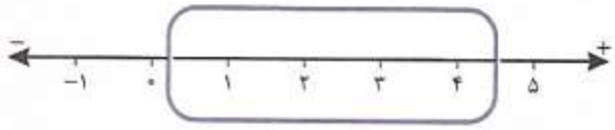
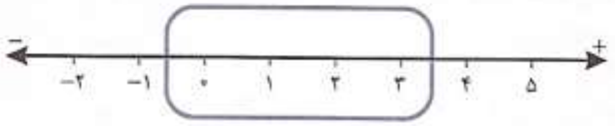
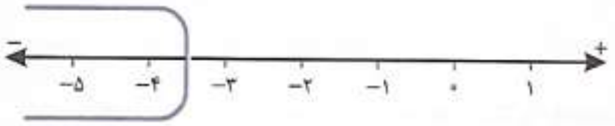
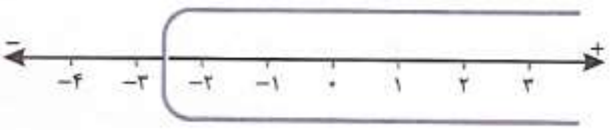
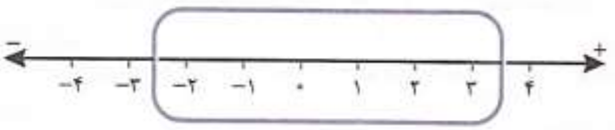
بسم الله الرحمن الرحیم

درس اول: عددهای گویا

در فصل پیش با صورت‌های مختلف نمایش یک مجموعه آشنا شدید. در این‌جا علاوه بر یادآوری روش‌های مختلف نمایش یک مجموعه، نمایش هندسی یا نمایش روی محور، زیرمجموعه‌های مجموعه‌های اعداد طبیعی، حسابی و صحیح را برای شما بیان می‌کنیم.

به جدول زیر دقت کنید که چگونه یک مجموعه را به روش‌های مختلف نمایش داده‌ایم.

به روش توصیفی (بیان کلامی)	با نوشتن عضوها	زبان نمادین (روش ریاضی)	نمایش هندسی (روی محور)
مجموعه‌ی عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۵	$\{۱,۲,۳,۴\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{N}, x < ۵\}$	
مجموعه‌ی عددهای حسابی کوچک‌تر یا مساوی ۳	$\{۰,۱,۲,۳\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{W}, x \le ۳\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح کوچک‌تر از ۳-	$\{\dots,-۶,-۵,-۴\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < -۳\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح بزرگ‌تر یا مساوی ۲-	$\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,\dots\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \ge -۲\}$	
مجموعه‌ی عددهای صحیح بین ۳- و ۴+	$\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}$	$\{x \mid x \in \mathbb{Z}, -۳ < x < ۴\}$	

روش نوشتن چند کسر بین دو کسر:

بعضی وقت‌ها نوشتن چند کسر بین دو کسر به سادگی قابل انجام است.

بین دو کسر $\frac{۱}{۸}$ و $\frac{۷}{۸}$، پنج کسر بنویسید.

$$\frac{۱}{۸} < \frac{۲}{۸} < \frac{۳}{۸} < \frac{۴}{۸} < \frac{۵}{۸} < \frac{۶}{۸} < \frac{۷}{۸}$$

بین دو کسر $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۱۴}$، شش کسر بنویسید.

$$\frac{۵}{۱۴} < \frac{۵}{۱۳} < \frac{۵}{۱۲} < \frac{۵}{۱۱} < \frac{۵}{۱۰} < \frac{۵}{۹} < \frac{۵}{۸} < \frac{۵}{۷}$$

اما بعضی وقت‌ها نوشتن چند کسر بین دو کسر به این سادگی نیست و باید با انجام عملیاتی این کار را انجام داد، به چهار روش داریم:

۱- هم‌مخرج‌کردن برای نوشتن کسرهای بین دو کسر:

با یک مثال این روش را توضیح می‌دهیم.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$، پنج کسر بنویسید.

