت f از منیفلد M در منیفلد N را یک **دیفئومورفیسم**[۱] از کلاس C^r گوئیم *اگر f دوسویی بوده و f و f^{-1} از کلاس C^r باشند.*

اگر $r = 0$ آنگاه f را **همئومورفیسم**[۲] می‌نامیم. براحتی ثابت می‌شود که اگر چنین نگاشتی بین دو منیفلد موجود باشد، آنگاه این دو منیفلد دارای ابعاد مساوی‌اند. باید توجه داشت که کلاس یک منیفلد C^k و کلاس نگاشتی که روی آن تعریف می‌شود C^r، ممکن

---

[۱] $C^r - diffeomorphism$

[۲] $homeomorphism$

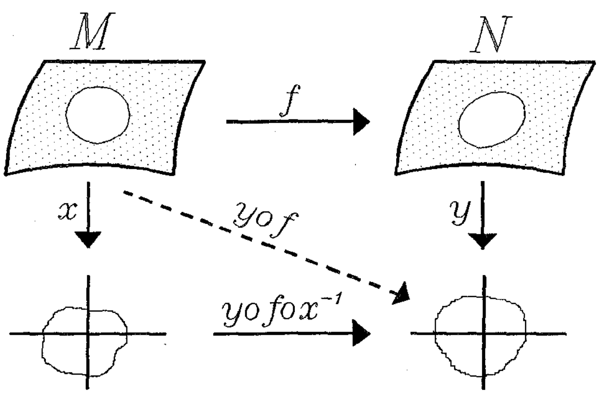
است یکی نباشد. $(r \leq k)$

قضیه: فرض کنیم M و N دو منیفلد C^k n–بعدی با اطلسهای ماکزیمال باشند و نگاشت $f : M \to N$ دو سویی باشد. آنگاه f یک دیفئومورفیسم C^r است اگر وتنها اگر تعویض اطلس نماید. به عبارت دیگر اگر وتنها اگر

$$\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{N}) \iff \mathbf{y} \circ \mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbf{M})$$

در اینجا $\mathcal{A}(M)$ و $\mathcal{A}(N)$ اطلس‌های ماکزیمال M و N می‌باشند. $(r = k)$

اثبات: فرض کنیم شرط قضیه برقرار است. از $y \in \mathcal{A}(N)$ نتیجه شود $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$. این بدان معنی است که $y \circ f$ یک کارت مرتبط با کارت‌های $\mathcal{A}(M)$ می‌باشد، یعنی به ازاء هر $x \in \mathcal{A}(M)$ نگاشت تغییر کارت $(y \circ f) \circ x^{-1}$ از کلاس C^r می‌باشد و بنا به تعریف f از کلاس C^r است. (چون y کارت N و x کارت M است)



شکل ۱.۱۵ : *تعویض اطلس تابع f*

همچنین از $y \circ f \in \mathcal{A}(M)$ نتیجه شود که $y \in \mathcal{A}(N)$. به ازاء هر کارت دیگر از $\mathcal{A}(M)$ مانند x نگاشت تغییر کارت $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^k می‌باشد. بنابراین $x \circ f^{-1} \circ y^{-1}$ از کلاس C^k بوده و در نتیجه چون y یک کارت N است بنابه تعریف،

f^{-1} از کلاس C^r می‌باشد و لذا f دیفئومورفیسم C^r است.

عکس قضیه نیز به همین سادگی قابل بررسی می‌باشد. $\square$

مثال: فرض کنیم $M = I\!R$ همراه با کارت زیر باشد

$$\begin{aligned} x : M &\longrightarrow I\!R \\ t &\longmapsto t^{3} \end{aligned}$$

اطلس ماکزیمال چون تک کارتی است به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\overline{\mathcal{A}'} = \{y' : U \subset M \to O \subset I\!R \text{ بازه } | C^{\infty} \text{ از کلاس } y' \circ x^{-1},\ x \circ y'^{-1}\ ,\ \text{ دوسویی } y'\}$$

یادآوری می‌کنیم که اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ با اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}}$ وابسته به اطلس $\mathcal{A} = Id$ که در مثال بخش قبل بر روی $I\!R$ تعریف گردید متفاوت است زیرا $Id \notin \overline{\mathcal{A}}'$ (در حقیقت $Id \circ x^{-1}$ نگاشت $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ است که در نقطه $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست لذا Id نمی‌تواند متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{\mathcal{A}'}$ باشد). به این نحو روی $I\!R$ دو **اطلس ماکزیمال** متفاوت یا **دو ساختاردیفرانسیل پذیری** مختلف تعریف نمودیم. با این حال اگر چه این دو اطلس ماکزیمال متفاوت هستند اما با یکدیگر دیفئومورف می‌باشند (یعنی یک دیفئومورفیسم بین آنها وجود دارد)زیرا یک نگاشت دوسویی مانند f بین دو اطلس وجود داردکه تعویض اطلس نموده یا به طور معادل اطلسها را به یکدیگر تبدیل می‌نماید. به عبارت دیگر

$$\begin{array}{ccc} (I\!R, \overline{\mathcal{A}'}) & \xrightarrow{f} & (I\!R, \overline{\mathcal{A}}) \\ x \downarrow & \searrow & \downarrow y \\ I\!R & \xrightarrow{Id} & I\!R \end{array}$$

