هرگاه $a>0$ برای هر دو عدد طبیعی m و n توان کسری و غیر صحیح $\frac{m}{n}$ را برای a چنین تعریف می‌کنیم : $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

تمام قوانین توان رسانی توان‌های صحیح برای توان‌های گویا نیز برقرار است یعنی : برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b و اعداد گویای r و s داریم :

۱) $a^0=1$ ۲) $a^{-x}=\frac{1}{a^x}$ ۳) $a^x.a^y=a^{x+y}$ ۴) $(a^x)^y=a^{xy}$

۵) $\frac{a^x}{a^y}==a^{x-y}$ ۶) $\frac{a^x}{b^x}=(\frac{a}{b})^x$ ۷) $a^x.b^x=(ab)^x$

توابع نمایی : به هر تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به‌فرم $f(x)=a^x$ که در آن a عددی حقیقی و مثبت و مخالف یک باشد ، تابع نمایی گفته می‌شود.

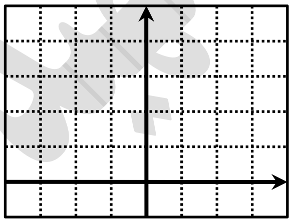
مثال – هریک از توابع مقابل یک تابع نمایی است : $h(x)=(\frac{3}{7})^{2x}$ $g(x)=(\sqrt{5})^{-x}$ $f(x)=2^x$

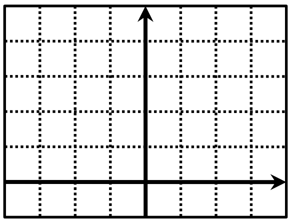
و هیچ‌یک از توابع روبه‌رو تابع نمایی نیستند. $y=(-\sqrt{2})^x$ $y=1^x$ $y=(-7)^x$

تابع نمایی $f(x)=a^x$ را در دوحالت بررسی می کنیم :

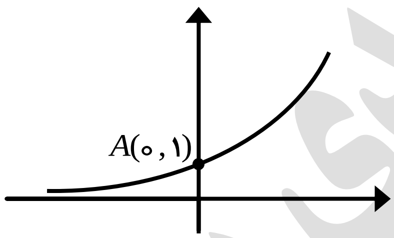
حالت اول $(a>1, y=a^x)$ **:**

تمرین– هریک از توابع مقابل را رسم کنید . $y=2^x$ $y=3^x$



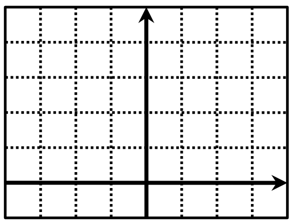


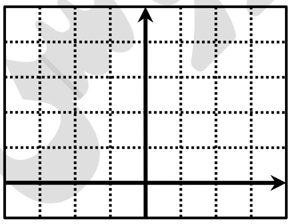
در این حالت با افزایش x ، y نیز افزایش می‌یابد و با کاهش x ، y نیز کاهش می یابد.
این تابع محور y را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می کند.
در این حالت تابع یک‌به‌یک است. (چرا؟)
دامنه تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(0,+\infty)$ می باشد.
نمودار تابع در حالت کلی به‌صورت مقابل است.



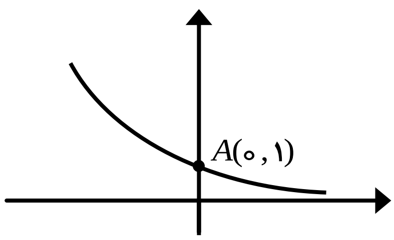
حالت دوم $(0<a<1, y=a^x)$ **:**

تمرین– هریک از توابع زیر را رسم کنید. $y=(\frac{1}{2})^x$ $y=(\frac{1}{3})^x$



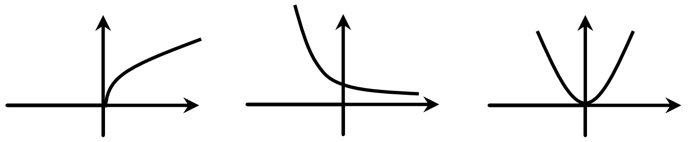


در این حالت با افزایش x ، y کاهش می‌یابد و با کاهش x ، y افزایش می‌یابد.
این تابع محور y را در نقطهٔ $(0,1)$ قطع می کند.
در این حالت نیز تابع یک‌به‌یک است.
دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(0,+\infty)$ می باشد.
نمودار تابع در حالت کلی به‌صورت مقابل است.