ابتدا با استفاده از ک.م.م مخرج‌ها، دو کسر را هم‌مخرج می‌کنیم.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۳\times ۵}{۴\times ۵}=\frac{۱۵}{۲۰} \qquad \frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۴}{۵\times ۴}=\frac{۱۶}{۲۰}$$

چون می‌خواهیم بین دو کسر، پنج کسر بنویسیم، صورت و مخرج دو کسر را در ۶، $(۶=۱+۵)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۱۵\times ۶}{۲۰\times ۶}=\frac{۹۰}{۱۲۰} \qquad \frac{۴}{۵}=\frac{۱۶}{۲۰}=\frac{۱۶\times ۶}{۲۰\times ۶}=\frac{۹۶}{۱۲۰}$$

اکنون باید بین دو کسر $\frac{۹۰}{۱۲۰}$ و $\frac{۹۶}{۱۲۰}$ پنج کسر بنویسیم.

$$\frac{۹۰}{۱۲۰}<\frac{۹۱}{۱۲۰}<\frac{۹۲}{۱۲۰}<\frac{۹۳}{۱۲۰}<\frac{۹۴}{۱۲۰}<\frac{۹۵}{۱۲۰}<\frac{۹۶}{۱۲۰}$$

۲- هم‌صورت‌کردن کسرها: با یک مثال این روش را توضیح می‌دهیم.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$، چهار کسر بنویسید.

ابتدا با استفاده از ک.م.م، صورت‌های دو کسر را یکسان می‌کنیم.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۳\times ۴}{۴\times ۴}=\frac{۱۲}{۱۶} \qquad \frac{۴}{۵}=\frac{۴\times ۳}{۵\times ۳}=\frac{۱۲}{۱۵}$$

اکنون چون می‌خواهیم چهار کسر بین دو کسر بنویسیم، صورت و مخرج کسرهای به دست آمده را در ۵، $(۵=۱+۴)$ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{۴}{۵}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۱۲\times ۵}{۱۵\times ۵}=\frac{۶۰}{۷۵} \qquad \frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۱۲\times ۵}{۱۶\times ۵}=\frac{۶۰}{۸۰}$$

و سپس می‌توان نوشت:

$$\frac{۶۰}{۸۰}<\frac{۶۰}{۷۹}<\frac{۶۰}{۷۸}<\frac{۶۰}{۷۷}<\frac{۶۰}{۷۶}<\frac{۶۰}{۷۵}$$

۳- استفاده از میانگین دو کسر: می‌دانیم که میانگین دو عدد، همواره بین دو عدد قرار دارد و از دو عدد نیز، به یک فاصله است.

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ یک کسر بنویسید.

میانگین دو کسر را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}}{۲}=\frac{\frac{۱۵}{۲۰}+\frac{۱۶}{۲۰}}{۲}=\frac{\frac{۳۱}{۲۰}}{۲}=\frac{۳۱}{۴۰}$$

و روش چهارم: این روش بسیار ساده‌تر و بهتر برای نوشتن چند کسر بین دو کسر است.

اگر $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ و $b,d\neq ۰$ باشند، آن‌گاه همواره داریم:

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$$

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ یک کسر بنویسید.

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۳}{۴}<\frac{۳+۴}{۴+۵}<\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۹}<\frac{۴}{۵}$$

بین دو کسر $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ هفت کسر بنویسید.

$(۳+۴)$ $(۴+۷)$ $(۴+۱۱)$ $(۱۵+۴)$ $(۱۹+۴)$ $(۲۳+۴)$

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۹}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۱۵}{۱۹}<\frac{۱۹}{۲۴}<\frac{۲۳}{۲۹}<\frac{۲۷}{۳۴}<\frac{۳۱}{۳۹}<\frac{۴}{۵}$$

$(۴+۵)$ $(۹+۵)$ $(۱۴+۵)$ $(۱۹+۵)$ $(۲۴+۵)$ $(۲۹+۵)$

نتیجه‌ی ۱: بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

نتیجه‌ی ۲: با توجه به نتیجه‌ی ۱، مجموعه‌ی اعداد گویا را نمی‌توان با نوشتن اعضا مشخص کرد و فقط باید به صورت کلامی یا به صورت نمادین (زبان ریاضی) بیان کرد.