در حقیقت اگر فرض کنیم $f(t) = t^{3}$ چون f دوسویی است، با توجه به قضیه قبل داریم

$(y \circ f) \circ x^{-1}$ و $x \circ (y \circ f)^{-1}$ از کلاس C^{∞} هستند $\Rightarrow y \circ f \in \overline{\mathcal{A}'} \Rightarrow$

$y \circ Id \Rightarrow y \in \overline{\mathcal{A}}$ و $Id \circ y^{-1}$ از کلاس C^{∞} هستند (چون $x = f$)

چون روابط فوق برگشت‌پذیر می‌باشند بنابر قضیه بالا f یک دیفئومورفیسم (نسبت به دو اطلس فوق الذکر)می‌باشد.

تذکر ۱: *باید توجه داشت که در مثال بالا f ممکن است برای ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری دیگر دیفئومورفیسم نباشد به عنوان مثال اگر روی دومنیفلد بالا اطلس $\mathcal{A} = Id$ تعریف شده باشد آنگاه معکوس f در صفر مشتق پذیر نبوده و در نتیجه f دیفئومورفیسم نیست. بنابراین مفهوم* **دیفرانسیل‌پذیری یک تابع بر روی یک منیفلد بستگی به اطلس ماکزیمال یا ساختار دیفرانسیل‌پذیری منیفلد دارد.** *در روی $I\!\!R^n$ غالباً ساختار دیفرانسیل‌پذیری طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی تعریف می‌شود) را در نظر می‌گیرند.*

تذکر ۲: *در مثال بالا f دیفئومورفیسم بوده و دو ساختار دیفرانسیل‌پذیری فوق روی $I\!\!R$ با تقریب یک دیفئومورفیسم با هم برابر می‌باشند.*

حال در اینجا با مسئله طبقه بندی نمودن ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری[1] C^∞ با تقریب یک دیفئومورفیسم مواجه می‌شویم. بعداً خواهیم دید که هر ساختار دیفرانسیل‌پذیری روی M یک توپولوژی روی M ایجاد می‌کند که آنرا توپولوژی ذاتی خواهیم نامید.

در مورد $M = I\!\!R^n$ و $(n \neq ۴)$ می‌توان نشان داد که تمام ساختارهای دیفرانسیل پذیری که همان توپولوژی $I\!\!R^n$ را ایجاد می‌کنند با ساختار دیفرانسیل‌پذیر طبیعی (یعنی اطلسی که توسط نگاشت همانی $\mathcal{A} = Id$ تعریف می‌شود) دیفئومورف می‌باشند. اما اگر $n = ۴$ باشد توسط دونالدسون[2] ثابت شده است که روی $I\!\!R^۴$ ساختارهای دیفرانسیل پذیر C^∞ غیر دیفئومورف نیز وجود دارند که توپولوژی آنها همان توپولوژی ذاتی $I\!\!R^۴$ است. اخیراً اثبات گردیده است که مجموعه ساختارهای غیر دیفئومورف روی $I\!\!R^۴$ نامتناهی و ناشمارا نیز می‌باشند.

در اینجا مشاهده می‌شود که $I\!\!R^۴$ با $I\!\!R^n$ به ازاء $n \neq ۴$ تفاوت فاحش دارد. به همین دلیل است که بخش عظیمی از تحقیقات هندسه به مطالعه منیفلدهای چهاربعدی اختصاص یافته است. این تحقیقات نشان می‌دهد که بعد چهارم دارای خواص فوق‌العاده و غیرعادی

---

[1] *Classification of Differential Structure*

[2] *Donaldson*

است و فضای چهار بعدی مکان و زمان در فیزیک کاربرد فراوان دارد.

اما در مورد کره با بُعد $n \leq ۶$ فقط یک نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری (با تقریب یک دیفئومورفیسم) وجود دارد. در روی $S^{۷}$، ۲۸ نوع ساختار دیفرانسیل‌پذیری و در روی $S^{۳۱}$ بیش از شانزده میلیون ساختار دیفرانسیل‌پذیری وجود دارد. این نتایج توسط میلنر[۱] بدست آمده‌اند. همانطوریکه مشاهده می‌شود مسئله طبقه‌بندی ساختارهای دیفرانسیل‌پذیری یک مسئله باز بوده و فقط در موارد معدودی تعداد آن مشخص شده است.