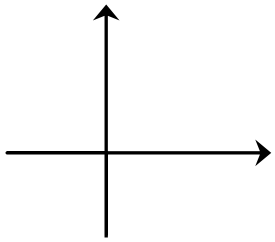


تمرین– کدام‌یک از توابع زیر نمایی است؟

$y = ۳ \times ۲^{۴x}$　,　$y = ۶^{-x}$　,　$y = ۲x^{۲} + ۵x - ۳$



تمرین – الف) نمودار تابع $y = ۲ \times ۳^{x}$ را رسم کنید.

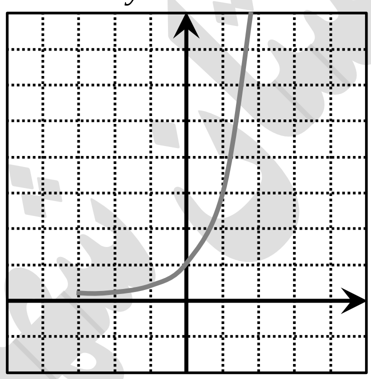


ب) نمودار این تابع محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

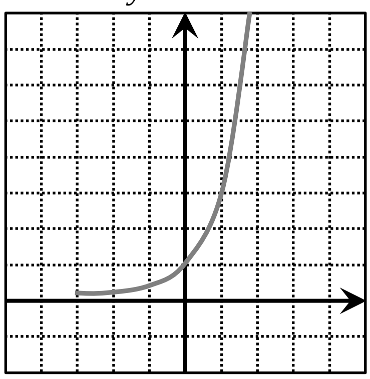
به‌طورکلی نمودار تابع نمایی $y = k \times a^{x}$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض k قطع می‌کند.

تمرین– هریک از توابع زیر را به کمک انتقال تابع $f(x) = ۳^{x}$ رسم کنید و دامنه و برد آن‌ها را به‌دست آورید.

$y = ۳^{x+۱}$

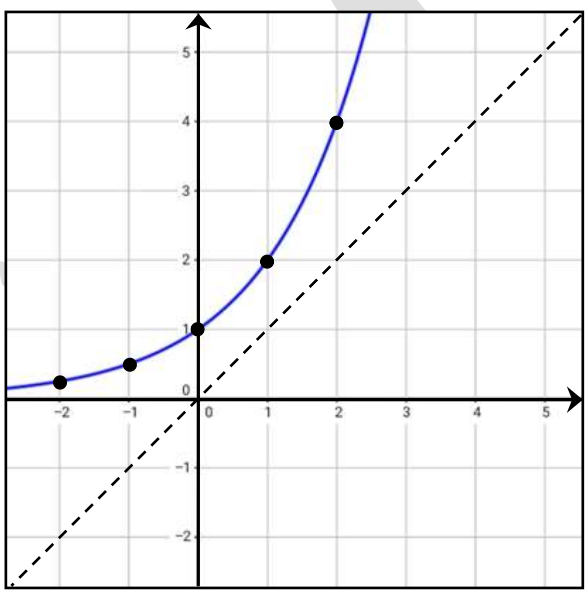


$y = ۳^{x} + ۲$



تمرین– معادلات نمایی مقابل را حل کنید.　$۵^{x^{۲} - ۱۰x} = \dfrac{۱}{۱۲۵^{x}}$　　$۱۶^{x} = ۲^{x-۹}$

تمرین– الف) با توجه به نقاط نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲^{x}$ در دستگاه مختصات مقابل نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



ب) در جای خالی عدد مناسب بنویسید.