هر کسر متعارفی (معمولی) که صورت و مخرج آن عدد صحیح و مخرج آن مخالف صفر باشد، عدد گویا نامیده می‌شود و مجموعه‌ای که تمامی این عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌ی عددهای گویا نام دارد.

مجموعه‌ی عددهای گویا به صورت نمادین: $\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}\mid p,q\in\mathbb{Z}\,,\,q\neq ۰\}$

انواع اعداد اعشاری: هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک عدد اعشاری نوشت.

دو نوع عدد اعشاری داریم:

۱- عددهای اعشاری متناهی یا مختوم.

۲- عددهای اعشاری متناوب، که این عددها نیز دو دسته هستند:

الف) عددهای اعشاری متناوب ساده

ب) عددهای اعشاری متناوب مرکب

عددهای اعشاری متناهی (مختوم)

اگر مخرج یک کسر ساده‌نشدنی را تجزیه کنیم و در تجزیه‌ی آن فقط عامل‌های ۲ یا ۵ و یا هر دو عامل باشد، عدد اعشاری مربوط به این کسرها را مختوم یا متناهی می‌گویند. (مختوم یعنی رقم‌های اعشاری عدد، دارای خاتمه یا پایان باشند.)

عدد اعشاری مربوط به کسرهای زیر را بنویسید. $\frac{۳}{۴},\frac{۲}{۵},\frac{۷}{۲},\frac{۹}{۸},\frac{۱۱}{۲۵},\frac{۱۷}{۵۰},\frac{۱۹}{۴۰},\frac{۲۶}{۶۵}$

اگر مخرج هر یک از کسرهای فوق، به‌جز $\frac{۲۶}{۶۵}$ را تجزیه کنیم، در آن‌ها فقط عامل ۲ یا ۵ یا هر دو عامل هست. فقط کسر $\frac{۲۶}{۶۵}$ را باید ابتدا ساده کنیم و سپس عدد اعشاری آن را بنویسیم.

$$\frac{۳}{۴}=۰/۷۵\quad,\quad\frac{۲}{۵}=۰/۴\quad,\quad\frac{۷}{۲}=۳/۵\quad,\quad\frac{۹}{۸}=۱/۱۲۵$$
$$\frac{۱۱}{۲۵}=۰/۴۴\quad,\quad\frac{۱۷}{۵۰}=۰/۳۴\quad,\quad\frac{۱۹}{۴۰}=۰/۴۷۵\quad,\quad\frac{۲۶}{۶۵}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

عددهای اعشاری متناوب:

اگر در تجزیه‌ی مخرج یک کسر ساده‌نشدنی، به طور کلی عامل‌های ۲ و ۵ نباشد و در تجزیه‌ی مخرج، عددهای اول دیگری به‌جز ۲ و ۵ باشد، عدد اعشاری مربوط به این‌گونه کسرها را متناوب ساده می‌گویند؛ یعنی بعد از اعشار، بلافاصله رقم یا رقم‌هایی، پیوسته تکرار می‌شوند و این تکرار بی‌پایان است. به این تکرار ارقام، دوره‌ی گردش می‌گویند. اعداد زیر متناوب ساده هستند.