۴.۱ § یادآوری قاعده زنجیره‌ای[۲] در $I\!R^n$ و بیان آن برای منیفلدها

در این بخش ابتدا قاعده زنجیره‌ای در روی $I\!R^n$ را یادآوری نموده سپس آنرا برای منیفلدها تعمیم می‌دهیم. فرض کنیم $f : I\!R^n \to I\!R$ یک تابع حقیقی باشد مشتقات جزئی تابع f را با $D_i f$ نشان داده به صورت زیر تعریف می‌نماییم

$$(D_i f)(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a^{۱}, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a)}{h}$$

اگر $f : I\!R^n \to I\!R$ و $g : I\!R^m \to I\!R^n$ باشد آنگاه مشتقات جزئی تابع مرکب $f \circ g$ از قاعده زنجیره‌ای به دست می آید .این مشتقات را می‌توان در رابطه زیر خلاصه نمود :

قاعده زنجیره‌ای $D_i(f \circ g)(a) = \sum_{j=۱}^{n} D_j f(g(a)) \cdot (D_i g^j)(a)$

که در آن g^jها مولفه‌های تابع gبوده که از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$g : I\!R^m \longrightarrow I\!R^n$$

$$g : x = (x_{۱}, \cdots, x_m) \mapsto (g^{۱}(x), \cdots, g^n(x))$$

$$j = ۱, \cdots, n, \ i = ۱, \cdots, m$$

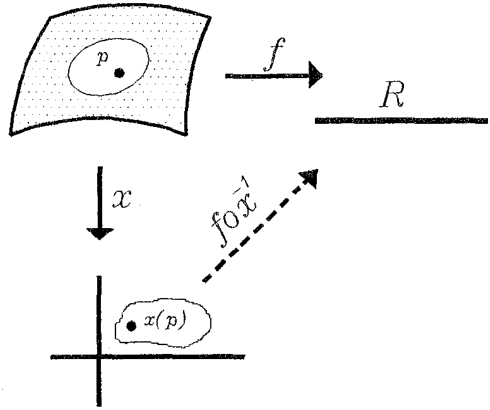
[۱] مراجعه شود به [۲۱]، [۲۲] و [۲۳] $Milnor$

[۲] $Chain\ rule$

حال می‌خواهیم قاعده زنجیره‌ای را برای توابع تعریف شده روی منیفلدها تعمیم دهیم. برای اینکار باید از وجود کارت‌های موضعی استفاده کنیم. امّا قبل از این کار به بیان چند تعریف و قرارداد نمادگذاری می‌پردازیم.

نگاشت f از منیفلد M در مجموعهٔ اعداد حقیقی را یک **تابع حقیقی روی** M می‌نامیم.

جبر توابع $\mathbf{C}^\infty$ در نقطه p از منیفلد M یا مجموعه توابع حقیقی C^∞ از یک همسایگی $p \in M$ در $I\!R$ را با $C^\infty(p)$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $f \in C^\infty(p)$



شکل ۱.۱۶ : تابع حقیقی روی یک منیفلد

در اینجا اگر احتمال اشتباه نرود از نماد $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ جهت نشان دادن مشتقات جزئی $f \circ x^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

نمادگذاری:

$$\boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_{(p)} = D_i(f \circ x^{-1})(x(p))}$$

حال با استفاده از کارت‌ها، قاعده زنجیره‌ای را برای منیفلدها بیان می‌کنیم.

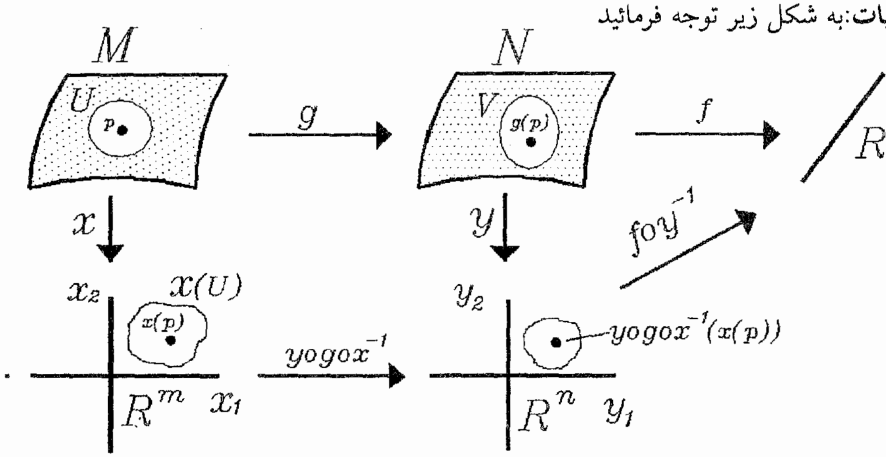
لم: فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to I\!R$ و $f \circ g \in C^\infty(p)$ **در این صورت**

اگر x و y کارت‌هایی روی M و N حول p و $g(p)$ باشند، داریم

$$\boxed{\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(p)} \left(\frac{\partial g^j}{\partial x_i}\right)_p}$$

که در آن $g^j = y^j \circ g$.

اثبات: به شکل زیر توجه فرمائید



شکل ۱.۱۷ : ترکیب دو تابع روی منیفلدها

داریم :

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = D_i((f\circ y^{-1})\circ(y\circ g\circ x^{-1}))_{(x(p))}$$

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای در $\mathbb{R}^n$ داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} D_j(f\circ y^{-1})_{(y\circ g\circ x^{-1})(x(p))} D_i(y^j\circ g\circ x^{-1})_{x(p)}$$
$$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$$

با استفاده از نمادگذاری فوق داریم

$$\frac{\partial(f\circ g)}{\partial x_i}(p) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j}\right)_{g(x^{-1}(x(p)))} \left(\frac{\partial(y^j\circ g)}{\partial x_i}\right)(p)$$

اگر قرار دهیم $g^j = y^j \circ g$ حکم ثابت می‌شود. $\square$

تمرین:

۱ـ نشان دهید اگر (x, U) و (y, V) دو کارت روی منیفلد M بوده و f تابع حقیقی $f : M \to \mathbb{R}$ باشد، آنگاه در $U \cap V$ رابطه بین مشتقات جزئی f در کارت‌های x و y عبارت است از

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})_p = \sum_{j=1}^{n} (\frac{\partial y_j}{\partial x_i}) \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

در اینجا ماتریس $(\frac{\partial y_j}{\partial x_i})$ را **ماتریس ژاکوبین‌تغییر** مختصات و دترمینان آنرا **ژاکوبین**[۱] تغییر مختصات می‌نامند.

