معماهای الگوریتمی

جلد اول

دکتر محمد قدسی   مهندس یاشار گنجعلی

انتشارات فاطمی

کتاب **معماهای الگوریتمی** برای کسانی تهیه شده است که هم به مسئله‌های معما گونه علاقه‌مندند هم به مسئله‌هایی که ماهیت الگوریتمی دارند. در این کتاب تعداد زیادی مسئله آمده است که حل کردن آن‌ها نیاز به معلومات خاصی که تدریس می‌شود ندارد و تنها به قوه‌ی ابتکار و خلاقیت خواننده متکی است. راه‌حل تقریباً تمام مسئله‌های کتاب در انتهای کتاب آمده است.

مطالعهٔ این کتاب برای دانش آموزان علاقّه‌مند به شرکت در المپیادهای کامپیوتر و ریاضی، دانش‌جویان و تمامی علاقه‌مندانی که به گسترش تواناییهای خود در «تفکر الگوریتمی» تمایل دارند مفید است.

معماهای الگوریتمی

جلد اول

دکتر محمد قدسی　　مهندس یاشار گنجعلی

انتشارات فاطمی

معماهای الگوریتمی

جلد اول

مؤلفان: محمد قدسی، یاشار گنجعلی
ویراستار: ارشک حمیدی
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ دوم، ۱۳۸۷
شابک ۰_۳۱۳_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-313-0
تیراژ: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۲۸۰۰ تومان

آماده‌سازی پیش از چاپ: یاشار گنجعلی، محمد قدسی
طراح جلد: زهرا قورچیان
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
لیتوگرافی: صاحب
چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع

کلیهٔ حقوق برای مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی محفوظ است.

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

قدسی، محمد، ۱۳۳۱ ـ
معماهای الگوریتمی/مؤلفان محمد قدسی، یاشار گنجعلی؛ ویراستار ارشک حمیدی.ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۲.
۲ ج.: مصور.
ISBN 964-318-348-3 (دوره).ـ ISBN 964-318-313-0 (ج.۱)
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
چاپ دوم: ۱۳۸۷.
۱. المپیادها (الگوریتمهای کامپیوتری). ۲. الگوریتمهای کامپیوتری ــ مسائل، تمرینها و غیره. ۳. الگوریتمهای کامپیوتری ــ مسابقه‌ها. الف. گنجعلی، یاشار. ب. عنوان.
۶م۴ق/۲۴/LB۳۰۶۰ ۳۷۳/۲۳۸
کتابخانهٔ ملی ایران ۸۲_۴۹۹۶۹م

فهرست

به‌نام خدا

پیش‌گفتار

یکی از جنبه‌های زیبای زندگی، تلاش ذهن در کشف اسرار و حل معماهای پیچیده است. در زندگی روزمره مسئله‌های جذابی یافت می‌شوند که حل آن‌ها مدت‌ها ذهن را به خود مشغول می‌کند و کم نیستند افرادی که از این گونه فعالیت‌های ذهنی لذت می‌برند و با حل هر مسئله یا معمای سرگرم‌کننده احساس شادی و غرور می‌کنند.

علم کامپیوتر، مانند دیگر رشته‌ها، سرشار از معماهای جالب است. در این معماها که عمدتاً ماهیتی الگوریتمی دارند از مفاهیم ساده و زیبای ریاضی استفاده شده و حل آن‌ها نیازمند نگرشی خاص به مسئله است که آن را «تفکر الگوریتمی» می‌نامیم. استقرای ریاضی، تصور و شمارش حالت‌های مختلفِ یک مسئله و انتخاب یک مدل ذهنی و انتزاعی مناسب برای آن، از ملزومات اصلی این نوع تفکر است. این مفاهیم هر چند ظاهراً ساده هستند ولی استفاده از آن‌ها برای حل برخی از مسئله‌ها و معماهای الگوریتمی بسیار مشکل است و نیاز به ذهنی خلاق دارد و همین امر به جذابیت این‌گونه مسئله‌ها و کشف راه‌حل‌های آن‌ها می‌افزاید.

المپیادهای کامپیوتر که از سال ۱۳۷۰ هر سال با شرکت چند ده هزار دانش‌آموز در سراسر کشور برگزار می‌شود، نقش به‌سزایی در اشاعه‌ی روحیه‌ی حل مسئله و معماهای الگوریتمی و پرورش قدرت ابتکار و خلاقیت در بین دانش‌آموزان برجسته‌ی کشور داشته است و توجه آنان را به جنبه‌های نظری و الگوریتمی رشته‌ی کامپیوتر جلب کرده است. بسیاری از این دانش‌آموزان پس از طی مراحل مختلف المپیاد به دانشگاه‌های کشور راه می‌یابند و از برکت این فعالیت‌های علمی، دانشگاه‌ها شاهد ورود دانش‌آموزانی به رشته‌ی کامپیوتر هستند که توانایی قابل توجهی در ارائه‌ی راه‌حل‌های الگوریتمی برای مسئله‌های مختلف دارند. همین امر موجب تحولات مثبتی در رشته‌ی کامپیوتر شده است.

مسئله‌هایی که در مراحل اول و دوم المپیادهای کامپیوتر در سطح کشوری مطرح می‌شوند، عموماً از نوع معماهای الگوریتمی هستند. البته در سال‌های اولیه، برای بسیاری از دانش‌آموزان نوعِ مسئله‌های مطرح‌شده تازگی داشت و با تصوری که از المپیاد کامپیوتر داشتند متفاوت بود. ولی با گذشت چند سال، این تفکر کم‌کم جا افتاده است که کامپیوتر فقط

تعدادی قطعات الکترونیکی یا کار با آن نیست و علم کامپیوتر براساس مفاهیم عمیق و جالب نظری بنا شده است.

کتاب حاضر تلاشی برای فراهم آوردن بخشی از مطالب مورد نیاز دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در المپیادهای کامپیوتر است که منابع زیادی برای آماده‌سازی خود در دست‌رس ندارند. البته تمامی شیفتگان معماها و مسئله‌های الگوریتمی، از جمله دانش‌جویان علاقه‌مند به الگوریتم‌ها از خواندن این کتاب لذت خواهند برد.

این کتاب حاوی مسئله‌ها و معماهای جالب است که عمدتاً از منابع زیر گردآوری و به‌صورت آزاد ترجمه شده‌اند.

1. Dennis Shasha, *The Puzzling Advanture of Dr. Ecco,* W. H. Freeman and Company, 1988.
2. Dennis Shasha, *Codes, Puzzles, and Conspiracy,* W. H. Freeman and Company, 1992.
3. Raymond Smullyan, *What is the Name of This Book?* Simon & Schuster, Inc. 1978.

نویسندگان اصلی این کتاب‌ها هر دو از استادان سرشناس ریاضی و علم کامپیوتر هستند و سعی کرده‌اند که در کتاب‌هایشان مفاهیمِ مهم و اساسیِ این علم و نحوه‌ی تفکرِ منطقی را به‌صورت مسئله‌ها و معماهای واقعی و به‌زبان ساده بیان کنند. در طرح این معماها از تفکرات پژوهش‌گران در زمینه‌های مختلف علم کامپیوتر (مانند ریاضیات گسسته، نظریه‌ی گراف، سیستم‌های توزیع‌شده، رمزنگاری، طراحی سیستم‌ها و منطق) الهام گرفته شده است.

با این که اکثر مسئله‌های این کتاب از منابع فوق تهیه شده‌اند، ولی به‌منظور عرضه‌ی تعداد بیش‌تری مسئله، صورت و توضیح اغلب آن‌ها نسبت به متن اصلی کوتاه شده و به‌زبان متفاوت و ساده‌تری بیان شده است. حل برخی از مسئله‌ها هم با ایده‌های راه‌حل‌های مطرح‌شده در کتاب اصلی کاملاً متفاوت است. بنابراین این کتاب صرفاً یک ترجمه نیست.

حل کردن مسئله‌های این کتاب نیاز به معلومات خاصی که در مدارس تدریس می‌شود ندارد و تنها به قوه‌ی ابتکار و خلاقیت خواننده متکی است. هرچند که راه‌حل تقریباً تمام مسئله‌های کتاب در فصل «راه‌نمایی» آمده است، ولی توصیه می‌شود که رجوع به راه‌حل یک مسئله در آخرین مرحله و پس از تلاش برای حل مستقل آن انجام شود.

مسئله‌های این کتاب از نظر سختی به سه درجه‌ی ساده یا نسبتاً ساده، متوسط یا کمی مشکل و مشکل تقسیم شده‌اند. مسئله‌های کمی مشکل با یک علامت ستاره (*) و مسئله‌های مشکل با دو ستاره (**) در کنار عنوان آن‌ها مشخص شده‌اند. توصیه می‌شود که ابتدا

مسئله‌های ساده یا نسبتاً ساده را حل کنید.

بسیاری از مسئله‌های این کتاب را می‌توان با دید پیاده‌سازی با یک زبان برنامه‌سازی هم نگاه کرد و از آن‌ها مسئله‌های جالب برنامه‌نویسی طرح کرد. لذا این کتاب برای دانش‌جویانی که در مسابقات برنامه‌نویسی در کشور شرکت می‌کنند نیز مفید است.

حروف‌چینی این کتاب با استفاده از نرم‌افزار فارسی‌تک انجام شده است. بخش عمده‌ی این کار توسط مؤلف دوم انجام شد و در غیاب ایشان مؤلف اول این کار را به پایان رساند. فارسی‌تک یک نرم‌افزار حروف‌چینی قوی و مبتنی بر نرم‌افزار معروف $\TeX$ است که به‌همت مؤلف اول تهیه و به‌عنوان یک نرم‌افزار عمومی به‌صورت رایگان از طریق اینترنت عرضه شده است.[1] بنابراین لازم می‌دانیم از گروه پروژه‌ی فارسی‌تک در دانشگاه صنعتی شریف تشکر کنیم.

آقای علی شریفی در نقش ویراستار علمی مسئله‌های این کتاب را به‌دقت مطالعه و اصلاحاتی را پیش‌نهاد کردند. راه‌حل‌های پیش‌نهاد شده برای مسئله‌های منطقی (فصل ۷) نیز حاصل زحمات اوست. از ایشان صمیمانه سپاسگزاری می‌کنیم. هم‌چنین از خانم شادی رستمی و آقایان افشار گنجعلی و محمد مهدیان، برای کمک‌ها، پیش‌نهادها و نظرات سودمندشان در تهیه‌ی این کتاب تشکر می‌کنیم.

محمد قدسی
دانشیار
دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف
ghodsi@sharif.edu
http://sharif.edu/~ghodsi

یاشار گنجعلی
دانش‌جوی دکتری
دانشکده‌ی مهندسی برق
دانشگاه استنفورد، آمریکا
yganjali@stanford.edu
http://stanford.edu/~yghanjali

[1] علاقه‌مندان می‌توانند این نرم‌افزار را از آدرس http://www.farsitex.org تهیه کنند.

فصل ۱

جنگ و صلح

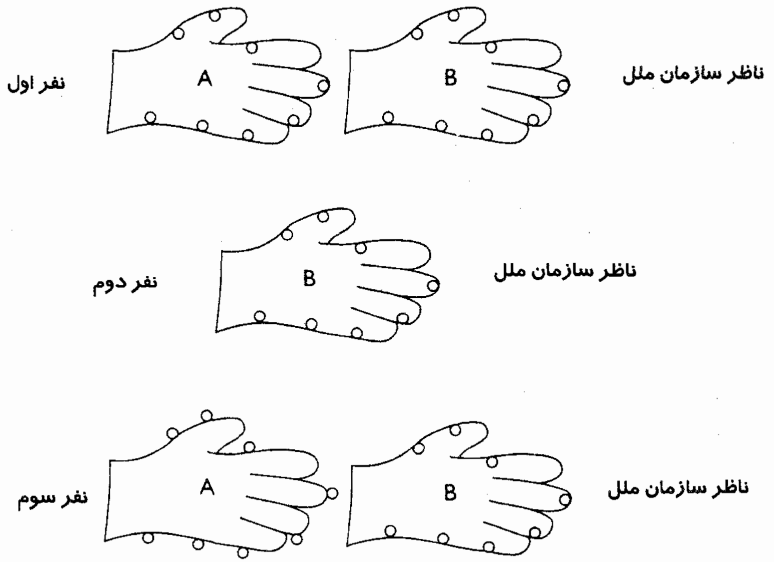
* مسئله‌ی ۱. مذاکره‌ی صلح

رابطه‌ی بین دو کشور «تاراک» و «روکاتی» بر سر ویروسی به نام «توسی» به‌شدت تیره شده و جنگ شدیدی بین دو کشور درگرفته است. هر یک از این دو کشور ادعا می‌کند که کشور دیگر منشأ پخش ویروس بوده است. ویروس «توسی» ویروسی است که به‌تازگی کشف شده است و به‌سرعت انتقال می‌یابد و در صورتی که فردی به این ویروس مبتلا شود ظرف مدت کوتاهی رنگِ پوستِ تمام بدنش کبود می‌شود و بعد از مدتی می‌میرد.

نمایندگان سازمان ملل بعد از مذاکره‌ی جداگانه با هر یک از دو طرفِ درگیر در جنگ، پیش‌نهاد کرده‌اند مذاکره‌ای مستقیم بین آن‌ها صورت گیرد. قرار است در این جلسه‌ی مذاکره، از هر کشور یک نفر به‌عنوان نماینده و یک نفر دیگر به‌عنوان معاون او شرکت کند. از طرف سازمان ملل نیز یک ناظر و یک مترجم در جلسه حضور خواهند داشت.

طبق روال دیپلماتیک چنین جلساتی، نمایندگان هر دو کشور و معاونین آن‌ها و هم‌چنین مترجم باید هر یک با ناظرِ سازمان ملل دست بدهند. همین‌طور نماینده‌ی «تاراک» باید با نماینده‌ی «روکاتی» دست بدهد. معاونین نمایندگان دو کشور نیز باید با هم دست بدهند، ولی لزومی ندارد که نماینده‌ی هر کشور با معاون نماینده‌ی کشور دیگر دست بدهد. مهم‌ترین مشکل بر سر راه انجام این مذاکرات این است که به‌دلیلِ وجودِ خطر ویروسی‌شدن، هیچ کس مایل نیست به‌طور مستقیم با فردِ دیگری دست بدهد.

برای رفع این مشکل سه عدد (دقت کنید ۳ عدد نه ۳ جفت) دست‌کش تهیه شده است که نمایندگان هنگام دست دادن می‌توانند از آن‌ها استفاده کنند. داخل و خارج دست‌کش‌ها



شکل ۱ دست‌دادن سه نفر با ناظر سازمان ملل فقط با دو دست‌کش.

ممکن است ویروسی شوند ولی هیچ ویروسی از یک طرفِ دست‌کش به طرف دیگر آن منتقل نمی‌شود. اگر هر یک از دو سطح دست‌کش و دست با هم برخورد کنند ویروس‌های یکی به دیگری منتقل می‌شود. از هر دو طرفِ دست‌کش‌ها می‌توان استفاده کرد، یعنی می‌توان هر دست‌کش را برگرداند (پشت و رو کرد) و از طرف آستر پوشید. ضمناً دست‌کش‌ها آن‌قدر گشاد هستند که بتوان چند دست‌کش را روی هم پوشید. برای پوشیدن، درآوردن و پشت و رو کردن دست‌کش‌ها از وسیله‌ی مخصوصی استفاده می‌شود که به هیچ وجه ویروس‌ها را منتقل نمی‌کند.

> **آیا می‌توانید ترتیبی برای استفاده از دست‌کش‌ها و دست دادن افراد بیان کنید که ویروس از هیچ کس به فرد دیگری منتقل نشود؟ (تمام افراد، حتا ناظر سازمان ملل و مترجم امکان ابتلا به ویروس را دارند.)**

به‌عنوان مثال، اگر قرار باشد با دو دست‌کشِ A و B، سه نفر با ناظر سازمان ملل دست بدهند، می‌توان به‌ترتیب زیر عمل کرد (شکل ۱ را ببینید):

۱. نفر اول دو دست‌کش A و B را با هم می‌پوشد (B روی A) و با ناظر دست می‌دهد.

۲. نفر دوم دست‌کشِ B را می‌پوشد و با ناظر دست می‌دهد.

۳. نفر سوم آسترِ B را روی آستر A می‌پوشد و با ناظر دست می‌دهد.

به این ترتیب ملاحظه می‌کنید که هیچ‌یک از سطوح دست‌کش‌ها امکان انتقال ویروس را فراهم نمی‌کند.

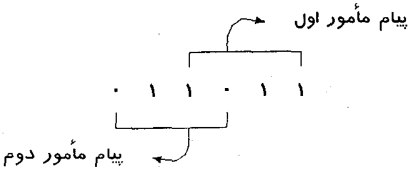
آیا برای مسئله در حالت کلی و با حداقل تعداد دست‌کش‌ها راه‌حلی دارید؟

* مسئله‌ی ۲. موسیقی یا پیام جاسوسی

یک شبکه‌ی بزرگِ جاسوسی از روش خاصی برای فرستادن پیام به مأموران و جاسوسان خود در فاصله‌های دور استفاده می‌کند؛ به این ترتیب که پیام‌های مورد نظر خود را به‌صورت دنباله‌هایی از ارقام صفر و یک رمزگذاری می‌کند و این دنباله‌ها را در قالب نُت‌های موسیقی که صدای آن‌ها کم و زیاد می‌شود از طریقِ امواج معمولی رادیویی ارسال می‌کند. مأموران می‌دانند که کاهش طنین در موسیقی حاوی پیام به معنی صفر و افزایش آن نشانه‌ی یک است. در این‌جا حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که در آن هر پیام یک دنباله‌ی چهارتایی از صفرها و یک‌هاست (یک دنباله‌ی چهار بیتی).

این شبکه می‌خواهد برای ۹ نفر از مأمورانش پیام بفرستد، ولی از آن‌جا که زیاد شدنِ طول پیام احتمالِ شناسایی و کشف آن‌را زیاد می‌کند، سعی می‌شود طول کل پیام ارسالی تا حد ممکن کوتاه باشد. به این دلیل، در صورت امکان پیام‌های مورد نظر خود را با هم ترکیب و یک‌جا ارسال می‌کند. مثلاً هرگاه بخواهد پیام ۰۱۱۰ را به یکی از مأموران و پیام ۱۰۱۱ را به مأمور دیگری بفرستد، می‌تواند آن‌ها را به‌صورت ۰۱۱۰۱۱ ترکیب و یک‌جا ارسال کند. البته در این حالت باید قبل از ارسال این پیام ترکیبی، به مأمور اول اطلاع دهد که از رقم اول شروع به خواندن کند و به مأمور دوم هم بگوید که از رقم سوم شروع به خواندن کند (شکل ۲ را ببینید). برای اطلاع دادن محل شروعِ پیامِ هر مأمور (شماره‌ی رقم آن) هم از نُت موسیقی خاصی برای آن مأمور استفاده می‌شود.

۱. این شبکه می‌خواهد پیام‌های ۰۰۰۰، ۰۰۱۱، ۰۱۰۰، ۰۱۱۰، ۰۱۱۱، ۱۰۱۱، ۱۱۰۰، ۱۱۰۱ و ۱۱۱۰ را به مأمورانش بفرستد. متخصصین کدگذاریِ شبکه موفق به یافتن دنباله‌ای به طول ۱۵ بیت برای ترکیب این ۹ پیام شده‌اند. آیا شما می‌توانید دنباله‌ای به طول ۱۴ یا کم‌تر بیابید که شامل همه‌ی این ۹ پیام باشد؟



شکل ۲. نحوه‌ی ترکیبِ پیامِ دو مأمور

۲. فرض کنید تعداد مأموران این شبکه از ۹ نفر به ۱۴ نفر افزایش پیدا کرده است. آیا می‌توانید دنباله‌ای ۱۹ بیتی پیدا کنید که شامل هر مجموعه‌ی ۱۴ تاییِ دل‌خواه از پیام‌های ۴ بیتی باشد؟

۳. آیا می‌توانید یک دنباله‌ی ۱۸ بیتی بیابید که ۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتیِ مشخص، که از قبل به شما داده شده‌اند، زیردنباله‌های آن باشند؟ به تفاوت این سؤال و سؤال قبل دقت کنید. در سؤال قبل دنباله‌ی ۱۹ بیتی باید شامل هر مجموعه‌ی دل‌خواه از دنباله‌های ۴ بیتی باشد ولی در این سؤال ۱۴ دنباله داده شده‌اند که دنباله‌ی ۱۸ بیتی باید شامل هر یک از آن‌ها باشد. نشان دهید که بدون توجه به این‌که ۱۴ دنباله‌ی انتخاب شده، چه دنباله‌هایی هستند می‌توانید دنباله‌ی ۱۸ بیتیِ موردنظر را تشکیل دهید.

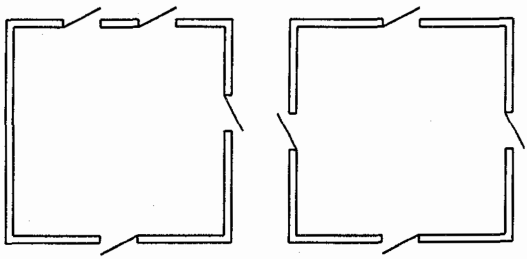
۴. نشان دهید مجموعه‌هایی از ۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتی وجود دارند که هیچ دنباله‌ای به طول ۱۷ بیت یا کم‌تر شامل همه‌ی آن‌ها نیست.

* مسئله‌ی ۳. معماری نظامی

ارتش از یک معمار خواسته است که یک ساختمان نظامی با مشخصات زیر طراحی کند. این ساختمان باید از ۴۱ اتاق مربع‌شکل تشکیل شده باشد. برای هر اتاق حداکثر می‌توان ۴ عدد در گذاشت و با توجه به این‌که نسبتِ اضلاعِ هر اتاق به ابعاد در بسیار بزرگ است، می‌توان درها را در هر محل دل‌خواه بجز گوشه‌های اتاق قرار داد. ضمناً با توجه به مشخصات این ساختمان باید بتوان از هر اتاق با عبور از حداکثر ٦ در به هر اتاق دیگر رسید. به‌عبارت دیگر باید بتوان از هر اتاق با عبور از ۵ اتاق به هر اتاق دل‌خواه رسید و در طول حرکت نباید از هیچ راه‌رو یا فضای دیگری عبور کرد (شکل ۳).

۱. آیا می‌توانید به این معمار کمک کنید و ساختمانی با مشخصات بالا طراحی نمایید؟

۲. فرض کنید اتاق‌های ساختمان به‌جای مربع به شکل مستطیل باشند به‌طوری‌که نسبت طول به عرض هر مستطیل را بتوان هر مقدار دل‌خواهی گرفت، ولی تمام مستطیل‌ها هم‌اندازه هستند. بقیه‌ی مشخصات تغییری نکرده است. در هر اتاق می‌توان حداکثر ۴ عدد در در محل‌های دل‌خواه بجز گوشه‌ها گذاشت و مستطیل‌ها را می‌توان در هر جهتی قرار داد. آیا می‌توانید ساختمانی با ۵۰ اتاق یا بیش‌تر طراحی کنید که از هر اتاق بتوان با عبور از حداکثر ۵ اتاق دیگر به هر اتاق دل‌خواه دیگر رسید؟ ساختمانی با ۶۰ اتاق یا بیشتر چه‌طور؟ (در صورتِ عدمِ موفقیت، نیازی به اثبات نیست!)

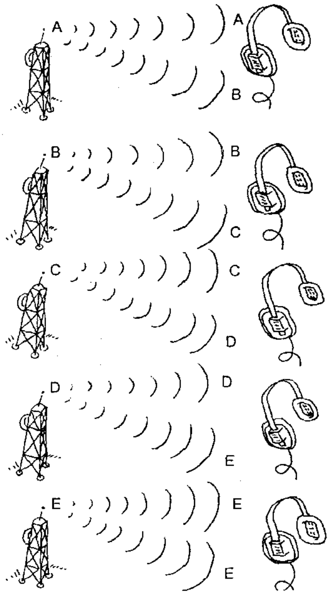


شکل ۳. اتاق‌های مربع‌شکل با حداکثر ۴ در. درها را می‌توان هر جای دل‌خواه مگر در گوشه‌ها قرار داد.

مسئله‌ی ۴. پژواک

انتقال امواج رادیویی در خشکی و دریا همیشه یکی از مسائل مهم در امور نظامی بوده و هست. مخصوصاً ارتباط بین زیردریایی‌ها و ماشین‌های جنگیِ مخصوص خشکی، یکی از مشکلات عمده‌ی ارتباطات نظامی است. چرا که انعکاس امواج رادیویی در سطح آب دریا باعث ایجاد اختلال در دریافت پیام‌های رادیویی می‌شود.

سرهنگ «اِی‌واز» متخصص ارتباطات نظامی، سال گذشته طرح جدیدی پیش‌نهاد کرد که در آن از پنج تُنِ صدایِ مختلفِ A، B، C، D و E برای انتقال پیام‌ها استفاده می‌شد. مزیت این روش نسبت به انتقال پیام از طریق مورس در این است که امکانِ انعکاس صدای



شکل ۴. علایم ارسالی ممکن است اشتباه تفسیر شوند. مثلاً یک‌بار BCCAD به‌صورت CCDBE تفسیر شد.

نقطه و اشتباه گرفتن آن با تیره در این روش وجود ندارد. این طرح به‌عنوان یک شیوه‌ی موفق در بیش‌تر ابزارهای جنگی جای‌گزین روش‌های قبلی شد. به نظر می‌رسید که هیچ مشکل خاصی وجود ندارد ولی چند ماه پیش یکی از زیردریایی‌ها پیامِ BCCAD را که به معنی «همه چیز آرام است» را به‌صورت CCDBE دریافت کرد که معنایش «آماده‌باش کامل برای جنگ» بود.

بعد از این اشتباهِ بسیار خطرناک و پس از مواخذه‌ی شدید، از سرهنگ ای‌واز خواسته شد که علت این اشتباه را بیابد و در صورت امکان آن‌را رفع کند. آزمایش‌هایی که زیرِ نظر او انجام شد نشان داد که ممکن است انعکاس امواج از سطح دریا در شرایط خاصی تغییراتی در تُن‌های فرستاده‌شده ایجاد کند، به‌طوری‌که تُن A ممکن است به‌صورت A یا B، تُن B به‌صورت B یا C، تُن C به‌صورت C یا D، تُن D به‌صورت D یا E و تُن E فقط به‌صورت E دریافت شود (شکل ۴ را ببینید).

با توجه به این‌که تعویض سیستم‌های ارتباطیِ کل ارتش هزینه‌ی بسیار زیادی در بر دارد، سرهنگ ای‌واز تصمیم گرفت از همان تُن‌های قبلی استفاده کند با این تفاوت که به‌جای هر تُن خاص از تُن دیگر یا دنباله‌ای از تُن‌ها استفاده شود به‌طوری‌که احتمال بروز اختلال از بین برود. ضمناً او دریافت که تُن B بیش‌تر از سایر تُن‌ها استفاده می‌شود. تُن‌های A، C و D تقریباً به یک اندازه کاربرد دارند و E کم‌تر از بقیه به‌کار می‌رود.

۱. دنباله‌ای از تُن‌ها را پیدا کنید که جای‌گزین هر تُن شود (مثلاً به‌جای B از AB استفاده شود) به‌طوری که احتمال اختلال در پیام‌ها از بین برود. هم‌چنین متوسط طول پیام‌ها باید کمینه باشد و از مکثِ بین تُن‌ها استفاده نشود.

۲. تعدادی از زیردریایی‌ها در شرایط خاصی به‌دلیل پژواک، برخی حروف را دو بار پیاپی دریافت می‌کنند. آیا می‌توانید نحوه‌ی کدگذاری‌ای پیدا کنید که این مشکل نیز از بین برود؟ این بار نیز باید متوسط طول پیام‌ها کمینه باشد.

* مسئله‌ی ۵. اطلاع‌رسانی هوایی

در یکی از کشورها، نیروی هوایی در ۸ شهر بندری در غرب و ۸ شهر بندری در شرق پایگاه هوایی دارد. پایگاه‌های غربی اطلاعات مربوط به هواپیماهای خارجی و دیگر اطلاعات را جمع آوری می‌کند و هر روز آن‌ها را به پایگاه‌های شرقی می‌رسانند.

در ابتدا به این صورت عمل می‌شد که یکی از فرودگاه‌ها در یکی از شهرهای بین راه به‌عنوان مرکز تبادل انتخاب می‌شد و هر روز ۸ هواپیما از ۸ پایگاه غربی به این مرکز می‌آمدند و نامه‌های حاوی اطلاعات را بین خود مبادله و برحسب شهر مقصد تقسیم می‌کردند. سپس هر هواپیما با پرواز به یک شهر شرقی نامه‌های آن شهر را به مقصد می‌رساند. پس از مدتی و به‌علت مسایل امنیتی، نیروی هوایی اعلام کرد که هر روز در یک فرودگاه بیش از ۲ هواپیما نباید فرود بیاید. به‌همین دلیل دیگر نمی‌شود از یک فرودگاه مرکزی استفاده کرد و روش دیگری برای توزیع نامه‌ها مورد نیاز است.

برای این‌که این شرط امنیتی رعایت شود، تصمیم گرفته‌شد که هواپیماها در بعضی از فرودگاه‌های شهرهای میان راه توقف کنند تا بتوانند نامه‌ها را با هم مبادله کنند (در هر فرودگاه از جمله فرودگاه‌های مقصد در هر روز فقط ۲ هواپیما می‌تواند فرود بیاید). فرود آمدن هواپیماها وقت زیادی می‌گیرد و بنابراین برای کم کردن زمان ارسال پیام‌ها باید تعداد دفعات توقف هواپیماها را کم کرد.

آیا می‌توان فقط با استفاده از ۳ فرود برای هر هواپیما و با رعایت شرط امنیتی فوق (فرود حداکثر دو هواپیما در یک فرودگاه) همه‌ی نامه‌ها را به شهرهای شرقی رساند؟ چگونه؟ (فرض کنید تعداد فرودگاه‌های میانی قابل استفاده بسیار زیاد است و ظرفیت هر هواپیما نیز محدودیت ندارد.)

* مسئله‌ی ٦. جاسوسان

پس از یک‌سری عملیات خراب‌کاری و بمب‌گذاری در مناطق حساس نظامی که گمان می‌رفت توسط یک گروه خراب‌کارِ خارجی انجام شده است، پلیس شروع به جمع‌آوری اطلاعاتی در مورد نحوه‌ی رسیدنِ اطلاعاتِ نظامی به گروه بمب‌گذاران کرد. طی این تحقیقات، پلیس موفق شد ۷ نفر را که به‌احتمال قوی جزء جاسوسان و خبرچینان گروه خراب‌کاری بودند دستگیر کند.

این هفت نفر که آن‌ها را A، B، C، D، E، F و G می‌نامیم، بازجویی شدند.

- A ادعا می‌کرد که همه‌ی ٦ نفر بقیه را قبلاً دیده است.
- از بقیه‌ی افراد، B می‌گفت ۵ نفر،
- C ادعا می‌کرد ۴ نفر و
- D ادعا می کرد ۳ نفر را قبلاً دیده است.
- E و F ادعا می‌کردند قبلاً دو نفر را دیده‌اند.
- G هم می‌گفت که از بقیه‌ی افراد فقط یک نفر را قبلاً دیده است.

هیچ‌کدام از این افراد در مورد اشخاصی که دیده‌اند هیچ اطلاعات دیگری در اختیار پلیس قرار ندادند. ضمناً پلیس معتقد است که هیچ‌کدام از این ۷ نفر تعداد افرادی را که قبلاً دیده است بیش از حد واقعی نگفته است، زیرا در آن صورت ممکن بود در ادامه بازجویی برای آن‌ها مشکلاتی در پاسخ دادن به سؤالات پیش بیاید. یعنی اگر کسی دروغ گفته باشد، تعداد افرادی را که دیده است کم‌تر از واقعیت گزارش داده است.

پلیس در حین بازجویی از دستگاه دروغ‌سنج استفاده کرد و به‌علت دقت بالای این دستگاه فرض شد که هیچ‌یک از ۷ نفر دروغ نگفته است؛ ولی یکی از مأمورین پلیس ادعا کرد که ممکن نیست جواب همگی این ۷ نفر راست باشد.

۱. به نظر شما این مأمور چگونه فهمیده است که همه‌ی آن‌ها راست نگفته‌اند؟

بعد از این، پلیس به این نتیجه رسید که حداکثر ۱ نفر دروغ گفته است. هم‌چنین در بازجویی‌های مجدد، پلیس به این نتیجه رسید که F حتماً راست گفته است.

۲. به نظرِ شما با این فرض که F راست گفته است و فقط یک نفر دروغ‌گو وجود دارد، چه کسانی حتماً راست‌گو هستند؟

مسئله‌ی ۷. جاسوس دوجانبه

دو نفر جاسوس که برای یک شخصیت سیاسی کار می‌کردند در آخرین نامه‌شان به ۴ خبرِ X، Y، Z و W اشاره کرده بودند ولی متن نامه‌ی این دو جاسوس کمی مبهم بود و در نامه‌ی آن‌ها تناقضاتی به چشم می‌خورد.

چندی پیش که سیاست‌مدار موردنظر ما در دفترِ کار خودش نشسته و مشغول کارهای خویش بود، یکی دیگر از جاسوسانِ وی با شتاب وارد اتاق شد و در وسط اتاق ناگهان نقش بر زمین شد. لباس‌های جاسوس کاملاً خون‌آلود بود و به‌زحمت صحبت می‌کرد. او در آخرین لحظات زندگی‌اش فقط توانست این‌را بگوید که یکی از دو جاسوس مورد نظر، جاسوسِ دوجانبه است، ولی فرصت نکرد که اسم او را بگوید و درگذشت.

بعد از این حادثه، سیاست‌مدار تصمیم گرفت یک‌بار دیگر نامه‌های دو جاسوس خودش را بررسی کند:

جاسوسِ اول نوشته بود:

دقیقاً یکی از خبرهای W، X و Y درست است.
دقیقاً یکی از خبرهای X، Y و Z درست است.
دقیقاً یکی از خبرهای W و Z نادرست است.

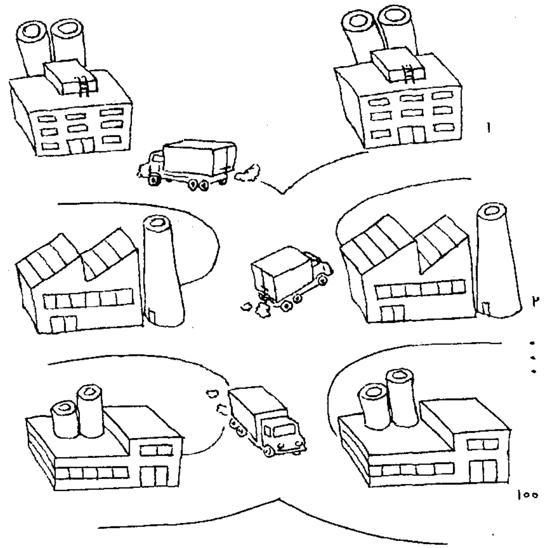
و نامه‌ی جاسوسِ دوم به‌این صورت بود:

دقیقاً یکی از خبرهای W، X و Y درست است.
دقیقاً یکی از خبرهای X، Y و Z درست است.
دقیقاً یکی از خبرهای W، Y و Z درست است.

به‌نظر شما کدام‌یک از جاسوسان دروغ‌گو و کدام‌یک راست‌گوست؟ هم‌چنین کدام‌یک از خبرهای X، Y، Z و W درست است؟ ادعای خود را اثبات کنید.