این علامت نشان‌دهنده‌ی دوره‌ی گردش است، یعنی رقم ۳ به طور بی‌پایانی تکرار می‌شود.

$$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳\cdots=۰/\overline{۳}$$
$$\frac{۷}{۱۱}=۰/۶۳۶۳۶۳۶۳\cdots=۰/\overline{۶۳}$$
$$\frac{۱}{۷}=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots=۰/\overline{۱۴۲۸۵۷}$$

اگر در تجزیه‌ی مخرج یک کسر ساده‌نشدنی، عامل‌های ۲ یا ۵ و یا هر دو باشند و علاوه بر آن‌ها اعداد اول دیگری هم در این تجزیه باشند، عدد اعشاری مربوط به این کسرها را متناوب مرکب می‌گویند، یعنی دوره‌ی گردش بلافاصله بعد از ممیز شروع نمی‌شود، بلکه، یک یا چند رقم غیرتکراری بعد از ممیز قرار می‌گیرند و سپس بعد از آن‌ها رقم‌های تکراری یا دوره‌ی گردش شروع می‌شود.

عددهای اعشاری مربوط به کسرهای روبه‌رو را بنویسید. $\frac{۵}{۶},\frac{۱۹}{۲۲},\frac{۴۱}{۳۵}$

$\frac{۵}{۶}=۰/۸۳۳۳۳\cdots=۰/۸\overline{۳}$ (در تجزیه‌ی مخرج یعنی عدد ۶، عامل‌های ۲ و ۳ هست)

$$\frac{۱۹}{۲۲}=۰/۸۶۳۶۳۶۳۶۳\cdots=۰/۸\overline{۶۳}$$
$$\frac{۴۱}{۳۵}=۱/۱۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots=۱/۱۷\overline{۱۴۲۸۵۷}$$

درس دوم: عددهای حقیقی

به عددهای اعشاری کسرهای زیر دقت کنید.

$\frac{17}{6}=2/833333\cdots=2/8\overline{3}$ $\qquad$ $\frac{52}{7}=7/428571428571\cdots=7/\overline{428571}$ $\qquad$ $\frac{3}{11}=0/27272727\cdots=0/\overline{27}$

تعداد رقم‌های هر یک از اعداد اعشاری فوق نامتناهی (بی‌پایان)، اما دارای تناوب یا <u>تکرار با نظم خاصی</u> است، به همین دلیل این اعداد را گویا می‌گوییم.

اکنون به عددهای اعشاری زیر دقت کنید.

$\sqrt{2}=1/414213562373095048801688724097\cdots$ $\qquad$ $\sqrt{3}=1/7320508075688772935274463415059\cdots$

$\sqrt{8}=2/8284271247461900976033774484194\cdots$ $\qquad$ $\pi=3/14159265358979323846264338327950\cdots$

عدد اعشاری هر یک از اعداد $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$، $\sqrt{8}$ و π دارای تعداد رقم‌های اعشاری نامتناهی است و این رقم‌های اعشاری دارای دوره‌ی تناوب یا دارای نظم خاصی در تکرار رقم‌ها نیستند، به این عددها، عددهای گنگ یا اَصَم می‌گویند. مجموعه‌ی عددهای گنگ را با حرف $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می‌دهیم. به طور کلی جذر اعدادی که مربع کامل نیستند، گنگ می‌باشد. مانند: $\sqrt{7}$، $\sqrt{50}$، $\sqrt{0/9}$ و ...

از اجتماع مجموعه‌ی اعداد گویا و مجموعه‌ی اعداد گنگ، مجموعه‌ی اعداد حقیقی به وجود می‌آید که با حرف $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود. یعنی:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{Q}'=\{x\mid x\notin\mathbb{Q}\}$$

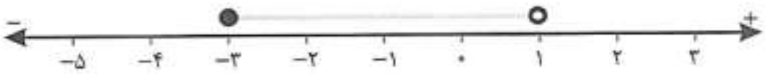
نتیجه: هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ است و برعکس، هر عدد اعشاری که گنگ نباشد، گویا است.

محور اعداد حقیقی: تمام عددهای حقیقی را می‌توان روی یک محور نمایش داد یعنی هر نقطه از محور متناظر با یک عدد حقیقی است.