۲ـ نشان دهید تابع $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر است اگر وتنها اگر برای هر تابع دیفرانسیل‌پذیر $g : N \to \mathbb{R}$ تابع $g \circ f$ دیفرانسیل‌پذیر باشد.

۵.۱ § توپولوژی منیفلدها

I توپولوژی ذاتی[۲]

توپولوژی ذاتی (یا توپولوژی وابسته به اطلس) روی منیفلد M در حقیقت توپولوژی است که توسط حوزه تعریف کارت‌ها روی M تعریف می‌شود. به عبارت دیگر در اینجا نشان می‌دهیم که خانواده حوزه تعریف تمام کارت‌های M دراطلس ماکزیمال تشکیل یک توپولوژی روی M می‌دهند.

براین اساس می‌توان منیفلدها را به عنوان فضاهای توپولوژیکی تعریف نموده آنها را مورد مطالعه قرارداد.

گزاره ۱: فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر، زوج (x, U) یک کارت روی M و

---

[۱] *Jacobian*

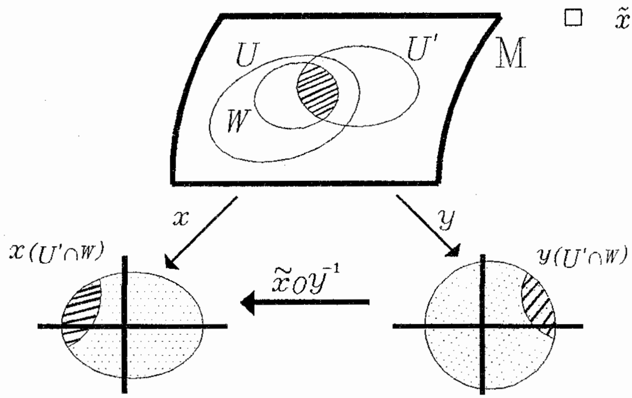
[۲] *Intrinsic Topology (Topologie intrinseque)*

$W \subset U$ اگر $x(W)$ بازی از $I\!R^n$ باشد، آنگاه زوج $(x|_W, W)$ نیز یک کارت روی M از همان اطلس ماکزیمال است.

اثبات: فرض کنیم A یک اطلس از M باشد باید نشان دهیم که اگر $\tilde{x} = x|_W$ آنگاه $\tilde{x}$ متعلق به اطلس ماکزیمال $\overline{A}$ است. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که $\tilde{x}$ با تمام کارت‌های A C^k-مرتبط می‌باشد بدین منظور لازم است ثابت کنیم برای هر کارت (y, U') از $\mathcal{A}$ نگاشت تغییر کارت $\tilde{x} \circ y^{-1}$ و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ از کلاس C^k بین دو باز از $I\!R^n$ می‌باشند. اگر $y \in A$ داریم

$$\tilde{x} \circ y^{-1} = x \circ y^{-1}|_{y(U' \cap W)} \quad \text{و} \quad y \circ \tilde{x}^{-1} = y \circ x^{-1}|_{x(U' \cap W)}$$

چون $x \circ y^{-1}$ یک دیفئومورفیسم C^k است، $\tilde{x} \circ y^{-1}$ و $y \circ \tilde{x}^{-1}$ نیز دیفئومورفیسم‌های C^k می‌باشند. حال کافی است ثابت کنیم که $x(U' \cap W)$ و $y(U' \cap W)$ باز هستند. چون کارت های (x, U) و (y, U') مرتبط C^k می‌باشند $x(U \cap U')$ باز می‌باشد و از طرف دیگر بنابر فرض $x(W)$ باز است لذا $x(U \cap U') \cap x(W) = x(U \cap U' \cap W) = x(U' \cap W)$ باز بوده، به همین صورت $y(U' \cap W)$ باز می‌باشد زیرا تصویر $x(U' \cap W)$ است و در نتیجه $\tilde{x} \in \overline{\mathcal{A}}$ $\square$



شکل ۱.۱۸ : تحدید یک کارت نیز می‌تواند تحت شرایطی یک کارت باشد

گزاره ۲ : اگر M منیفلدی به بعد n ازکلاس C^k باشد آنگاه M دارای یک توپولوژی است که اعضای پایه آنرا گردایه حوزه تعریف کارت‌های اطلس ماکزیمال M تشکیل می‌دهند.

این توپولوژی را توپولوژی ذاتی یا توپولوژی وابسته به اطلس نامیده آنرا توسط $\mathcal{T}_M$ نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات توپولوژی وابسته به اطلس را توپولوژی کانونی نیز می‌نامند.