* مسئله‌ی ۸. صد راکت در صد روز

پس از انفجار یک سفینه در فضا و شکست چند برنامه‌ی مهم فضایی، دولت اجازه‌ی سرمایه‌گذاری شرکت‌های خصوصی را در تعدادی از این پروژه‌ها صادر کرد. شرکت «یوفوس راکِتس» یکی از این شرکت‌های خصوصی است که به‌تازگی تأسیس شده و قرار است به‌عنوان



شکل ۵. کامیون‌ها به چه ترتیبی باید قطعات را جابه‌جا کنند؟

اولین اقدام ۱۰۰ عدد راکت تولید کند. در طرحِ این شرکت هر راکت از ۱۰۰ قطعه تشکیل شده است و هر قطعه‌ی آن در کارخانه‌ی مجزایی تولید می‌شود. قطعات پس از تولید باید بین این کارخانه‌ها توزیع شوند، به‌طوری‌که از هر نوع قطعه یک عدد به هر کارخانه برسد. هر کارخانه پس از دریافت قطعات می‌تواند یکی از راکت‌ها را سر هم کند.

طبق قرارداد، این شرکت باید راکت‌ها را طی صد روز تحویل دهد. بنابراین با توجه به محدود بودن وقت، باید سرعت انتقال قطعات بین کارخانه‌ها زیاد باشد. ولی چون قطعات ساخته‌شده بسیار آسیب‌پذیرند، کامیون‌ها باید خیلی آهسته حرکت کنند. برای انتقال قطعات، این شرکت ۱۰۰ کامیون باری کرایه کرده است. هر کامیون می‌تواند تا ۱۰۰ قطعه‌ی دل‌خواه را بار کند (قطعات کوچک و تقریباً هم اندازه‌اند). حرکت بین هر دو کارخانه ۵ ساعت طول می‌کشد. حرکت کامیون‌ها در شروع کار، از پایانه‌ی کامیون‌ها تا هر یک از کارخانه‌ها نیز ۵ ساعت طول می‌کشد. هم‌چنین می‌دانیم که هر کارخانه فقط دو عدد جرثقیل دارد، بنابراین در هر لحظه حداکثر ممکن است دو کامیون به‌طور هم‌زمان در یک کارخانه بار بگیرند و یا بارشان را تخلیه کنند.

ابتدا شرکت درنظر داشت طوری برنامه‌ریزی کند که هر کامیون ۱۰۰ قطعه از یک نوع را بین کارخانه‌ها توزیع کند که این کار حدود ۵۰۰ ساعت وقت لازم داشت. ولی تولید قطعات کمی بیش‌تر از برنامه‌ی اولیه طول کشید و لذا شرکت باید زمان انتقال قطعات بین کارخانه‌ها را کاهش دهد.

۱. آیا می‌توانید برنامه‌ای برای حرکت کامیون‌ها بین کارخانه‌ها طرح کنید که انتقال قطعات فقط ۱۰۰ ساعت طول بکشد؟
۲. آیا می‌توان این کار را در ۹۵ ساعت انجام داد؟ چه‌طور؟
۳. اگر شرکت بخواهد انتقال قطعات فقط ۴۰ ساعت طول بکشد، حداقل به چند کامیون نیاز دارد؟ فرض کنید که در این حالت، ۲۰ کامیون می‌توانند هم‌زمان در یک کارخانه بارگیری یا تخلیه کنند.

* مسئله‌ی ۹. مونتاژ موشک

یک کارخانه‌ی ساخت موشک شامل ۱۰ قسمت است که در هر قسمت آن یکی از ۱۰ جزء موشک به نام‌های A، B، C، D، E، F، G، H، I و J ساخته می‌شود. برای ساخت هریک از این اجزاء تعدادی از اجزای دیگر باید به آن قسمت تحویل داده شوند. برای انتقال محصولات هر قسمت به قسمت دیگر از ریل استفاده می‌شود. هر قسمت یک ایستگاه حمل قطعات دارد و ریل‌ها ایستگاه‌ها را به‌هم مرتبط می‌کند. ایستگاه آخر محل حمل موشک به خارج از کارخانه است. بدیهی است که نباید هیچ دو ریلی با هم تقاطع داشته باشند، زیرا در این صورت هم خطرِ تصادف وجود دارد و برای جلوگیری از تصادف، به‌ناچار سرعت تولید بسیار پایین می‌آید.

اجزاِی این موشک به این صورت با هم مرتبط هستند:

برای ساختن C به A و B نیاز است. در نتیجه باید یک ریل از A و یک ریل از B به C بیاید.
برای ساختن D به C و F نیاز است.
برای ساختن E به B و D نیاز است.
برای ساختن G به E و A نیاز است.
برای ساختن H به B و G نیاز است.
برای ساختن I به F و H نیاز است.
برای ساختن J به B و I نیاز است.
J موشکِ آماده است و به ایستگاه آخر منتقل می‌شود.

۱. آیا می‌توان ایستگاه‌های ساختِ اجزاِی موشک را طوری قرار داد که ریل‌ها تقاطع پیدا نکنند؟ چگونه؟

۲. فرض می‌کنیم که آن بخش از موشک که در ایستگاه D تولید می‌شود هم به‌هم‌راه J باید برای بهره‌برداری به ایستگاه آخر منتقل شود. یعنی نیاز به یک ریل از D به ایستگاه آخر داریم. هم‌چنین فرض کنید می‌توان هرکدام از ایستگاه‌های A، B و C را به‌هر تعداد که بخواهیم می‌توانیم دوباره بسازیم ولی ساختِ هر ایستگاه ۵ میلیون دلار هزینه دارد. با کم‌ترین هزینه این ایستگاه‌ها را طوری قرار دهید که هیچ ۲ ریلی متقاطع نباشند و ۲ ریل از J و D به ایستگاه خروجی بروند.

فصل ۲

معماهای پلیسی

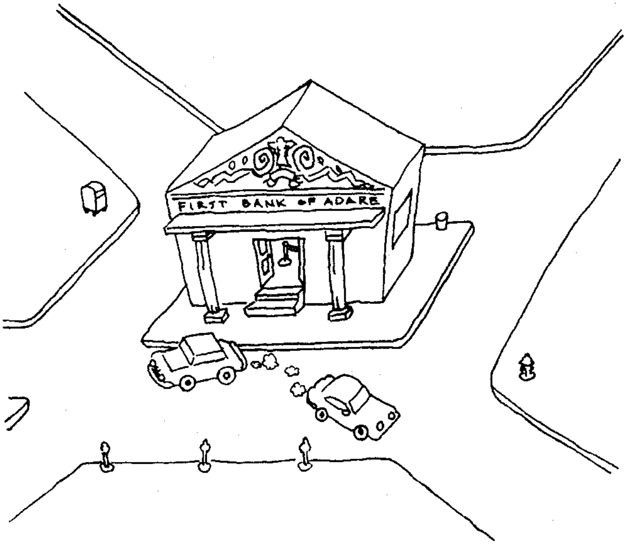
مسئله‌ی ۱۰. گریز

یک گروه از دزدان حرفه‌ای با دو اتومبیل سواری دست به سرقت مسلحانه از یکی از بانک‌های شهرِ «یورد» زدند و چند شمشِ طلا به ارزش ۶۰ میلیون دلار را ربودند. دزدان بعد از ربودن طلاها به دو گروه تقسیم شدند و هر گروه از یکی از ۱۱ مسیر منتهی به بانک گریختند (شکل ۶ صفحه‌ی بعد).

بعد از این سرقت بی‌سابقه، پلیس در سطحِ وسیعی از کسانی که در هنگام دزدی از بانک در محلِ حادثه حضور داشتند شروع به جمع‌آوری اطلاعات کرد، و برای این‌که بتواند دزدان را دستگیر کند جایزه‌ای برای هرکس که یکی از دو مسیر فرار را به‌درستی گزارش کند تعیین کرد. هم‌چنین پلیس جایزه‌ی ویژه‌ای برای کسی که هر دو مسیر فرار را درست نشان دهد درنظر گرفت و اعلام کرد. مشکل این‌جا بود که بجز عده‌ی معدودی تقریباً تمامی شاهدانِ حادثه‌ی سرقت از بانک به امید دریافت جایزه‌ی ویژه، مسیر دیگری را نیز بجز مسیری که مطمئن بودند به‌صورتِ تصادفی گزارش دادند و فقط تعداد کمی تنها به یک مسیر اشاره کردند.

شما به پلیس کمک کنید تا تعداد گزارش‌های مورد نیاز برای کشف حقیقت را به‌دست آورد.

۱. پلیس در بدترین حالت باید حداکثر چند گزارش متفاوت دریافت کند تا بتواند دو مسیر فرار دزدان را شناسایی کند؟ فرض بر این است که هر گزارش حداقل به یک مسیر درست اشاره می‌کند. توجه کنید که تعداد



شکل ٦. یازده مسیرِ منتهی به بانک شهر «یورد»

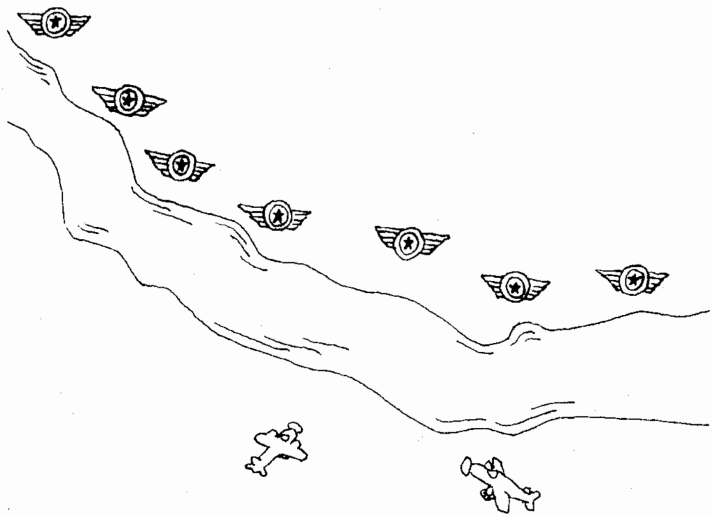
گزارش متفاوت مورد سؤال است نه تعداد افراد گزارش دهنده.

۲. پلیس در به‌ترین حالت حداقل با چند تا از گزارش‌های متفاوتی که دریافت کرده است می‌تواند ثابت کند که دزدان از دو مسیر مشخص فرار کرده‌اند؟ نشان دهید که کم‌تر از این تعداد گزارش کافی نیست.

مسئله‌ی ۱۱. مبارزه با قاچاق

گروهی از قاچاق‌چیان بین‌المللی برای منتقل کردن مواد مخدر به کشور «تاراک» از دو هواپیما استفاده می‌کنند. این هواپیماها در مسیر خود حتماً باید از رودخانه‌ی «ریو» عبور کنند. دولت «تاراک» برای مبارزه با قاچاق مواد مخدر، ۷ فرودگاه با فاصله‌های مساوی از هم در ساحل شمالی رودخانه احداث کرده است. هر فرودگاه منطقه‌ای را که فاصله‌ی هر نقطه‌اش تا این فرودگاه از فاصله آن نقطه تا فرودگاه‌های دیگر کم‌تر است تحت کنترل خود دارد. در صورت لزوم هواپیماهای یک منطقه می‌توانند برای کمک به منطقه‌های دیگر بروند (شکل ۷ را ببینید).

هواپیماهای مخصوص قاچاق مواد مخدر در ارتفاع بسیار پایین پرواز می‌کنند و در نتیجه احتمال تشخیص آن‌ها با رادار بسیار کم است. بعد از ورود هواپیمای قاچاق‌چیان به منطقه‌ی



شکل ۷. هفت فرودگاه به‌طور یک‌نواخت در ساحل شمالی «ریو» قرار دارند. هر فرودگاه ناحیه‌ی مجاورش را کنترل می‌کند. هواپیماهای جت باید در کدام فرودگاه‌ها قرار گیرند؟

تحت کنترل هر فرودگاه، حدوداً ۸ دقیقه طول می‌کشد تا رادار مرکزی منطقه آن‌را تشخیص دهد. هر هواپیمای حامل مواد مخدر می‌تواند از دست یک هواپیمای جت فرار کند ولی ۲ هواپیمای جت به‌راحتی آن را تحت کنترل در می‌آورند و مجبور به فرود می‌کنند. همین‌طور ۲ هواپیمای قاچاق‌چیان می‌توانند از دست ۲ هواپیمای جت فرار کنند ولی ۳ هواپیمای جت می‌توانند آن‌ها را کنترل و وادار به فرودآمدن کنند.

واضح است که با استفاده از ۳ هواپیمای جت در هر فرودگاه (مجموعاً با ۲۱ هواپیما) می‌توان امکان هرگونه جابه‌جایی مواد مخدر را از بین برد، ولی تخصیص این تعداد هواپیما به این منطقه باعث افزایش احتمال قاچاق در سایر مرزهای کشور می‌شود. هم‌چنین عبور هر هواپیمای قاچاق‌چیان از هر منطقه ۲۴ دقیقه طول می‌کشد. ضمناً هواپیماهای مخصوص قاچاق از قبل مسیر حرکت خود را مشخص می‌کنند و تحت هیچ شرایطی آن را تغییر نمی‌دهند. عبور هر هواپیمای جت از فرودگاه اصلی‌اش به منطقه‌های مجاور کم‌تر از ۸ دقیقه طول می‌کشد.

۱. نحوه‌ی استقرار هواپیماها در فرودگاه‌ها را پیدا کنید که تعدادِ هواپیماهای موردِ نیاز کم‌تر از ۱۰ هواپیما باشد.

۲. ثابت کنید تعداد هواپیماهایی که در قسمتِ قبل به‌دست آورده‌اید کمینه است.

مسئله‌ی ۱۲. اداره‌ی پستِ اوکایدو

«آدیست»ها، یک گروهِ سیاسی مخفی در ژاپن هستند که به‌صورت زیرگروه‌هایی در نقاط مختلف آن کشور فعالیت می‌کنند. یک زیرگروهِ ۱۷ نفری از این افراد در جزیره‌ی «اوکایدو» مشغول فعالیت هستند. افراد این گروه برای ارسال پیام‌ها به یک‌دیگر از نامه استفاده می‌کنند.

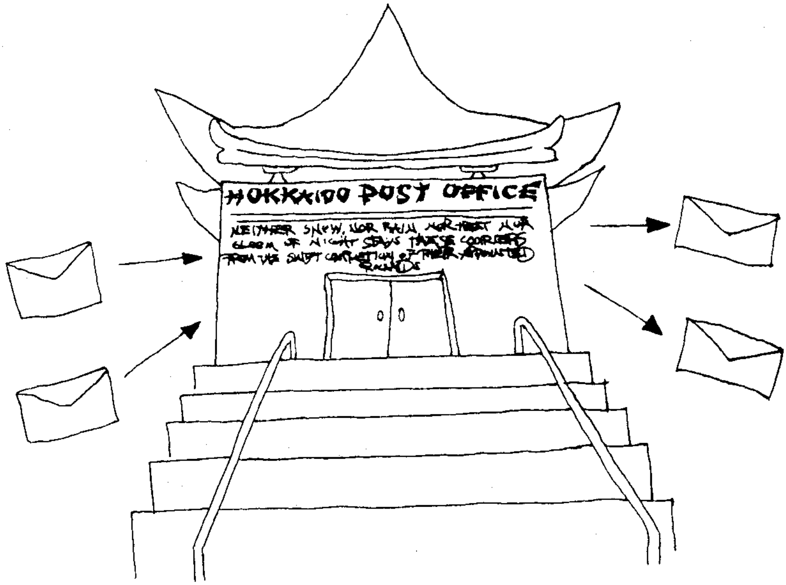
گاهی لازم می‌شود که هر عضو نظر خود را در مورد یک موضوعِ محرمانه کتباً به‌اطلاع همه‌ی اعضای گروه برساند و این‌کار را با ارسال ۱۶ نامه‌ی یکسان برای دیگر اعضای زیرگروه انجام می‌دهد.

نامه‌ها در این جزیره معمولاً طی یک روز به‌مقصد می‌رسند ولی گاهی اتفاق می‌افتد که رسیدنِ یک نامه بیش‌تر از یک روز طول بکشد. هم‌چنین نامه‌های ارسال شده لزوماً به‌همان ترتیب به‌دست گیرنده‌ها نمی‌رسند. مثلاً اگر A دو نامه را، یکی در روز اول و دیگری در روز دوم، برای B بفرستد، ممکن است نامه‌ی دوم زودتر از نامه‌ی اول به B برسد.

این نامه‌ها از طریق تنها اداره‌ی پست محل به مقصد می‌رسند ولی به‌دلیل اهمیت نظامیِ منطقه‌ی اوکایدو، گاهی نامه‌ها از طرف دولت بازرسی می‌شوند: به این صورت که گاهی یک بازرس از طرف دولت به منطقه می‌آید و نامه‌های موجود در اداره‌ی پست را می‌خواند و برمی‌گردد.

با توجه به مشکل بازرسی، اعضای گروه آدیست‌ها از روشِ رمزگذاریِ خاصی در ارسال اطلاعات استفاده می‌کنند به‌طوری‌که تنها اگر کسی به همه‌ی ۱۷ نامه از ۱۷ عضوِ گروه دست‌رسی داشته باشد، می‌تواند از محتوای موضوع مورد بحث که بسیار سری است مطلع شود. این بدان معنی است که بازرس حتا اگر ۱۶ نامه از ۱۶ نفر از اعضای گروه را در یک لحظه در اختیار داشته باشد، نمی‌تواند به مفهوم آن‌ها پی ببرد. مثلاً در یک زیرگروهِ ۲ نفره، هرگاه A به B نامه ارسال کند و B فقط پس از دریافت نامه‌ی A به او نامه بفرستد در هیچ لحظه‌ای هر دو نامه‌ی A و B در اداره‌ی پست نخواهد بود و در نتیجه بازرس با یک‌بار بازرسی نامه‌ها هرگز به مفهوم پیام‌های ارسال شده پی نخواهد برد.

در گروه ۱۷ نفری آدیست‌ها می‌توان یک نفر را به‌عنوان شروع کننده‌ی ارسال پیام‌ها تعیین کرد. ضمناً به دلیل قراردادِ خاصی که اعضای گروه از آن برای ارسال پیام استفاده می‌کنند، هیچ‌یک از اعضای گروه نمی‌تواند نامه‌ای به‌صورت «من نامه‌های ... را دریافت کرده‌ام» به بقیه بفرستند، ولی می‌تواند پیام «همه چیز بر وفق مراد است» را به فرد دل‌خواهی بفرستد. (توجه کنید که هر عضو گروه باید نامه‌ی حاوی پیامِ خودش را به تمام ۱۶ نفر دیگر بفرستد مگر در مورد نامه‌های حاوی پیامِ «همه چیز بر وفق مراد است» که می‌توان آن‌ها را



شکل ۸. بازرس دولتی کی باید نامه‌ها را در اداره‌ی پست بازرسی کند؟

به‌صورت انتخابی ارسال کرد.) ضمناً همیشه فرد مشخصی از اعضای گروه ارسال نامه‌ها را آغاز می‌کند.

۱. بافرض این‌که بازرس هر ماه فقط یک بار به اداره‌ی پست خواهد آمد، می‌خواهیم روشی برای ارسال نامه‌ها طراحی کنیم که اگر هر نامه در یک روز به مقصد برسد، طی سه روز یا کم‌تر همه‌ی پیام‌ها منتقل شوند. یعنی در انتهای روز سوم هر کس ۱۶ نامه از اعضای دیگر گروه دریافت کند، بدون آن‌که احتمال فاش شدن اسرار نامه وجود داشته باشد. امنیت این روش نباید به این‌که نامه‌ها در یک روز به مقصد می‌رسند بستگی داشته باشد. یعنی حتی اگر رسیدن نامه بیش از یک روز طول بکشد بازرس نباید به مفهوم نامه‌ها پی ببرد. در این حالت فرض کنید هر عضو گروه ۱۷ پاکت نامه در اختیار دارد.

۲. فرض کنید طی مدت خاصی بازرس ممکن است دوبار برای بازرسیِ اداره‌ی پست به اوکاییدو بیاید. روشی برای ارسال پیام‌ها پیدا کنید که در این حالت نیز بازرس را ناکام بگذارد. با شرط رسیدن نامه‌ها به مقصد در یک روز، روش شما نباید بیش از پنج روز طول بکشد و نباید به بازرس

اجازه دهد حتی با دوبار بازرسی نامه‌ها تمامی نامه‌ها را ببیند. در این حالت نیز فرض کنید که هر عضو گروه ۱۷ پاکت نامه در اختیار دارد.

۳. این‌بار فرض کنید بازرس دوبار برای بازرسی اداره‌ی پست خواهد آمد و ضمناً می‌تواند مفهوم پیام‌ها را فقط با داشتن ۱۰ نامه درک کند. اگر هر عضو گروه ۳۵ پاکت نامه در اختیار داشته باشد، روشی برای ارسال پیام‌ها پیدا کنید که با شرطِ رسیدن نامه‌ها به مقصد در یک روز، در ۸ روز یا کم‌تر همه‌ی پیام‌ها منتقل شوند. در این حالت نیز بدون توجه به زمانی که رسیدن هر نامه طول می‌کشد (یک روز یا بیش‌تر) بازرس نباید به محتوای آن پی ببرد.

۴. فرض کنید به‌جای یک اداره‌ی پست، دو اداره‌ی جدا از هم در جزیره وجود داشته باشد، و بازرس می‌تواند دو بار از یکی از اداره‌های پست و یا یک بار از اداره‌ی اول و یک بار از اداره‌ی دوم بازرسی کند و او می‌تواند با دیدن ۱۰ عدد از نامه‌ها به مفهوم آن‌ها پی ببرد. هم‌چنین فرض کنید که اعضای گروه می‌توانند نامه‌هایشان را به‌طور دل‌خواه از طریق هر یک از اداره‌های پست به مقصد ارسال کنند و نیز این‌که هر عضو ۳۵ پاکت نامه در اختیار دارد. روشی برای ارسال نامه‌ها پیدا کنید که اگر هر نامه طی یک روز به مقصد برسد، در ۴۰ روز یا کم‌تر پیام منتقل شود، ولی بدون توجه به زمان رسیدن نامه بازرس نتواند به محتوای آن پی ببرد.

مسئله‌ی ۱۳. اعتصاب

«اکتو پلاگو» نام ۸ جزیره‌ی مسکونی کوچک در دریای مدیترانه است که ارتباط بین‌شان با کمک ۸ کشتی کوچک مسافربری برقرار می‌شود. این کشتی‌ها کوچک و قدیمی هستند و به همین دلیل نمی‌توانند زیاد از جزیره‌ها دور شوند. به همین دلیل کشتی‌ها هر یک روی یکی از اضلاع هشت‌ضلعی (تقریباً منتظمی) که جزیره‌ها تشکیل داده‌اند حرکت رفت و برگشت انجام می‌دهند (شکل ۹ را ببینید.) به این صورت که هر کشتی بین یک جزیره‌ی مشخص و جزیره‌ی بعدی دائماً رفت و آمد می‌کند و مسافر حمل می‌نماید.

دولت محلی کرایه‌ی رفت (بدون برگشت) را برای هر مسافر ۱ دلار تعیین کرده است. از آن‌جا که جمع‌آوری کرایه از مسافران بسیار وقت‌گیر و خسته‌کننده است کشتی‌رانان خواستار شدند که کرایه‌ی رفت و برگشت به‌صورت یک‌جا و در یکی از مسیرهای رفت یا برگشت

شکل ۹. کرایه باید به چه ترتیب دریافت شود تا شرایط ذکر شده در صورت مسئله برقرار شود؟

دریافت شود. اما دولت با این کار مخالف بود، چون ممکن بود از درآمدش کم شود، یا در برخی موارد به‌ضرر مسافران تمام شود.

توجه کنید که اگر مثلاً کشتی‌ها همگی هنگام حرکت در جهت عقربه‌های ساعت کرایه دریافت کنند، ۱ نفر می‌تواند با حرکت در جهت عکس عقربه‌های ساعت به‌صورت مجانی تمامی ۸ جزیره را بگردد.

به دلیل مخالفتِ دولت محلی با این امر، کشتی‌رانان دست به اعتصاب زدند و شعارشان این بود: «یک‌طرفه یا هیچ‌طرفه.» درخواست آن‌ها این بود که دولت برای دریافت کرایه‌ی کشتی‌ها طوری برنامه‌ریزی کند که اولاً: آن‌ها در هر بار رفت و برگشت فقط یک بار کرایه دریافت کنند (۲ دلار)، و ثانیاً: اگر کسی از یکی از جزیره‌ها حرکت کند و بعد از مدتی سفر دوباره به همان جزیره برگردد به‌همان اندازه کرایه پرداخت کند که قبلاً پرداخت می‌کرد. فرض کنید که هر فرد پس از یک سری مسافرت دوباره به جزیره‌ی اولیه‌اش بازخواهد گشت.

۱. برنامه‌ای برای دریافت کرایه با شرایط بالا تهیه کنید.

مشکلی که وجود داشت طولانی بودن مسافرت‌ها بود. کشتی‌ها به‌دلیل فرسودگی فقط می‌توانستند بین دو جزیره‌ی مجاور رفت و آمد کنند و هر سفر هم یک ساعت طول می‌کشید.

بنابراین برخی از سفرها ۷ ساعت به‌طول می‌انجامید و مسافر بایستی چندین‌بار از کشتی‌ها سوار و پیاده می‌شد. برای حل این مشکل دولت محلی دو کشتی جدید مسافربری تهیه کرد که می‌توانند بین هر دو جزیره‌ی دل‌خواه حرکت کنند. این کشتی‌ها باید مطابق برنامه طوری حرکت کنند که یک مسافر بتواند بین هر دو جزیره‌ی دل‌خواه با حداکثر ۳ بار سوار شدن به کشتی مسافرت کند و ضمناً دیگر شرایط مورد نظر برقرار شود.

۲. برای هر کشتی دو جزیره بیابید که این کشتی بین آن‌ها رفت و آمد کند و شرایط گفته‌شده نیز رعایت شود.

مسئله‌ی ۱۴. سم شناسی

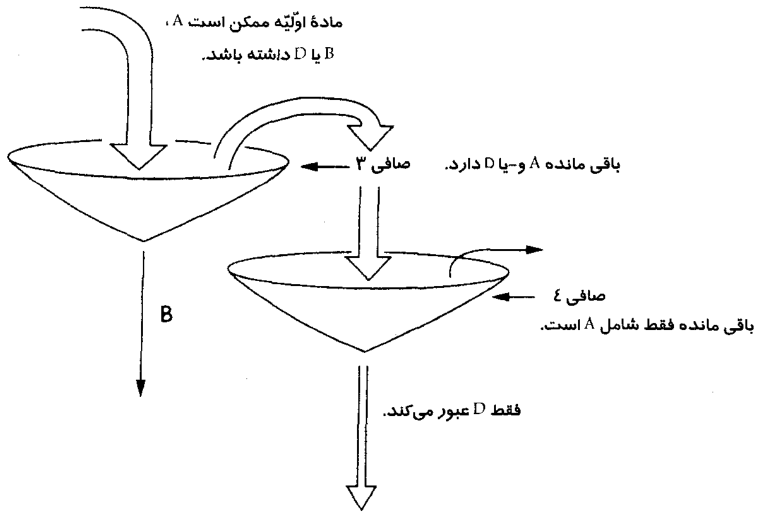
پزشک قانونی در بررسی اولیه‌ی جسد فردی که احتمال می‌رفت به قتل رسیده باشد متوجه شد که این شخص احتمالاً با یکی یا ترکیبی از آرسنیک، نیترات بیسموت، کلرید کادمیوم، دیپیروپریونیتریل یا آرسنات اتیل که آن‌ها را به‌ترتیب A، B، C، D و E می‌نامیم به قتل رسیده است. می‌دانیم هرگاه A، B و C با هم در یک محیط مایع وجود داشته باشند و تعداد مولکول‌های A از B و تعداد مولکول‌های B از C کم‌تر باشد، ترکیب ABC تا تمام شدن همه‌ی مولکول‌های A به‌وجود می‌آید. هم‌چنین وجود B و C با هم در یک محیط مایع باعث ایجاد BC می‌شود.

این پزشک باید ترکیب تشکیل‌دهنده‌ی سم را برای عرضه در دادگاه تعیین کند. او پنج نوع صافی در اختیار دارد:

صافی اول فقط به B، C و D اجازه‌ی عبور می‌دهد و بقیه‌ی مواد یعنی A و E یا ترکیبات ABC و BC نمی‌توانند از آن عبور کنند.
صافی دوم فقط به A، B، C و BC اجازه‌ی عبور می‌دهد.
صافی سوم فقط B،
صافی چهارم فقط B، D، E
و صافی پنجم فقط A و D را از خود عبور می‌دهد.

برای مثال اگر ترکیب اولیه فقط از A، B یا D تشکیل شده باشد، به کمک صافی‌های ۳ و ۴ حداکثر با دوبار استفاده از صافی، نوع ترکیب مشخص می‌شود (شکل ۱۰ را ببینید).

زمان عبور مواد از هر صافی تقریباً ۱ هفته است، و این پزشک از صافی‌های نوع ۱ تا ۴ هر کدام ۱ عدد و از صافی شماره‌ی ۵ دو عدد در اختیار دارد.



شکل ۱۰. راه‌حل برای مثال بیان شده در متن مسئله.

۱. پزشک قانونی چگونه می‌تواند در مدت ۳ هفته به کمک صافی‌هایی که در اختیار دارد محتویات و ترکیب سم را تعیین کند؟

۲. اگر پزشک قانونی مطمئن باشد که هیچ ترکیب ABC و BC در سم یافت شده وجود ندارد، آیا می‌تواند در یک هفته نوع سم را تشخیص دهد؟

۳. با فرض این‌که فقط یکی از A، B، C، D یا E در سم موردنظر وجود دارد، آزمایشی به کمک ۳ صافی از ۵ نوع صافی ترتیب دهید که نوع سم را مشخص کند.

۴. باز با فرض عدم وجود ABC و BC در ترکیب سم و به کمک تمام صافی‌های موجود آزمایشی برای تعیین نوع ترکیب سم ترتیب دهید.

مسئله‌ی ۱۵. مبارزه با توسی

دانش‌مندانِ مرکز کنترل بیماری در آتلانتا به‌تازگی موفق به کشف واکسنی برای مبارزه با ویروس «توسی» شده‌اند. تولید این واکسن بسیار پرهزینه است و به همین دلیل در مرکز کنترل بیماری سعی بر این است که در هر مورد نحوه‌ی انتقال ویروس‌ها در اشخاص مختلف تعیین شود تا مجبور به استفاده از واکسن زیادی نباشند.

شکل ۱۱. چه کسی اولین بار حامل ویروس بوده و چه کسی از بیماری مصون است؟

ویروس «توسی» بسیار مسری است و با کوچک‌ترین تماس منتقل می‌شود ولی کلاً افراد را می‌توان به چهار دسته تقسیم کرد:

۱. بیمار: کسی که بیماری و عوارض آن‌را دارد و مسری است.

۲. ناقل: کسی که حامل ویروس است ولی هنوز عوارض زیادی از بیماری در او ظاهر نشده است. این فرد نیز مسری است.

۳. مصون: کسی که ویروس را ندارد و مسری نیست، هرچند ممکن است در معرض ویروس قرار گرفته باشد.

۴. مستعد: کسی که هرگز در معرض ویروس قرار نگرفته‌اند ولی در صورت تماس با آن ممکن است دچار بیماری شود.

در مورد خاصی تماس افراد به‌صورت زیر بوده است:

- مری و کیت هم‌دیگر را شنبه ملاقات کرده‌اند.
- باب و آلیس هم‌دیگر را روز شنبه ملاقات کرده‌اند.
- لی، آلن را روز شنبه ملاقات کرده است.
- باب، مری را یک‌شنبه ملاقات کرده است.

- مری، تِد را یک‌شنبه بعد از ملاقاتش با باب دیده است.
- آلیس و کیت هم‌دیگر را یک‌شنبه ملاقات کرده‌اند.
- کیت، لی را دوشنبه ملاقات کرده است.
- لی دوشنبه بعد از ملاقات با کیت، باب را ملاقات کرده است. و بعداً در همان روز
- آلن، تد را ملاقات کرده است.
- سه شنبه لی، مری را ملاقات کرده و سپس لی در همان روز باب را ملاقات کرده است.
- چهارشنبه لی و آلیس هم‌دیگر را ملاقات کرده‌اند و پنج‌شنبه نیز تِد و آلیس هم‌دیگر را ملاقات کرده‌اند.

در انتها همه بجز باب و کیت ویروس را گرفته‌اند هرچند که هنوز دچار بیماری نشده‌اند. بین باب و کیت یکی مصون است و دیگری در معرض بیماری قرار نگرفته است، ولی چون در بیمارستان نمونه‌های خونی آن دو جابه‌جا شده‌اند مشخص نیست که کدام‌یک مصون است.

با فرض این‌که عامل شروع بیماری یک نفر بوده، او کیست؟ از باب و کیت کدام‌یک مصون است؟

فصل ۳

بازی یا ریاضی

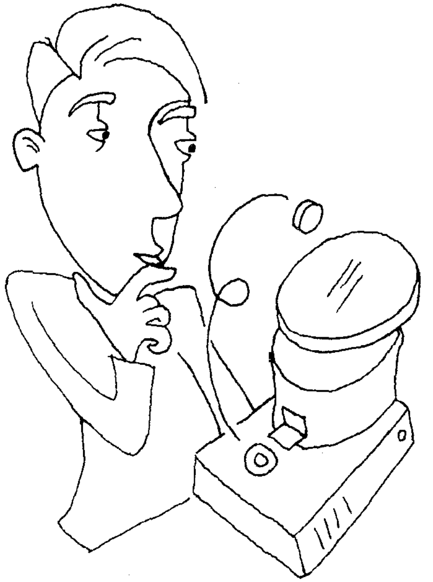
* مسئله‌ی ۱۶. آزمون ریاضی یا اردوی تفریحی

گروهی از دانش‌آموزان یک دبیرستان به‌هم‌راه چند نفر از دبیران خود عازم اردوی یک‌روزه شدند. هنگام بازگشت از اردو، در داخل اتوبوس یکی از دبیرانِ ریاضی برای سرگرم‌کردن دانش‌آموزان و رفع خستگی آن‌ها مسئله‌ای را به شرحِ زیر مطرح کرد:

«دو نفر به نام‌های A و B با یک سکه مشغول بازی هستند. A یک طرف سکه را انتخاب می‌کند و آن را A می‌نامد و B طرف دیگر را انتخاب می‌کند و آن را B می‌نامد. در این بازی سکه ۱۱ بار پرتاب می‌شود. A برنده است تنها اگر پس از هر پرتاب سکه، تعداد A ها (از ابتدای بازی) بیش‌تر از تعداد B ها باشد، یعنی اگر پس از یکی از پرتاب‌ها، تعداد B ها بیش‌تر یا مساوی تعداد A ها شود، در آن‌صورت B برنده است. A در صورت برنده شدن ۷ امتیاز و B در صورت برنده شدن ۱ امتیاز کسب می‌کند. اگر فرض کنیم برای پرتاب سکه از وسیله‌ای استفاده شود که احتمال آمدن هرکدام از A یا B دقیقاً برابر باشد، امکان برنده شدن کدام‌یک بیش‌تر است؟»

یکی از دانش‌آموزان گفت: «واضح است که اگر A بخواهد برنده شود باید سکه‌های اول و دوم هر دو A بیایند. هم‌چنین چون تعداد کل حالت‌های ممکنِ پرتاب ۱۱ سکه ۲ به توان ۱۱ یا ...» و بعد از کمی فکر کردن ادامه داد: «۲۰۴۸ حالت است، باید تعداد حالت‌هایی را که تعداد Aها از Bها بیش‌تر است بشماریم.»