نمایش زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی عددهای حقیقی روی محور: چون مجموعه‌ی عددهای حقیقی شامل تمامی عددها می‌باشد، بنابراین هر زیرمجموعه از آن را می‌توان روی محور نمایش داد.

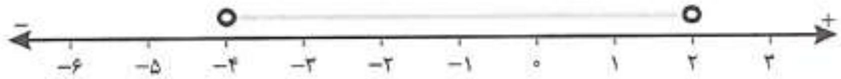
مجموعه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

$A=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -۳\le x<۱\}$



مجموعه‌ی A شامل عدد ۳− می‌باشد، اما عدد ۱ را شامل نمی‌شود، بنابراین روی محور، عدد ۳− را با دایره‌ی توپُر و روی عدد ۱، دایره‌ی توخالی رسم می‌کنیم.

$B=\{x\mid x\in\mathbb{R}, -۴<x<۲\}$



چون عدد $\sqrt{۳}$ گنگ است، پس عددهای $۲\sqrt{۳}$، $\sqrt{۳}+۱$، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $۵-\sqrt{۳}$ نیز گنگ هستند.

مجموع دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $۲-\sqrt{۵}$ و $۷+\sqrt{۵}$ گنگ هستند، اما مجموع آن‌ها عددی گویا است.

$$۲-\cancel{\sqrt{۵}}+۷+\cancel{\sqrt{۵}}=۹\in\mathbb{Q}$$

حاصل تفریق دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $۱۱-\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}+۵$ دو عدد گنگ هستند، اما حاصل تفریق آن‌ها عددی گویا است.

$$۱۱-\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳}+۵)=۱۱-\cancel{\sqrt{۳}}+\cancel{\sqrt{۳}}-۵=۶\in\mathbb{Q}$$

حاصل‌ضرب دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

اعداد $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند. اما:

$$\sqrt{۱۸}\times\sqrt{۲}=\sqrt{۳۶}=۶\in\mathbb{Q}$$

حاصل تقسیم دو عدد گنگ، ممکن است عددی گویا شود.

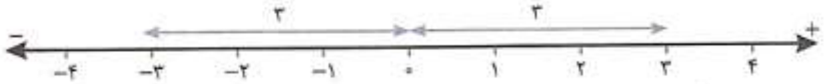
دو عدد $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲}$ گنگ هستند. اما:

$$\frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}}=\frac{\cancel{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۹}}{\cancel{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۹}=۳\in\mathbb{Q}$$

درس سوم: قدرمطلق و محاسبه‌ی تقریبی

قدرمطلق

فاصله‌ی نقطه‌ی نظیر یک عدد حقیقی روی محور اعداد تا مبدأ را قدرمطلق آن عدد می‌نامند. برای مثال، فاصله‌ی نقاط نظیر دو عدد ۳ و ۳- تا مبدأ برابر ۳ واحد است، پس قدرمطلق هر دو عدد ۳ و ۳-، برابر عدد ۳ است.



قدرمطلق عدد a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. (این نماد | |، نشانه‌ی قدرمطلق است.) در حالت کلی قدرمطلق هر عدد غیر صفر، عددی مثبت است.

$|-\sqrt{۵}|=|\sqrt{۵}|=\sqrt{۵}$ $\qquad$ $|-\pi|=|\pi|=\pi$ $\qquad$ $|-\frac{۴}{۳}|=|\frac{۴}{۳}|=\frac{۴}{۳}$

اگر a عددی حقیقی باشد، $|a|$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} a\geq ۰ \Rightarrow |a|=a \\ a<۰ \Rightarrow |a|=-a \end{cases}$$

اگر a یک عدد حقیقی باشد، آن‌گاه: $\sqrt{a^۲}=|a|$

$\sqrt{(-۷)^۲}=|-۷|=۷$ $\qquad$ $\sqrt{۷^۲}=|۷|=۷$

حاصل هر قدرمطلقی همیشه یا صفر است یا یک عدد مثبت. (هیچ‌گاه منفی نمی‌شود)