$f(۲) =$　　$f(۰) =$　　$f(-۱) =$

$f^{-۱}(۴) =$　　$f^{-۱}(۱) =$　　$f^{-۱}(\frac{۱}{۲}) =$

ج) دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را بنویسید.

با توجه به تمرین فوق :

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = ۲^{x}$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = log_{۲}x$ (لگاریتم x در مبنای ۲) نمایش می‌دهیم.

تابع لگاریتم : می دانیم تابع نمایی ($y = a^x$) تابعی یک به یک است. بنابراین این تابع وارون پذیر می‌باشد.

وارون تابع $y = a^x$ را تابع لگاریتم می‌نامیم و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$y = a^x \xrightarrow{\text{تابع معکوس}} x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$$ (لگاریتم x در مبنای a)

تمرین – حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$\log_{\frac{۱}{۲}} ۴ =$ $\qquad$ $\log_۳ ۸۱ =$ $\qquad$ $\log_۲ ۸ =$ $\qquad$ $\log_{۱۰} ۱۰۰ =$

$\log_{۱۲} ۱۲ =$ $\qquad$ $\log_۷ ۱ =$ $\qquad$ $\log_۴ \frac{۱}{۶۴} =$ $\qquad$ $\log_۵ ۱۲۵ =$

✓ پایهٔ لگاریتم همواره باید بزرگتر از صفر باشد و برابر یک نباشد. ($a > ۰$ و $a \neq ۱$)

✓ اگر پایهٔ لگاریتم ۱۰باشد ، نیازی به نوشتن آن نیست. ($\log_{۱۰} ۷ = \log ۷$)

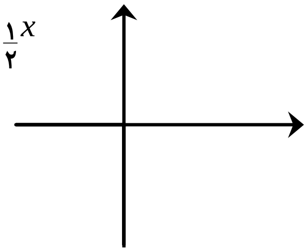
✓ برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y = \log_a x$ شرایط زیر را در نظر می‌گیریم : ۱) $x > ۰$, ۲) $a > ۰$, ۳) $a \neq ۱$

تمرین– دامنهٔ توابع لگاریتمی زیر را به‌دست آورید.

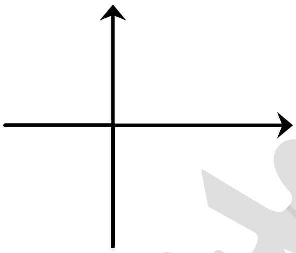
$y = \log_{x-۱}(۲x - ۶)$ $\qquad$ $y = \log_{۰/۵}(x + ۸)$ $\qquad$ $y = \log_۷(۲x - ۱)$

تمرین – نمودار هریک از توابع زیر را روی دستگاه مختصات رسم کنید.