بعد از چند لحظه سکوت دانش‌آموزِ دیگری با عینک ذره‌بینی در حالی که قیافه‌ی کاملاً متفکرانه‌ای به‌خود گرفته بود گفت: «به‌نظر می‌رسد شمردن تعداد این حالت‌ها چندان هم ساده



شکل ۱۲. احتمالِ برد کدام‌یک بیش‌تر است؟ A یا B؟

نباشد ولی فکر می‌کنم اگر مسئله را به مسئله‌ی شمردنِ تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها تعداد Aها و Bها معلوم‌اند تبدیل کنیم کار ساده‌تر شود. یعنی این‌که اول تعداد حالت‌هایی را که ٦ تا A و ۵ تا B آمده است و A برنده می‌شود بشماریم، بعد حالت‌های ۷ تا A و ۴ تا B و ...»

۱. احتمال این‌که ۷ تا A و ۴ تا B بیاید و در همه‌ی ۱۱ مرحله تعداد Aها از Bها بیش‌تر باشد چه‌قدر است؟

۲. احتمالِ بردِ A چه‌قدر است؟

۳. آیا می‌توانید مسئله‌ی فوق را در حالت کلی حل کنید. دو بازی‌کن A و B سکه‌ای را n بار پرتاب می‌کنند؛ احتمالِ بردِ هر یک با شرط این‌که در هر مرحله از پرتاب‌ها، تعداد Aها از Bها بیشتر باشد چه‌قدر است؟

* مسئله‌ی ۱۷. مسابقه‌ی علمی ریاضی و فیزیک

در یکی از دبیرستان‌های باسابقه در شهر «هیمورا» هر فصل مسابقه‌ای تحت عنوان «**مسابقه‌ی علمی ریاضی و فیزیک** (معروف!)» برگزار می‌شود و از طرف مدرسه به نفر اول این مسابقه

جایزه‌ی ویژه‌ای اهدا می‌گردد. در مسابقه‌ای از همین سری مسابقات که زمستان سال گذشته انجام شد، امتیاز دو نفر از دانش‌آموزان که بالاترین امتیاز را کسب کرده بودند مساوی شد. متأسفانه تنها یک عدد جایزه از سوی مدیر تهیه شده بود و فقط یک نفر از این دانش‌آموزان می‌توانست جایزه را دریافت کند. برای تعیین این فرد مدیر دبیرستان در مراسم ویژه‌ی اهدای جوایز، معمایی برای این دو طرح کرد تا به‌وسیله‌ی آن نفر اول یعنی برنده‌ی جایزه‌ی ویژه را مشخص کند.

معمای مدیر این بود: «در یک مهمانی که من در آن شرکت کرده بودم جز من که فقط با یک نفرِ دیگر دست دادم، هر یک از مهمانان با ۳ نفرِ دیگر دست داد.» سپس مدیرِ دبیرستان سؤال‌های زیر را مطرح کرد:

۱. در این مهمانی دستِ‌کم چند نفر حضور داشته‌اند؟ چرا؟

۲. آیا ممکن است تعدادِ افرادِ شرکت‌کننده در این مهمانی ۲۱ نفر باشد؟

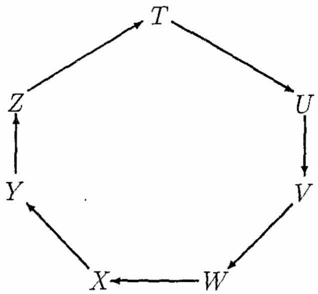
۳. تعدادِ شرکت‌کنندگان در این مهمانی چه مقادیری ممکن است باشد؟

مسئله‌ی ۱۸. زبان «یا» یی

یک دانش‌جوی رشته‌ی کامپیوتر برای انجام پروژه‌ی درس روباتیک یک زبان برنامه‌نویسی بسیار ساده به‌نام زبان «یا» یی طراحی کرده است و قرار است از آن برای کنترل حرکت‌های یک روبات ساده استفاده کند. در این زبان برنامه‌نویسی متغیرها هرکدام دنباله‌ای از ۷ بیت هستند و تنها دستورهای مجاز برای تغییر متغیرها، عمل انتساب و عمل یای انحصاری ($\otimes$) است. این اعمال به‌صورت زیر نشان داده می‌شوند.

$$X \leftarrow Y$$
$$Y \leftarrow X$$
$$X \leftarrow X \otimes Y$$
$$Y \leftarrow X \otimes Y$$

اولین دستور مقدار متغیر X را مساوی مقدار Y قرار می‌دهد و با این‌کار مقدار قبلی متغیر X از بین می‌رود. دومین دستور مقدار متغیر Y را برابر مقدار فعلی متغیر X قرار می‌دهد. سومین و چهارمین دستور یای انحصاری مقادیر X و Y (یعنی $X \otimes Y$) را به‌ترتیب در متغیرهای X و Y قرار می‌دهند.



شکل ۱۳. چگونه می‌توان با ۲۰ دستورالعمل یا کم‌تر مقدار ۷ متغیر را عوض کرد؟

همان‌طور که می‌دانید یای انحصاری یک عمل‌گر دودویی است که بر روی یک بیت به این صورت عمل می‌کند:

$$0 \otimes 0 = 0$$

$$0 \otimes 1 = 1$$

$$1 \otimes 0 = 1$$

$$1 \otimes 1 = 0$$

انجام این عمل بر روی دو متغیر چند بیتی یعنی اعمال آن بر روی بیت‌های متناظر این دو متغیر.

۱. با استفاده از دستورهای زبان «یا»یی، برنامه‌ای در چهار خط یا کم‌تر بنویسید که مقدار دو متغیرِ X و Y را با هم عوض کند. به‌عنوان مثال اگر در ابتدای اجرای برنامه مقدار X برابر 0110111 و مقدار Y برابر 1101101 باشد، بعد از اجرای برنامه مقدار X باید برابر 1101101 و مقدار Y برابر 0110111 باشد. استفاده از متغیر کمکی مجاز نیست.

۲. فرض کنید هفت متغیر Z، Y، X، W، V، U و T داریم. با استفاده از دستوراتی که تعریف کرده‌ایم برنامه‌ای در ۲۰ خط یا کم‌تر بنویسید که بعد از اجرای آن T مقدار اولیه‌ی Z، U مقدار اولیه‌ی T، ...، Y مقدار اولیه‌ی X، و Z مقدار اولیه‌ی Y را در خود داشته باشد (شکل ۱۳).

۳. فرض کنید پردازنده‌ای موازی در اختیار داریم که می‌تواند در هر لحظه ۷ دستور از زبان «یا»یی را هم‌زمان اجرا کند. آیا در این حالت می‌توانیم

به‌کمک این پردازنده فقط طی یک گام (۷ دستورالعمل هم‌زمان) مقدار ۷ متغیر را طبق قسمت ۲ تغییر دهیم؟

* مسئله‌ی ۱۹. مسابقه‌ی هوش

بین تعدادی از دانش‌آموزان یک دبیرستان یک مسابقه‌ی هوش برگزار می‌شود. در این مسابقه دانش‌آموزان در گروه‌های ۲ نفره با هم مسابقه می‌دهند. دو عضو هر گروه به‌طور جداگانه در دو سالن جدا از هم مستقر می‌شوند به‌طوری‌که نتوانند هیچ‌گونه اطلاعاتی را با هم رد و بدل کنند. سپس داور مسابقه به هر یک از اعضای گروه‌ها یک عدد دودویی ۱۷ رقمی (۱۷ بیتی) می‌دهد، و از آن‌ها می‌خواهد که به این دو سؤال پاسخ دهند:

الف) آیا یای انحصاریِ دوعددی که در اختیار دو عضو گروه است تعداد فردی ۱ دارد؟

ب) مجموع دو عدد دودویی که در اختیار افراد گروه است چیست؟

اعضای هر گروه برای انتقال اطلاعات به هم می‌توانند از کارت‌های مخصوصی که در اختیار آن‌ها قرار داده شده است استفاده کنند. هر عضو گروه به‌کمک یک کارت می‌تواند فقط یک بیت (صفر یا یک) را به عضوِ دیگر منتقل کند و هر کدام از اعضای گروه که جواب را به‌دست آورد می‌تواند به داور اطلاع دهد و در آن‌صورت آن گروه برنده خواهد شد. ضمناً از آن‌جا که نحوه‌ی مسابقه پیش از انجام مسابقه اعلام شده است، اعضای هر گروه می‌توانند از قبل با هم هم‌آهنگ شوند و استراتژی خاصی را دنبال کنند.

۱. روشی پیش‌نهاد کنید که در آن اعضای گروه با مبادله‌ی فقط یک کارت به سؤال (الف) پاسخ دهند.

۲. با توجه به این‌که در هر لحظه هر نفر نمی‌تواند بیش از یک کارت به دوستش بفرستد و نیز با توجه به این‌که دقیقاً ۱ دقیقه طول می‌کشد تا کارت به دست عضو دیگر گروه برسد، روشی برای پیدا کردن جواب قسمت (ب) با ۶ کارت یا کم‌تر از ۲۴ دقیقه ارائه دهید.

۳. آیا اعضای گروه می‌توانند فقط با ارسال یک کارت به جواب (ب) دست یابند؟ در این صورت تقریباً چه زمانی لازم است تا این جواب را به‌دست آورند؟

مسئله‌ی ۲۰. هلیچ!

یکی از روش‌هایی که بچه‌ها هنگام بازی برای قرعه‌کشی استفاده می‌کنند «هَلیچ» نامیده می‌شود. در این بازی یکی از شرکت‌کنندگان به‌عنوان مبدأ شمارش یا «بَر» انتخاب می‌شود. «بَر» برای شروع قرعه‌کشی می‌گوید: «یک... دو... سه... هلیچ.» پس از این عبارت و با شنیدن کلمه‌ی «هَلیچ» همه شرکت‌کنندگان با انگشتان یکی از دست‌هایشان عددی را بین ۱ تا ۳ نشان می‌دهند. سپس «بر» از خودش در جهت راست (عکس حرکت عقربه‌های ساعت) شروع به شمارش از یک تا مجموع تعداد انگشتانی که بچه‌ها آورده‌اند می‌کند و آخرین نفر این شمارش بازنده است و از دور خارج می‌شود.

بازی هلیچ را بین دو نفر درنظر بگیرید:

۱. آیا این بازی منصفانه است؟ یا یکی از دو نفر (بَر یا فرد دوم) احتمال برد بیش‌تری دارد؟

۲. با کمی دقت متوجه می‌شویم که احتمال بردِ «بَر» در این بازی بیش‌تر است. ولی اگر فرد دوم متوجه این امر شود می‌تواند استراتژی خاصی اتخاذ کند که احتمال بردش برابر $\frac{۲}{۳}$ شود. چه‌طور؟

۳. اگر بَر استراتژی بازی خود را به نفر دوم اعلام کند (یعنی این‌که در هر نوبت با چه احتمالی ۱، ۲ یا ۳ می آورد)، آیا نفر دوم می‌تواند برنده شود؟

۴. اگر هر دو طرف به‌ترین استراتژی ممکن خود را بدون اعلام به یک‌دیگر اتخاذ کنند، در نهایت احتمال برد کدام‌یک بیشتر خواهد بود؟ استراتژی برد هر یک چیست؟ آیا ممکن است تعویضِ استراتژی در وسط بازی به نفع کسی باشد؟

۵. بازی‌ای را درنظر بگیرید که هرگاه مجموع ۳، ۲ یا ۶ باشد، بر و اگر مجموع ۴ یا ۵ بیاید نفر دوم برنده است. اگر هر دو طرف به طرز معقولی بازی کنند کدام‌یک احتمال برد بیشتری دارد؟

مسئله‌ی ۲۱. لوله‌های انتقال نفت

پس از عملیات اکتشاف نفت درمناطق شمالی کشور، شرکت نفت منطقه‌ای موفق به کشف حوزه‌ای نفت‌خیز در دریاچه‌ی ارومیه شد! پس از این اکتشاف شرکت نفت تصمیم به احداث سه حلقه چاهِ نفت در جزیره‌های اشک، کبودان و آرزو گرفت. فاصله‌ی جزیره‌ی اشک از

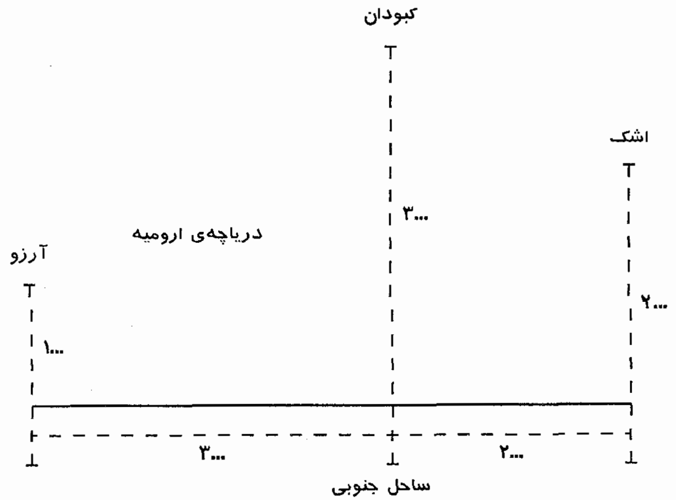
ساحل جنوبی ۲۰۰۰ متر و فاصله‌ی جزیره‌های کبودان و آرزو از این ساحل به ترتیب ۳۰۰۰ متر و ۱۰۰۰ متر است. این جزیره‌ها طبق شکلِ ۱۴ قرار گرفته‌اند.

براساس طرحِ اولیه قرار بود که یک مخزن بزرگ ذخیره‌ی نفت خام در ساحلِ جنوبی جزیره‌ی کبودان احداث شود و نفت سایر چاه‌ها نیز از طریق لوله‌هایی طبق شکلِ ۱۵ به این جزیره انتقال یابد. به‌دلیل هزینه‌ی بالای لوله‌های انتقال دهنده‌ی نفت، شرکتِ نفت سعی دارد از طرحی استفاده کند که طول لوله‌های نفتِ استفاده شده در آن کمینه باشد.

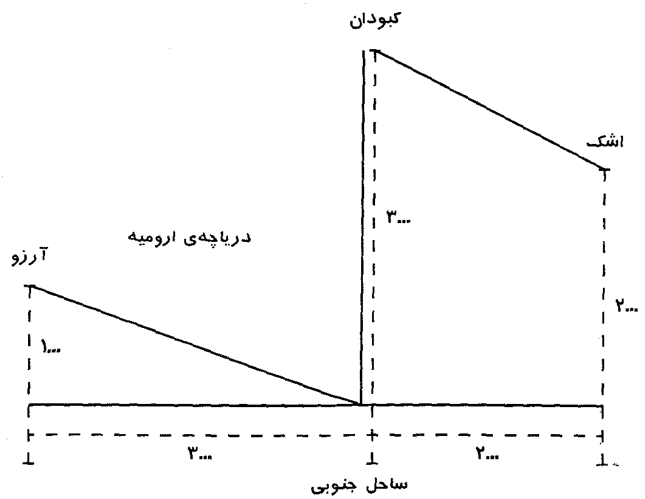
> یک سیستم انتقال نفت بین چاه‌ها طراحی کنید که نفت را از چاه‌ها به یک مخزن در ساحل انتقال دهد به‌طوری‌که هیچ لوله‌ای انتقال‌دهنده‌ی نفتِ بیش از دو چاه نباشد. لوله‌ها فقط در ساحل یا محل سه جزیره می‌توانند به هم وصل شوند و بالاخره طول لوله‌های مصرفی نباید بیش از ۷۳۰۰ متر باشد. در این راه‌حل باید مکان مخزن نفت و نقشه لوله‌های انتقال مشخص شوند.

* مسئله‌ی ۲۲. مربی تنیس

قبل از انجام یک‌سری مسابقات بین‌المللی تنیس، اعضای تیم ملی به یک اردوی تفریحی دو روزه اعزام شدند. در مسیرِ بازگشت بر اثر سانحه‌ای که برای یکی از اتوبوس‌های حامل



شکل ۱۴. سه جزیره‌ی اشک، کبودان و آرزو طبق شکل قرار دارند. مخزن نفت باید در ساحل جنوبی قرار بگیرد.



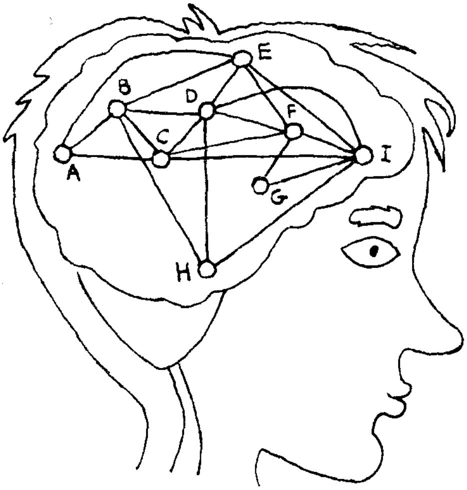
شکل ۱۵. طرح اولیه‌ی شرکت نفت که از ۸۰۰۰ متر لوله‌ی انتقال نفت در آن استفاده شده است. مخزن نفت در ساحل جنوبی جزیره‌ی کبودان واقع است.

اعضای تیم رخ داد، تعدادی از اعضای تیم مجروح شدند. در نتیجه مربی باید تعدادی از افراد ذخیره‌ی تیم را جای‌گزین آن‌ها کند.

او ۸ نفرِ برتر افراد ذخیره را انتخاب کرد، ولی لازم بود که برای مسابقه‌ی روز بعد آن‌ها را بر اساس بازی‌شان رتبه‌بندی کند. او یک زمین بازی در اختیار دارد و مجبور است که بازی‌های ۲ نفره را که یک ساعت طول می‌کشد بین این افراد برگزار کند تا بفهمد نفر اول، نفر دوم و ... نفر هشتم چه کسانی هستند.

او فقط ۱۷ ساعت برای انجام این مسابقات فرصت دارد. برای صرفه‌جویی در وقت او این‌طور فرض می‌کند که اگر تنیس باز x از y ببرد و y هم از z ببرد، می‌توان نتیجه گرفت که x از z می‌برد و دیگر نیاز به برگزاری مسابقه بین x و z نیست. بازی‌کنان آن‌قدر قوی هستند که می‌توانند پشت سر هم بازی کنند.

۱. آیا می‌توانید ترتیبی برای انجام مسابقات پیش‌نهاد کنید که بدون توجه به این‌که چه کسی می‌برد، ظرف ۱۷ ساعت این افراد رتبه‌بندی شوند. سعی کنید کم‌ترین زمان لازم را نیز برای رتبه‌بندی افراد به‌دست آورید.
راه‌نمایی: برای حل این مسئله سعی کنید از حل مسائل ساده‌تر شروع کنید. اگر تعداد افراد ۲ نفر باشد راه‌حل خیلی ساده است. حالت مربوط به ۴ نفر هم به کمک ۲ نفر به‌سادگی حل می‌شود. ۸ نفر را با استفاده از ۲ گروه ۴تایی حل کنید.



شکل ۱۶. نواحی مختلف مغز و اعصابِ رابط آن‌ها

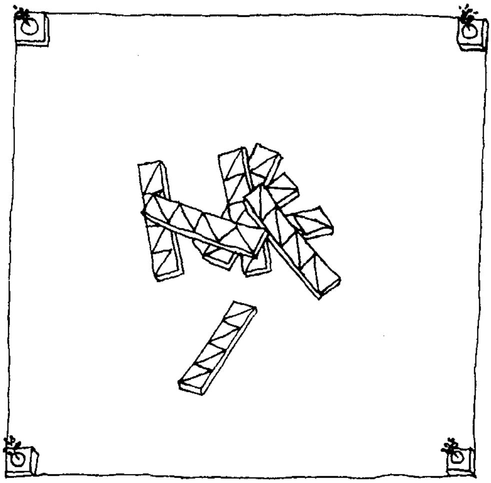
۲. فرض کنید ۴ زمین بازی در اختیار داریم و فقط ۶ ساعت وقت داریم. یک برنامه برای مسابقات بنویسید که بدون توجه به نتیجه‌ی بازی‌ها این ۸ نفر را در حداکثر ۶ ساعت رتبه‌بندی کند.

۳. آیا فکر می‌کنید که در ۵ ساعت می‌توان این افراد را رتبه‌بندی کرد؟

مسئله‌ی ۲۳. حادثه‌ی رانندگی *

در اثر سانحه‌ی رانندگی قسمت‌هایی از مغزِ یک جوان صدمه دیده و از کار افتاده‌اند. متخصصان مغز و اعصاب طرح ساده‌ای از قسمت‌های آسیب‌دیده‌ی مغز جوان تهیه کرده‌اند که در آن ۹ قسمت آسیب‌دیده‌ی مغز با حروف A، B، ... و I مشخص شده‌اند (شکل ۱۶). خطوط رابط بین این قسمت‌ها نشان‌دهنده‌ی اعصاب رابطِ این بخش‌ها هستند.

متخصصان می‌توانند با استفاده از شوک الکتریکیِ مستقیم قسمت‌هایی از مغز را دوباره تحریک کنند و به کار وادارند، ولی به علت خطراتی که این عمل در پی دارد آن‌ها می‌خواهند از حداقل تعداد شوک‌های مستقیم استفاده کنند. آن‌ها هم‌چنین می‌دانند که هر قسمت آسیب‌دیده‌ای که سه قسمت مجاورش سالم باشند (قسمت‌های مجاور قسمت‌هایی هستند که از طریق اعصاب به‌هم وصل هستند) بعد از یک ماه ترمیم می‌شود.



شکل ۱۷. آیا روشی برای کاشی‌کاری قصر وجود دارد؟

۱. آیا می‌توانید سه قسمت از بخش‌های آسیب‌دیده‌ی مغزِ جوان را مشخص کنید که با شوک دادن به آن‌ها مغز جوان طی چهار ماه یا کم‌تر کاملاً ترمیم شود.

۲. ثابت کنید با دادن شوک به ۴ بخش از مغز جوان به هر صورت که باشد نمی‌توان طی یک ماه او را بهبود بخشید.

۳. روشی برای شوک دادن به ۴ بخش از مغزِ جوان پیدا کنید که او طی دو ماه بهبود یابد.

مسئله‌ی ۲۴. کاشی‌کاری در قصر

یکی از شاه‌زاده‌های عرب به نام «کوات‌الحون» تصمیم گرفت حیاط قصرش را با کاشی‌های ایتالیایی فرش کند. برای این کار از «ایتالو پرفکتو» صنعت‌گر و هنرمندِ ایتالیایی دعوت کرد. ابعاد حیاط ۱۶ متر در ۱۶ متر بود و شاه‌زاده می‌خواست که ۴ حوض فواره‌دار به ابعاد ۱ متر در ۱ متر در چهار گوشه‌ی حیاط قرار بگیرند (شکل ۱۷).

پرفکتو برای پوشاندن سطح حیاط ۶۳ عدد کاشی به ابعاد ۴ متر در ۱ متر طراحی کرد و ساخت، ولی قبل از این‌که کاشی‌ها را در جای خود نصب کند درگذشت.

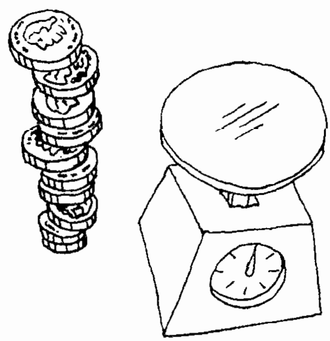
۱. آیا می‌توانید به «ایتالینو سپی» شاگرد پرفکتو کمک کنید تا روشی برای چیدن کاشی‌ها در حیاط پیداکنند، به‌طوری که ۴ حوض در ۴ گوشه‌ی حیاط قرار بگیرند. اگر این کار غیرممکن است ثابت کنید.

۲. حداکثر تعداد حوض‌هایی که می‌توانند در گوشه‌های حیاط قرار بگیرند به‌طوری که حیاط قابل کاشی‌کاری باشد چند تاست؟ (بقیه‌ی حوض‌ها را می‌توان هر جای دل‌خواهی قرار داد.)

۳. شاه‌زاده الحون می‌خواهد سالن دیگری به ابعاد ۱۰ متر در ۱۰ متر را با ۴ حوض در گوشه‌ها و با همان کاشی‌های ۴ متر در ۱ متر فرش کند. آیا این کار ممکن است؟

** مسئله‌ی ۲۵. مسابقه‌ی زرگرها

اتحادیه‌ی زرگرانِ شهرِ «دوبلین» برای انتخاب رییس جدیدی برای این اتحادیه تصمیم به برگزاری مسابقه‌ای بین زرگران داوطلب گرفته است. به همین منظور از دکتر «اکو» که یکی از ریاضی‌دانان مشهور و متخصص در حل معماها و جدول‌ها بود خواستند که سؤالی طرح کند. دکتر اکو در روز مسابقه به هر یک از داوطلبان یک ترازوی یک کفه‌ای و ۱۰ عدد سکه داد و گفت: «از این ده سکه حداکثر دو تا تقلبی هستند. وزن سکه‌های واقعی ۱۱ تا ۱۱/۱ گرم و وزنِ سکه‌های تقلبی ۱۰/۶ تا ۱۰/۷ گرم است. شما در هر بار استفاده از ترازو باید حداکثر ۳ سکه را وزن کنید و برنده کسی است که با کم‌ترین تعداد دفعات استفاده از ترازو سکه‌های تقلبی را تعیین کند.»



شکل ۱۸. چگونه می‌توان با ۵ بار استفاده از ترازو سکه‌های تقلبی را تشخیص داد؟

۱. چه روشی برای انجام این کار پیش‌نهاد می‌کنید؟

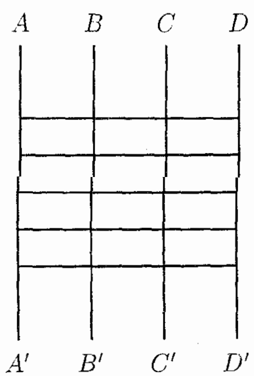
در دور اول مسابقه دو نفر از شرکت‌کنندگان در مسابقه موفق شدند که با کم‌ترین استفاده از ترازو سکه‌های تقلبی را تعیین کنند. برای انتخاب یک نفر از بین این دو نفر، دکتر اکو به هر یک از آن‌ها ۱۰ سکه‌ی دیگر داد و گفت «این بار شما در هنگام استفاده از ترازو می‌توانید هر تعداد سکه که دلتان خواست وزن کنید. وزن سکه‌های واقعی و تقلبی همان وزن‌های قبلی است. برنده باز هم کسی است که با دفعات کم‌تری استفاده از ترازو سکه‌های تقلبی را تشخیص دهد.»

۲. آیا می‌توانید این بار هم روشی برای وزن کردن سکه‌ها پیش‌نهاد کنید که تعداد دفعات استفاده از ترازو کمینه باشد؟

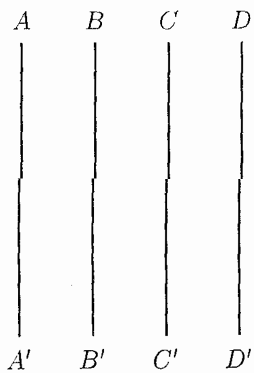
مسئله‌ی ۲٦. سینیور آلکاتراز و گاوهای وحشی

سینیور آلکاتراز که یک اسپانیایی ثروتمند است تصمیم گرفت برای مبارزه با گاوبازی که یک مسابقه‌ی وحشیانه است، یک نوع مسابقه‌ی جدید با گاوهای وحشی ابداع کند که بدون خون‌ریزی و وحشی‌گری و در ضمن مهیج باشد. طرحِ اولیه از ۴ مسیر موازی تشکیل شده بود که گاوها در طول آن‌ها می‌دویدند و با هم مسابقه می‌دادند (شکل ۱۹.الف). ولی این طرح به علت استقبال نکردن تماشاچیان با شکست مواجه شد.

به‌همین دلیل سینیور آلکاتراز طرح جدیدی پیش‌نهاد کرد که در آن علاوه بر ۴ مسیر قبلی ۵ مسیر عرضی وجود دارد که گاوها می‌توانند از طریق آن‌ها مسیر خود را عوض کنند و

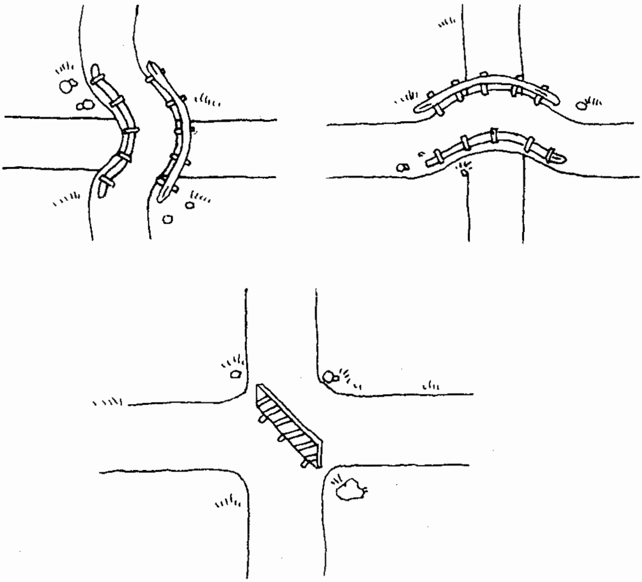


(ب)



(الف)

شکل ۱۹. الف) طرح اولیه‌ی سینیور آلکاتراز. ب) طرح جدید گاوبازی.



شکل ۲۰. پل‌ها و مانع‌ها در طرحِ جدیدِ سینیور آلکاتراز.

به سایر مسیرها بروند (شکل ۱۹.ب). سینیور آلکاتراز برای جلوگیری از درگیری و برخورد بین گاوهای وحشی از پل‌ها و مانع‌هایی که در شکل ۲۰ دیده می‌شوند در محل‌های تقاطع استفاده خواهد کرد.

۱. آیا سینیور آلکاتراز می‌تواند با استفاده از این پل‌ها و مانع‌ها مسیرها را طوری طراحی کند که ۴ گاو وحشی با هم مسابقه دهند و همه‌ی گاوها به انتهای مسیرهای طولی برسند و دست‌کم یکی از گاوها به انتهای یک مسیر طولی، غیر از مسیری که از آن شروع به حرکت کرده است، برسد؟ اگر تعدادِ خطوط عرضی را افزایش دهد چه‌طور ؟

۲. سینیور آلکاتراز یک خط طولی EE' به مسیرهای طولی افزود و مسیرهای عرضی را نیز امتداد داد تا EE' را قطع کنند. ولی چون این مسیر (EE') در سایه واقع شده است، از آن فقط به عنوان مسیر کمکی استفاده می‌شود و هیچ گاوی نباید از E شروع به حرکت کند و یا حرکتش به E' ختم شود. آیا جای‌گشتی از نقاط پایانی A'، B'، C' و D' وجود دارد به‌طوری‌که سینیور آلکاتراز مجبور باشد برای طراحی یک مسیر بین نقاطِ A، B، C، D و نقاط این جای‌گشت (با استفاده از مسیرِ کمکی EE')، از هر ۵ خطِ عرضی استفاده کند، یا این‌که برای تمام جای‌گشت‌هایِ نقاط پایانی،

استفاده از ۴ خطِ عرضی کافی است؟

۳. آیا جای‌گشتی وجود دارد که هرگاو وحشی به انتهای یک مسیر طولی، غیر از آن مسیری که در آن شروع به حرکت کرده است، برسد و سه (یا حتی دو) مسیر عرضی در طراحیِ میدانِ مسابقه کافی باشند؟ (توجه کنید که E و E' نمی‌توانند نقاط شروع و پایان باشند.)

۴. کم‌ترین تعداد خطوط عرضی که سینیور آلکاتراز باید برای طراحی میدانی با ۱۱ خط طولی (که یکی از آن‌ها کمکی است) استفاده کند به‌طوری‌که ۱۰ گاو وحشی بتوانند از نقاط A_1 تا A_{10} شروع به حرکت کنند و در جای‌گشت دل‌خواهی از A_1 تا A_{10} به پایان مسیر برسند چند تاست؟ ثابت کنید این تعداد خط عرضی برای هر جای‌گشتی کافی‌است. آیا سینیور آلکاتراز می‌تواند با اضافه کردن خطوطِ طولیِ کمکی از تعداد خطوطِ عرضی بکاهد؟

مسئله‌ی ۲۷. میهمانی خیریه

دکتر اِکوی ریاضی‌دان در سفری که به «پونتا» کرد، روزی به یک میهمانی خیریه در هتلِ بزرگ شهر دعوت شد. تمام دیوارها و سقف هتل با انواع وسایل تزیینی پوشیده شده بود و چلچراغ‌های بزرگ و بسیار گران‌بهایی از سقف آویزان بودند. با وجودِ این‌که دکتر اکو به‌ترین لباس‌های خود را پوشیده بود، به محض ورود به آن‌جا حس کرد که لباس‌هایش کهنه و مندرس هستند.

در این مراسم قرار بود میهمانان در یک بازی شرکت کنند و درآمدِ آن برای امور خیریه صرف شود. میزبان درباره‌ی این بازی به میهمانان توضیح داد: «بالا ـ پایین» یک بازی دونفره با دو عدد تاس است که بین شما و من انجام می‌شود. در هر بازی شما یکی از دو حالت «بالا» یا «پایین» را که به‌ترتیب نشان دهنده‌ی مجموع ۸ تا ۱۲ و ۲ تا ۶ هستند انتخاب می‌کنید و بر روی مبلغی که کنار گذاشته‌اید شرط‌بندی می‌کنید. بعد از پرتاب تاس‌ها اگر مجموعِ عددهای دوتاس در دسته‌ای باشد که شما انتخاب کرده‌اید، به اندازه‌ی ۱/۲۵ برابر پولی که کنار گذاشته‌اید برنده می‌شوید و در غیرِ این صورت آن پول را می‌بازید.

در همین موقع یکی از حاضران فریاد زد: «ولی این بازی منصفانه نیست!»

۱. احتمال برد هر دو طرف را در این بازی تحلیل کنید.

میزبان با خون‌سردی تمام گفت: «خوب آقا! ما امشب بازی‌های دیگری هم داریم که شما می‌توانید در آن‌ها شرکت کنید. اسمِ بازی دوم ما «بالا ـ پایین برنده» است. هر بازی‌کن در گروه «کُنُد» شروع به بازی می‌کند و بازی با انتخاب «بالا» یا «پایین» طبق بازی قبلی شروع می‌شود. با این تفاوت که بازی‌کنِ گروه «کند» اگر برنده شود به گروه «تند» منتقل می‌شود. در گروه تند اگر مجموعِ دو تاس ۷ بیاید نه بازی‌کن و نه من هیچ‌یک برنده نیستیم و بازی‌کن در همان گروه تند باقی می‌ماند. ولی اگر بازی‌کن بازنده شود به گروه کند منتقل می‌شود. هر بازی‌کن گروه کند می‌تواند بر روی هر قدر پولی که دلش می‌خواهد شرط‌بندی کند ولی بازی‌کن گروه تند می‌تواند حداکثر به‌اندازه‌ی کم‌ترین پولی که به‌عنوان یک بازی‌کن گروه کند شرط بسته بود پول بگذارد. این بار هم هر بازی‌کن برنده در گروه تند به اندازه‌ی ۱/۲۵ برابر پولی که گذاشته بود می‌برد و هر بازی‌کن گروه کند به اندازه‌ی ۱/۰۵ برابر پولش می‌برد.»