اثبات: در اینجا باید شرایط پایه توپولوژی را بشرح زیر تحقیق کنیم. فرض کنیم $\mathcal{A}$ مجموعهٔ حوزه‌های تعریف کارت‌ها باشد درستی روابط زیر را بررسی می‌نمائیم.

I اجتماع همه اعضای $\mathcal{A}$ برابر M است.

II اشتراک هر دو عضو $\mathcal{A}$ در $\mathcal{A}$ باشد

طبق خاصیت اطلس I بخودی خودبرقرار خواهد شد. برای شرط II ابتدا نشان می‌دهیم که اگر U, V حوزه تعریف دو کارت (y, V) و (x, U) بافرض $U \cap V \neq \phi$ روی M باشند، آنگاه $U \cap V$ نیز حوزه تعریف کارت دیگری روی M است.

می‌دانیم نگاشت تغییر کارت زیر نگاشت C^k از بازی در $I\!R^n$ در باز دیگری در $I\!R^n$ می‌باشد

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \subset I\!R^n \longrightarrow y(U \cap V) \subset I\!R^n$$

لذا $x(U \cap V)$ بازی در $I\!R^n$ می‌باشد و بنا بر گزاره قبل $(x|_{U\cap V}, U \cap V)$ یک کارت با حوزه تعریف $U \cap V$ روی M می‌باشد. به این ترتیب $\mathcal{A}$ یک پایه توپولوژی است که توپولوژی پدید آمده آن، $\mathcal{T}_M$ یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. □

یادآوری می‌کنیم که پایه توپولوژی خانواده‌ای است مانند $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه‌های M که M را می‌پوشاند و در شرط زیر صدق می‌کند

$$\forall U, V \in \mathcal{B}\ \forall p \in U \cap V \quad \exists W \in \mathcal{B} \quad p \in W \subset U \cap V$$

لذا همان طور که در بالا دیدیم برای اثبات پایه بودن کافی است نشان دهیم اشتراک غیرتهی $U \cap V \neq \phi$ حوزه تعریف هر دو کارت M، حوزه تعریف کارت دیگری روی M می‌باشد.

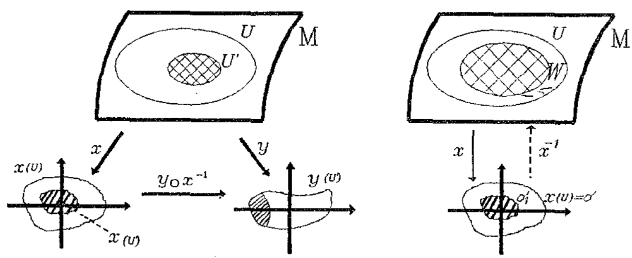
موضوع دیگری که باید در نظر داشت آن است که بنابر آنچه گذشت **اشتراک حوزه تعریف دو کارت حوزه تعریف یک کارت می‌باشد، اما اجتماع حوزه تعریف دو کارت الزاماً حوزه تعریف یک کارت نخواهد بود.** به عنوان مثال نقض در این مورد کره را با تصویر

استریوگرافیک در نظر می‌گیریم. اجتماع دو حوزه تعریف کارتهای مربوط به قطب شمال و جنوب نمی‌تواند دامنه یک کارت باشد.

گزاره ۳: فرض کنیم (x, U) یک کارت روی M باشد نگاشت x یک همئومورفیسم نسبت به توپولوژی ذاتی است.

اثبات: چون x دوسویی است برای آنکه همئومورفیسم باشد کافی است نشان دهیم $x : U \to \sigma \subset I\!R^n$ (برای توپولوژی ذاتی) پیوسته وباز می‌باشد. فرض کنیم σ_1 بازی از $I\!R^n$، $\sigma_1 \subset \sigma$ و $W = x^{-1}(\sigma_1)$ باشد. چون $x(W) = \sigma_1$ بازی است از $I\!R^n$ بنابر گزاره ۱ $(x|_W, W)$ یک کارت روی M بوده و W بازی از M می‌باشد (برای توپولوژی ذاتی). بنابراین x پیوسته است. شکل الف. حال نشان می‌دهیم x باز می‌باشد.

ابتدا U' بازی از اعضای پایه توپولوژی وابسته به اطلس‌ها $(U' \subset U)$را در نظرگرفته نشان می‌دهیم $x(U')$ باز است. U' حوزه تعریف کارتی مانند y می‌باشد و نگاشت تغییر کارت عبارت است از



شکل ۱.۱۹ : هر کارت یک همئومورفیسم است

$$y \circ x^{-1} : x(U \cap U') \to y(U \cap U')$$

که دیفئومورفیسمی بین دو باز $I\!R^n$ است.شکل (ب). به همین صورت

$$y \circ x^{-1} : x(U') \to y(U')$$

دیفئومورفیسمی بین دو باز$I\!R^n$ است. بنابراین $x(U')$ بازی از $I\!R^n$ می‌باشد. حال فرض کنیم $V = \cup U'_i$ بازی از M برای توپولوژی وابسته به اطلسها باشد به طوری که U'_iها از

اعضای پایه این توپولوژی بوده و $V \subset U$ باشد نشان می‌دهیم $x(V)$ باز است.