قدرمطلق حاصل‌ضرب دو عدد، مساوی حاصل‌ضرب قدرمطلق‌های آن‌ها است. یعنی: $|xy|=|x|\times|y|$

اگر $x=-۳$ و $y=۲$ باشد، داریم: $|(-۳)(۲)|=|-۳|\times|۲| \Rightarrow |-۶|=۳\times۲ \Rightarrow ۶=۶$

یا اگر $x=-۵$ و $y=-۷$ باشد، داریم: $|(-۵)(-۷)|=|-۵|\times|-۷| \Rightarrow |۳۵|=۵\times۷ \Rightarrow ۳۵=۳۵$

قدرمطلق مجموع دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی مجموع قدرمطلق‌های آن دو عدد است. یعنی: $|x+y|\leq|x|+|y|$

اگر $x=-۷$ و $y=۲$ باشد، داریم: $|(-۷)+۲|\leq|-۷|+|۲| \Rightarrow |-۵|\leq۷+۲ \Rightarrow ۵\leq۹$

یا اگر $x=-۱۱$ و $y=-۵$ باشد، داریم: $|(-۱۱)+(-۵)|\leq|-۱۱|+|-۵| \Rightarrow |-۱۶|\leq۱۱+۵ \Rightarrow ۱۶\leq۱۶$

برای هر عدد حقیقی مانند x همواره داریم: $x+|x|\geq۰$

فرض کنیم $x>۰$، برای مثال $x=۴$ باشد، آن‌گاه داریم: $۴+|۴|\geq۰ \Rightarrow ۴+۴\geq۰ \Rightarrow ۸\geq۰$ ✓

فرض کنیم $x=۰$ باشد، آن‌گاه داریم: $۰+|۰|\geq۰ \Rightarrow ۰+۰\geq۰ \Rightarrow ۰\geq۰$ ✓

فرض کنیم $x<۰$ باشد، برای مثال $x=-۶$ باشد، آن‌گاه داریم: $-۶+|-۶|\geq۰ \Rightarrow -۶+۶\geq۰ \Rightarrow ۰\geq۰$ ✓

تساوی $\sqrt{a^۲}=a$ همیشه درست نیست. (بعضی مواقع درست و بعضی مواقع نادرست است.) اگر $a\geq۰$ باشد، درست است و اگر $a<۰$ باشد، نادرست است.

$a=-۸ \Rightarrow \sqrt{(-۸)^۲}=-۸$ ✗ $\qquad$ $a=۵ \Rightarrow \sqrt{۵^۲}=۵$ ✓

حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

الف) $\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}=$ $\qquad$ ب) $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=$ $\qquad$ ج) $|(\frac{۱}{۲})^۳-(\frac{۱}{۲})^۲|=$

الف) می‌دانیم: $۱<\sqrt{۳}$ است، بنابراین: $\sqrt{۳}-۱>۰$ و داریم: $\sqrt{(\sqrt{۳}-۱)^۲}=|\sqrt{۳}-۱|=\sqrt{۳}-۱$

ب) می‌دانیم: $۱<\sqrt{۲}$ است، بنابراین: $۱-\sqrt{۲}<۰$ و داریم: $\sqrt{(۱-\sqrt{۲})^۲}=|۱-\sqrt{۲}|=-(۱-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱$

ج) $(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$، $(\frac{۱}{۲})^۳=\frac{۱}{۸}$ و $\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۸}<۰$، بنابراین داریم: $|(\frac{۱}{۲})^۳-(\frac{۱}{۲})^۲|=|\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۴}|=|-\frac{۱}{۸}|=-(-\frac{۱}{۸})=\frac{۱}{۸}$

اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، می‌دانیم که $a-b$ قرینه‌ی $b-a$ است. بنابراین داریم: $|a-b|=|b-a|$