۲. به‌نظر شما آیا این بار بازی منصفانه است؟ مقدار پولی را که هر بازی‌کن در هر مرحله به‌طور متوسط می‌برد یا می‌بازد چه‌قدر است؟

مردی که فریاد کشیده بود، این بار هم با صدای نسبتاً بلندی گفت: «نه! این بازی هم منصفانه نیست. من فقط به شرطی بازی می‌کنم که در گروه کند به اندازه‌ی ۱/۲۵ برابر پولم و در گروه تند به اندازه‌ی ۱/۰۵ برابر پولم برنده شوم.»

۳. مقدار برد یا باخت بازی‌کن با این شرط در هر بازی به‌طور متوسط چه‌قدر است؟

مسئله‌ی ۲۸. درهای فرد

در یکی از روزهای تابستانی دکتر اِکو به‌هم‌راه دوستش دکتر اسکارلت در آپارتمان خود بودند که ناگهان جوانی وارد شد و پس از معرفی خود گفت: «آقای دکتر اکو! من مرد ثروت‌مندی هستم ولی اگر شما به من کمک نکنید به‌زودی فقیر خواهم شد!»

او ادامه داد: «پدر من به‌تازگی درگذشته است. او یک کلکسیون جواهرات داشت که آن‌ها را در صندوقی گذاشته و در اتاقی در یکی از دو زیرزمین قصرش قرار داده است. هر زیرزمین که پدرم در زمان حیات خود ساخته است تعداد زیادی اتاق تو در تو دارد و زیرزمین‌ها از هم کاملاً مستقلند. مشکل این‌جاست که او به من نگفته است که جواهرات را در کجا گذاشته است و فقط گفته است که آن‌ها در یک اتاق هستند که تعداد درهایش فرد است و گفته است که من قادرم حدس بزنم که جواهرات را از کدام‌یک از زیرزمین‌ها می‌توان به‌دست آورد.»

جوان پس از کمی تأمل ادامه داد: «مشکل این‌جاست که من نمی‌توانم حدس بزنم جواهرات کجاست؛ من نقشه‌ای ندارم و زیرزمین‌ها هم مملو از گل ولای و لجن شده‌اند و هرگونه اقدام برای جست‌وجوی جواهرات در هر یک از این زیرزمین‌ها حدوداً یک میلیون دلار هزینه دارد. خواهش می‌کنم کمک کنید که محل جواهرات را پیدا کنم.»

دکتر اکو مدتی فکر کرد و سپس از مرد جوان پرسید: «لطفاً درباره‌ی زیرزمین‌ها بیش‌تر توضیح دهید. آیا شما چیزی در موردِ اتصال بین درهای اتاق‌های آن‌ها می‌دانید؟» مرد جوان گفت: «درها کاملاً معمولی هستند و ۲ اتاق مختلف را به هم وصل می‌کنند. من فکر می‌کنم که پدرم دیوانه شده بود و کلکسیون جواهری وجود ندارد. او یک ریاضی‌دان آماتور بود و با این کار می‌خواست مرا به فکر کردن وادارد.»

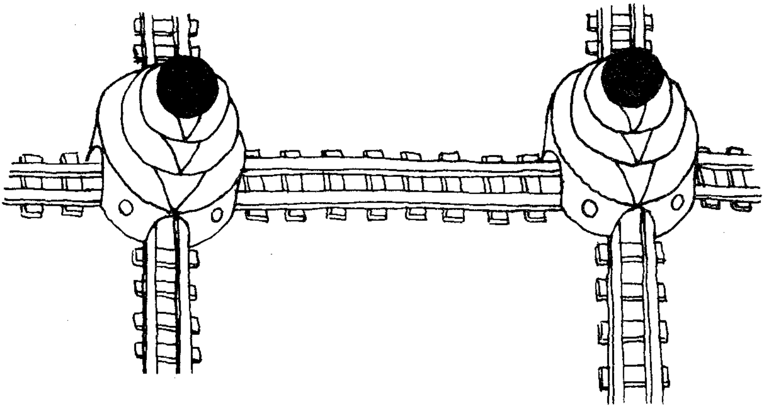
اکو دوباره پرسید: «چند در برای ورود و یا خروج به اتاق‌های هر زیرزمین وجود دارد؟» مرد جواب داد: «زیرزمین اول در مجموع ۲ در ورودی و زیرزمین دوم ۳ در ورودی دارد.» دکتر اکو رو به دکتر اسکارلت کرد و گفت: «شما چه فکر می‌کنید؟ اگر پدر این مرد درست گفته باشد، فقط یکی از این زیرزمین‌ها شامل اتاقی است که تعداد درهایش فرد است. فرض کنید که ما بتوانیم ثابت کنیم که یکی از این زیرزمین‌ها حتماً باید شامل یک اتاق با تعداد درهای فرد باشد. آن اتاق حتماً اتاقی است که جواهرات در آن قرار دارد.» اکو رو به مرد جوان کرد و ادامه داد: «این زیرزمینی است که شما باید در آن به دنبال جواهرات بگردید.» و سپس یک کاغذ به او داد.

به نظر شما کدام‌یک از زیرزمین‌ها شامل اتاقی است که تعداد درهایش فرد است؟ آیا می‌توانید ادعای خود را ثابت کنید؟

مرد جوان با تعجب استدلال دکتر اکو را باور کرد و سپس رفت. بعد از مدتی او یکی از ثروتمندترین مردهای شهر شد.

** مسئله‌ی ۲۹. شهرک فضایی

گروهی از دانش‌مندانِ یک مرکز تحقیقاتِ فضایی می‌خواهند یک شهرک فضایی طراحی کنند که بر روی سیاره‌ی مریخ قابل پیاده سازی باشد. با توجه به بررسی نیازهای موجود، یک چنین شهرکی باید از ۸۱ واحد مجزا تشکیل شده باشد. ارتباط این واحدها از طریق ریل‌های ابررسانای مغناطیسی صورت خواهد گرفت و به‌دلیلِ خطر زلزله و شهاب‌سنگ‌ها، نباید در مسیر ریل از هیچ پل یا تونلی استفاده شود. ولی ریل‌ها در طول مسیر خود می‌توانند خم



شکل ۲۱. از هر واحد شهرک حداکثر ۴ ریل خارج می‌شود. ریل‌ها می‌توانند خم شوند ولی نباید هم‌دیگر را قطع کنند. در طرح شهرک باید بتوان از هر واحد با عبور از حداکثر ۵ واحد به هر واحد دیگری رفت.

شوند. ضمناً با توجه به شرایط خاص ساختمانیِ واحدهای شهرک، از هر واحد حداکثر ۴ ریل می‌تواند خارج شود (شکل ۲۱ را ببینید).

فضانوردان برای انتقال از یک واحد به واحد دیگر از قطارهای مخصوصی استفاده می‌کنند. این قطارها روی ریل‌هایی که واحدها را به هم متصل کرده‌اند حرکت می‌کنند و فضانوردان با هر قطار می‌توانند فقط فاصله‌ی دو واحد را طی کنند و برای رفتن به واحدهای بعدی مجبور به تعویض قطار هستند.

با توجه به این‌که عمل تعویض قطار بسیار وقت‌گیر است، آیا می‌توانید شهرک را طوری طراحی کنید که برای انتقال از هر واحد دل‌خواه به هر واحد دیگر به حداکثر پنج بار تعویض قطار نیاز باشد؟

توضیح: اگر با نظریه‌ی گراف آشنایی دارید گرافی مسطح با ۸۱ رأس و حداکثر درجه‌ی ۴ و با قطر ٦ بسازید.

فصل ۴

ماجراجویان

مسئله‌ی ۳۰. ماسه‌شمار

در کشورِ هندوستان گروهی مرتاض زندگی می‌کنند که توانایی انجام کارهای خارق‌العاده‌ای را دارند. کارهایی که این روزها بیش‌تر در فیلم‌ها و نمایش‌های تلویزیونی می‌توان دید. این مرتاضان گاهی در مقابل سؤال‌هایی که مردم عادی از آن‌ها می‌کنند سکوت می‌کنند و همین باعث شده که نتوان بین مرتاض‌های واقعی و گروهی شیاد که ادعای انجام کارهای خارق‌العاده دارند، فرق قایل شد و آن‌ها را از هم تشخیص داد.

در سفری که به هندوستان داشتم به یکی از این افراد برخوردم که مردم برایش احترام زیادی قایل بودند. مردی با قد متوسط و بسیار لاغر، با پوستی تیره رنگ که با تکه‌ای پارچه‌ی مندرس بدنش را پوشانده بود.

از همان بار اول که دیدمش، به‌علت نامعلومی احساس می‌کردم که شیاد است و دلم می‌خواست هرطور که شده این موضوع را ثابت کنم. یکی از ادعاهای این فرد این بود که می‌تواند تعداد دانه‌های ماسه‌ی یک سطل ماسه را با یک نگاه بشمارد، ولی به‌دلایل خاصی که فقط خودش می‌داند، نمی‌تواند هیچ‌گونه اطلاعات جدیدی اختیار سؤال کننده قرار دهد، مگر این‌که خود فرد از قبل جواب سؤال خود را بداند. یعنی تعداد ماسه‌های سطل را تنها اگر سؤال‌کننده بداند به او می‌گوید.

۱. آیا می‌توانید آزمایشی ترتیب دهید که بدون این‌که احتیاج به شمردن تمام دانه‌های ماسه‌ی سطل ماسه باشد، راست یا دروغ بودن ادعای این مرتاض هندی اثبات شود؟

شکل ۲۲. مرتاض هندی ادعا می‌کند که می‌تواند تعداد دانه‌های ماسه‌ی سطل را با یک نگاه بشمارد.

۲. فرض کنید که ادعای این مرتاض هندی درست باشد، آیا می‌توانید روشی بیان کنید که فرد دیگری بتواند خود را به‌عنوان مرتاض اصلی معرفی کند و کار این مرتاض را تقلید کند و با آزمایشِ قبل شیاد بودن او ثابت نشود؟

توضیح: آزمایشی که شما برای اثبات راست یا دروغ بودن ادعای مرتاض طرح کرده‌اید، یکی از مسایل مهم در انتقال اطلاعات بین سیستم‌های کامپیوتری است. هر سیستم کامپیوتری باید با پاسخ دادن به چند سؤال در مورد خاصی هویت خود را اثبات کند. ضمناً این سیستم نباید هیچ‌گونه اطلاعی را به‌طور مستقیم در اختیار طرف مقابل قرار دهد که طرف مقابل بتواند از آن استفاده کند. این روش در اثبات هویت «اثبات بدون انتقال اطلاعات[1]» نامیده می‌شود.

برای مطالعه‌ی بیش‌تر می‌توانید به منبع زیر مراجعه کنید:

Ivars Peterson, *The Mathematical Tourist: Snapshots of Modern Mathematics*, W. H. Freeman and Co., 1988.

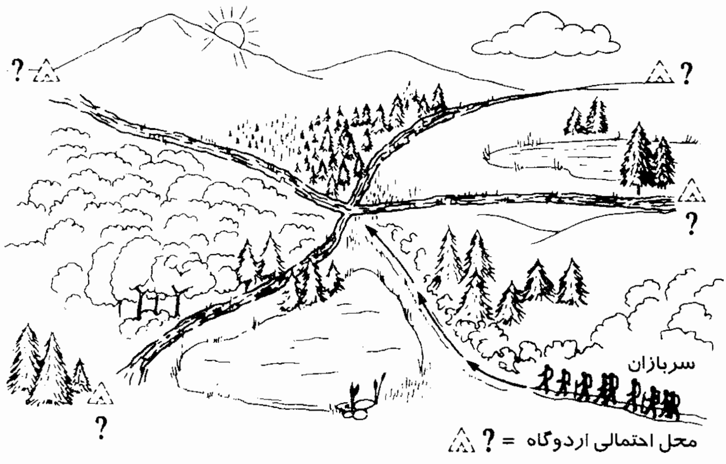
[1] Zero-Knowledge Proof

** مسئله‌ی ۳۱. در جستجوی اردوگاه

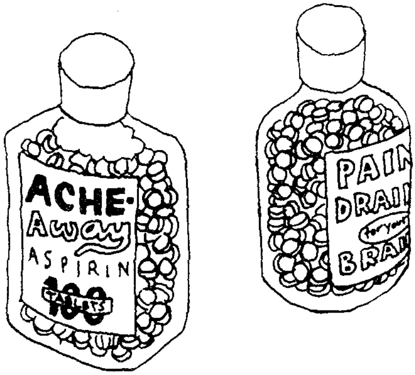
بعد از یک مانور نظامی، ۸ نفر از سربازانِ شرکت‌کننده در مانور که به همراه فرمانده‌شان از جنگل باز می‌گشتند، مسیرِ اردوگاه را گم کردند. این افراد بعد از مدتی راه رفتن به پنج‌راهی! (تقاطع) رسیدند (شکل ۲۳).

فرمانده می‌داند که فاصله‌ی بین اردوگاه و این تقاطع بیش‌تر از ۲۰ دقیقه راه نیست و یک‌ساعت بیش‌تر به تاریک شدنِ هوا باقی نمانده است. بعد از تاریک شدن هوا به‌علت وجود حیوانات وحشی، گروه دیگر نمی‌تواند به حرکت خود ادامه دهد. فرمانده هم‌چنین می‌داند که در بین سربازانش ۲ نفر هستند که گاهی اوقات دروغ می‌گویند. ولی نمی‌داند که این افراد را نمی‌شناسد.

۱. آیا شما می‌توانید به فرمانده کمک کنید تا اردوگاه را در این مدت و با شرط دروغ‌گو بودن ۲ نفر از افراد پیدا کند؟ چگونه؟
۲. اگر تعداد سربازان ۷ نفر باشد ولی باز هم ۲ نفر از آن‌ها دروغ‌گو باشند، آیا باز هم فرمانده می‌تواند اردوگاه را پیدا کند؟ ادعای خود را ثابت کنید.
۳. فرض کنید ۵ نفر از این افراد دروغ‌گو باشند؛ تعداد این سربازان حداقل چند نفر باید باشد تا فرمانده در ۱ ساعت اردوگاه را پیدا کند؟ تعدادی که پیدا می‌کنید باید کم‌تر از ۲۰ نفر باشد. اثبات کنید که با کم‌تر از عددی که به‌دست می‌آورید نمی‌شود این کار را انجام داد.



شکل ۲۳. بعد از رسیدن به تقاطع، سربازان فقط یک ساعت فرصت دارند که اردوگاه را پیدا کنند.



شکل ۲۴. با داشتن دو شیشه محتوی آسپرین، آیا روشی برای نجات کارل وجود دارد؟

۴. فرض کنید ۱۰۰ دقیقه تا تاریک شدن هوا وقت مانده است و فقط ۴ سرباز هم‌راه فرمانده هستند که ۲ نفر آن‌ها دروغ‌گو هستند. هم‌چنین فرض کنید دروغ‌گوها ممکن است یک بار دروغ و بار دیگر راست بگویند و یا هر ۲ بار دروغ یا راست بگویند. آیا می‌توانید اردوگاه را در این مدت پیدا کنید؟ چگونه؟

مسئله‌ی ۳۲. آدم‌ربایی در آمازون

«جک ری» و «کارل هیل» دو محقق انسان‌شناسی از دانش‌گاه میشیگان برای تحقیق در موردِ زبان و فرهنگ قبیله‌ی «هاگلیتو» که یکی از قبایل بومی ساکن جنگل‌های آمازون است راهیِ یک سفر دو هفته‌ای پر ماجرا شدند. جک در این سفر علاوه بر لوازم مورد نیاز، دو شیشه قرص آسپرین نیز به‌هم‌راه داشت. یک روز که رییس قبیله دچار سردرد شدیدی بود، جک چند قرص آسپرین به او داد. بهبودی سریع رییس قبیله موجب حیرت رییس و بقیه‌ی اعضای قبیله شد. همین مسئله باعث شد که از آن به‌بعد افراد قبیله‌ی هاگلیتو شیشه‌های محتوی قرص آسپرین را جادویی سحرآمیز بدانند و همگی در پی تصاحب آن‌ها باشند.

روز قبل از بازگشت، کارل دزدیده شد و جک بعد از مدت‌ها گفت‌وگو با رییس قبیله متوجه شد که تعدادی از افراد قبیله کارل را ربوده‌اند و او را فقط با سه عدد کدو، یک عدد شانه، یک عدد سکه‌ی کروزادوی برزیلی و یک چاقو عوض می‌کنند! جک این چیزها را هم‌راه نداشت و به‌نظر می‌رسید که او نمی‌تواند کارل را آزاد کند. او بعد از قدری پرس‌وجو متوجه شد که در این قبیله مبادلات زیر را می‌تواند انجام دهد:

کارل هیل	$\leftrightarrow$	3G H B M
2A	$\leftrightarrow$	H G
A	$\leftrightarrow$	B C F
2A	$\leftrightarrow$	N
B	$\leftrightarrow$	M H
N H	$\leftrightarrow$	3C 4D
G	$\leftrightarrow$	2C 2D
2G	$\leftrightarrow$	N
M	$\leftrightarrow$	3N
M	$\leftrightarrow$	H 2C
A	$\leftrightarrow$	C

که هر حرف علامت اختصاری یک کالا می‌باشد، به این شرح:

A = شیشه‌ی آسپرین
B = سکه‌ی کروزادوی برزیلی
C = شمع
D = سگ
F = قلاب ماهی‌گیری
G = کدو
H = شانه
M = چاقو
N = نخ ماهی‌گیری

عدد قبل از هر حرف نشان‌دهنده‌ی تعداد است و معاملات در هر دو طرف انجام پذیرند. مثلاً می‌توان دو عدد شمع و دو عدد سگ را با یک عدد کدو تعویض کرد.

۱. آیا می‌توانید دنباله‌ای از مبادلات را پیدا کنید که جک بتواند با دادن ۲ شیشه‌ی آسپرین کارل را نجات دهد؟

۲. آیا می‌توانید با ۶ عدد از این مبادلات کارل را با ۲ شیشه‌ی آسپرین تعویض کنید؟ اگر جواب شما منفی است، کم‌ترین تعداد مبادلات چه‌قدر است؟ چرا؟

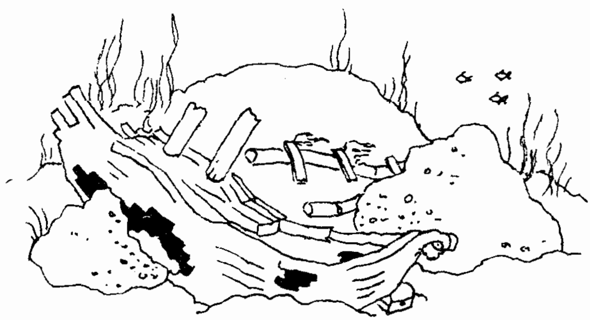
مسئله‌ی ۳۳. گنج در کشتی غرق‌شده

یک جهان‌گرد در یکی از سفرهای طولانی دریایی خود و از صحبت‌هایی که با ملوانان و کارکنان کشتی‌ها کرده بود متوجه شد که مدتی پیش یک کشتی حاملِ شمش‌های

طلا در محلی به فاصله‌ی ۹۰۰۰ متری دماغه‌ی جزیره‌ی «وانیتی» غرق شده است، اما هیچ‌کس نمی‌داند در چه جهتی. افراد زیادی تاکنون به‌امید یافتن گنج به این جزیره سفر کرده‌اند. جهان‌گرد تصمیم گرفت دست‌کم برای امتحان شانسش هم که شده مدتی را صرف جست‌وجوی گنج کند و محل آن به‌نام X را پیدا کند. این بود که در جزیره با تعدادی از ساکنان صحبت کرد و اطلاعات زیر را در مورد صخره‌هایی به‌نام B تا F که در کف دریا قرار دارند به‌دست آورد:

صخره‌ی D در ۵۰۰۰ متری X قرار دارد.
صخره‌ی D در ۳۰۰۰ متری غرب صخره‌ی B واقع است.
صخره‌ی D در ۱۰۰۰ متری صخره‌ی F قرار دارد.
صخره‌ی E نسبت به X به صخره‌ی F نزدیک‌تر است.
فاصله‌ی صخره‌های E و B ۴۰۰۰ متر است.
فاصله‌ی صخره‌های E و D ۵۰۰۰ متر است.
فاصله‌ی صخره‌ی B از X ۴۰۰۰ متر است.
فاصله‌ی E و دماغه‌ی جزیره‌ی وانیتی ۱۰۰۰ متر است.
فاصله‌ی صخره‌های B و C ۳۰۰۰ متر است.
فاصله‌ی صخره‌ی C از X ۵۰۰۰ متر است.
و بالاخره صخره‌ی F در شمالِ غربی (بیش‌تر متمایل به غرب) صخره‌ی C و در فاصله‌ی ۶۰۰۰ متری آن واقع است.

آیا می‌توانید محل گنج را تعیین کنید؟



شکل ۲۵. کشتی غرق‌شده در ۹۰۰۰ متری جزیره قرار دارد.

مسئله‌ی ۳۴. سندباد در سرزمین غول‌های متفکر

سندباد، ماجراجوی جوان، در سفری که به سرزمین «مهدزیسکی» داشت گرفتار گروهی از غول‌ها شد. رییس غول‌ها «مهدزیسه دزاود» که غولی جوان و علاقه‌مند به بازی‌های فکری بود از سندباد خواست که در یک مسابقه‌ی فکری شرکت کند و به او قول داد در صورتی‌که در این مسابقه برنده شود او را آزاد کند.

او ۱۳ عدد کارت را که روی یکی از آن‌ها علامت زده شده بود به‌پشت طوری روی زمین چید که فقط خودش می‌دانست کارت علامت‌زده شده کدام است. سپس از سندباد خواست به یکی از ۱۳ کارت روی زمین که حدس می‌زند علامت دارد اشاره کند. سپس ۱۱ کارت از ۱۳ کارت روی زمین را طوری برداشت که کارت علامت‌دار روی زمین باقی بماند، و از سندباد خواست دوباره یکی از دو کارت باقی‌مانده را انتخاب کند، و گفت که اگر همان کارتی را که بار اول انتخاب کرده بود انتخاب کند و کارت علامت زده شده باشد برنده و آزاد خواهد شد، و اگر کارت، علامت نداشته باشد بازنده است. ولی اگر نظرِ اولش را عوض کند و کارت دوم (کارت باقی‌مانده‌ای که قبلاً انتخاب نشده است) را انتخاب کند و آن کارت علامت نداشته باشد، بازنده است وگرنه بازی یک‌بار و فقط یک‌بار دیگر به‌همین ترتیب انجام خواهد شد. در بار دومِ بازی سندباد به‌همین ترتیب حق انتخاب کارت‌ها را دارد و اگر کارت درست را انتخاب کند برنده است و در غیر این صورت بازنده.

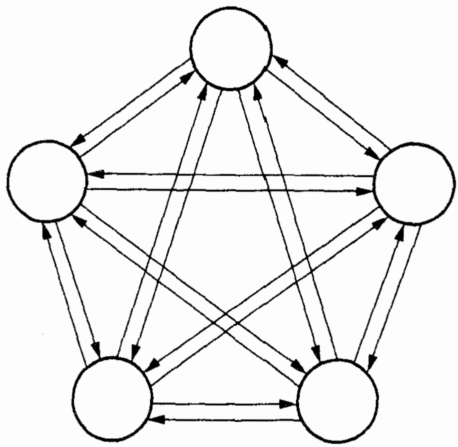
۱. سندباد در هر مرحله کدام کارت را باید انتخاب کند که احتمال بردش بیش‌تر باشد؟

۲. احتمال برنده شدن سندباد با روشی که در مرحله‌ی ۱ ذکر کرده‌اید چه‌قدر است؟

مسئله‌ی ۳۵. آدم‌خوارها

جک و کارل بعد از رهایی از دست افراد قبیله‌ی «هاگلیتو» بلافاصله تصمیم به بازگشت گرفتند. در راهِ بازگشت هنگام غروب آفتاب به محدوده‌ی قبیله‌ی دیگری رسیدند و تصمیم گرفتند که شب را در چادری نزدیک قبیله استراحت کنند.

آن‌ها بعد از دیدن رییس قبیله و صحبت کردن با او متوجه شدند که یک شکارچی غیربومی نیز صبح آن روز به محدوده‌ی قبیله آمده است و قصد دارد قبیله را همان شب ترک کند. این بود که به دیدن مرد شکارچی رفتند. شکارچی از دیدن جک و کارل بسیار



شکل ۲۶. هر پیکان بیان‌گرِ این ادعاست که «طرفِ مقابل آدم‌خوار نیست». شکل فوق نشان‌دهنده‌ی ۵ عضو قبیله است که هم‌دیگر را غیر آدم‌خوار معرفی می‌کنند.

خوش‌حال شد و گفت: «من امروز صبح خیلی زود برای شکار به این منطقه آمدم و قصد داشتم چند روز در این منطقه بمانم، ولی طی روز متوجه شدم در این قبیله تعدادی آدم‌خوار وجود دارد ولی مطمئنم که دست‌کم یک نفر غیر آدم‌خوار نیز در این قبیله وجود دارد. افراد غیر آدم‌خوار همیشه راست‌گو هستند ولی آدم‌خوارها دروغ هم می‌گویند. براساس یک رسم قدیمی هیچ آدم‌خواری با افراد هم قبیله‌ی خودش و مهمانانِ آن‌ها کاری ندارد. من سعی کردم با جمع آوری اطلاعات و سؤال کردن از افراد قبیله، دست‌کم یک غیرآدم‌خوار پیدا کنم و شب را در چادر او بمانم ولی موفق نشدم. من از افراد قبیله در مورد هم‌دیگر سؤالاتی کردم و فهمیدم که این قبیله ۲۵ مرد دارد که:

- افراد ۱ تا ۵ هم‌دیگر را غیرآدم‌خوار می‌دانند (شکل ۲۶). آن‌ها هم‌چنین می‌گویند ۱۸ آدم‌خوار و ۱۴ غیرآدم‌خوار است.
- شماره‌های ۶ تا ۸ نیز هم‌دیگر را غیرآدم‌خوار و ۱۳ را آدم‌خوار و ۳ را غیرآدم‌خوار می‌دانند.
- ۹ و ۱۰ هم‌دیگر را غیرآدم‌خوار می‌دانند.
- ۱۱ تا ۲۰ هم‌دیگر را تقریباً غیرآدم‌خوار می‌دانند جز این‌که ۱۸ و ۱۹ هم‌دیگر را آدم‌خوار می‌نامند و ۱۵ ادعا می‌کند که ۹ آدم‌خوار است.

- ۲۱ تا ۲۵ هم‌دیگر را غیرآدم‌خوار می‌دانند. ۲۲ می‌گوید که ۹ غیرآدم‌خوار و ۱۱ آدم‌خوار است.

«اگر شما بتوانید به کمک این اطلاعات غیرآدم‌خوارها را پیدا کنید می‌توانیم امشب این جا بمانیم وگرنه شما هم باید با من بیایید.»

چه کسانی مطمئناً در این قبیله غیرآدم‌خوارند؟ چه کسانی حتماً آدم‌خوارند؟

مسئله‌ی ۳۶. ملوان زبل! و کوسه‌های خون‌خوار

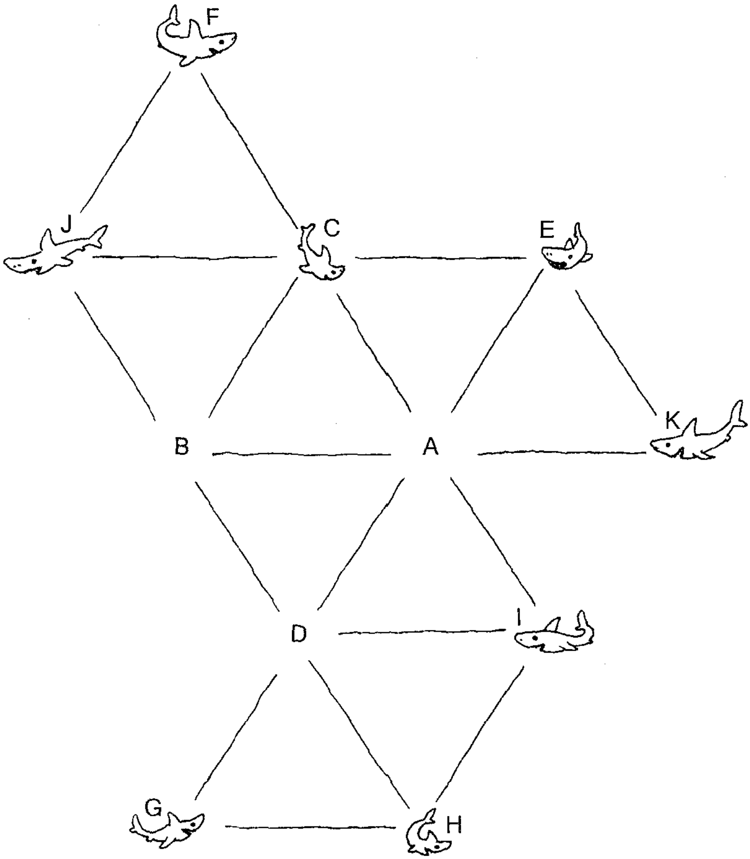
ملوان زبل در یکی از سفرهای طولانی دریایی خود گرفتار دزدان دریایی شد و دزدان دریایی او را در انبار کشتی خودشان زندانی کردند. ناحیه‌ای که ملوان زبل در آن اسیر دزدان دریایی شده بود پر از کوسه بود و در صورتی که ملوان زبل می‌خواست از دست دزدان دریایی فرار کند باید خودش را از شر کوسه‌ها نیز خلاص می‌کرد.

او موفق شد در انبار کشتی دزدان دو اسلحه‌ی مخصوص شکار کوسه‌ها و مقداری ماهی سرخ‌کرده پیدا کند. البته از هر اسلحه‌ی مخصوصِ شکار کوسه‌ها فقط می‌توان یک‌بار استفاده کرد، ولی با این اسلحه‌ها می‌توان از فاصله‌ی ۱۰۰ متری یک کوسه را هدف قرار داد. ماهی‌ها کوسه‌ها را از فاصله‌ی ۹۰۰ متری به طرف خودشان می‌کشند؛ مگر این‌که خون دیگری در منطقه باشد.

ملوان زبل با توجه به تجربه‌هایش در سفرهای قبلی نقشه‌ای مطابق شکل ۲۷ تهیه کرد که در آن نقشه محل کشتی با A و مقصد با F نشان داده شده است. طول هر ضلع مثلث‌های متساوی‌الاضلاع در نقشه ۱۰۰۰ متر است و ملوان قصد دارد به‌دلیل مشکلات جهت‌یابی در طول این اضلاع حرکت کند.

در مدتی‌که هر کوسه ۶۰۰ متر شنا می‌کند ملوان زبل فقط می‌تواند ۱۰۰ متر شنا کند. ضمناً او می‌تواند در مدتی‌که کوسه‌ها مشغول دریدن و خوردن جسد کوسه‌ی دیگر و یا ماهی‌ها هستند، ۲۰۰۰ متر شنا کند. خون یک کوسه‌ی شکارشده سایر کوسه‌ها را از فاصله‌ی ۲۰۰۰ متری به طرف خودش می‌کشد. هم‌چنین واضح است که ملوان زبل هرگز نمی‌تواند به‌صورت رو در رو با یک کوسه روی یکی از اضلاع روبه‌رو شود و از او عبور کند. یعنی اگر کوسه به‌طور مستقیم به‌طرف او حرکت کند نمی‌تواند با اسلحه کوسه را شکار کند. ضمناً برد دید هر کوسه ۵۰ متر است. توجه کنید که ملوان و کوسه‌ها فقط می‌توانند روی اضلاع مثلث‌ها حرکت کنند.

ملوان زبل اگر در نقطه‌ی A به دریا بپرد، چگونه می‌تواند از دست کوسه‌ها فرار کند؟



شکل ۲۷. نقشه‌ای که ملوانِ زبل از منطقه و مسیرِ حرکت کوسه‌ها تهیه کرده است.

فصل ۵

جنگِ قدرت

مسئله‌ی ۳۷. مبارزه‌ی انتخاباتی

برای انتخابات ریاست جمهوری در کشور «سن‌سون» ۳ نفر، آقایان «گوارز»، «سونون» و «لیبرتی» نامزد شده بودند. قبل از انتخابات با نظرخواهی از مردم روشن شد که ۴۰ درصد از رأی‌دهندگان طرف‌داران جدی گوارز و ۴۰ درصد از رأی‌دهندگان طرف‌داران جدی سونون هستند. به این ترتیب تنها کم‌تر از ۲۰ درصد از رأی‌دهندگان طرف‌داران لیبرتی هستند. ولی با این وجود آقای لیبرتی به‌عنوان رییس جمهور انتخاب شد. این نتایج جنجال زیادی برانگیخت و روزنامه‌ها ادعا کردند که حتماً در آراء تغییری داده شده است. ولی دولت از پاسخ‌گویی و بحث در این مورد خودداری کرد.

دلائل این انتخاب را می‌توان از لابه‌لای قوانین و مقرراتِ حاکم بر انتخابات کشف کرد: مبارزات به‌صورت دو نفری و حذفی انجام می‌شد، به این معنی که در هر روز فقط ۲ نفر با هم مبارزه می‌کردند و هرکس رأی کم‌تری می آورد از انتخابات حذف می‌شد. به این ترتیب آیا به‌نظر شما امکان دارد که لیبرتی بدون تقلب انتخاب شده باشد؟

بله، چنین چیزی امکان دارد و این تنها به‌دلیل مرحله‌ای و حذفی بودن انتخابات است. به‌دلیل رقابتی که بین گوارز و سونون وجود داشت و بدون توجه به ترتیب انتخابات در هر حالت لیبرتی برنده می‌شد، زیرا براساس نظر سنجی، طرف‌دارانِ گوارز، لیبرتی را به سونون و طرفدارانِ سونون، لیبرتی را به گوارز ترجیح می‌دادند.

بعد از انتخاب شدن لیبرتی به‌عنوان رییس جمهور کشور، او باید شخصی را به‌عنوان معاون خود انتخاب کند. او ۴ نفر A، B، C و D را نامزد کرده است ولی ترجیح می‌دهد که C

ببرد.

اعضای کنگره که باید معاون را انتخاب کنند ۱۰۰ نفر هستند و نظرات آن‌ها به این صورت است:

$\mathrm{C} > \mathrm{A} > \mathrm{D} > \mathrm{B}$: ۱۷ نفر[1]
$\mathrm{A} > \mathrm{B} > \mathrm{D} > \mathrm{C}$: ۳۲ نفر
$\mathrm{D} > \mathrm{B} > \mathrm{C} > \mathrm{A}$: ۳۴ نفر
$\mathrm{B} > \mathrm{A} > \mathrm{C} > \mathrm{D}$: ۱۷ نفر

۱. اگر مبارزات به‌صورت دودویی باشد، یعنی ابتدا ۲ نفر با هم مبارزه کنند و سپس کسی که رأی کم‌تری بیاورد از مبارزات حذف شود و بقیه مبارزه کنند، آیا شما می‌توانید انتخابات را طوری ترتیب دهید که C انتخاب شود. فرض کنید در هر دور هر کس مطابق نظرش که قبلاً گفته شده است رأی دهد.

۲. فرض کنید که شما حق انتخاب نفرات دور اول را داشته باشید و رقیب شما حق انتخاب نفرات دور دوم را داشته باشد. آیا شما می‌توانید نفرات دور اول را طوری انتخاب کنید که مطمئن باشید با هر انتخاب رقیب C یا A در این مبارزات برنده می‌شود؟ اگر جواب شما مثبت است دور اول را تعیین کنید و نشان دهید با هر انتخابِ رقیب، باز هم C یا A انتخاب می‌شود و اگر جواب شما منفی است، ادعای خود را ثابت کنید.