$$x(V) = x(\cup U'_i) = \cup x(U'_i)$$

بنابر اثبات قسمت قبل $x(U'_i)$ ها باز هستند، لذا $x(V)$ باز می‌باشد و در نتیجه x یک نگاشت باز است. □

تذکر ۱: *با استفاده از نتایج بدست آمده در این بخش می‌توان منیفلدها را به صورت معادل زیر نیز تعریف نمود.*

تعریف منیفلد توپولوژیک: *فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد، می‌گوییم M یک* **منیفلد از کلاس C^0** *(یا* **منیفلد توپولوژیک***) با بعد n است، اگر هر نقطه از آن دارای یک همسایگی در M بوده که با بازی از $\mathbb{R}^n$ همئومورف باشد.*

در اینجا اگر $p \in U$ و $U \subset M$ باشد، زوج (x, U) را یک کارت موضعی در همسایگی p گویند بشرط آنکه x همئورفیسمی از U در σ، بازی از $\mathbb{R}^n$ باشد.

تذکر ۲: *تعریف اخیر دارای این برتری است که خاصیت اساسی منیفلدها یعنی موضعاً همئومورف بودن با $\mathbb{R}^n$ را در مرحله اول معرفی می‌نماید. اما تعریفی که در ابتدای این فصل آوردیم از جهت کاربرد عملی‌تر است و برای آنکه ثابت کنیم مجموعه‌ای یک منیفلد است احتیاج به آن نداریم که توپولوژی داشتن آن را بررسی نمائیم بلکه این خاصیت بخودی خود با ارائه نمودن حوزه تعریف کارت‌ها تحقق می‌یابد.*

به عنوان نتیجه‌ای از گزاره ۳ می‌توان قضیه زیر را بیان نمود.

قضیه ۱: فرض کنیم $f : M \longrightarrow N$ یک نگاشت دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r باشد،آنگاه f پیوسته است. (برای توپولوژی ذاتی M و N)

اثبات: فرض کنیم (x, U) و (y, V) کارت‌های M و N باشند بنابرتعریف نگاشت $F = y \circ f \circ x^{-1}$ دیفرانسیل‌پذیر از کلاس C^r می‌باشد (بعنوان نگاشتی از $\mathbb{R}^n$ در $\mathbb{R}^m$) بنابراین F برای توپولوژی طبیعی $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ پیوسته است. چون x و y بنابر گزاره ۳ همئومورفیسم‌هائی (نسبت به توپولوژی ذاتی M و N و توپولوژی طبیعی $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^m$) می‌باشند نگاشت f، $f = y^{-1} \circ F \circ x$ پیوسته می‌باشد (برای توپولوژی وابسته

به اطلس‌های M و N). $\square$

تذکر ۳: *سؤالی که به طور طبیعی با آن مواجه می‌شویم از اینقرار است:*

«فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک با توپولوژی $\mathcal{T}$ باشد، می‌خواهیم روی M ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر (اطلس ماکزیمال) تعریف نمائیم، تحت چه شرایطی توپولوژی وابسته به اطلسها $\mathcal{T}_M$ برابر توپولوژی $\mathcal{T}$ می‌گردد.»

بنابر گزاره ۳ اگر $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ کارت‌ها، همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشند. عکس این موضوع را درگزاره بعد ثابت می‌نمائیم، به این صورت که اگر کارت‌های **فقط یک اطلس** همئومورفیسم‌هایی نسبت به $\mathcal{T}$ باشند آنگاه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ (در اینجا لازم نیست که این فرض برای تمام اطلس‌ها مشمول اطلس ماکزیمال برقرار باشد)

گزاره ۴:*فرض کنیم $(M, \mathcal{T})$ یک فضای توپولوژیک باشد، همچنین فرض کنیم که M دارای ساختار یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بوده و $\mathcal{T}_M$ توپولوژی وابسته به اطلسهای آن باشد آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه $\mathcal{T} = \mathcal{T}_M$ باشد آن است که یک اطلس روی M موجود بوده که نگاشت کارت‌های آن نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشد.*

اثبات: شرط لازم قبلاً اثبات گردیده است در اینجا به اثبات شرط کافی می‌پردازیم. فرض کنیم که کارت‌های یک اطلس $\mathcal{A}$ روی M نسبت به $\mathcal{T}$ همئومورفیسم باشند. ابتدا ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$ فرض کنیم $U \in \mathcal{T}_M$ (یعنی بازی از توپولوژی وابسته به اطلس‌ها) و (x, W) یک کارت از $\mathcal{A}$باشد به طوری که $W \cap U \neq \phi$.

چون W بازی از $\mathcal{T}_M$ است $W \cap U \in \mathcal{T}_M$، بنابراین چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$است $x(W \cap U)$ بازی از $I\!\!R^n$ می‌باشد. اما چون بنابرفرض x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}$ می‌باشد، $W \cap U \in \mathcal{T}$. حال $U = \cup_{p \in U}(W_p \cap U)$ که در آن W_p کارت‌هایی در همسایگی p می‌باشند. بنابراین U اجتماع بازها بوده و $U \in \mathcal{T}$ می‌باشد، در نتیجه $\mathcal{T}_M \subset \mathcal{T}$.