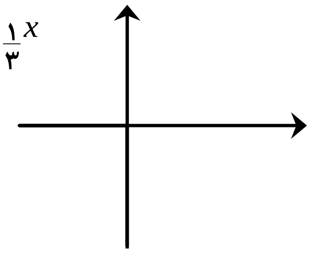
$y = \log_{\frac{۱}{۲}} x$



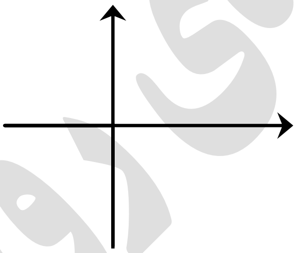
$y = \log_۳ x$



$y = \log_{\frac{۱}{۳}} x$

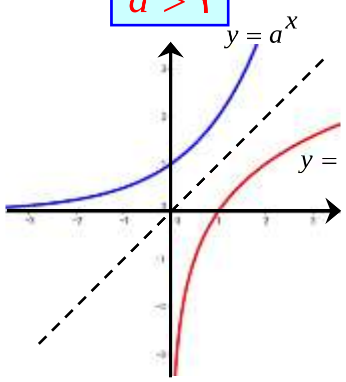


$y = \log_۴ x$

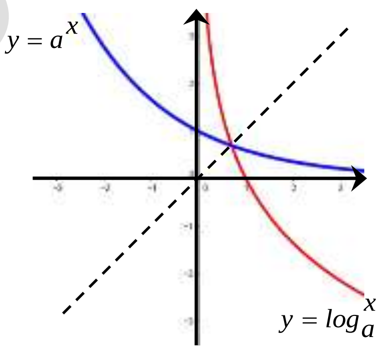


توابع $y = a^x$ و $y = \log_a x$ وارون یک‌دیگرند. بنابراین نمودارهای این توابع نسبت به نیم‌ساز ربع اول و سوم قرینه‌اند.

$a > ۱$



$۰ < a < ۱$



قوانین لگاریتم‌ها :

۱) $\log_a 1 = 0$ (لگاریتم ۱ در هر مبنایی صفر می‌شود.)

۲) $\log_a a = 1$ (لگاریتم هر عدد در مبنای خودش ۱ می‌شود.)

۳) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

تمرین– درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$\log 2 + \log 5 = 1$ $\qquad$ $\log_3 6 = 1 + \log_3 2$

۴) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

تمرین– ثابت کنید : $\log 5 = 1 - \log 2$

۵) $\log_a x^n = n \log_a x$

تمرین– ثابت کنید : $\log_2 24 = 3 + \log_2 3$

✓ در قانون بالا به‌طور کلی خواهیم داشت : $\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m} \log_a x$

تمرین– حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $\log_{125} 25 =$

۶) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

تمرین– ثابت کنید : $\log_2 3 \times \log_3 2 = 1$

۷) $a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$

تمرین– ثابت کنید : $a^{\log_a b} = b$

تمرین– حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید. $49^{\log_7 2} =$

۸) $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

تمرین– اگر داشته باشیم : $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ ، $\log_6 9 = a$ را برحسب a و b به‌دست آورید.

معادلهٔ لگاریتمی : در حل معادلات لگاریتمی باید توجه کرد که : **جواب‌هایی قابل قبول‌اند که در دامنهٔ تابع باشند.**

تمرین– معادلات زیر را حل کنید.

$\log_2 x^2 - 10 = \log_2 3x$ $\qquad$ $\log_7 2x - 1 = \log_7 3$ $\qquad$ $\log_3 x + 10 = 2$ $\qquad$ $\log_5 x = -1$

تمرین – معادلات زیر را حل کنید.

$\log_x ۳ = \log_x (۲x - ۹)$ $\quad$ $\log(\log x) = ۰$ $\quad$ $۲\log(x+۱) = \log(x+۶)$

$\log_۲ x + \log_۲ x = ۱۲$ $\quad$ $\log_{(x+۳)} x^۲ = ۲$ $\quad$ $\log x - \log(x-۱) = \log ۶$

$\frac{۱}{۲}\log_۲ x = \log_۵ \sqrt{۵} + \log_۷ \sqrt{۷}$ $\quad$ $\log \frac{x+۱}{x+۲} + \log \frac{x+۲}{x+۳} + \log \frac{x+۳}{x+۴} = -۱$

$\log_۸ ۲۷ = \log_۲ x$ $\quad$ $۶^{\log_۳ x} + x^{\log_۳ ۶} = ۷۲$ $\quad$ $\log_۵ x + ۳\log_۵ ۲ = \log_۵ ۰/۵$

تمرین– اگر داشته باشیم : $۴^x + ۲^x = ۷۲$ و $\log(x+۱) + \log(۲y + x^۲) = ۲$ مقدار y را به‌دست آورید.

تمرین– ضابطهٔ وارون هریک از توابع زیر را به‌دست آورید.

$y = ۵^x$ $\quad$ $y = \log(x-۶)$

تمرین– معادلهٔ مقابل را حل کنید. $\log(۳x-۲) - ۲\log_۲ \sqrt{۸} = \log(\tan x) + \log(\cot x)$