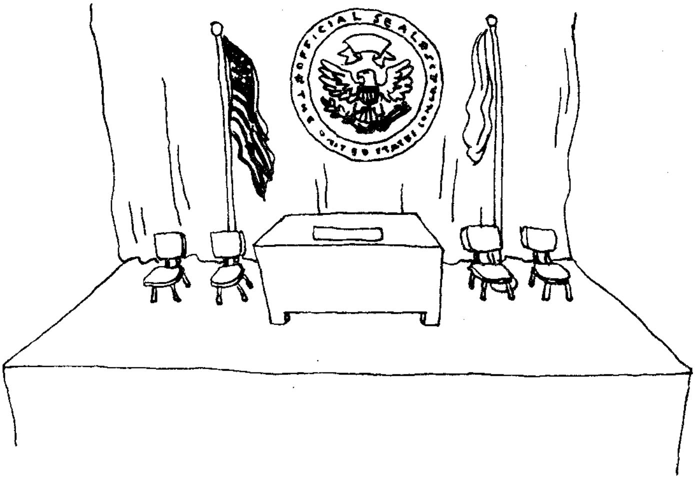
۳. ثابت کنید که شما با انتخابِ ترتیب مبارزات می‌توانید هر کدام از افراد A، B، C یا D را برنده کنید.

۴. آیا بند ۱ را می‌توانید در حالت کلی حل کنید؟

مسئله‌ی ۳۸. جنگ قدرت

به‌تازگی کشمکش‌های بسیاری بین نمایندگانِ مجلس سنا و نخست‌وزیر در مورد توسعه یا عدم توسعه‌ی سلاح‌های هسته‌ای در گرفته است. به‌همین دلیل نخست‌وزیر که می‌خواهد میزان قدرت خودش را بسنجد از یک مشاور امور سیاسی تقاضای هم‌کاری کرده است. این مشاور برای قدرت تعریف زیر را بیان کرده است:

[1] این عبارت به این معنی است که ۱۷ نفر C را به A، A را به D و D را به B ترجیح می‌دهند.



شکل ۲۸. قدرتِ کدام‌یک بیش‌تر است؟ نخست‌وزیر یا نمایندگان سنا؟

«یک فرد دارای قدرت است اگر بتواند نتیجه‌ی یک رأی‌گیری را عوض کند.»

همان‌طور که می‌دانید مجلس سنا ۱۰۰ نماینده دارد و نخست‌وزیر فقط وقتی نظر می‌دهد که تعدادِ آرای مثبت و منفی برابر باشد. ضمناً طبق تعریفِ همان مشاور، فرد A از فرد B قوی‌تر است اگر این دو شرط هر دو برقرار باشند:

الف) موقعیتی وجود دارد که A بدون توجه به تصمیم B می‌تواند نتایج رأی‌گیری را تعیین کند. (یعنی A می‌تواند باعث شود نتیجه مثبت یا منفی گردد.)

ب) در هیچ موقعیتی B نتواند بدون توجه به تصمیم A نتایج رأی‌گیری را تعیین کند.

۱. آیا نخست‌وزیر از نمایندگان مجلسِ سنا قوی‌تر است؟ فرض کنید نمایندگان همگی رأی مثبت یا منفی بدهند و رأی ممتنع بین آرا وجود ندارد.

۲. اگر نمایندگان بتوانند رأی ممتنع بدهند آیا تغییری در پاسخ شما به قسمت ۱ به‌وجود می آید؟

۳. اگر نخست‌وزیر حق داشته باشد وقتی که تفاوت آرای مثبت و منفی کم‌تر یا مساوی با ۲ است ۳ رأی بدهد، آیا از یک نماینده‌ی معمولی قوی‌تر است؟ (در هر دو حالت، با رأی ممتنع و بدون رأی ممتنع)

مسئله‌ی ۳۹. چاه‌های نفت

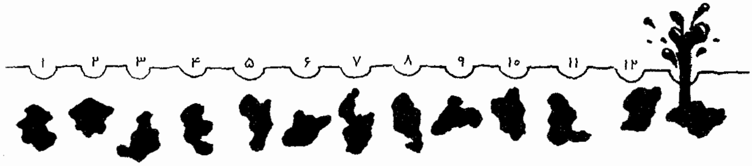
جزایر «مالویناس» یا به قول انگلیسی‌ها جزایر «فالکلند» چند جزیره‌ی کوچک هستند که به علت دارا بودن چاه‌های نفت اهمیت ویژه‌ای دارند. وجود این چاه‌های نفت باعث شده است که این جزایر باعث کشمکش و نزاع بین دو کشور انگلیس و آرژانتین شود. بعد از مدت‌ها کشمکش سرانجام هر دو کشور تصمیم گرفتند یک راه‌حل مسالمت‌آمیز برای این موضوع پیدا کنند. تعداد این چاه‌های نفت سیزده حلقه است که روی خط راستی، با فاصله‌های مساوی قرار دارند. مقدار نفت هر یک از این چاه‌ها تقریباً با هم برابر است و بر همین اساس انگلستان پیش‌نهادِ بازی زیر را برای تقسیم چاه‌های نفت داد:

در هر مرحله از بازی هر یک از دو کشور به نوبت یک چاه را انتخاب می‌کند، و در پایان چاه‌های باقی‌مانده به کشوری تعلق می‌گیرد که نزدیک‌ترین چاه را به آن چاه داشته باشد. اگر فاصله‌ی نزدیک‌ترین چاه هر دو کشور از این چاه باقی‌مانده یکی باشد چاه به هیچ‌یک از دو کشور تعلق نمی‌گیرد. دو کشور به‌قدری با هم رقابت دارند که حاضرند از چاه هیچ استفاده‌ای نشود و چاه به طرف مقابل نرسد.

۱. اگر انگلیس شروع به بازی کند و دو مرحله بازی کنند، آیا می‌توانید روشی برای آرژانتین بیابید که در انتها تعداد چاه‌های آرژانتین بیش‌تر باشد؟ فرض کنید انگلیس در ابتدا چاه وسط را انتخاب کرده است.

۲. اگر آرژانتین شروع به بازی کند و دو چاه انتخاب کند و سپس انگلیس دو چاه دیگر انتخاب کند، نشان دهید که آرژانتین می‌تواند طوری بازی کند که برنده باشد.

۳. نشان دهید در یک بازی دو مرحله‌ای اگر آرژانتین شروع به بازی کند، دستِ‌کم می‌تواند تساوی را برای خودش تضمین نماید.

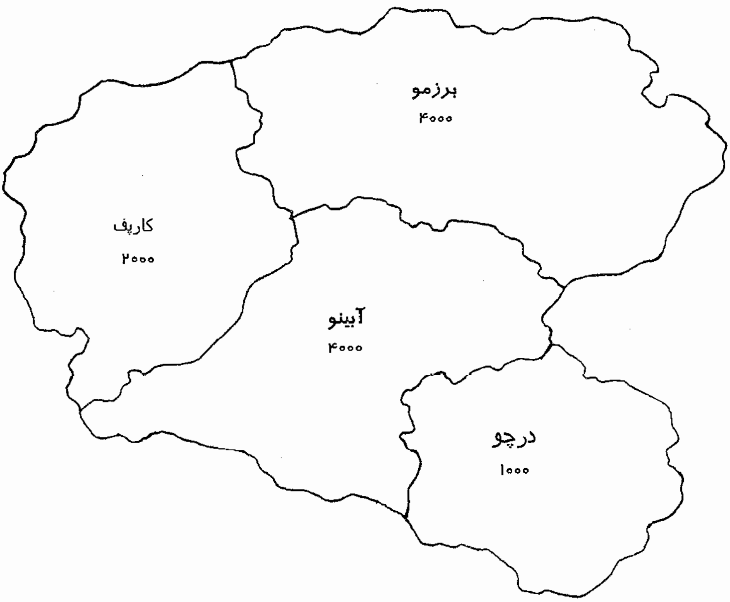


شکل ۲۹. سیزده چاهِ نفت با فاصله‌های مساوی روی یک خط قرار گرفته‌اند. مقدار نفت تمام چاه‌ها با هم برابر است. به‌ترین راه برای برد در این بازی چیست؟

۴. اگر به‌جای ۱۳ چاه نفت ۳۱ چاه روی خط راست قرار داشته باشند و آرژانتین شروع به بازی کند آیا می‌تواند در یک بازی ۳ مرحله‌ای برد خود را تضمین کند؟ در یک بازی ۴ مرحله‌ای چه‌طور؟

مسئله‌ی ۴۰. تقسیم قدرت

قرار است مردم منطقه‌ای در «وسگراد» برای تصمیم‌گیری در امور منطقه‌ی خودشان نمایندگانی انتخاب کنند. در این منطقه ۴ اقلیت «آبینو»، «برزمو»، «کارپف» و «درچو» به‌ترتیب با جمعیت ۴۰۰۰، ۴۰۰۰، ۲۰۰۰ و ۱۰۰۰ نفر با هم زندگی می‌کنند. می‌گوییم X از Y قوی‌تر است اگر موقعیتی وجود داشته باشد که بدون توجه به این‌که نظر Y مثبت یا منفی باشد X بتواند نتیجه‌ی رأی‌گیری را تعیین کند. قرار است هریک از ۴ گروه یک نماینده انتخاب کند.



شکل ۳۰. تقسیمات محلی منطقه‌ی «وسگراد». آیا روشی برای تقسیم متناسب قدرت بین نمایندگان وجود دارد؟

۱. اگر نمایندگانِ آبینو و برزمو هر یک حق ۴ رأی داشته باشند، نماینده‌ی کارپف حق ۲ رأی و نماینده‌ی درچو حق یک رأی داشته باشد، آیا موقعیتی برای هر نماینده وجود دارد که در آن قدرت داشته باشد؟ (بتواند تصمیم نهایی را تعیین کند؟)

۲. آیا نحوه‌ی دیگری برای دادن ضریب به هر یک از نمایندگان وجود دارد که اولاً هر یک از نمایندگان دستِ‌کم در یک موقعیت قدرت داشته باشد و ثانیاً قدرت نماینده‌ی هر گروه با جمعیت آن متناسب باشد؟

۳. آیا می‌توان این چهار اقلیت را به زیراقلیت‌هایی تقسیم کرد، به‌طوری که هر زیراقلیت دارای یک نماینده و تعداد کل نمایندگان فقط ٦ تا باشد و ضمناً قدرت هر نماینده با جمعیت اقلیتش متناسب باشد و هیچ نماینده‌ای بدون قدرت نباشد؟

فصل ۶

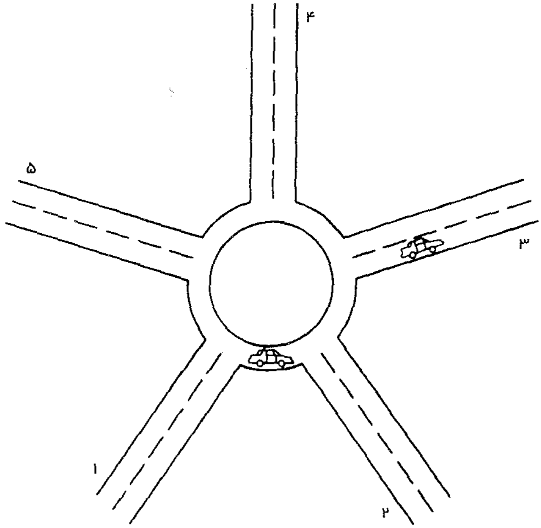
مشکلاتِ حرفه‌ای

مسئله‌ی ۴۱. کنترل ترافیک

استفاده از میدان در تقاطعِ خیابان‌ها برای کاهش زمان توقف خودروهاست. خودروها از یک خیابان وارد یک میدان می‌شوند، درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت دور میدان حرکت می‌کنند و سپس از خیابانی که می‌خواهند، خارج می‌شوند. به‌طور مثال در شکل ۳۱، ماشینی که از خیابان ۱ وارد می‌شود و می‌خواهد بهِ خیابان ۳ برود باید از تقاطع خیابان ۲ بگذرد و از خروجی ۳ خارج شود و اگر بخواهد از خروجی ۵ خارج شود باید ورودی‌های ۳ و ۴ را نیز رد کند.

یکی از فواید استفاده از میدان در تقاطع‌ها این است که هنگامی‌که حجم ترافیک کم باشد، ماشین‌ها پشتِ چراغ قرمز معطل نمی‌شوند و سریع‌تر به مقصد خود می‌رسند! ولی امکان تصادف در میدان‌ها زیادتر است. «عدد تصادف» یک ماشین در یک میدان برابر است با تعداد تقاطع‌هایی که این ماشین در هنگام ورود و یا گذشتن از میدان با مسیر ماشین‌های دیگر خواهد داشت. عدد تصادف نشان‌دهنده‌ی احتمال تصادف یک ماشین در میدان است. مثلاً عدد تصادف ماشینی که از ورودی ۱ وارد و از خروجی ۳ خارج شود ۲ است، و عدد تصادف ماشینی که از ۵ وارد و از ۲ خارج می‌شود ۲ است.

مسؤولین ترافیک برای ساخت یک تقاطع با ۱۲ خیابان دوطرفه، ابتدا تصمیم گرفتند که از یک میدان استفاده کنند. ولی در این حالت یک ماشین که از یک ورودی وارد شود و بخواهد به اولین ورودی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت برود (یعنی حرکتِ «یو» شکل انجام دهد) عدد تصادفش برابر با ۱۱ می‌شود و به این ترتیب احتمال تصادف خیلی بالا می‌رود.



شکل ۳۱. میدانی با ۵ ورودی

طراحان سپس تصمیم گرفتند که به‌جای ۱ میدان از ۲ میدان استفاده کنند که با یک خیابان به هم متصل می‌شوند، ولی در این حالت نیز ممکن است عدد تصادف یک ماشین به ۱۱ برسد.

آیا شما می‌توانید چند میدان متصل به هم طوری طراحی کنید که عدد تصادف هر ماشین کم‌تر از یا مساوی با ۹ باشد؟

مسئله‌ی ۴۲. محافظانِ جنگل

یک گروهان جنگلی، ۱۶ منطقه‌ی حفاظتی دارد. هنگام حمله‌ی دشمن، هر کدام از محافظان در این مناطق باید از وضعیت بقیه‌ی مناطق مطّلع شود. هر منطقه‌ی حفاظتی در هنگام حمله می‌تواند تعداد سربازان حمله‌کننده را تشخیص دهد.

محافظان می‌توانند با بی‌سیم از حال یک‌دیگر مطلع شوند. زمان هر مکالمه ۱ دقیقه است و کلیه‌ی اطلاعات دو طرف در همین ۱ دقیقه مبادله می‌شود.

۱. کم‌ترین زمانی که لازم است تا این ۱۶ محافظ کاملاً از حال یک‌دیگر باخبر شوند چه‌قدر است؟ چگونگی انجام مکالمات را تعیین کنید.

۲. آیا ممکن است زمان مطلع شدن ۱۰ محافظ، کم‌تر از زمان لازم برای مطلع شدن ١٦ محافظ از وضعیت کلی باشد؟

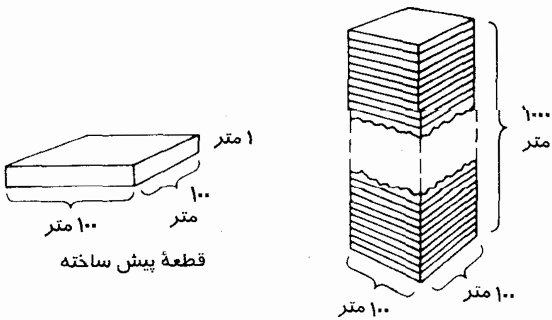
۳. آیا ۱۰ محافظ در زمانی برابر با زمان ١٦ محافظ می‌توانند از حال یک‌دیگر خبردار شوند؟

۴. آیا زمان لازم برای اطلاع‌رسانی به کل افراد با تعدادِ افراد متناسب است؟

مسئله‌ی ۴۳. برج یک کیلومتری

یک سرمایه‌دار بزرگ می‌خواهد دست به کاری بزند که نامش برای همیشه در تاریخ ثبت شود! او می‌خواهد یک برجِ یک کیلومتری بسازد و تصمیم دارد که این کار را در اسرع وقت انجام دهد. قرار بر این است که برای ساختن برج از قطعات پیش‌ساخته استفاده شود. برای ساختن برج، این قطعات را می‌توان روی هم قرار داد (مانند بازی لگوی بچه‌ها).

هرکدام از این قطعات ۱۰۰ متر طول و ۱۰۰ متر عرض و ۱ متر ارتفاع دارند و از بالا و پایین گیره‌هایی دارند که آن‌ها را به قطعات دیگر متصل می‌کند. فرض کنیم که این قطعات آن‌قدر سبک هستند که بتوان ۱۰۰۰۰ تا از آن‌ها را روی هم قرار داد و یک نوع جرثقیل وجود دارد که می‌تواند یک ستون ۵۰۰۰ تایی از این قطعات را بلند کند و روی قطعات دیگر بگذارد. هم‌چنین فرض کنید که به تعداد لازم جرثقیل در اختیار داریم. گذاشتن هر قطعه روی قطعه‌ی دیگر یا هر ستون روی ستون دیگر یک هفته وقت می‌گیرد و اگر ارتفاع ستون بیشتر از ۱۰۰ متر باشد یک هفته دیگر نیز وقت لازم است.



شکل ۳۲. با روی هم گذاشتن ۱۰۰۰ قطعه‌ی پیش‌ساخته برجی به ارتفاع یک کیلومتر ساخته خواهد شد.

۱. حداقل چند هفته لازم است تا یک برج یک کیلومتری ساخته شود؟ روش خود را شرح دهید.

۲. اگر بخواهیم برج ۱۰ کیلومتری بسازیم چه‌قدر طول می کشد؟

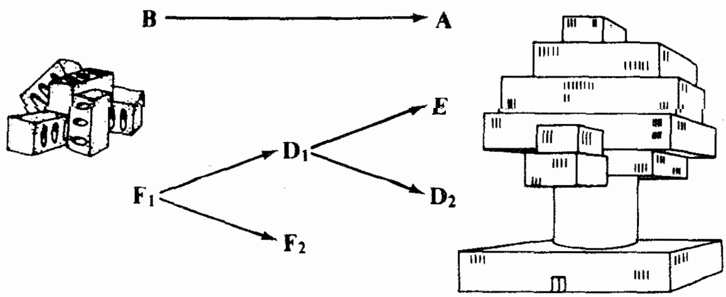
مسئله‌ی ۴۴. هزینه‌ی ساخت

برای ساخت یک واحد ساختمانی صنعتی باید ٦ کارِ A، B، C، D، E و F انجام شود. انجام کارِ A ۴ سال طول می‌کشد. انجام کار B ۲ سال طول می‌کشد، ولی کار B زمانی می‌تواند شروع شود که کار A تمام شده باشد. انجام کار F ۳ سال و کار D ۴ سال طول می کشد. ولی D وقتی می‌تواند شروع شود که دستِ‌کم نصف F انجام شده باشد. کار E ۳ سال طول می‌کشد، ولی وقتی می‌تواند شروع شود که دستِ‌کم نصف D انجام شده باشد.

یک شرکت ساختمانی که عملیات ساخت این واحد صنعتی را بر عهده گرفته بود. حداقل زمان لازم برای اجرای این پروژه را ٦/۵ سال برآورد کرد. ولی سرمایه‌گذار این طرح می‌خواهد که کار ساخت این واحد صنعتی در کم‌ترین زمان ممکن صورت گیرد.

۱. به‌نظر شما آیا ٦/۵ سال کم‌ترین زمان ممکن است؟ ترتیب انجام کار را توضیح دهید.

۲. یکی از سازندگان گفته است که اگر برای هر کار ۵ میلیون دلار اضافی پرداخته شود او می‌تواند آن کار را در نصف زمان گفته شده انجام دهد و اگر برای هر کار ۱۰ میلیون دلار اضافی پرداخت شود او می‌تواند کار را در

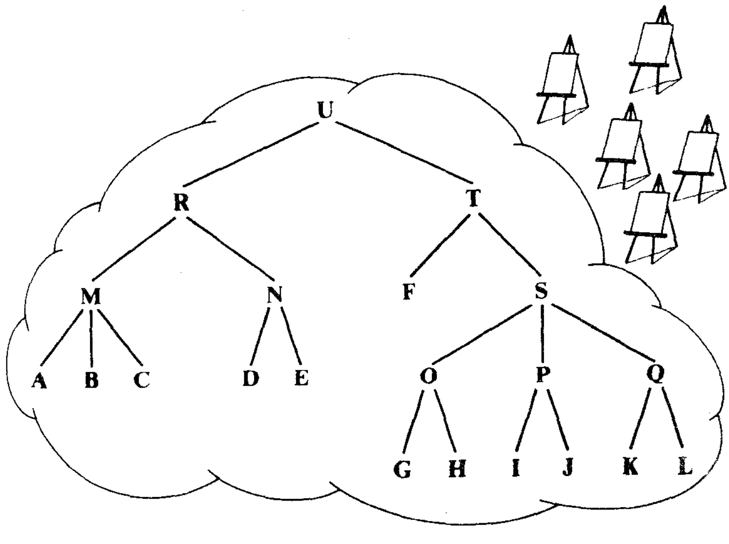


شکل ۳۳. ساخت واحد صنعتی مستلزم انجام شش کار جداگانه است. کار D را می‌توان متشکل از دو جزء D_1 و D_2 و کار F را متشکل از دو جزء F_1 و F_2 دانست.

ربع زمان گفته شده به پایان برساند. کم‌ترین پولی که باید به این سازنده بپردازند تا بتواند این ساختمان را در ۴٫۵ سال تمام کند چه‌قدر است؟

مسئله‌ی ۴۵. مشکل وکیل‌مدافع

وکیل‌مدافعی خود را برای دفاعِ مشکلی که در پیش دارد آماده می‌کند. او در این دفاع باید از مدارک و اسناد زیادی که به هم مرتبط‌اند استفاده کند و با ارائه‌ی چند مدرک مختلف یک مطلب دیگر را نتیجه بگیرد و از آن به‌عنوان مدرک جدیدی در مراحل بعد دفاع استفاده کند. قاضی دادگاه ۵ تابلو در اختیار او قرار داده است تا بتواند مدارک را رویِ آن‌ها بنویسد. او می‌خواهد از این امکان برای ارائه‌ی حرفه‌ای دلائل خود استفاده کند و هیأت منصفه را تحت تأثیر استدلال‌های خود قرار دهد. هر مدرک در اختیار او فقط بر روی یک تابلو جا می‌گیرد. او مدارک از قبل آماده‌شده و مطالبی را که می‌خواهد اثبات کند به‌ترتیب مشخصی بر روی تابلوها می‌نویسد، ولی می‌خواهد وقتی یک مطلب را که بر روی یک تابلو نوشته شده است اثبات کند، تمام مدارکی که مستقیماً برای اثبات آن مورد نیازند در تابلوهای دیگر نوشته شده و هم‌زمان توسط حضار قابل رؤیت باشند. او هم‌چنین نمی‌خواهد پس از پاک کردنِ یک مدرک مجبور شود که دوباره آن را بنویسد. شکل ۳۴ را ببینید.



شکل ۳۴. ارتباط بین مدارک که وکیل مدافع می‌خواهد از آن‌ها استفاده کند.

فرض کنید ارتباط بین مدارک مورد استفاده به‌صورت زیر باشد:

A، B و C نتیجه می‌دهند M.

D و E نتیجه می‌دهند N.

G و H نتیجه می‌دهند O.

J و I نتیجه می‌دهند P.

L و K نتیجه می‌دهند Q.

N و M نتیجه می‌دهند R.

Q، P و O نتیجه می‌دهند S.

S و F نتیجه می‌دهند T.

T و R نتیجه می‌دهند U.

شما به این وکیل‌مدافع کمک کنید و

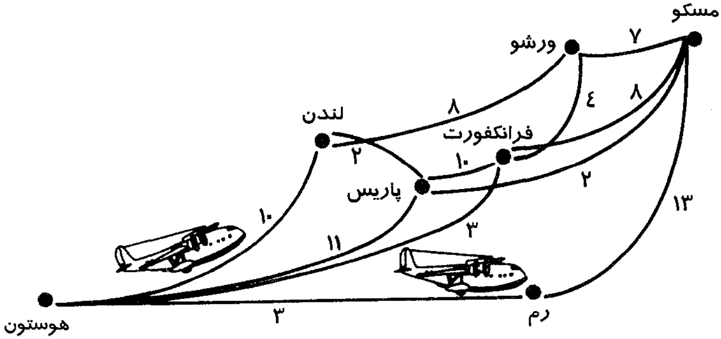
ترتیب نشان دادن مدارک و نحوه‌ی ثبت آن‌ها رویِ هر تابلو را به‌کمک ۵ تابلو با شرایط ذکر شده نشان دهید.

مسئله‌ی ۴۶. حمل بار

یک شرکت تولید قطعات یدکی ماشین‌های حفر چاه نفت در «هوستون»، طی قراردادی که با یکی از مشتریان خود در مسکو منعقد کرده است، متعهد شده است که ۲۰ تُن از ابزار آلات موردِ نیاز مشتری را ظرف مدت بسیار کوتاهی در مسکو تحویل دهد. ولی تا موعدِ تحویل کالاها فرصت زیادی باقی نمانده است و به‌علت تراکم در خطوط هوایی، شرکت‌های هوایی فقط انتقال بار را به‌طور محدود می‌پذیرفتند.

طبق آخرین اطلاعات حداکثر ظرفیت خطوط هوایی برای انتقال بار به‌شرح زیر است:

هوستون به فرانک‌فورت: ۳ تن	لندن به ورشو: ۸ تن
هوستون به پاریس: ۱۱ تن	فرانکفورت به ورشو: ۴ تن
هوستون به رم: ۳ تن	لندن به پاریس: ۲ تن
هوستون به لندن: ۱۰ تن	پاریس به فرانکفورت: ۱۰ تن
رم به مسکو: ۱۳ تن	پاریس به مسکو: ۳ تن
فرانکفورت به مسکو: ۸ تن	ورشو به مسکو: ۷ تن



شکل ۳۵. ظرفیت خطوط هوایی بین شهرهای مختلف (برحسب تُن).

۱. به‌نظر شما آیا این شرکت با این خطوط هوایی می‌تواند ۲۰ تن بار را از هوستون به مسکو ببرد؟ اگر پاسخ شما مثبت است مسیر و میزان انتقال بار در هر مسیر را بیان کنید و اگر جواب شما منفی است ثابت کنید.

۲. بیش‌ترین باری که در این مسیر قابل انتقال است چه‌قدر است؟ ثابت کنید که بیش‌تر از این مقدار امکان ندارد.

۳. فرض کنید که این شرکت ۴ هواپیما کرایه کرده است که هر کدام می‌تواند ۳ تن بار حمل کند. این هواپیماها را باید در چه مسیرهایی قرار دهند که بیشینه‌ی ظرفیت ۱۲ تن بیش‌تر از حالتِ فعلی شود.

مسئله‌ی ۴۷. انبار بشکه

یک شرکتِ ساخت مواد شیمیایی ۸ انبار مختلف به نام‌های W_1، W_2، ... و W_8 دارد که در هر کدام ۸ بشکه از ۸ نوع ماده‌ی شیمیایی به نام‌های C_1، C_2، ... و C_8 قرار دارد (از هر ماده‌ی شیمیایی یک بشکه). این مواد در صورتی که با هم مخلوط شوند سمی و برای محیط زیست بسیار خطرناک می‌شوند، در غیر این صورت ضرری ندارند. به‌همین دلیل این شرکت برای جلوگیری از خطر، تصمیم دارد که تمام بشکه‌های حاوی C_1 را به انبار W_1، بشکه‌های حاوی C_2 را به انبار W_2 و ... منتقل کند. برای این کار این شرکت از یک کامیون استفاده می‌کند که هر روز می‌تواند بین دو انبار یک مسیر رفت و برگشت انجام دهد و هم در رفت و هم در برگشت حداکثر ۴ بشکه از مواد شیمیایی مختلف یا مانند هم را منتقل کند.

۱. کم‌ترین زمان برای انجام این کار با کمک این کامیون چند روز است؟
۲. اگر بتوان از کامیون‌های مختلف استفاده کرد ولی هر انبار در هر روز فقط با یک کامیون در ارتباط باشد، حداقل چند روز برای این کار لازم است؟ ثابت کنید زمان به‌دست آمده کمینه است.

* مسئله‌ی ۴۸. مشکل شماره‌ی تلفن

در شهری مرکز تلفن اشکال پیدا کرده است و اکثر شماره‌هایی که گرفته می‌شوند اشتباه می‌افتند. در هر شماره امکان دارد جای دو رقم کنار هم عوض شود. مثلاً اگر کسی شماره‌ی ۱۲۳۴۵ را بگیرد ممکن است در عمل یکی از شماره‌های ۱۲۳۵۴، ۱۲۴۳۵، ۱۳۲۵۴ و یا ۲۱۳۴۵ گرفته شود. به‌همین دلیل مشکلات زیادی برای مردم ایجاد شده است. تعمیرِ مرکز تلفن هزینه و زمان زیادی دارد و به‌همین دلیل مسؤولین مخابرات تصمیم گرفته‌اند که مشکل را به‌صورت دیگری حل کنند. آن‌ها تصمیم گرفته‌اند شماره‌ی تلفن‌ها را ۶ رقمی کنند و مشکل را به این صورت حل کنند که شماره تلفن‌هایی که امکانِ اشتباه در گرفتنشان وجود دارد، اصلاً در لیست وجود نداشته باشند.

مثلاً اگر ۱۰ تا تلفن داشته باشیم و شماره تلفن‌ها هم ۲ رقمی باشند، شماره تلفن‌های مطلوب می‌توانند به‌صورت زیر باشند: ۸۹، ۷۸، ۶۷، ۵۶، ۴۵، ۲۳، ۱۲، ۰۱ و ۹۰.

۱. چرا با استفاده از این شماره‌ی تلفن‌ها مشکل برای ۱۰ نفر حل می‌شود؟
۲. اگر ما ۱۰۰۰۰۰ شماره تلفن ۵ رقمی داشته باشیم، چگونه می‌توان ۱۰۰۰۰۰ شماره‌ی تلفن ۶ رقمی به‌گونه‌ای ساخت که هر جابه‌جایی بین ۲ رقم مجاور منتهی به عددی شود که در لیست شماره‌ی تلفن‌ها موجود نباشد؟

* مسئله‌ی ۴۹. کدسازی

یک مؤسسه‌ی انتقال پیام برای ارسال پیام‌های خود که شامل ۷ نوع حرفِ مختلفِ A، B، C، D، E، F و G است، از دستگاهی مانند تلگراف استفاده می‌کند. با این تفاوت که بین حرف‌های مختلفِ پیام فاصله‌ای وجود ندارد (هر حرف مانند تلگراف یک کدِ شامل خط و نقطه دارد). نکته‌ی مهم در ایجاد کد برای این حروف قابل بازسازی بودن کدها است، زیرا

اگر مثلاً کد A نقطه و کد B نقطه نقطه باشد، هنگام دریافت نقطه نقطه نمی‌توان فهمید کد ارسالی AA بوده یا B. فرض کنید که فرستادن هر نقطه نیم ثانیه و فرستادن هر خط یک ثانیه طول می‌کشد.

> با فرض این‌که در یک متنِ ۱۰۰ حرفی احتمال آمدن D، G، A، B، E، F و C به ترتیب ۳۱، ۱۹، ۱۰، ۲۰، ۷، ۴ و ۹ درصد باشد، آیا می‌توانید برای هر حرف یک کدِ قابل بازسازی پیدا کنید به‌طوری‌که فرستادن این پیام ۱۰۰ حرفی به‌طور متوسط کم‌تر از ۱۹۰ ثانیه طول بکشد؟

مسئله‌ی ۵۰. مشکل مهندس برق **

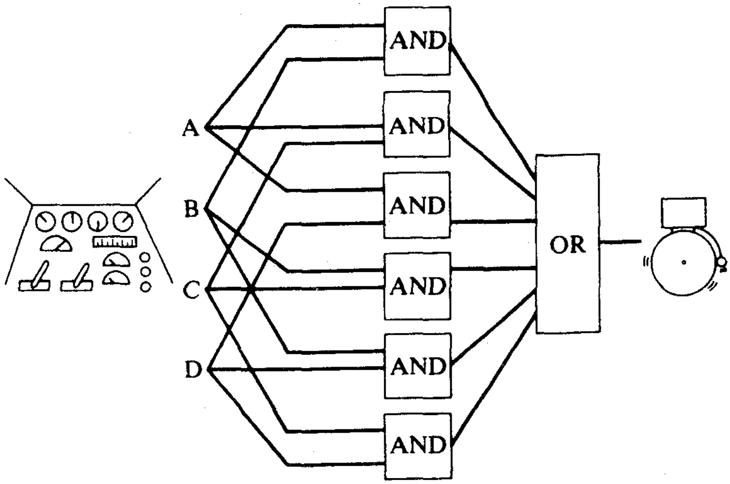
از یک مهندس برق خواسته شده است که مدارهایی طراحی کند که اشتباهات مدارهای دیگر را در یک نیروگاه اتمی پیدا کند. نحوه‌ی عمل به این صورت است که از یک جای‌گاهِ کنترل، ١٦ سیگنال به ١٦ موتور مختلف فرستاده می‌شود. در هر لحظه باید فقط یکی از این موتورها سیگنال GO را دریافت کند، و بقیه باید سیگنال NOT-GO دریافت کنند. البته سیگنال GO به‌صورت ۱ (عبور جریان) و NOT-GO به‌صورت صفر (عدم عبور جریان) مشخص می‌شود. مهندس باید مداری طراحی کند که با استفاده از دروازه‌های AND و OR که حداکثر ۸ ورودی و یک خروجی دارند، تشخیص دهد که فقط به یکی از موتورها سیگنال GO رسیده است. دروازه‌ی AND در صورت ۱ بودن تمام ورودی‌ها، ۱ و در غیرِ این صورت صفر است و دروازه‌ی OR در صورت ۱ بودن دستِ‌کم یکی از ورودی‌ها، ۱ و در صورت صفر بودن تمام ورودی‌ها صفر است.

به عنوان مثال، فرض کنید که ۴ سیگنال A، B، C و D فرستاده شده باشد. مهندس برق می‌تواند دوبه‌دو این سیگنال‌ها را به دروازه‌های AND و سپس حاصل را به یک دروازه‌ی OR بفرستد (شکل ٣٦). به این ترتیب در صورتی که حداکثر یک عدد ۱ در بین سیگنال‌ها وجود داشته باشد، حاصل صفر و درغیر این صورت حاصل یک می‌شود.

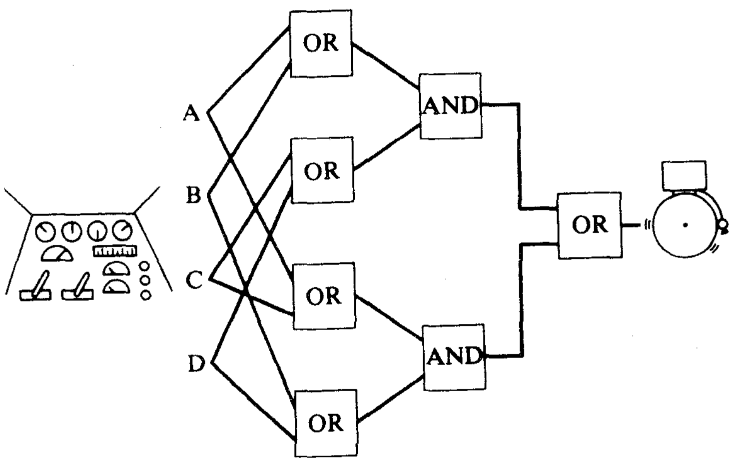
همان‌طور که می‌بینید با روشی که این مهندس پیش‌نهاد کرده است، مطابق شکل ٣٦ نیاز به ۷ دروازه دارد. به نظر شما آیا می‌توان به‌صورت دیگری این مدار را طراحی کرد؟

همان‌طور که در شکل ۳۷ مشاهده می‌کنید: می‌توان این کار را به‌صورت دیگری نیز انجام داد. فکر می‌کنید چرا مدار شکل ۳۷ درست کار می‌کند؟

به این ترتیب با روش مهندس برای حل مسئله‌ی اولیه، نیاز به ۱۴۰ دروازه است که به‌وضوح تعداد این دروازه‌ها بسیار زیاد است.