حال ثابت می‌کنیم که $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$.فرض کنیم $U' \in \mathcal{T}$ و (x, W) کارتی از$\mathcal{A}$ باشد به طوری که $U' \cap W \neq \phi$. چون $W \in \mathcal{T}_M$ بنابر مطالب بالا $W \in \mathcal{T}$ در نتیجه $U' \cap W \in \mathcal{T}$. از طرف دیگر بنابر فرض همئومورفیسم بودن x نسبت به

$\mathcal{T}$، $x(U'\cap W)$ بازی از $I\!R^n$ است، چون x یک همئومورفیسم نسبت به $\mathcal{T}_M$ می‌باشد $U'\cap W \in \mathcal{T}_M$.حال چون U' اجتماع مجموعه‌هایی مانند $U'\cap W$ می‌باشد، $U' \in \mathcal{T}_M$، در نتیجه داریم $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_M$. $\square$

تذکر ۴: منظور از یک منیفلد صفربعدی مجموعه‌ای است که همه نقاط آن نقاط تنها هستند یعنی توپولوژی آن توپولوژی گسسته است.

IIـ فضای توپولوژیک هاسدرف[۱]

در اینجا در ادامه این بخش به مطالعه برخی از خواص توپولوژیکی منیفلدها می‌پردازیم. تاکنون ما هیچگونه شرطی روی توپولوژی یک منیفلد قرار ندادیم، اما غالباً لازم است شرایط زیر را بدان اضافه نمائیم.

الف) شرط هاسدرف: یک فضای توپولوژیک را **هاسدرف** گوئیم اگربرای هر دو نقطه متمایز آن همسایگی‌هایی از این دو نقطه موجود باشند که یکدیگر را قطع نکنند. شرط هاسدرف بودن توپولوژی یک منیفلد برای اثبات یکتایی حد دنباله‌های همگرا روی منیفلدها ضروری است، از اینرو اغلب اوقات منیفلدها را هاسدرف فرض می‌نمائیم. اما این موضوع تأیید کننده آن نیست که الزاماً توپولوژی منیفلدها باید هاسدرف باشد و براحتی می‌توان منیفلدهایی مثال زد که این توپولوژی هاسدرف نباشند. ([۲] بخش ۲.۲.۱۰.۴ یا [۵] صفحه ۵ [۲])

ب) شرط پایه شمارا:[۲] اگر M را بتوان توسط تعدادی شمارا از کارت‌ها پوشانید می‌گوئیم M دارای پایه شمارا است.

شرط پایه شمارا داشتن یک منیفلد جهت وجود یک افراز واحد دیفرانسیل‌پذیر بر روی آن الزامی است، در پیوست فصل ۲ به مطالعه دقیقتر این موضوع می‌پردازیم.

توجه: نظر به اهمیت شرط هاسدرف بودن از این به بعد کلیه **منیفلدها را هاسدرف** و **دارای پایه شمارا** فرض می‌نمائیم، مگر آنکه عکس آن تصریح گردد.

---

[۱] *Hausdorff*

[۲] *Countable basis (base dénombrable)*

فضای توپولوژیک M را **موضعاً فشرده**[۱] گوییم اگر برای هرنقطه p از M و هرهمسایگی U ازp یک همسایگی فشرده از p مانند K موجود باشد به طوری که $K \subset U$ باشد.
فضای توپولوژیک M را **موضعاً همبند**[۲] گوئیم اگر برای هر نقطه p از M و هرهمسایگی U از p یک همسایگی همبند مانند V از p موجود باشد به طوری که $V \subset U$ باشد.

قضیه ۲: هر منیفلد M یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده است.
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ و(x, U)یک کارت در همسایگی p باشد. بنابر گزاره ۳، x یک همئومورفیسم از U روی $x(U)$، همسایگی $x(p)$ است. چون $I\!R^n$ موضعاً فشرده است یک همسایگی فشرده K از $x(p)$ در $I\!R^n$ موجود است به طوری که $x(p) \in K \subset x(U)$.
حال می‌گوئیم چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته فشردگی را حفظ می‌نماید بنابراین $x^{-1}(K)$ یک همسایگی فشرده از p در U می‌باشد، لذا بنابر تعریف M موضعاً فشرده است. □

قضیه ۳: هر منیفلد M، موضعاً همبند است. (در این قضیه M الزاماً هاسدرف نیست)
اثبات: فرض کنیم $p \in M$ بوده و (x, U) یک کارت در همسایگی p باشد. چون $I\!R^n$ موضعاً همبند است هر همسایگی $x(U)$ از $x(p)$ شامل یک همسایگی همبند V از$x(p)$ می‌باشد به طوری که $x(p) \in V \subset U$. حال چون x^{-1} پیوسته است و نگاشت پیوسته همبندی را حفظ می‌نماید، $x^{-1}(V)$ یک همسایگی همبند از p در U می‌باشد.لذا بنابر تعریف M موضعاً همبند است. □

---

[۱] *Locally Compact (Locallement Compact)*
[۲] *Locally Connected (Locallement Connexe)*

به همین صورت می‌توان خواص دیگری از جمله معادل بودن **همبندی**[1] و **همبندی مسیری**[2] را برای منیفلدها ثابت کرد.