شکل ۳۶. نمونه‌ی مدار کنترلی برای چهار سیگنال ورودی



شکل ۳۷. مدار دیگری که برای کنترل اشتباه در چهار سیگنال طراحی شده است.

آیا می‌توانید به او کمک کنید و مداری با ۱۳ دروازه طراحی کنید که همین کار را انجام دهد؟ (به کمکِ شکل ۳۷) به این نکته دقت کنید که هر دروازه حداکثر ۸ ورودی دارد.

* مسئله‌ی ۵۱. مشکل معمار

۳۱ نفر تاجر بزرگ تصمیم گرفتند با مشارکت هم، یک مجتمع تجاری بنا کنند. در بحث‌های اولیه‌ی این بازرگانان، این‌طور تصمیم گرفته شد که هرکدام دفتری به ابعاد ۲۰ × ۲۰ در این مجتمع داشته باشند. آن‌ها از یک معمار خواستند که طراحی این مجتمع تجاری را بر عهده بگیرد. شرایط دیگری که این معمار باید رعایت کند این است که ۱۵ تا از اتاق‌های این مجتمع حداکثر ۳ در و ۱۶ تای بقیه باید هر کدام ۱ در داشته باشند.

هم‌چنین چون این بازرگانان زیاد به اتاق هم رفت و آمد می‌کنند، معمار باید مجتمع را طوری طراحی کند که از هر اتاق بتوان با گذشتن از حداکثر ۸ در به هر اتاق دیگر رسید. این مسیر باید حتماً از اتاق‌ها بگذرد، به این معنی که هیچ راه‌رو یا اتاق زاید نباید در طرح مجتمع تعبیه شود. زمینی که برای این کار درنظر گرفته شده است ۱۶۰ × ۱۶۰ است. هم‌چنین معمار می‌تواند فرض کند که دیوارها هیچ ضخامتی ندارند.

آیا می‌توانید با شرایط ذکر شده یک طرح برای این مجتمع بدهید؟

مسئله‌ی ۵۲. شرکت هواپیمایی میکرونزیا

شرکت هواپیمایی «میکرونزیا» قصد دارد بین هفت جزیره خطوط هوایی ایجاد کند. می‌دانیم که مدت زمان پرواز بین هردو جزیره ۱ ساعت است. این شرکت می‌خواهد طوری پروازها را تنظیم کند که هر مسافر پس از مراجعه به فرودگاه و حداکثر طی ۵ ساعت و بدون تعویض هواپیما به هر مقصد دل‌خواه برسد.

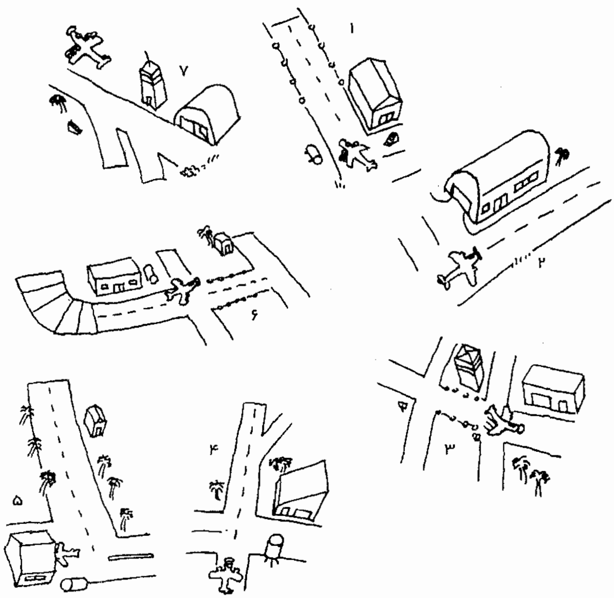
۱. آیا این شرکت با ۷ هواپیما می‌تواند پروازها را طوری برنامه‌ریزی کند که هر مسافر حداکثر طی ۵ ساعت و بدون تعویض هواپیما به مقصد برسد؟

۲. اگر یکی از هواپیماهای این شرکت خراب شود، آیا شرکت هنوز می‌تواند با برنامه‌ریزی ۶ هواپیمای دیگرش تضمین کند که هر مسافر حداکثر بعد

از ۵/۵ ساعت پس از ورود به فرودگاه، به مقصد برسد. مسافرین این‌بار می‌توانند بین پروازهایشان وقفه داشته باشند.

توضیح: این مسئله نمونه‌ای از مسئله‌های ترکیبیاتی زیبایی است که می‌توانید در کتابِ زیر بیابید:

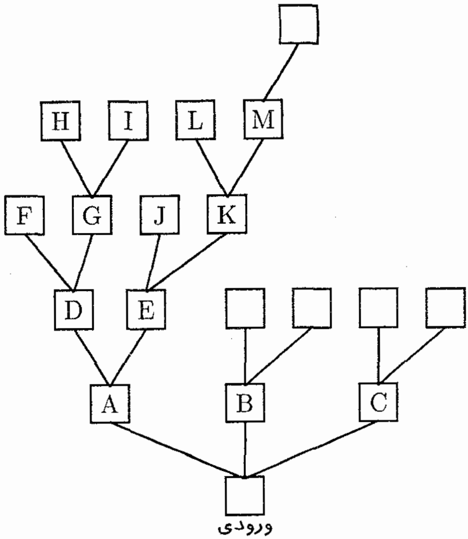
A. P. Street, D. J. Street, *Combinatorics of Experimental Design*, Oxford University Press, 1978.



شکل ۳۸. پرواز هواپیماها باید به چه ترتیبی انجام گیرد که هر مسافر حداکثر ظرفِ ۵ ساعت به مقصد برسد؟

* مسئله‌ی ۵۳. ببر فراری

بعد از فرار یک ببرِ وحشی از باغ وحشِ شهر، مأموران متوجه شدند که ببر وارد یک ساختمان قدیمی شده است. این ساختمان شامل ۱۹ اتاق است که ۱۸ تا از آن‌ها هر کدام به ۱ یا ۳ اتاق دیگر راه دارند و یکی از اتاق‌ها فقط به دو اتاق دیگر راه دارد. اتاق‌ها پنجره‌ای ندارند و فقط یک راه ورودی به ساختمان است. هیچ دری بین اتاق‌ها نیست و اتاق‌ها تاریک هستند به‌طوری که ببر می‌تواند در هر جای یک اتاق مخفی شود. از هر اتاق دقیقاً از یک راه می‌توان



شکل ۳۹. ساختار اتاق‌های ساختمان

به اتاق دیگر رسید. نقشه‌ی این ساختمان مطابق شکل ۳۹ است.

۳ نفر از نگهبانان باغ وحش برای جست‌وجو به ساختمان قدیمی رفتند. این نگهبان باید در کم‌تر از ۳ ساعت این ببر را زنده پیدا کنند، زیرا ببر می‌تواند طی ۳ ساعت با کندن زمین راه خود را پیدا و فرار کند. گشتن کامل هر اتاق ۲۰ دقیقه طول می‌کشد، ولی به‌علت کوچک بودن ساختمان فرض کنید رفتن از هر اتاق به اتاق دیگر طولی نمی‌کشد.

۱. آیا می‌توانید برای گشتن اتاق‌ها و پیدا کردن ببر در حداقل زمانِ ممکن، روشی پیدا کنید؟ روشِ شما باید در کم‌تر از ۳ ساعت ببر را در هر اتاقی که باشد پیدا کند. نکته‌ی مهم این است که هیچ‌گاه نباید از یکی از اتاق‌هایی که قبلاً جست‌وجو نشده است به بیرون راهی بدون نگهبان باشد، چرا که در آن‌صورت ببر می‌تواند فرار کند. مثلاً اگر یک نگهبان در ورودی باشد ببر به هیچ طریقی نمی‌تواند خارج شود، ولی اگر نگهبانان در A، E و D باشند و C و B قبلاً جست‌وجو نشده باشند، ممکن است ببر در B یا C باشد و از در ورودی فرار کند.

۲. ثابت کنید زمانی که به‌دست آورده‌اید کمینه است.

۳. اگر نقشه‌ی ساختمان داده نشده باشد ولی شرایطی که در ابتدا ذکر شد وجود داشته باشد، با این تفاوت که می‌دانیم که اتاقی که از ورودی به آن

راه هست به سه اتاق دیگر وصل است. آیا می‌توانید یک راه حل بدهید ۳ نگهبان بتوانند ببر را پس از مدتی پیدا کنند؟ (توجه کنید که محدودیت زمانی برای جست‌وجو وجود ندارد.)

* مسئله‌ی ۵۴. توزین

یک شرکت فضایی نیاز به خرید تعداد زیادی گیره دارد تا آن‌ها را در طرح آینده‌ی خود استفاده کند. شرکت می‌خواهد گیره‌هایی بخرد که وزنشان کم‌ترین باشد.

۱۸ شرکت ساختِ گیره، نمونه‌هایی پیش‌نهاد داده‌اند، و هر شرکت ۱۰ نمونه‌ی کاملاً یکسان در اختیارِ این شرکتِ قرار داده است. این شرکت می‌خواهد برای توزین دقیق گیره‌ها از ترازوهای دو کفه‌ای استاندارد استفاده کند، و برای این کار ۸ ترازو در اختیار دارد و باید در نیم ساعت این کار را انجام دهد. از این زمان، ۱۵ دقیقه صرف تنظیم ترازوها می‌شود و هر توزین ۴ دقیقه وقت می‌گیرد. به این ترتیب حداکثر می‌توان ۳ توزین روی هر ترازو انجام داد. البته تعداد زیادی کارمند در شرکت به این کار تخصیص داده شده‌اند و می‌توانند هم‌زمان از ترازوها استفاده کنند.

۱. آیا می‌توانید روشی برای توزین پیش‌نهاد کنید که با امکانات موجود بتوان بین ۱۸ نمونه، نمونه‌ای با کم‌ترین وزن پیدا کرد؟ از هر نمونه ۱۰ عدد در اختیار داریم.

۲. حداکثر تعداد گیره‌هایی که در این زمان می‌توان سبک‌ترین آن‌ها را پیدا کرد چند تاست؟

مسئله‌ی ۵۵. مخابره‌ی پیام

در یک منطقه‌ی نظامی ۱۵ مرکز مخابراتی وجود دارد که یکی از آن‌ها مرکز فرماندهی است. به‌دلیل مسائل امنیتی و حفاظت از اطلاعات ارسالی، این مراکز از طریق تعدادی اتصال به‌هم وصل هستند. هر اتصال شامل یک فرستنده و یک گیرنده است که از طریق یک کابل اختصاصی و بدون محدودیت در طول به‌هم وصل هستند. دستگاه فرستنده‌ی هر اتصال در یک مرکز و دستگاه گیرنده‌ی آن در مرکز دیگر قرار دارد. هر مرکز می‌تواند حداکثر دو عدد گیرنده و دو عدد فرستنده داشته باشد. در مجموع ۳۰ عدد اتصال وجود دارد.

فرستاده یک پیام از یک مرکز به مرکز دیگر ۱ دقیقه طول می‌کشد. یک مرکز می‌تواند هم‌زمان یک پیام را از دو فرستنده‌ی خود ارسال کند. هم‌چنین یک مرکز پیامی را که دریافت می‌کند را می‌تواند در ۱ دقیقه به مرکز دیگری که به آن وصل است ارسال کند.

۱. نحوه‌ی اتصال بین این مراکز مخابراتی را طوری تعیین کنید تا در صورتی که هیچ‌یک از دستگاه‌های فرستنده و گیرنده خراب نباشند، بتوان از مرکز فرماندهی یک پیام را حداکثر در ۳ دقیقه به هر مرکز مخابراتی دیگر و نیز از هر مرکز به مرکز فرماندهی حداکثر در ۴ دقیقه ارسال کرد. توجه کنید که یک پیام ممکن است از طریق چند مرکز میانی به مقصد برسد.

۲. در صورت جنگ، ممکن است یکی از مراکز مخابراتی از بین برود. در آن‌صورت نه فرستنده‌ی آن کار می‌کند و نه گیرنده‌ی آن. در این صورت می‌خواهیم که مرکز فرماندهی حداکثر در ۴ دقیقه بتواند به هر مرکز سالم دیگر پیام ارسال و در حداکثر ۵ دقیقه از آن پیام دریافت کند. هم‌چنین اگر فقط مرکز فرماندهی از کار بیفتد، مراکز دیگر باید بتوانند در حداکثر ۸ دقیقه با هم ارتباط برقرار کنند. در این صورت نحوه‌ی اتصال این مراکز را پیدا کنید.

۳. آیا می‌توان با کم‌تر از ۳۰ اتصال مسئله‌ی بند قبل را حل کرد؟

مسئله‌ی ۵۶. استخراج نفت

یک شرکت صنعتی می‌خواهد یک دستگاه استخراج نفت بسازد که بتواند در هر دقیقه ۱ بشکه نفت استخراج کند. این دستگاه شامل ۲ منبع ذخیره‌ی آب و نفت است. مخزن نفت حداکثر ۱۰۰ بشکه نفت و مخزن آب حداکثر ۱۰ بشکه آب را در خود ذخیره می‌کند. برای خنک کردن مته‌ی دستگاه استخراج از آب سرد به‌میزان ۰٫۱ بشکه در هر دقیقه استفاده می‌شود و برای این کار آب از دریا تأمین می‌گردد.

یک لوله از ساحل به محل حفر چاه کشیده شده است تا هم آب را به دستگاه استخراج برساند و هم نفت را از محل استخراج به سمت ساحل ببرد. در این لوله صافی‌هایی وجود دارد که از مخلوط شدن آب و نفت جلوگیری می‌کند. به این دلیل در یک زمان نمی‌توان لوله را هم برای آب و هم برای نفت استفاده کرد. بعد از عبور نفت (آب) از لوله باید ۶ دقیقه صبر کرد تا بتوان از آن آب (نفت) عبور داد.

۱. این لوله باید دستِ‌کم در هر دقیقه چند بشکه آب یا نفت از خود عبور دهد تا بتوان در هر دقیقه یک بشکه نفت استخراج کرد؟ این لوله در چه مواقعی باید آب و در چه مواقعی نفت عبور دهد؟

۲. اگر ظرفیت انتقال لوله ۱/۲ بشکه در دقیقه باشد، کدام‌یک از منابع ذخیره (و حداقل به چه مقداری) باید زیاد بشود تا باز هم ۱ بشکه در دقیقه نفت استخراج شود؟ دقت کنید ظرفیت لوله هم برای عبور آب و هم برای عبور نفت است.

مسئله‌ی ۵۷. مبادلات طلا

بر اثر به‌هم خوردنِ وضعیتِ اقتصادی در کشورِ «سِوینج»، قیمت اجناس به‌خصوص طلا نوسانات زیادی پیدا کرده است. دولت برای مبارزه با این نوسانات تصمیم گرفت که در هر روز هر چه‌قدر که متقاضی طلا وجود دارد، طلا بفروشد و یا از آن‌ها طلا خریداری کند و قیمت طلا را در طول روز ثابت نگه دارد؛ اگر در یک روز مقدار فروش کم‌تر از مقدار خرید باشد، قیمت طلا را در روزِ بعد هر گرم ۱ دلار افزایش می‌دهد و اگر مقدار خرید از مقدار فروش بیش‌تر باشد، قیمت طلا را در روز بعد هر گرم ۱ دلار کاهش می‌دهد، و در صورت تساویِ مقدار خرید و فروش، قیمت طلا را ثابت نگه می‌دارد. برای مثال اگر در یک روز قیمت هر گرم طلا ۶۰ دلار باشد، در روز بعد قیمت هر گرم طلا یا همان ۶۰ دلار است (در صورت مساوی بودن مقدار خرید و فروش) و یا ۶۱ دلار (در صورت بیش‌تر بودن مقدار فروش) و یا ۵۹ دلار (در صورت بیش‌تر بودن مقدار خرید).

ولی با این کار باز هم دولت نتوانست نوسانات طلا را از بین ببرد. این به‌دلیل عمل‌کردِ برخی دلالان بود. این دلالان بر روی قیمت طلا شرط‌بندی می‌کردند. آن‌ها ۲ نوع بلیت به مردم می‌فروختند:

- بلیت نوع اول: اگر قیمت طلا در روز بعد افزایش یابد، دلال به صاحب این بلیت یک دلار می‌دهد و در غیر این صورت چیزی نمی‌دهد.
- بلیت نوع دوم: اگر قیمت طلا در روز بعد کاهش یابد، دلال به صاحب بلیت یک دلار می‌دهد و در غیر این صورت چیزی نمی‌دهد.

طبیعی است برای این‌که مردم این بلیت‌ها را بخرند، قیمت بلیت‌ها باید کم‌تر از یک دلار باشد. اکثر دلالان برای این‌که سود بیش‌تری ببرند، به پیش‌گویی روی آورده بودند. یکی از دلالان به‌نام A بلیت نوع اول را ۶۰ سنت و بلیت نوع دوم را ۳۰ سنت می‌فروشد. (هر دلار

۱۰۰ سنت است.) بعد از مدتی اکثر دلالان ورشکسته شدند و فقط A باقی ماند. زیرا مردم اعتقاد داشتند قدرت پیش‌گویی او خیلی خوب است، و همیشه از او بلیت می‌خریدند و در اکثر مواقع بلیتی را که گران‌تر می‌فروخت می‌خریدند. A هم به هرکس هر چه‌قدر که بلیت می‌خواست می‌فروخت.

یکی از طلافروشان شهر برای مبارزه با A و به‌دست آوردن سود به یکی از ریاضی‌دانان شهر مراجعه کرد. ریاضی‌دان از او پرسید که آیا می‌تواند هر چه‌قدر که بخواهد طلا بخرد و طلافروش هم ادعا کرد که می‌تواند. ریاضی‌دان به او گفت هر چه‌قدر که می‌تواند بلیت نوع اول را به قیمت ۵۵ سنت بفروشد. طلافروش گفت در صورتی که قیمت طلا کاهش یابد او ۴۵ سنت از هر بلیت ضرر خواهد کرد. ولی ریاضی‌دان جواب داد که به کمک A و خرید بلیت از او و خرید طلا از دولت کاری می‌کنیم که در هر حالت او سود ببرد.

۱. آیا می‌دانید استدلال ریاضی‌دان چه بوده است؟

۲. اگر قیمت بلیت نوع اول ۳۰ سنت و قیمت بلیت نوع دوم ۶۰ سنت باشد، آیا باز هم طلا فروش می‌تواند سود ببرد؟ چرا؟

۳. بعد از مدتی طلافروش ما سودِ بسیار زیادی برد و A خیلی ضرر کرد. به همین دلیل A تصمیم گرفت هر دو بلیت را به قیمت ۶۰ سنت بفروشد. به‌نظر شما در این حالت طلافروش باید چه کند تا مردم بلیت‌های او را بخرند و او باز هم استفاده کند؟ دقت کنید اگر او هم بلیت‌هایش را به قیمت A بفروشد مردم ترجیح می‌دهند از A بخرند.

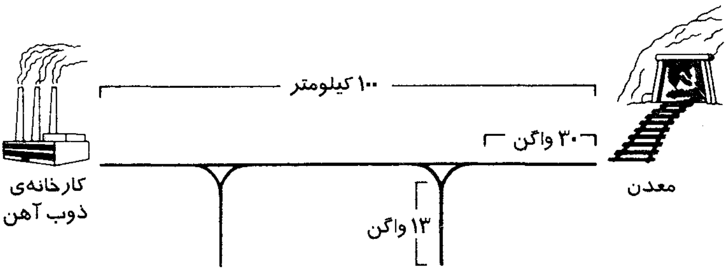
۴. بعد از مدتی دولت تصمیم گرفت این کاهش و افزایش قیمت طلا را در هر روز ۲ دلار کند. در این حالت به‌ترین کاری که طلافروش ما می‌تواند انجام بدهد تا سود ببرد چیست؟ (فرض کنید که بلیت‌های A همان ۶۰ سنت هستند و در هر ۱۰ روز حداکثر ۱ روز قیمت طلا ثابت می‌ماند.)

مسئله‌ی ۵۸. معدن سنگ آهن

سنگ آهن استخراجی از یک معدن باید به کارخانه‌ای در فاصله ۱۰۰ کیلومتری منتقل شود. برای این کار یک خط راه‌آهن بین معدن و کارخانه وجود دارد و یک قطار هم برای حمل سنگ‌های معدن در اختیار است. این قطار شامل یک لوکوموتیو در جلو و یک واگن غذاخوری در ته قطار است و بین این دو، ۱۸ واگن حمل بار وجود دارد که سنگ‌ها در آن‌ها

قرار می‌گیرند. تنها عاملِ محرکه‌ی قطار همان لوکوموتیو است که باید جلوی قطار قرار بگیرد. هم‌چنین واگن غذاخوری باید در انتهای آن باشد.

مشکل اصلی برگشتن قطار است، زیرا جایی برای دور زدن وجود ندارد. در عوض در نزدیکی هر یک از دو ایستگاه یک پارکینگ عمود برخط آهن وجود دارد. هر پارکینگ گنجایش ۱۳ واگن را دارد و بین محل پارکینگ تا ایستگاه هم به‌اندازه‌ی ۳۰ واگن جا وجود دارد (شکل ۴۰).



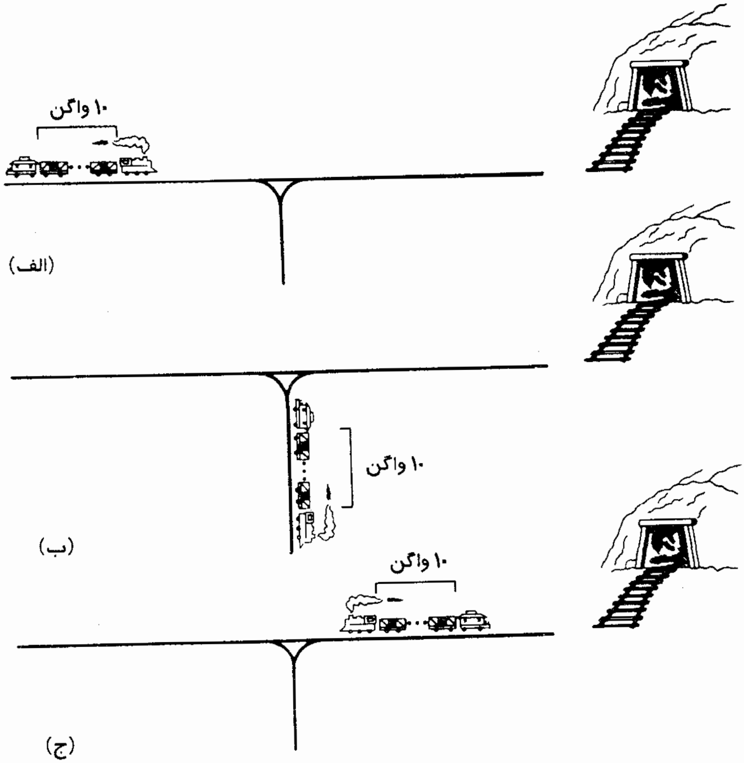
شکل ۴۰. خط آهن و دو پارکینگ انتهایی آن

برای دور زدن به این طریق عمل می‌شود که ابتدا ۱۲ واگن هم‌راه لوکوموتیو داخل پارکینگ می‌شوند و سپس با دنده عقب بیرون می آیند و به این ترتیب جهت لوکوموتیو عوض می‌شود و می‌تواند در جهت عکس حرکت کند (شکل ۴۱). به این ترتیب فقط امکان استفاده از ۱۲ واگن وجود دارد.

در یک پروژه‌ی جدید نیاز داریم که از تمام ۱۸ واگن استفاده شود. ولی به‌علتِ کم‌بودِ جای پارکینگ، بعضی واگن‌ها باید جدا شوند، در پارکینگ قرار گیرند و سپس دوباره وصل شوند. هر قطع و وصل واگن ۵ دقیقه طول می‌کشد.

۱. آیا می‌توانید روشی پیش‌نهاد کنید که با ۲ بار قطع و ۲ بار وصل کردنِ واگن‌ها جهت این قطار عوض شود؟

۲. آیا می‌توانید با کم‌تر از ۲ بار این کار را انجام دهید؟



شکل ۴۱. قطار ۱۰ واگنی به‌سادگی می‌تواند جهتش را برعکس کند.

فصل ۷

مسئله‌هایی از منطق

مسئله‌ی ۵۹. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۱)

در جزیره‌ای ناشناخته عده‌ای راست‌گو و عده‌ای دروغ‌گو زندگی می‌کنند. راست‌گوها همیشه راست می‌گویند و دروغ‌گوها بدون این‌که خجالتی بکشند، همیشه دروغ می‌گویند. هر یک از ساکنان این جزیره نیز یا راست‌گوست یا دروغ‌گو. در مورد این جزیره مسئله‌های بسیاری وجود دارد که می‌خواهیم در این بخش به بعضی از آن‌ها اشاره کنیم. ابتدا به سراغ یکی از مسئله‌های معروف در این زمینه می‌رویم:

الف) سه نفر از ساکنان جزیره در باغی کنار هم نشسته‌اند. این سه نفر را A، B و C می‌نامیم. فرد ناشناسی وارد باغ می‌شود و از A می‌پرسد: «تو راست‌گو هستی یا دروغ‌گو؟» A جواب او را می‌دهد ولی متأسفانه فرد ناشناس متوجه جواب نمی‌شود. در نتیجه رو به B می‌کند و می‌پرسد: «ببخشید! شما متوجه شدید که A چه گفت؟» و B جواب می‌دهد: «A گفت که دروغ‌گوست.» در همین زمان C فریاد می‌زند: «به حرف B گوش نده! او دروغ‌گوست.»
آیا می‌توانید بگویید که B و C دروغ‌گو هستند یا راست‌گو؟

ب) فرض کنید که فرد ناشناسی وارد باغ می‌شود و به سراغ A می‌رود. ولی این بار به‌جای این‌که از او بپرسد که آیا او راست‌گوست یا دروغ‌گو، این سؤال را مطرح می‌کند: «چند راست‌گو در میان شما وجود دارد؟» این بار نیز A جواب او را می‌دهد ولی فرد ناشناس متوجه جواب او نمی‌شود. پس رو به B می‌کند و می‌پرسد: «ببخشید من نفهمیدم A چه گفت!» و B در جواب می‌گوید: «A گفت که فقط یک راست‌گو در میان ما ۳

نفر وجود دارد.» ولی این بار هم C فریاد می‌زند: «به حرف B گوش نده! او دروغ می‌گوید.»

حالا، بگویید که B و C راست‌گو هستند یا دروغ‌گو؟

پ) A و B که دو نفر از ساکنان جزیره‌ی موردِ بحث هستند در کنار هم ایستاده‌اند. A می‌گوید: «دست‌کم یک نفر از ما دو تا دروغ‌گو است.» با توجه به این گفته مشخص کنید که A و B راست‌گو هستند یا دروغ‌گو.

ت) A و B در کنار هم هستند. A می‌گوید: «یا من دروغ‌گو هستم یا B راست‌گوست.» A و B راست‌گو هستند یا دروغ‌گو؟

ث) دوباره A، B و C را درنظر می‌گیریم که مشغول صحبت با هم‌دیگر هستند. A می‌گوید: «همه‌ی ما دروغ‌گو هستیم.» B می‌گوید: «تنها یک نفر از ما ۳ تا، راست‌گوست.» حال تعیین کنید از میان این ۳ نفر کدام‌ها راست‌گو و کدام‌ها دروغ‌گو هستند؟

ج) A و B را درنظر بگیرید. A می‌گوید: «من دروغ‌گو هستم و B راست‌گوست.» A و B راست‌گو هستند یا دروغ‌گو؟

چ) می‌دانیم که ۲ نفر از A، B و C از نظرِ راست‌گویی و دروغ‌گویی مثل هم هستند. A می‌گوید: «B دروغ‌گو است.» و B می‌گوید: «A و C مثل هم هستند.» C راست‌گو است یا دروغ‌گو؟

ح) پس از شنیدن مسئله‌هایی که راجع به این جزیره‌ی ناشناخته و ساکنان راست‌گو و دروغ‌گویش بودند، خیلی علاقه‌مند شدم تا به این جزیره سفر کنم. تا این‌که بعد از مدت‌ها بالاخره راهی شدم! وقتی به جزیره رسیدم با دو نفر از ساکنان آن مواجه شدم که زیر سایه‌ی درختی مشغول استراحت بودند. از یکی از آن‌ها پرسیدم: «آیا یکی از شما راست‌گوست؟» او جوابم را داد و من متوجه راست‌گو یا دروغ‌گو بودنِ آن دو نفر شدم. آیا می‌توانید بگویید کسی که از او سؤال کردم راست‌گو بود یا دروغ‌گو؟ نفر دیگر چه‌طور؟ (مطمئن باشید که اطلاعات مسئله کافی است و فقط حل آن کمی فکر می‌خواهد.)

مسئله‌ی ۶۰. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۲)

در این قسمت ساکنان جزیره‌ای را که در قسمت (۱) از آن صحبت شد به ۳ دسته تقسیم می‌کنیم:

۱. راست‌گوها، که همیشه راست می‌گویند.

۲. دروغ‌گوها، که همیشه دروغ می‌گویند.

۳. آدم‌های معمولی که گاهی راست و گاهی دروغ می‌گویند.

در ادامه، مسئله‌ها و معماهایی در مورد این ۳ دسته مطرح می‌کنیم:

الف) A، B و C را درنظر بگیرید. یکی از این ۳ نفر راست‌گو، یکی دروغ‌گو و دیگری آدمی معمولی است. A می‌گوید: «من آدمی معمولی هستم.» B می‌گوید: «حرف A درست است.» و C می‌گوید: «من آدمی معمولی نیستم.»

با توجه به گفته‌های این ۳ نفر معلوم کنید که کدام‌یک از آن‌ها راست‌گو، کدام‌یک دروغ‌گو و کدام‌یک آدم معمولی است.

ب) در جزیره‌ی موردِ بحث به راست‌گوها انسان‌های سطح بالا، به دروغ‌گوها انسان‌های سطح پایین و به آدم‌های معمولی انسان‌های سطح متوسط می‌گویند. A، B و C را درنظر بگیرید. می‌دانیم که یکی از آن‌ها راست‌گو، یکی دروغ‌گو و دیگری آدمی معمولی است. A می‌گوید: «سطح B از سطح C بالاتر است.» B می‌گوید: «سطح C بالاتر از سطح A است.» در این میان شخصی از C می‌پرسد: «سطح A بالاتر است یا سطح B؟» فکر می‌کنید C چه جوابی می‌دهد؟

پ) A، B و C و دوست آن‌ها، D، دور هم جمع شده‌اند. A می‌گوید: «C راست‌گوست.» B می‌گوید: «A راست می‌گوید، C راست‌گوست.» D می‌گوید: «درست است، C به‌تمام معنا راست‌گوست.»

این ۴ نفر چه نوع آدم‌هایی هستند؟ راست‌گو، دروغ‌گو یا معمولی؟ و آیا گفته‌ی این ۳ نفر درست است یا نه؟ در ضمن می‌دانیم که یا باید یکی از A و B راست‌گو و دیگری دروغ‌گو باشد و یا این‌که هر دو باید آدم‌هایی معمولی باشند. این شرط در مورد C و D نیز برقرار است.

مسئله‌ی ۶۱. آلیس در جنگل فراموشی (۱)

هنگامی که آلیس وارد جنگل فراموشی شد خوش‌بختانه همه چیز را فراموش نکرد و تنها بعضی چیزهای خاص از جمله اسم خود و روزهای هفته را از یاد برد. شیر جنگل و اسب شاخ‌دار دو ملاقات کننده‌ی همیشگی آلیس در جنگل هستند. آن دو، مخلوقات عجیبی

هستند. شیر که قادر به حرف زدن است در روزهای دوشنبه و سه‌شنبه و چهارشنبه دروغ می‌گوید و در روزهای دیگر هفته حقیقت را می‌گوید. اسب شاخ‌دار نیز مانند شیر قادر به حرف زدن است. او پنج‌شنبه‌ها و جمعه‌ها و شنبه‌ها دروغ می‌گوید و در روزهای دیگر هفته راست می‌گوید. ضمناً آلیس از این روزها (روزهایی که شیر و اسب شاخ‌دار راست یا دروغ می‌گویند) با خبر است.

الف) یکی از روزها آلیس، شیر و اسب شاخ‌دار را ملاقات می‌کند. شیر می‌گوید: «دیروز یکی از روزهای دروغ گفتن من بود.» و اسب شاخ‌دار نیز می‌گوید: «دیروز یکی از روزهای دروغ گفتن من هم بود.» با توجه به این دو گفته، آلیس که دختر باهوشی بود آن روز از هفته را تشخیص داد. آیا شما هم می‌توانید بگویید آن روز چه روزی از هفته بود؟

ب) در یکی از روزهای خدا آلیس در گوشه‌ای از جنگل پهناور فراموشی با شیر روبه‌رو شد. شیر با دیدن آلیس این دو جمله را به او گفت:

۱. «من دیروز دروغ گفتم.»

۲. «من ۳ روز دیگر دوباره دروغ خواهم گفت.»

آیا می‌توانید به آلیس کمک کنید و بگویید که آن روز چه روزی از هفته بود؟

پ) در چه روزهایی از هفته شیر می‌تواند دو جمله‌ی زیر را بر زبان بیاورد؟

۱. «من دیروز دروغ گفتم.»

۲. «من فردا دوباره دروغ خواهم گفت.»

ت) در چه روزهایی از هفته شیرِ داستانِ ما می‌تواند جمله‌ی زیر را بگوید؟ «من دیروز دروغ گفتم و فردا هم دروغ خواهم گفت.»

(توجه: جواب این مسئله مانند جواب مسئله‌ی قبل نیست و کمی با آن فرق دارد. پس حتماً بیش‌تر دقت کنید.)

مسئله‌ی ۶۲. آلیس در جنگل فراموشی (۲)

مدت یک ماه بود که شیر و اسب شاخ‌دار در جنگل دیده نمی‌شدند. آن‌ها در جای دیگری مشغول مبارزه برای به‌دست آوردن تاج سحرآمیز جنگل فراموشی بودند. البته آلیس تنها نبود زیرا پیشی و ملوس که دو گربه‌ی عجیب و غریب بودند که در جنگل فراموشی زندگی

می‌کردند او را تنها نمی‌گذاشتند. لازم است بدانید که یکی از این دو گربه مانند شیر دوشنبه‌ها، سه‌شنبه‌ها و چهارشنبه‌ها دروغ می‌گوید، و در روزهای دیگر هفته راستگوست. گربه‌ی دیگر هم دقیقاً مانند اسب شاخ‌دار عمل می‌کند. یعنی در روزهای پنج‌شنبه، جمعه و شنبه دروغ و در روزهای دیگر هفته راست می‌گوید. آلیس نمی‌داند کدام‌یک از این دو گربه مانند شیر و کدام‌یک مانند اسب شاخ‌دار عمل می‌کند. از شانس بد آلیس این دو گربه بسیار شبیه هم‌اند و او نمی‌تواند آن‌ها را از یک‌دیگر تشخیص دهد (البته بجز مواقعی که آن دو گربه گردن‌بندهایشان را ببندند که آن‌ها هم به‌ندرت این کار را انجام می‌دهند). در ادامه به چند مسئله در باره‌ی ماجراهای آلیس و این دو گربه می‌پردازیم:

الف) روزی از روزها آلیس که مشغول قدم زدن در جنگل بود با دو گربه‌ی جنگل فراموشی روبه‌رو می‌شود. یکی از گربه‌ها می‌گوید: «من پیشی هستم.» گربه‌ی دیگر می‌گوید: «من ملوس هستم.» آیا می‌توانید بگویید که کدام‌یک از این دو گربه واقعاً پیشی بوده و کدام‌یک واقعاً ملوس بوده است؟ و در ضمن آن روز چه روزی از هفته بوده است؟

ب) در یکی از روزهای همان هفته (که در سؤال قبلی به آن اشاره شد)، آلیس باز هم به سراغ دو گربه‌ی جنگل رفت. گربه‌ی اول گفت: «من پیشی هستم.» و گربه‌ی دوم افزود: «اگر این حرف تو راست باشد، پس من هم ملوس هستم.» شما فکر می‌کنید کدام‌یک پیشی بود و کدام یک ملوس؟!