گزاره ۵: فرض کنیم $f : M \to N$ دیفرانسیل‌پذیر بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. در این صورت $f|_U$ نیز دیفرانسیل‌پذیر است.

اثبات این گزاره براحتی با استفاده از تعریف دیفرانسیل پذیری درنقطه p صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد. (می‌دانیم هر زیرمجموعهٔ باز از M یک منیفلد است.)

گزاره ۶: اگر $f : M \to N$ دیفئومورفیسم بوده و U زیرمجموعه بازی از M باشد. آنگاه $f|_U$ نیز یک دیفئومورفیسم بین U و $f(U)$ می‌باشد.

اثبات این گزاره با استفاده از گزاره قبل صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

گزاره ۷: فرض کنیم $g : M \to N$ و $f : N \to P$ دیفرانسیل‌پذیر باشند آنگاه $f \circ g$ دیفرانسیل‌پذیر می‌باشد. اگر f و g دیفئومورفیسم باشند $f \circ g$ نیز دیفئومورفیسم می‌باشد.

اثبات این گزاره با استفاده از تعریف دیفرانسیل‌پذیری در یک نقطه و خاصیت دیفرانسیل‌پذیر بودن ترکیب دو تابع دیفرانسیل‌پذیر در $\mathbb{R}^n$ صورت گرفته به عنوان تمرین واگذار می‌گردد.

تمرین:

۱ـ گزاره ۵ و ۶ را ثابت کنید.

۲ـ گزاره ۷ را ثابت کنید.

۳ـ فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر به بعد n باشد.

الف ـ نشان دهید هر کارت M یک دیفئومورفیسم از حوزه تعریف آن به تصویرش می‌باشد.

ب ـ نشان دهید هر دیفئومورفیسم از یک زیر مجموعه باز M در زیر مجموعه باز $\mathbb{R}^n$ یک کارت M است.

۴ـ ثابت کنید اگرمنیفلد توپولوژیک M همبند باشد آنگاه بعد M به کارت‌های M

---

[1] *Connected (Connexe)*

[2] *Connected by arc (Connexe par arc)*

بستگی ندارد و مقداری ثابت است.

راهنمایی: از قضیه پایایی دامنه[1] بشرح زیر استفاده کنید (اثبات این قضیه در کتب توپولوژی موجود است)

قضیه: اگر U بازی از $I\!R^n$ بوده و $f : U \to I\!R^n$ پیوسته و یک به یک باشد آنگاه $f(U)$ باز است.

به عبارت دیگر از این قضیه نتیجه می‌شود به ازاء هر باز $V \subset U$، $f(V)$ باز بوده و در نتیجه f^{-1} پیوسته می‌شود، لذا f همئومورفیسم است، و همئومورفیسم‌ها بُعد حوزه تعریف را حفظ می‌کنند. این تمرین را می‌توان با استفاده از گزاره ۳ نیز اثبات نمود.

۵ـ سهمی $P = \{(x, y) \in I\!R^2 | y = x^2\}$ را در نظر می‌گیریم

الف) با ارائه یک کارت کلی و اطلس تک کارتی مربوط به آن، نشان دهید سهمی یک منیفلد توپولوژیک یک بُعدی است. سپس اینکار را توسط یک اطلس ۲ــ کارتی انجام دهید.

ب) نشان دهید که سهمی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر از کلاس C^∞ است.

راهنمایی: توجه نمایید که از تعریف جدید منیفلد مذکور در تمرین (۳) نمی‌توان این موضوع را تحقیق نمود، زیرا نگاشت حقیقی دیفرانسیل‌پذیر روی سهمی تنها پس از اثبات منیفلد دیفرانسیل‌پذیر بودن سهمی، قابل تعریف است.

ج) بجای سهمی فوق دو پاره خط متقاطع $N = \{(x, y) \in I\!R^2 | y = |x|\}$ را در نظر گرفته به سؤالات زیر با ذکر دلیل پاسخ دهید.

Iـ آیا N منیفلد توپولوژیک است؟

IIـ آیا N با یک اطلس مناسب یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است؟

۶ـ فرض کنیم M یک منیفلد ۲ــبعدی (یک رویه) در $I\!R^3$ باشد.

الف) نشان دهید اشتراک گوی‌های باز $I\!R^3$ با M یک توپولوژی روی M تعریف می‌نماید. این توپولوژی را **توپولوژی القایی**[1] $I\!R^3$ روی M می‌نامیم و با $T_M^{I\!R^3}$ نشان

---

[1] *Invariance of domain*

[1] *Induced Topology (Topologie induit)*

می‌دهیم.

$$\mathcal{T}_M^{I\!R^3} = \{U | U = \mathcal{B} \cap M \text{ و } \mathcal{B} \in \mathcal{T}_{I\!R^3}\}$$

در اینجا $\mathcal{T}_{I\!R^3}$ توپولوژی طبیعی $I\!R^3$ است که از گوی‌های باز به‌دست آمده است.

ب) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق شوند.

ج) مثالی از یک رویه بزنید که توپولوژی ذاتی و القایی آن برهم منطبق نباشند.