پ) در روزی دیگر از روزهای بلند جنگل، آلیس و دو گربه در گوشه‌ای سرسبز مشغول گپ‌زدن بودند. آلیس از یکی از دو گربه پرسید: «آیا تو یک‌شنبه‌ها دروغ می‌گویی؟» و آن گربه جواب داد: «بله!» سپس آلیس همین سؤال را از گربه‌ی دیگر پرسید و گربه‌ی دیگر جواب داد: ...

فکر می‌کنید جواب گربه‌ی دوم چه بوده است؟

ت) در یک موقعیت استثنایی آلیس ۳ راز بزرگ را کشف کرد. آن‌هم از روی گفته‌های پیشی و ملوس، دو گربه‌ی جنگل فراموشی. او مدت‌ها آرزو می‌کرد که ای کاش می‌توانست ۳ چیز را بفهمد. اولین چیزی که آلیس می‌خواست به آن پی برد، روزهای هفته بود (واقعاً مشکل است که انسان نداند روزی که در آن به سر می‌برد چه روزی است!). روزی آلیس با پیشی و ملوس مواجه شد. یکی از دو گربه گفت: «امروز یک‌شنبه نیست.» و گربه‌ی دوم هم گفت: «در واقع امروز دوشنبه است.» گربه‌ی اول دوباره گفت: «فردا یکی از روزهای دروغ گفتن ملوس است.» و گربه‌ی دوم ادامه داد: «دیروز هم یکی از روزهای دروغ گفتن شیر بود.» با توجه به این گفته‌ها آیا می‌توانید بگویید که آن روز چه روزی از هفته بوده است؟

ث) یکی دیگر از رازهایی که آلیس علاقه‌ی زیادی به پی‌بردن آن داشت، این بود که کدام یک از دو گربه پیشی است؟ گربه‌ی اول یا گربه‌ی دوم؟ با استفاده از اطلاعات مسئله‌ی قبل، این راز را هم برای آلیس فاش کنید.

ج) و اما راز سوم! روزهای دروغ گفتن پیشی مثل روزهای دروغ‌گویی شیر بود یا اسب شاخ‌دار؟ اگر بتوانید با استفاده از اطلاعات مسئله این راز را هم کشف کنید کمک بزرگی به آلیس کرده‌اید. پس سعی خودتان را بکنید!

مسئله‌ی ۶۳. در میان پرونده‌های بازرس

یکی از بازرسان بازنشسته‌ی پلیس پس از مدت‌ها بالأخره موافقت کرد که تعدادی از پرونده‌های ناتمام خود را در اختیار کسانی قرار دهد که علاقه‌ی زیادی به استفاده از منطق در حل مسایل جنایی دارند. در این قسمت به سراغ این پرونده‌ها می‌رویم:

الف) کار را با یک مورد ساده شروع می‌کنیم. مقدار زیادی اجناس گران‌قیمت از فروشگاهی دزدیده شد و مجرم یا مجرمین توانستند با ماشینی فرار کنند. بعد از این دزدی، ۳ نفر از مجرمانِ مشکوک به دست داشتن در این دزدی، A، B، و C، دست‌گیر و برای بازجویی به اداره‌ی پلیس برده شدند. پس از بازجویی‌های مکرر این حقایق مشخص شد:

۱. کس دیگری جز A، B و C در این دزدی شرکت نداشته است. (یعنی مجرم یا مجرمین در میانِ این ۳ نفر هستند.)

۲. C هرگز کاری را بدون کمک A انجام نمی‌دهد.

۳. B رانندگی بلد نیست.

حال، آیا می‌توانید بگویید که A بی‌گناه است یا مجرم؟

ب) و اما یک پرونده دیگر، باز هم در مورد دزدی. در باره‌ی این پرونده از A، B و C بازجویی کردند و از گفته‌های آن‌ها حقایق زیر معلوم شد:

۱. مجرم یا مجرمین در میانِ این ۳ نفر هستند.

۲. A در هر کاری حداقل یک شریک یا هم‌دست دارد.

۳. C بی‌گناه است.

B گناه‌کار است یا بی‌گناه؟

پ) روزی جناب بازرس از یکی مأموران خود پرسید: «اگر مطالب زیر حقیقت داشته باشد، تو چه نتیجه‌ای می‌توانی از آن‌ها بگیری؟»

۱. اگر A گناه‌کار و B بی‌گناه باشد، آن‌گاه C گناه‌کار است.

۲. C هرگز تنهایی کار نمی‌کند.

۳. A هرگز با C کار نمی‌کند.

۴. مجرم یا مجرمین در میان این ۳ نفر هستند و حداقل یکی از آن‌ها گناه‌کار است.

۵. ...

مأمور بی‌چاره که هاج و واج مانده بود، در حالی که سرش را می‌خاراند گفت: «بس است دیگر! یعنی شما از روی این گفته‌ها می‌توانید بگویید که مجرمین چه کسانی هستند؟» بازرس جواب داد: «نه، اما این مطالب، یکی از این ۳ نفر را که حتماً مجرم است مشخص می‌کند.» می‌توانید بگویید کدام‌یک از این ۳ نفر حتماً گناه‌کار است؟

ت) در پرونده‌ای دیگر ۴ نفر A، B، C و D مظنون به ارتکاب جنایتی هستند. مشخص شده است که حداقل یکی از این ۴ نفر مجرم بوده است و کس دیگری بجز این ۴ نفر ممکن نیست مرتکب این جنایت شود و حقایق زیر نیز معلوم است:

۱. A مطمئناً بی‌گناه است.

۲. اگر B گناه‌کار باشد، حتماً هم‌دست داشته است.

۳. اگر C گناه‌کار باشد، حتماً ۲ هم‌دست داشته است.

از آن‌جایی که D سابقه‌دار و جانی خطرناکی است، بازرس بسیار مشتاق است که بداند D گناه‌کار است یا نه. خوش‌بختانه با استفاده از این مطالب می‌توان این موضوع را تشخیص داد. آیا شما می‌توانید به بازرس کمک کنید؟

قسمت (ج) در یک پرونده‌ی جالب ... به خاطر غلط بودن و عدم اصلاح پذیری باید با جواب آن به کلی حذف گردد.

ث) این پرونده مربوط به ساکنان جزیره‌ی راست‌گوها، دروغ‌گوها و انسان‌های معمولی است. یادآوری می‌کنیم که راست‌گوها کسانی هستند که همیشه راست می‌گویند، دروغ‌گوها کسانی هستند که همیشه دروغ می‌گویند و آدم‌های معمولی نیز کسانی هستند که گاهی دروغ و گاهی راست می‌گویند. در این پرونده سه تن از ساکنان این جزیره، A ، B و C، متهم به ارتکاب جنایتی هستند. می‌دانیم که جنایت را یکی از آن‌ها انجام داده است.

هم‌چنین می‌دانیم که یکی از افراد راست‌گو بوده است و دو نفر دیگر دروغ‌گو هستند. این ۳ نفر اظهار می‌کنند که:

A: «من بی‌گناهم!»
B: «A درست می‌گوید!»
C: «B آدم معمولی نیست.»

فکر می‌کنید کدام‌یک از این ۳ نفر گناه‌کار است؟

ج) اما به سراغ یک پرونده‌ی دیگر می‌رویم. در این پرونده نیز مانند پرونده‌ی قبلی ۴ متهم وجود دارد: A، B، C و D. مأمورین پلیس موفق شده‌اند از حرف‌های این ۴ نفر به نتایج زیر برسند:

۱. اگر A گناه‌کار باشد، B هم‌دست او بوده است.
۲. اگر B گناه‌کار باشد، یا C هم‌دست او بوده یا A بی‌گناه است.
۳. اگر D بی‌گناه باشد، A مجرم و C بی‌گناه است.
۴. اگر D گناه‌کار باشد، A هم گناه‌کار است.

از میان این ۴ نفر کدام‌ها گناه‌کار بوده‌اند؟

مسئله‌ی ٦۴. توپ‌های آبی و قرمز

درون کیسه‌ای در یک اتاق تاریک ۲۴ توپ قرمز و ۲۴ توپ آبی وجود دارد. شخصی وارد اتاق می‌شود و دست درون کیسه می‌کند (البته توپ‌ها کاملاً مثل هم‌اند و دیده هم نمی‌شوند.) این شخص حداقل چند توپ را باید از کیسه بیرون بیاورد تا مطمئن شود ۲ توپ هم‌رنگ برداشته است؟

مسئله‌ی ٦۵. توپ‌های قرمز و آبی!

دوباره به مسئله‌ی قبلی برمی‌گردیم. این بار صورت مسئله را کمی تغییر می‌دهیم. فرض کنید درون کیسه تعداد نامعلومی توپ آبی رنگ و درست به همان تعداد توپ قرمز وجود دارد. در ضمن می‌دانیم که حداقل تعداد توپ‌هایی که باید از کیسه بیرون بیاوریم تا حتماً ۲ توپ

هم‌رنگ داشته باشیم برابر است با حداقل تعداد توپ‌هایی که باید از کیسه بیرون بیاوریم تا حتماً ۲ توپ غیرهم‌رنگ داشته باشیم. درون کیسه چند توپ وجود دارد؟

مسئله‌ی ٦٦. مو شماری!

در شهری در آن سوی دنیا عده‌ای ناشناس زندگی می‌کنند. می‌دانیم که تعداد موهای هر یک از این افراد از تعداد ساکنان آن شهر کم‌تر است، در ضمن هیچ آدم بی‌مویی در این شهر زندگی نمی‌کند. آیا حتماً می‌توان در میان ساکنان این شهر دو نفر را پیدا کرد که تعداد موهایشان با هم برابر باشد؟ چرا؟

حال شرایط مسئله را تغییر می‌دهیم و آن را طور دیگری بیان می‌کنیم. در شهر دیگری: اولاً، هیچ دو نفری وجود ندارند که تعداد موهایشان برابر باشد. ثانیاً، هیچ‌یک از ساکنان این شهر ۵۱۸ مو ندارد. ثالثاً، تعداد موهای هر یک از ساکنان این شهر از تعداد کل ساکنان این شهر کم‌تر است.

جمعیت این شهر حداکثر چه‌قدر است؟

مسئله‌ی ٦٧. سکه‌های تقلبی

فرض کنید ۲۰ سکه در اختیار دارید که بعضی از آن‌ها تقلبی و بعضی واقعی هستند. وزن هر سکه‌ی واقعی بین ۱۱ تا ۱۱/۱ گرم و وزن هر سکه‌ی تقلبی بین ۱۰/٦ تا ۱۰/۷ گرم است.

آیا می‌توانید به کمک یک ترازوی یک کفه‌ای با ۱۵ بار توزین تشخیص دهید کدام‌یک از سکه‌ها واقعی و کدام‌یک تقلبی است؟ چگونه؟

مسئله‌ی ٦٨. گرگ‌های آدم‌نما

فرض کنید شما وارد جنگلی می‌شوید که در آن عده‌ی زیادی زندگی می‌کنند. هر یک از افراد این جنگل یا راست‌گوست یا دروغ‌گو. (یادآوری می‌کنیم که راست‌گوها همیشه راست و دروغ‌گوها همیشه دروغ می‌گویند.) علاوه بر این، تعدادی از ساکنان این جنگلِ مرموز گرگ‌های آدم‌نما هستند؛ یعنی شب‌هنگام به شکل گرگ‌های وحشتناکی درمی‌آیند و مردم را می‌کشند و آن‌ها را تکه‌تکه می‌کنند! در ضمن هر آدم‌نما می‌تواند راست‌گو یا دروغ‌گو باشد.

الف) فرض کنید شما مشغول صحبت با سه تن از ساکنان این جنگل به نام‌های A، B و C هستید. می‌دانیم که دقیقاً یکی از این ۳ نفر گرگ آدم‌نماست. A می‌گوید: «C آدم‌نماست.» B می‌گوید: «من گرگ آدم‌نما نیستم.» و بالأخره C می‌گوید: «حداقل ۲ نفر از ما دروغ‌گو هستیم.» با توجه به این گفته‌ها، مشخص کنید که گرگ آدم‌نما راست‌گوست یا دروغ‌گو؟

ب) فرض کنید که شما می‌خواهید به یک مسافرت دور و دراز بروید و مایل هستید که از میان A، B و C یک هم‌سفر برای خود انتخاب کنید. با توجه به داده‌های مسئله‌ی قبل و با درنظر گرفتن این‌که گرگ نبودن هم‌سفر شما خیلی مهم‌تر از دروغ‌گو نبودن اوست، کدام‌یک از این ۳ نفر را به‌عنوان هم‌سفر خود ترجیح می‌دهید؟

پ) در این مسئله و دو مسئله‌ی بعدی سه تن از ساکنان این جنگل به‌نام‌های A، B و C را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که هر یک از آن‌ها دروغ‌گو یا راست‌گوست. در این ۳ مسئله فقط دو نفر از آن‌ها یعنی A و B حرف می‌زنند و C هیچ حرفی نمی‌زند. البته کلمه‌ی «ما» در گفته‌های A و B به هر سه اشاره دارد نه فقط به A و B. فرض کنید A می‌گوید: «حداقل یکی از ما راست‌گوست.» و B می‌گوید: «حداقل یکی از ما دروغ‌گوست.» هم‌چنین می‌دانیم که حداقل یکی از آن‌ها گرگِ آدم‌نماست. در ضمن هیچ‌یک از آن‌ها هم راست‌گو و هم گرگ آدم‌نما نیست.

فکر می‌کنید کدام‌ها گرگ آدم‌نما هستند؟

ت) این بار فرض کنید A می‌گوید: «حداقل یکی از ما دروغ‌گوست.» و B می‌گوید: «C راست‌گوست.»

هم‌چنین روشن شده است که یکی و فقط یکی از این ۳ نفر گرگ آدم‌نماست، و آن نفر راست‌گو هم هست. کدام‌یک از این ۳ نفر گرگِ آدم‌نماست؟

ث) این بار شرایط مسئله را به این صورت تغییر می‌دهیم که A می‌گوید: «حداقل یکی از ما دروغ‌گوست،» و B می‌گوید: «C گرگ آدم‌نماست.» هم‌چنین مثل مسئله‌ی قبل می‌دانیم که دقیقاً یکی از ۳ نفر گرگ آدم‌نماست و آن نفر راست‌گو هم هست. آیا می‌توانید بگویید او کیست؟

ج) می‌دانیم که فقط یک نفر از میان A، B و C گرگ آدم‌نما و راست‌گوست و دو نفر دیگر دروغ‌گو هستند. این بار فقط یکی از آن‌ها یعنی B حرف می‌زند و می‌گوید: «C گرگ آدم‌نماست.» چه کسی گرگ آدم‌نماست؟

مسئله‌ی ٦٩. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۳)

مسئله‌های این بخش رابطه‌ی مستقیم با گزاره‌های شرطی دارند. به همین دلیل داشتن اطلاعات در مورد گزاره‌های شرطی باعث خواهد شد تا از حل مسایل بسیار ساده و شیرین این بخش لذت بیش‌تری ببرید.

الف) در این بخش بازهم به سراغ دو تن از ساکنان جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها یعنی A و B می‌رویم. می‌دانیم که هر یک از آن‌ها دروغ‌گو یا راست‌گوست. A می‌گوید: «اگر من راست‌گو باشم، B هم راست‌گوست.»

آیا از روی این جمله می‌توان تشخیص داد که A و B راست‌گو هستند یا دروغ‌گو؟

ب) A می‌گوید: «اگر من راست‌گو باشم، ۴ = ۲ + ۲.» آیا می‌توانید بگویید که A راست‌گوست یا دروغ‌گو؟

پ) A می‌گوید: «اگر B راست‌گو باشد، من دروغ‌گو هستم.» A و B چه نوع آدم‌هایی هستند؟ (راست‌گو یا دروغ‌گو؟)

ت) X و Y دو نفر هستند که به شرکت در یک سرقت متهم شده‌اند. A و B نیز دو شاهد هستند که برای شهادت دادن در دادگاه حاضر شده‌اند. هر یک از A و B یا راست‌گوست یا دروغ‌گو. شاهدان می‌گویند:

A: «اگر X مجرم باشد، Y هم مجرم است.»
B: «یا X بی‌گناه است یا Y مجرم است.»

آیا A و B حتماً باید از یک نوع باشند؟ (یعنی آیا A و B هر دو باید راست‌گو یا هر دو باید دروغ‌گو باشند؟)

ث) با ۳ تن از ساکنان جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها، یعنی A، B و C مصاحبه شده است. در این مصاحبه A و B اظهار داشته‌اند که:

A: «B راست‌گوست.»
B: «اگر A راست‌گو باشد، C غیر راست‌گوست.»

مشخص کنید که هر یک از این ۳ نفر راست‌گوست یا دروغ‌گو.

مسئله‌ی ۷۰. فلسفه و منطق (۱)

شاید در بعضی از کتاب‌های فلسفی خوانده باشید که فیلسوف واقعی دختر ۹ ساله‌ای است که در حالی که از پنجره به بیرون نگاه می‌کرد، ناگهان رو به مادرش کرد و پرسید: «ولی مامان! اصلاً چرا باید چیزی وجود داشته باشد؟» این سؤال قسمتی از علم فلسفه است. بعضی از فیلسوف‌ها آن را مهم‌ترین مسئله‌ی فلسفه به شمار می‌آورند.

اگر واقعاً راجع به آن خوب فکر کنید، می‌بینید که واقعاً سؤال جالبی است. روزی از روزها یک فیلسوف مشهور تصمیم گرفت تا وقت خود را صرف یافتن جواب این سؤال کند. او کار خود را با خواندن کتاب‌های فلسفی شروع کرد، اما هیچ‌کدام از آن کتاب‌ها جواب خوبی به این سؤال نداشت. او سپس به علوم دینی روی آورد و مشکل خود را با تعداد زیادی از کشیش‌ها و علمای دینی در میان گذاشت، ولی آن‌ها هم نتوانستند کمک قابل‌توجهی به او کنند. او سپس تصمیم گرفت به سراغ فیلسوف‌های کشورهای شرقی برود تا شاید بتواند جواب سؤالش را بیابد. به همین دلیل سفر خود را به شرق جهان شروع کرد.

او حدود ۱۲ سال از عمرش را در هند و تبت صرف مطالعه، تحقیق و بررسی کرد، اما این بار هم به نتیجه نرسید. او سپس به چین و ژاپن رفت و ۱۲ سال دیگر از عمرش را در آن‌جا گذراند و تحقیقات خودش را هم‌چنان ادامه داد. او سرانجام با یک حکیم پیر و دانا که در بستر بیماری بود و آخرین لحظات عمرش را می‌گذراند آشنا شد و سؤال خود را از او پرسید. حکیم دانا جواب داد: «نه پسرم، من خودم جواب سؤال تو را نمی‌دانم. تنها جایی که می‌توانی جواب سؤالت را پیدا کنی جزیره‌ای است به‌نام «بال». در یکی از معابد این جزیره کسی هست که جواب سؤال تو را می‌داند.»

فیلسوف داستان ما با عجله پرسید: «خوب حالا جزیره‌ی «بال» کجاست؟» حکیم در حالی که از شدت درد ناله می‌کرد جواب داد: «آه، من این را هم نمی‌دانم. در واقع من کسی را نمی‌شناسم که به این جزیره رفته باشد.» حکیم سپس نقشه‌ای به مرد فیلسوف داد و گفت: «روی این نقشه جای ٦ جزیره مشخص شده است. در یکی از این جزیره‌ها نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» وجود دارد. من نمی‌دانم که نقشه در کدام‌یک از این ٦ جزیره قرار دارد ولی می‌دانم که جزیره‌ای که این نقشه در آن مخفی شده است جزیره‌ی «مایا» نامیده می‌شود. البته باید بگویم که ساکنان این ٦ جزیره دو دسته هستند: یک دسته آدم‌های راست‌گو که همیشه راست می‌گویند و دسته‌ی دوم آدم‌های دروغ‌گو که همیشه دروغ می‌گویند. پس باید حواست را حسابی جمع کنی.»

این‌ها تنها جملات امیدوارکننده‌ای بودند که فیلسوف ما در طول ۲۴ سالِ عمر خود شنیده بود. بالاخره این فیلسوف ٦ جزیره‌ای را که حکیم دانا به او نشان داده بود پیدا و تحقیقات خود را شروع کرد، به امید این‌که بتواند جزیره‌ی «مایا» را از میان این ٦ جزیره پیدا کند.

الف) جزیره‌ی اول

در جزیره‌ی اول مرد فیلسوف با دو تن از ساکنان جزیره به نام‌های A و B مواجه شد.

A گفت: «B راست‌گوست و نام این جزیره «مایا»ست.»
B گفت: «A دروغ‌گوست و این جزیره جزیره‌ی «مایا»ست.»

آیا این جزیره همان جزیره‌ی «مایا»ست؟

ب) جزیره‌ی دوم

در این جزیره، A و B، دو تن از اهالی این جزیره، گفتند:

A: «ما هر دو دروغگو هستیم و این جزیره، جزیره‌ی «مایا»ست.»
B: «A راست می‌گوید.»

آیا این جزیره، جزیره‌ی «مایا»ست؟

پ) جزیره‌ی سوم

در این جزیره A و B بیان کردند:

A: «حداقل یکی از ما دو نفر دروغ‌گوست و این جزیره‌ی «مایا»ست.»
B: «A راست می‌گوید.»

آیا این جزیره، جزیره‌ی «مایا»ست؟

ت) جزیره‌ی چهارم

در این جزیره مرد فیلسوف هنگام گفتگو با A و B با این گفته‌ها مواجه شد:

A: «ما هر دو دروغ‌گو هستیم و این‌جا جزیره‌ی «مایا»ست.»
B: «حداقل یکی از ما دو نفر دروغ‌گوست و این‌جا جزیره‌ی «مایا» نیست.»

آیا این جزیره همان جزیره‌ی «مایا»ست؟

ث) جزیره‌ی پنجم

این‌جا ۲ تن از ساکنان جزیره به نام‌های A و B به مرد فیلسوف گفتند:

A: « ما هر دو دروغ‌گو هستیم و این جزیره، جزیره‌ی «مایا»ست.»
B: «حداقل یکی از ما ۲ نفر راست‌گوست و این‌جا جزیره‌ی «مایا» نیست.»

آیا مرد فیلسوف خواهد توانست نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» را در این‌جا پیدا کند؟

ج) **جزیره‌ی ششم و آخرین جزیره**

در این جزیره، A و B که جزء اهالی آن بودند به این طریق به مرد فیلسوف جواب دادند:

A: «یا B راست‌گوست، یا این‌جا جزیره‌ی «مایا»ست.»
B: «یا A دروغ‌گوست، یا این‌جا جزیره‌ی «مایا»ست.»

با توجه به این گفته‌ها، بگویید که این‌جا جزیره‌ی «مایا»ست یا نه.

چ) **و اما نقشه‌ی جزیره‌ی بال**

فیلسوف داستان ما بالأخره توانست جزیره‌ی «مایا» را پیدا کند. (همان‌طور که شما آن را پیدا کردید.) اما پیداکردن نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» آن‌قدرها هم که او پیش‌بینی می‌کرد ساده نبود. او پیش یکی از کشیش‌های جزیره رفت و از او کمک خواست. کشیش او را به اتاقی راه‌نمایی کرد که در آن ۳ نقشه‌ی X، Y و Z روی میزی گذاشته شده بودند. کشیش توضیح داد که فقط یکی از این ۳ نقشه جزیره‌ی «بال» را نشان می‌دهد و دو نقشه‌ی دیگر راهنمای انسان به سوی جزایر شیطانی هستند که رفتن به آن‌ها هیچ عاقلانه به نظر نمی‌رسد.

مرد فیلسوف مجبور بود یکی از ۳ نقشه را انتخاب کند. درون اتاق ۵ جادوگر ایستاده بودند که به گفته‌ی کشیش هر یک از آن‌ها یا دروغ‌گو بود یا راست‌گو. این ۵ جادوگر مرد فیلسوف را به این ترتیب راه‌نمایی کردند:

A: «X نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» است.»
B: «Y نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» است.»
C: «امکان ندارد که A و B هر دو دروغ‌گو باشند.»
D: «یا A دروغ‌گوست یا B راست‌گو.»
E: «یا من دروغ‌گو هستم یا C و D هر دو از لحاظ راست‌گویی و دروغ‌گویی مثل هم‌اند.»

فکر می‌کنید کدام نقشه جزیره‌ی «بال» را نشان می‌دهد؟

مسئله‌ی ۷۱. فلسفه و منطق (۲)

جزیره‌ی «بال» یک جزیره‌ی واقعاً عجیب و استثنایی است. ساکنان این جزیره را انسان‌ها و میمون‌ها تشکیل می‌دهند. میمون‌های ساکن این جزیره هیکلی به اندازه‌ی انسان‌هایی دارند

که در این جزیره زندگی می‌کنند. این میمون‌ها به‌خوبی انسان‌ها صحبت می‌کنند و هر یک از آن‌ها مانند هر یک از انسان‌ها راست‌گو یا دروغ‌گوست.

در مرکز این جزیره معبدی وجود دارد که در میان معبدهای تمام جهان یکتاست. کشیش‌هایی که در این معبد زندگی می‌کنند بسیار دانا و حکیم هستند و در قسمتی از این معبد که خلوت‌گاه درونی نامیده می‌شود، شخصی روحانی زندگی می‌کند که به بزرگ‌ترین راز هستی آگاه است: «اصلاً چرا باید چیزی وجود داشته باشد؟»

مرد فیلسوف داستان ما با موفقیت نقشه‌ی جزیره‌ی «بال» را پیدا کرد و خود را به آن‌جا رساند و بلافاصله به طرف معبد رفت تا با روحانی معروف جزیره‌ی «بال» دیدار کند. ولی وقتی به معبد رسید متوجه شد برای این‌که بتواند به قسمت خلوت‌گاه درونی راه یابد باید ۳ سری امتحان را با موفقیت پشت سر بگذارد. به همین دلیل مشتاقانه خود را برای امتحان دادن آماده کرد. اولین سری امتحانات در سه روز مختلف و در اتاقی بسیار بزرگ که خلوت‌گاه بیرونی نامیده می‌شد انجام شد. در وسط اتاق، شخصی که لباس عجیبی داشت روی یک تخت طلایی نشسته بود و کلاهی بر سر داشت که مانع دیدن صورتش می‌شد. این‌که او میمون بود یا آدم، راست‌گو بود یا دروغ‌گو به هیچ وجه مشخص نبود. در هر یک از ۳ امتحانِ سری اول این شخص جمله‌ای را بیان می‌کرد و مرد فیلسوف باید تشخیص می‌داد که او آدم است یا میمون و راست‌گوست یا دروغ‌گو!

الف) آزمون اول

شخصی که در وسط اتاق نشسته بود گفت: «من یا دروغ‌گو هستم و یا میمون.»
به مرد فیلسوف کمک کنید و بگویید که این شخص میمون است یا آدم! راست‌گوست یا دروغ‌گو!

ب) آزمون دوم

در این آزمون شخص ناشناس رو به مرد فیلسوف گفت: «من یک میمون دروغ‌گو هستم.»
مرد فیلسوف با شنیدنِ این حرف به سرعت تشخیص داد که آن فرد ناشناس چه نوع موجودی است. آیا شما هم می‌توانید این کار را بکنید؟

پ) آزمون سوم

در این آزمون که آخرین امتحان از امتحان‌های سری اول بود، مرد ناشناس اعلام کرد که: «من یک میمون راست‌گو نیستم.»
خب! حال شما بگویید که این فرد چه نوع موجودی است؟

مسئله‌ی ۷۲. فلسفه و منطق (۳)

مرد فیلسوف این ۳ امتحان را به‌خوبی پشت سرگذاشت و به سری دوم امتحانات راه پیدا کرد. این سری از امتحانات نیز در ۳ روز مختلف و در اتاق بزرگ دیگری که خلوت‌گاه میانی نامیده می‌شد برگزار گردید. این بار در اتاق، ۲ فرد ناشناس که چهره‌هایشان را با لباس‌هایشان پوشانده بودند، بر روی دو تخت از جنس الماس نشسته بودند. در هر یک از ۳ امتحان سری دوم، هر یک از این ۲ فرد جمله‌ای را بیان می‌کرد و مرد فیلسوف باید تشخیص می‌داد که هر یک از آن‌ها چه نوع موجودی است؟ (آدم است یا میمون و راستگوست یا دروغگو.)

الف) **آزمون چهارم**

در این آزمون، دو فرد ناشناس که A و B نام دارند، اظهار کردند که:

A: «حداقل یکی از ما دو نفر میمون است.»
B: «حداقل یکی از ما دروغ‌گوست.»

مشخص کنید که A و B چه نوع موجوداتی هستند.

ب) **آزمون پنجم**

A: «ما هر دو میمون هستیم.»
B: «ما هر دو دروغ‌گو هستیم.»

با توجه به گفته‌های A و B در این آزمون، مشخص کنید که آن‌ها چه نوع موجوداتی هستند.

پ) **آزمون ششم**

A: «B یک میمون دروغ‌گوست و من آدم هستم.»
B: «A راست‌گوست.»

آیا می‌توانید بگویید که A و B با توجه به اظهاراتی که در آزمون ششم کردند چه نوع موجوداتی هستند؟

مسئله‌ی ۷۳. فلسفه و منطق (۴)

مرد فیلسوف امتحانات سری دوم را هم به‌خوبی پشت سرگذاشت و توانست وارد سری سوم امتحانات شود. سری سوم امتحانات فقط شامل یک آزمون بود ولی همین یک امتحان به

اندازه‌ی تمام امتحانات قبلی مشکل و پیچیده بود.

الف) آخرین آزمون

در قسمت خلوت‌گاه میانی معبد، چهار در خروجی به نام‌های X، Y، W و Z وجود دارند. حداقل یکی از این درها رو به قسمت خلوت‌گاه درونی معبد که روحانی معروف جزیره‌ی «بال» در آن‌جا قرار دارد باز می‌شود و درهای خروجی دیگر به اتاق‌هایی منتهی می‌شوند که در هر یک از آن‌ها اژدهایی گرسنه و درنده وجود دارد.

گفتیم که فیلسوف داستان ما امتحانات سری اول و دوم را پشت سر گذاشت. اما در آزمون سری سوم او می‌بایست یکی از ۴ درِ خروجی قسمت خلوت‌گاه میانی را برای خارج‌شدن انتخاب می‌کرد. البته ۸ جادوگر پیر نیز در کنار او حاضر بودند و او برای پیدا کردن درِ خروجیِ درست باید از آن‌ها کمک می‌گرفت. البته او می‌دانست که هریک از این جادوگران یا دروغ‌گوست یا راست‌گو. این ۸ جادوگر مرد فیلسوف را به این شکل راه‌نمایی کردند:

A: «X راه درست است.»

B: «حداقل یکی از درهای X و Y راه درست است.»

C: «A و B هر دو راست‌گو هستند.»

D: «X و Y هر دو درست هستند.»

E: «X و Z هر دو درست هستند.»

F: «یا D راست‌گوست یا E.»

G: «اگر C راست‌گو باشد، F نیز راست‌گوست.»

H: «اگر من و G هر دو راست‌گو باشیم، A هم راست‌گوست.»

فکر می‌کنید مرد فیلسوف باید کدام در را انتخاب کند تا بتواند روحانی بزرگ جزیره‌ی «بال» را ملاقات کند؟

ب) سرانجام

سرانجام فیلسوف داستان پس از مدت زیادی فکر کردن توانست آزمون آخر را هم با موفقیت به اتمام برساند. او سپس پیش روحانی دانای معبد رفت و سؤال خود را از او پرسید و پس از حدود ۲۵ سال توانست جواب سؤال خود را بیابد. آیا می‌دانید روحانی جزیره‌ی «بال» چه جوابی به مرد فیلسوف داد که توانست او را قانع کند؟ اگر واقعاً می‌خواهید این موضوع را بدانید پس همین حالا بلند شوید و بار سفر ببندید و به سراغ مرد فیلسوف بروید و این موضوع را از خود او بپرسید. حتماً می‌پرسید که: «این مرد فیلسوف را کجا باید پیدا کنیم؟» راستش را بخواهید، من هم نمی‌دانم ولی اگر بگردید حتماً پیدایش می‌کنید. مگر نشنیده‌اید که می‌گویند: جوینده، یابنده است؟!

راه‌نمایی

مسئله‌ی ۱. مذاکره‌ی صلح

دست‌کش‌ها را A، B و C می‌نامیم نحوه‌ی پوشیدن این دست‌کش‌ها توسط یک نفر برای دست‌دادن با نفر دیگر را به‌صورت رشته‌ای نشان می‌دهیم. اگر دست‌کش X به‌صورت عادی پوشیده شود، آن‌را با $_X($ و اگر پشت و رو (یعنی پس از وارون کردن آن) پوشیده شود با $_X)$ نشان می‌دهیم. مثلاً اگر فرد شماره‌ی ۱ ابتدا دست‌کش A را به‌صورت عادی و بر روی آن دست‌کش B را به‌صورت وارون و بر روی آن‌ها دست‌کش C را به‌صورت معمولی در دست کند و با فرد شماره‌ی ۲ دست دهد، آن‌را با رشته‌ی $1)_A(_B)_C\ 2$ نشان می‌دهیم. برای حل این مسئله، دست‌دادن‌های زیر باید به‌ترتیب صورت گیرد:

۱. نماینده‌ی روکاتی (شماره‌ی ۱) هر سه دست‌کشِ A، B و C را به دست می‌کند (C بیرون قرار می‌گیرد) و با ناظرِ سازمانِ ملل، SG، دست می‌دهد. یعنی: $1)_A)_B)_C\ \mathrm{SG}$.

۲. معاونِ نماینده‌ی روکاتی (شماره‌ی ۲) B را داخل C قرار می‌دهد و با SG ناظرِ سازمانِ ملل دست می‌دهد: یعنی $2)_B)_C\ \mathrm{SG}$.

۳. نماینده‌ی روکاتی (شماره‌ی ۱) دست‌کشِ A را استفاده می‌کند تا با نماینده‌ی تاراک (شماره‌ی ۵) دست دهد: $1)_A\ 5$.

۴. مترجمِ سازمانِ ملل (شماره‌ی ۳) از دست‌کشِ C برای دست دادن با ناظرِ سازمانِ ملل استفاده می‌کند: $3)_C\ \mathrm{SG}$.

در همین زمان معاونِ روکاتی (شماره‌ی ۲) از دست‌کشِ B برای دست دادن با معاونِ تاراک (شماره‌ی ۴) استفاده می‌کند: $2)_B\ 4$.

۵. معاونِ تاراک (شماره‌ی ۴) دست‌کشِ C را از روی دست‌کشِ B که پشت و رو شده است به دست می‌کند تا با ناظرِ سازمانِ ملل دست دهد: $4(_B)_C\ \mathrm{SG}$.

۶. نماینده‌ی تاراک (شماره‌ی ۵) دست‌کش‌های B و C را از رویِ دست‌کشِ A که پشت و رو شده است می‌پوشد و با ناظر سازمان ملل دست می‌دهد: $5(_A)_B)_C\ \mathrm{SG}$.

سعی کنید این راه‌حل را در حالت کلی تعمیم دهید.

مسئله‌ی ۲. موسیقی یا پیام جاسوسی

۱. ۰۱۰۰۰۰۱۱۰۱۱۱۰۰ یک دنباله‌ی ۱۴ بیتی است که شاملِ همه‌ی ۹ پیام می‌باشد.

۲. دنباله‌ی ۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰ یک دنباله‌ی ۱۹ بیتی است که شاملِ تمام ۱۶ دنباله‌ی ۴ بیتی است.

۳. در این قسمت فرض محکم‌تری را دنبال می‌کنیم. به‌ازای هر ۱۵ دنباله‌ی دل‌خواهِ ۴ بیتی، دنباله‌ای ۱۸ بیتی می‌سازیم که شامل همه‌ی آن ۱۵ دنباله باشد. به این منظور، ۱۶ دنباله‌ی ۱۹ بیتی زیر را که هریک شامل تمامِ دنباله‌های ۴ بیتی هستند درنظر بگیرید:

۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰
۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱
۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱
۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱
۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱
۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰
۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱
۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱
۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰
۱۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰
۰۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱
۰۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰
۱۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱
۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰
۱۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰
۰۰۰۰۱۱۱۱۰۱۱۰۰۱۰۱۰۰۰

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، چهار بیت اول این دنباله‌ها شامل همه‌ی ۱۶ حالت ممکن یک دنباله‌ی چهار بیتی است.

حال مجموعه‌ی از ۱۵ دنباله‌ی چهاربیتی که به‌ما داده شده است را در نظر بگیرید و فرض کنید که این مجموعه شامل یک دنباله‌ی ۴ بیتی m نیست. برای ساختن جواب،

از دنباله‌های ۱۹ بیتی فوق دنباله‌ای را که ۴ بیت اول آن m است انتخاب و اولین بیت را از آن دنباله حذف می‌کنیم. به‌وضوح تمامی ۱۵ دنباله‌ی ۴ بیتیِ داده شده در این دنباله وجود خواهند داشت.

۴. مجموعه‌ی تمام دنباله‌های ۴ بیتی بجز ۱۰۰۰ و ۰۰۰۱ را درنظر بگیرید. دنباله‌ای ۱۷ بیتی وجود ندارد که شامل همه‌ی دنباله‌های این مجموعه باشد.

۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتی این مجموعه فقط وقتی همگی می‌توانند در یک دنباله‌ی ۱۷ بیتی جای گیرند که از بیت ۴ ام دنباله به بعد، هر بیت آن بیت انتهایی یک دنباله‌ی ۴ بیتی باشد و همه‌ی این دنباله‌های ۴ بیتی جزء ۱۴ دنباله‌ی موردنظر ما باشند.

از آنجا که ۰۰۰۰ یکی از ۱۴ دنباله‌ی اولیه‌ی ماست، حتماً باید در قسمتی از دنباله‌ی ۱۷ بیتی ظاهر شده باشد. از آن‌جا که دنباله نباید فقط از ۰ ها تشکیل شده باشد. ۰۰۰۰ باید در یکی از دو طرفش به یک ۱ ختم شود.

ولی این امر باعثِ تولید دنباله‌ی ۰۰۰۱ یا ۱۰۰۰ خواهد شد که یکی از دنباله‌های خارج از مجموعه‌ی موردنظر هستند. بنابراین حداقل ۱۸ بیت برای پوشاندن این مجموعه‌ی ۱۴ دنباله‌ی ۴ بیتی لازم است.

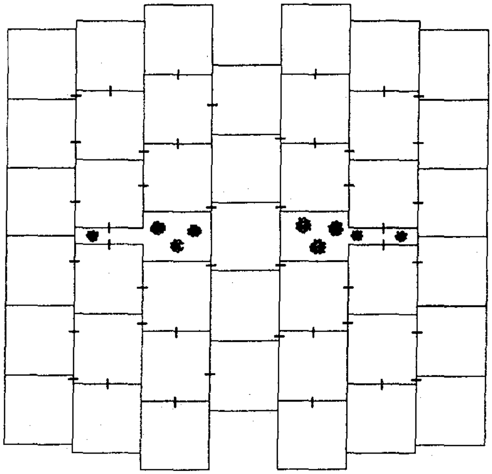
مسئله‌ی ۳. معماری نظامی

طرح شما هم باید چیزی شبیه شکل ۴۲ در صفحه‌ی بعد باشد. این‌طور نیست؟ قسمت دوم را به‌عنوان یک مسابقه در نظر بگیرید و حل کنید.

مسئله‌ی ۴. پژواک

۱. از آن‌جا که تُن B بیش از بقیه به‌کار می‌رود، کوتاه‌ترین دنباله را به این تُن اختصاص می‌دهیم. به این ترتیب:

به‌جای B از E،
به‌جای A از AA،
به‌جای C از CC،
به‌جای D از AC
و به‌جای E از CA استفاده می‌کنیم.



شکل ۴۲. یک طرح با ۴۱ اتاق که بین هر دو اتاق آن مسیری وجود دارد که از ٦ (یا کم‌تر) عدد در عبور می‌کند. فضاهای میان اتاق‌ها باغچه‌ها هستند که با بوته‌ها نشان داده شده‌اند. ۴ اتاق دارای پنجره‌هایی غیر قابل عبور و مرور به این باغچه‌ها هستند.

چون بسامد (تعداد دفعه‌های) استفاده از A، C و D تقریباً با هم برابر است، استفاده از یک کُد تک حرفی برای یکی از آن‌ها، ما را مجبور به استفاده از کدی ۳ حرفی برای دیگری خواهد کرد که در نتیجه از نظر متوسط طول کدها چیزی حاصل نمی‌شود. در این حالت کدِ مربوط به E باید به‌اندازه‌ی یک تُن بلندتر باشد که باعث کدگذاری بهینه نمی‌شود. به‌کاربردنِ E به‌عنوانِ قسمتی از کدهای جای‌گزین A، C، D و E نه تنها هیچ بهبودی در متوسط طول کدها ایجاد نمی‌کند، باعث پدید آمدن ابهام در پیام‌ها نیز می‌گردد.

۲. از آن‌جا که بازتابِ هر تن ممکن است با تنِ تکرار شده اشتباه شود، در کدهای جای‌گزین نباید از تن‌های تکراری استفاده شود. هم‌چنین چون مجاز به استفاده از مکث (وقفه‌ی زمانی) بین کدها نیستیم، باید مطمئن شویم که تکرارها یا بازتاب‌های صوتی باعث نخواهند شد که گمان کنیم دو علامت ارسال شده است، در حالی که واقعاً یک علامت ارسال شده باشد. بنابراین از E به عنوانِ تنِ خاتمه‌دهنده یا پایانی استفاده می‌کنیم (همانندِ کاربرد نقطه در آخرِ یک جمله). کدهای جای‌گزینِ مورد نظر عبارت‌اند از:

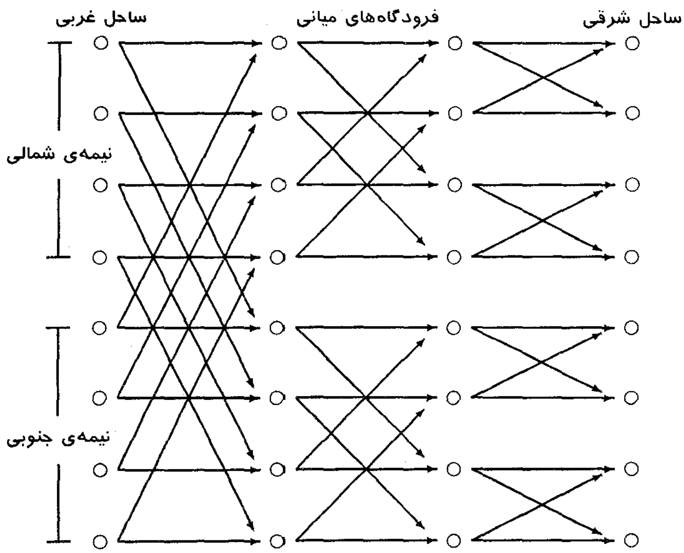
ارسالِ AE به‌جای B،
ارسالِ CE به‌جای C،
ارسالِ ACE به‌جای A،
ارسالِ CAE به‌جای D
و بالاخره ارسالِ ACAE به‌جای E.

توضیح: شکل رسم‌شده در صورت مسئله «گراف ابهام» نامیده می‌شود. برای دیدن گراف‌های عجیب مشابه، می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید:

Fred S. Roberts, *Graph Theory and Its Applications to Problems of Society*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1978.

مسئله‌ی ۵. اطلاع‌رسانی هوایی

بله، امکان دارد. از هر شهر غربی دو هواپیما پرواز می‌کنند. مطابق شکل ۴۳ هر کدام با ۲ فرود در فرودگاه‌های میانی نامه‌های مربوط به یک شهر شرقی را جمع‌آوری می‌کند و با فرود سوم در آن شهر، نامه‌ها را به مقصد می‌رساند.



شکل ۴۳. نحوه‌ی پرواز هواپیماها

مسئله‌ی ٦. جاسوسان

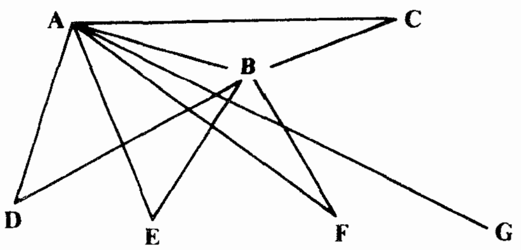
۱. هرگاه یک جاسوس مثلاً X، جاسوسِ Y را دیده باشد، جاسوس Y هم X را دیده است. اگر تعداد کسانی که این افراد در صورت مسئله ادعا کرده‌اند که آن‌ها را دیده‌اند با هم جمع کنید، یک عدد فرد می‌شود. در حالی‌که هر رابطه‌ی دیدن یک رابطه‌ی دو طرفه است. یعنی هر بار دیدن و دیده شدن در این مجموع دو بار آمده است. پس غیرممکن است که این مجموع فرد باشد.

۲. A، B، C، D و F به‌دلائل زیر راست‌گو هستند.

A باید راست‌گو باشد، زیرا طبق فرض هیچ جاسوسی بیش‌تر از آن چیزی که دیده است، ادعا نکرده است و A هم ادعا کرده است که همه را دیده است، پس A راست‌گوست.

اگر B دروغ گفته باشد، پس باید ٦ نفر را دیده باشد. در این حالت، چون G را هم A و هم B دیده‌اند، G نیز باید دروغ‌گو باشد که در نتیجه دو دروغ‌گو پیدا می‌شود، و این طبق فرض ممکن نیست. پس B نیز باید راست‌گو باشد. چون F طبقِ فرض راست‌گوست، فقط A و B را دیده است. هم‌چنین C حداقل ۴ نفر را دیده است که دو نفر از آن‌ها A و B هستند و F نمی‌تواند جزء افرادی باشد که C آن‌ها را دیده است. در نتیجه، C حداقل ۲ نفر از D، E و G را دیده است. C ممکن است D را دیده باشد، ولی اگر E را دیده باشد، E دروغ‌گو می‌شود و اگر G را هم دیده باشد، G دروغ‌گو می‌شود. پس C باید یکی از E و G را دیده باشد. اگر C دروغ‌گو باشد و ۵ نفر را دیده باشد، C باید هر دو نفر E و G را دیده باشد که در این حالت ۳ دروغ‌گو پیدا می‌کنیم (شکل ۴۴). در نتیجه E و G ممکن است دروغ‌گو باشند و D باید راست گفته باشد که A، B و C را می‌شناسد.

در نتیجه یکی از E و G دروغ‌گوست و بقیه حتماً راست‌گو هستند.



شکل ۴۴. C باید دو نفر از D، E و G را دیده باشد.

مسئله‌ی ۷. جاسوس دوجانبه

هر دو جاسوس گفته‌اند که دقیقاً یکی از خبرهای W، X و Y درست است و دقیقاً یکی از X، Y و Z درست است.

چون یکی از جاسوسان راست‌گوست پس این دو اطلاع صحیح هستند. پس اگر W درست باشد، X و Y باید غلط باشند و Z باید درست باشد. اگر W غلط باشد، یکی از X و Y باید درست و Z باید غلط باشد. پس W و Z هم‌ارزش هستند. پس جاسوس A که گفته است یکی از W و Z غلط است جاسوس دوجانبه است. همین‌طور باتوجه به جمله‌ی آخر جاسوس دوم و این‌که W و Z هم‌ارزش هستند می‌توان فهمید که Y درست است و بقیه غلط هستند.

مسئله‌ی ۸. صد راکت در صد روز

۱. ایده‌ی اساسی برای راه‌حلِ ۱۰۰ ساعتی بسیار ساده است. همه‌ی ۱۰۰ کامیون به‌طورِ هم‌زمان کار می‌کنند. هر کامیون به ۱۰ کارخانه می‌رود. در هر کارخانه، کامیون ۱۰ قطعه‌ی تولیدشده در آن کارخانه را برمی‌دارد. بنابراین هر کامیون ۱۰ عدد از هر کدام از ۱۰ قطعه را حمل خواهد کرد. سپس کامیون در هریک از ۱۰ کارخانه‌ی مقصد، یک قطعه از هر ۱۰ نوع قطعه را تحویل می‌دهد. اگر ۱۰۰ کامیون به‌طورِ هم‌زمان این کار را انجام دهند، فقط یک‌بار انجامِ این کار لازم خواهد بود و در هر کارخانه فقط به یک جرثقیل نیاز است.

راه‌حل را به‌طور صریح‌تری ذکر می‌کنیم: کامیون‌ها و کارخانه‌ها را از ۱ تا ۱۰۰ شماره‌گذاری می‌کنیم. تعریف می‌کنیم:

$x \ \mathrm{div} \ y$: خارج قسمتِ تقسیمِ x بر y.
$x \ \mathrm{mod} \ y$: باقیمانده‌یِ تقسیمِ x بر y.

برای مثال $۷۴ \ \mathrm{div} \ ۱۰ = ۷$ و $۷۴ \ \mathrm{mod} \ ۱۰ = ۴$.

کاری که کامیون iام انجام می‌دهد این است که از کارخانه‌ی $j + ۱۰k + ۱$ که $k = (i - ۱) \ \mathrm{div} \ ۱۰$ و $j = i \ \mathrm{mod} \ ۱۰$ شروع به حرکت می‌کند و ۱۰ قطعه از این کارخانه برمی‌دارد. سپس ۱۰ قطعه از کارخانه‌ی $((j + ۱) \ \mathrm{mod} \ ۱۰) + ۱۰k + ۱$ برمی‌دارد و این کار را تا کارخانه‌ی $((j + ۹) \ \mathrm{mod} \ ۱۰) + ۱۰k + ۱$ (شامل خود این کارخانه) ادامه می‌دهد.

در مرحله‌ی بعد کامیونِ iام کار تحویل را از کارخانه‌ی $k + 10j + 1$ شروع می‌کند و از هر یک از ۱۰ نوع قطعه‌ای که با خود دارد یکی را در کارخانه تخلیه می‌کند، بعد به کارخانه‌ی $((k+1) \mod 10) + 10j + 1$ و ... تا کارخانه‌ی $((k+9) \mod 10) + 10j + 1$ می‌رود.

۲. می‌توان با یکی کردنِ آخرین کارخانه‌ای که از آن قطعات برداشته می‌شوند با اولین کارخانه‌ای که قطعات در آن تخلیه می‌شوند در وقت صرفه‌جویی کرد. فرض کنید $k = i \text{ div } 10$ و $j = i \mod 10$. کامیونِ i از $j + 10k + 1$ شروع به حرکت می‌کند و ۱۰ قطعه از این کارخانه برمی‌دارد. سپس به کارخانه‌های $((j+1) \mod 10) + 10k + 1$، ... تا $((j+8) \mod 10) + 10k + 1$ می‌رود. در کارخانه‌ی $((j+9) \mod 10) + 10k + 1$، کامیون یک قطعه از هر ۹ نوع قطعه‌ای را که تا به حال جمع کرده است تحویل می‌دهد. سپس ۹ قطعه را از آن کارخانه تحویل می‌گیرد.

در مرحله‌ی بعد کامیون از هر کدام از ۱۰ نوع قطعه‌ای که همراه دارد در کارخانه‌های $j + 10((k+1) \mod 10)$، $j + 10((k+2) \mod 10) + 1$ و ... تا $j + 10((k+9) \mod 10) + 1$ تحویل می‌دهد که در نتیجه تعداد کارخانه‌ها ۱۰ عدد و زمان ۹۵ ساعت خواهد شد.

۳. تمام کردنِ کار در ۴۰ ساعت نیازمند آن است که این کار در ۸ سفرِ کوتاه پایان یابد، یعنی زمانِ لازم برای سفر به ۸ کارخانه از مبدأ حرکتِ کامیون‌ها. برای این‌کار از ۱۵۰۰ کامیون استفاده می‌کنیم و در هر کارخانه ۱۵ محل برای بارگیری و تخلیه‌ی بار لازم است. در بازه‌ی زمانی اول (سفر اول) به هر کارخانه ۱۵ کامیون می‌فرستیم.

کامیون‌های موجود در کارخانه‌ی kام را درنظر بگیرید. آن‌ها را از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. کاری که کامیون iام در کارخانه kام انجام می‌دهد این است که:

- اگر $i < 10$، ۷ قطعه از کارخانه‌ی kام برمی‌دارد و به کارخانه‌های

$$1 + ((k + 1 + 7 \times i) \mod 100)،$$
$$1 + ((k + 2 + 7 \times i) \mod 100)، \ldots \text{ تا}$$
$$1 + ((k + 7 + 7 \times i) \mod 100)$$

تحویل می‌دهد.

- اگر $10 \le i < 14$، ٦ قطعه از کارخانه‌ی kام برمی‌دارد و به کارخانه‌های زیر تحویل می‌دهد:

$1+(k+1+10\times 7+6\times(i-10) \mod 100)$،
$1+(k+2+10\times 7+6\times(i-10) \mod 100)$، ... تا
$1+(k+6+10\times 7+6\times(i-10) \mod 100)$

- اگر $i=14$، به کارخانه‌های

$1+((k+95) \mod 100)$،
$1+((k+96) \mod 100)$،
$1+((k+97) \mod 100)$،
$1+((k+98) \mod 100)$، (خود کارخانه را کنار گذاشته‌ایم)
$1+((k) \mod 100)$ و $1+((k+1) \mod 100)$

قطعات را تحویل می‌دهد.

- اگر $i=15$، قطعات را به کارخانه‌های

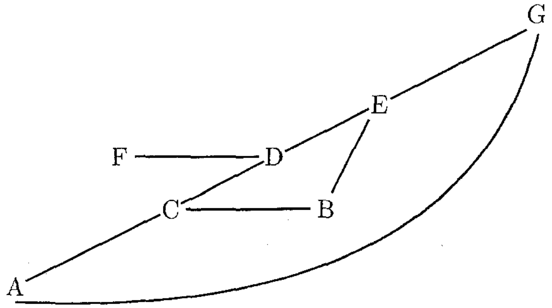
$1+((k+2) \mod 100)$،
$1+((k+3) \mod 100)$،
$1+((k+4) \mod 100)$،
$1+((k+5) \mod 100)$،
$1+((k+6) \mod 100)$ و
$1+((k+7) \mod 100)$

تحویل می‌دهد. با این کار ۹۹ نسخه از قطعه‌ی kام از کارخانه‌ی سازنده به بقیه‌ی کارخانه‌ها منتقل می‌شود.

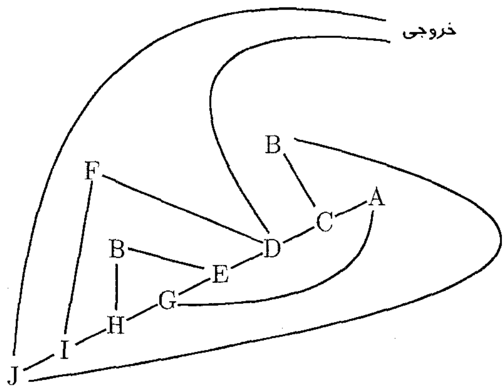
مسئله‌ی ۹. مونتاژ موشک

۱. خیر، این کار امکان‌پذیر نیست. همان‌طورکه در صورت مسئله آمده است باید ریل‌هایی از B به C، از C به D، از D به E و از B به E وجود داشته باشد. به این ترتیب ناحیه‌ی بسته‌ی CDEB به‌وجود می‌آید. هم‌چنین باید از A به C، از E به G و از A به G ریل وجود داشته باشد که در نتیجه ناحیه‌ی بسته‌ی ACDEG به‌وجود می‌آید (شکل ۴۵).

H به B و G نیاز دارد، پس H داخل ناحیه‌ی CDEB نیست. D به F نیاز دارد. هم‌چنین I به H نیاز دارد و چون I به F هم نیاز دارد پس F نمی‌تواند داخل ناحیه‌ی CDEB باشد. اگر F بخواهد داخل ناحیه‌ی ACDEG باشد، B و در نتیجه H خارج آن است و دیگر نمی‌توان شرط را برقرار نمود. به این دلیل اگر F خارج ناحیه‌ی ACDEG



شکل ۴۵. ساختار ریل‌های بین ایستگاه‌ها قبل از وصل ایستگاه‌های H، I و J.



شکل ۴۶. با داشتن دو ایستگاه B می‌توان خط تولید را به‌راه انداخت.

باشد، هم B و هم H داخل آن می‌افتند. به این ترتیب ثابت کردیم که نمی‌توان این کار را انجام داد.

۲. با ساختن ۲ ایستگاه برای B می‌توان این کار را انجام داد (شکل ۴۶).

مسئله‌ی ۱۰. گریز

۱. پلیس برای شناسایی هر دو مسیر فرار در بدترین حالت حداکثر به ۱۳ گزارشِ متفاوت احتیاج خواهد داشت. توجه کنید حداکثر ۱۹ گزارشِ دوتایی (مشخص کننده‌ی دو مسیر) متفاوت که دستِ‌کم یکی از مسیرها را درست نشان می‌دهد وجود دارد. از طرف

دیگر، روشن است که برای اثبات این‌که مسیری مانندِ X مسیر فرار بوده است به سه گزارش به‌صورتِ [X,Y]، [X,Z]، [X,W] که در آن‌ها Y، Z و W دوبه‌دو متمایزند، نیاز است. در این‌صورت حتماً X یکی از جواب‌ها خواهد بود، حتی اگر یکی از Y، Z و W نیز یکی دیگر از جواب‌ها باشد.

فرض کنید دو مسیر فرار دزدان، A و B باشد. بنابراین در بدترین حالت، پلیس ممکن است ۹ گزارشِ دوتاییِ متفاوت شاملِ A که B در آن‌ها وجود ندارد دریافت کند. سپس ممکن است یک گزارش تکی در مورد A دریافت کند. از این گزارش‌ها فقط می‌تواند مسیر A را تشخیص دهد. بقیه‌ی گزارش‌های کاملاً درست یا نیمه‌درست چون باید با ۱۰ تای اول متفاوت باشند، باید شامل B باشند. بنابراین در بدترین وضعیت، حداکثر ۳ گزارش دیگر برای شناسایی B کافی است. پس در کل حداکثر ۱۳ گزارش متفاوت لازم است تا هر دو مسیر فرار شناسایی شوند.

۲. پلیس برای اثبات راه‌های فرار مشخص مثلاً A و B، در به‌ترین حالت به حداقل ۵ گزارش مختلف نیاز دارد. ۳ گزارش برای اثبات A لازم است. در صورت امکان از گزارش‌هایی استفاده می‌کنیم که حداقل یکی از آن‌ها شاملِ B باشد. در این‌صورت با اثبات راه‌های فرار A، سه گزارش شامل A یا دو گزارش که A در آن‌ها وجود ندارد برای اثبات این‌که B راه فرار دوم است لازم است.

در بعضی از حالت‌ها کم‌تر از ۵ گزارش برای اثبات راه‌های شناسایی شده کافی نیست. فرض کنید تنها گزارش‌های دریافت شده [A,B]، [A,C]، [A,D]، [B,C] و [B,D] باشند. این گزارش‌ها برای اثبات این‌که A و B راه‌های فرارِ دزدان هستند، کافی است، ولی حذفِ هر یک از این ۵ گزارش امکان‌های دیگری را به‌وجود می‌آورد.

مسئله‌ی ۱۱. مبارزه با قاچاق

۱. فرودگاه‌ها را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری می‌کنیم و دو هواپیمای جت در هر یک از فرودگاه‌های ۱ و ۷ و یک هواپیمای جت در هر کدام از فرودگاه‌های ۲ تا ٦ قرار می‌دهیم. اگر یک هواپیمای قاچاق مواد مخدر به نواحیِ تحتِ کنترل فرودگاه‌های ۱ و ۷ وارد شود، بدون این‌که نیاز به هواپیمای دیگری از نواحی همسایه باشد، به‌راحتی قابل کنترل است، مگر در حالتی که هواپیمای دوم نیز واردِ همان ناحیه شود، که در این صورت کافی است یک هواپیمای جت از ناحیه‌ی همسایه به این ناحیه منتقل شود.

اگر یک هواپیمای حامل مواد مخدر به تنهایی وارد یکی از ناحیه‌های ۲ تا ٦ شود یک هواپیما از هر یک از دو همسایه این ناحیه به آن پرواز می‌کند و هواپیمای قاچاق‌چیان کنترل خواهد شد. اگر هواپیمای دوم قاچاق‌چیان اکنون وارد یکی از نواحی خالی (بدون هواپیما) شود، کافی است هواپیمای آن ناحیه برگردد و یک هواپیمای دیگر نیز از یک ناحیه‌ی مجاور به کمک او بیاید. واضح است که زمان کافی برای این کار وجود دارد.

۲. این تنها روش استفاده از ۹ هواپیمای جت برای حل این مسئله نیست، ولی ۹ به‌وضوح کم‌ترین تعدادِ هواپیماهای ممکن است، چرا که هواپیماها باید در محدوده‌ی ۸ دقیقه‌ایِ فرودگاهِ هر ناحیه باشند، پس ناحیه‌های ۱ و ۲ باید بین خودشان ۳ هواپیما داشته باشند. همین‌طور در مورد نواحی ٦ و ۷ و نیز در مورد ۳، ۴ و ۵.

مسئله‌ی ۱۲. اداره‌ی پستِ اوکایدو

۱. اعضای گروه را از ۱ تا ۱۷ شماره‌گذاری می‌کنیم. در آغاز، فرد شماره‌ی ۱ نامه‌ای به بقیه‌ی اعضای گروه می‌فرستد. بعد از دریافتِ نامه‌ی فرد شماره‌ی ۱ هر یک از افرادِ ۳ تا ۱۷، نامه‌های خودشان را به تمام اعضای گروه می‌فرستند. فرد شماره‌ی ۲ وقتی نامه‌ی ۱ و نامه‌های ۳ تا ۱۷ را دریافت کرد می‌تواند مطمئن باشد که هیچ نامه‌ای از شماره‌ی ۱ در اداره‌ی پست وجود ندارد. پس نامه‌اش را به تمام اعضای گروه می‌فرستد.

۲. این‌بار هم شماره‌ی ۱ به همه‌ی اعضای گروه نامه‌ای را می‌فرستد. بعد از دریافتِ نامه‌ی فرد شماره‌ی ۱، هریک از افراد ۴ تا ۱۷ به بقیه‌ی اعضا نامه می‌فرستد. فردِ شماره‌ی ۳ بعد از دریافتِ نامه‌ی فرد شماره‌ی ۱ نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را برای فردِ شماره‌ی ۲ می‌فرستد تا به او اطلاع دهد که نامه‌ی ۱ را دریافت کرده است.

شماره‌ی ۲ بعد از این‌که نامه‌های ۱، ۴ تا ۱۷ و ۳ را دریافت کرد، نامه‌ی خود را به تمامِ اعضای گروه می‌فرستد.

بعد از دریافتِ نامه‌ی ۲، اعضایِ شماره‌ی ۱ و شماره‌های ۴ تا ۱۷ نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را به‌مقصد شماره‌ی ۳ می‌فرستند. شماره‌ی ۳ با دریافتِ نامه‌ی ۲ و نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» از ۱ و ۴ تا ۱۷ نامه‌اش را به همه‌ی اعضای گروه می‌فرستد.

۳. باز هم برای شروعِ تبادلِ نامه‌ها، شماره‌ی ۱ نامه‌ای به تمامِ افرادِ گروه می‌فرستد. بعد از دریافتِ نامه‌ی ۱، شماره‌های ۲ تا ۴ به همه نامه می‌فرستند.

هر یک از اعضای گروه با دریافتِ نامه‌های ۱ تا ۴ نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را برای شماره‌های ۵ تا ۸ می‌فرستد. شماره‌های ۵ تا ۸ بعد از دریافتِ نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» از همه‌ی اعضایِ گروه، نامه‌ی خودشان را برای همه می‌فرستند.

بعد از دریافت نامه‌های ۵ تا ۸ هر یک از دریافت‌کنندگان نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را به شماره‌های ۹ تا ۱۲ می‌فرستد. شماره‌های ۹ تا ۱۲ بعد از دریافتِ نامه‌ی مزبور از همه‌ی اعضای گروه، نامه‌ی خودشان را به همه می‌فرستند. پس از دریافتِ نامه‌های ۹ تا ۱۲، هر یک از دریافت‌کنندگان، نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را به اعضای ۱۳ تا ۱۷ می‌فرستد و شماره‌های ۱۳ تا ۱۷ پس از دریافتِ این نامه از تمام اعضای گروه، نامه‌هایشان را به همه‌ی اعضا می‌فرستند.

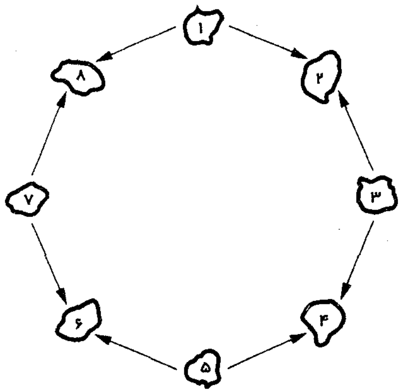
۴. اداره‌های پست را A و B می‌نامیم. شماره‌ی ۱ از طریقِ اداره‌ی پستِ A نامه‌ای به همه‌ی اعضای گروه می‌فرستد. بعد از دریافت نامه‌ی ۱، شماره‌های ۲ تا ۴ از طریق اداره‌ی پست A نامه خود را به همه می‌فرستند و شماره‌های ۵ تا ۸ از طریق اداره پست B نامه‌های خود را به همه می‌فرستند.

بعد از دریافت نامه‌های ۱ و ۵ تا ۸، هریک از دریافت‌کنندگان نامه‌ی «همه چیز بر وفق مراد است» را به اعضای شماره‌ی ۹ تا ۱۷ می‌فرستد. بعد از دریافتِ نامه‌ی مزبور، اعضای شماره‌ی ۹ تا ۱۷ از طریقِ اداره‌ی پست A و اعضای ۱۳ تا ۱۷ از طریقِ اداره‌ی پست B نامه‌های خود را به بقیه‌ی اعضای گروه می‌فرستند.

مسئله‌ی ۱۳. اعتصاب

۱. یکی در میان، در جزیره‌ها هنگامِ خروج از جزیره و هنگام ورود به جزیره کرایه‌ی ۲ دلاری دریافت می‌شود. در شکلِ ۴۷ در صفحه‌ی بعد جهت پیکان‌ها جهت حرکت کشتی در هنگامِ جمع‌آوری کرایه را نشان می‌دهند. هنگام بازگشت احتیاجی به جمع‌آوری کرایه نیست.

۲. اگر جزیره‌ها را از ۱ تا ۸ شماره‌گذاری کنیم، یکی از کشتی‌ها باید بین ۱ و ۴ و دیگری بین ۲ و ۷ رفت و آمد کند. در هر جزیره یا تمام کشتی‌هایی که از جزیره خارج می‌شوند باید کرایه‌ی ۲ دلاری دریافت کنند و یا هیچ‌کدام نباید کرایه دریافت کنند. لازمه‌ی سفر از هر جزیره و بازگشت دوباره به آن، تعداد زوجی سوار شدن به کشتی خواهد بود.



شکل ۴۷. پیکان‌ها نشان‌دهنده‌ی جهت‌هایی هستند که کرایه‌ها باید هنگام حرکت کشتی در آن جهت دریافت شوند.

مسئله‌ی ۱۴. سم شناسی

۱. مرحله‌ی ۱:

از صافی نوع دوم استفاده می‌کند. هر چیزی که از آن عبور نکند ترکیبی از D، E، و ABC خواهد بود و چیزی که از صافی عبور می‌کند ترکیبی از A، B و C است که دست‌کم یکی از این مواد در آن وجود ندارد.

مرحله‌ی ۲:

a) از صافی ۱ برای چیزی که در مرحله‌ی ۱ از صافی عبور کرده است استفاده می‌کند. چیزی که در این مرحله باقی می‌ماند دقیقاً یکی از BC یا A است و چیزی که عبور می‌کند دقیقاً یکی از C یا B است.

b) از صافی ۵ برای موادی که در مرحله‌ی ۱ از صافی عبور نکرده است استفاده می‌کند. اگر چیزی از این صافی عبور کند باید D باشد و هرچه که از صافی عبورنکند ترکیبی از E، و ABC خواهد بود.

مرحله‌ی ۳:

a) ماده‌ای را که در مرحله‌ی ۲.a از صافی عبور نکرده است درنظر بگیرید. پزشک از صافی ۵ برای آن استفاده می‌کند. به این ترتیب یا همه‌ی آن از صافی خواهد گذشت و یا همه‌اش روی صافی باقی می‌ماند. در حالت اول این ماده A است و در حالت دوم BC.

b) از صافی ۳ برای ماده‌ای که در مرحله‌ی ۲.a از صافی عبور کرده استفاده می‌کند. در این‌جا نیز یا همه‌ی ماده از صافی می‌گذرد یا همه‌اش روی صافی می‌ماند. در حالت اول ماده B و در حالت دوم C است.

c) ماده‌ای را که در مرحله‌ی ۲.b از صافی عبور نکرده است روی صافی ۴ می‌ریزد. هرچه که از صافی عبور کند E و هرچیزی که روی صافی باقی بماند ABC است.

۲. یک هفته کافی نیست. زیرا با استفاده از هیچ‌یک از صافی‌ها نمی‌توان ABD را از ABDE تشخیص داد.

۳. اگر فقط یک نوع ماده در سم وجود داشته باشد، سه صافی ۱، ۲ و ۳ و یک هفته مهلت برای تشخیص آن کافی است.

۴. مرحله‌ی ۱:
از صافی ۱ استفاده می‌کنیم. چیزی که از صافی عبور می‌کند نمی‌تواند هم شامل B و هم شامل C باشد. بنابراین ترکیبی از B و D یا ترکیبی از C و D (و نه هر دو) از صافی عبور می‌کند.

مرحله‌ی ۲:

a) نیمی از ماده‌ای را که از صافی ۱ عبور کرده است روی صافی ۳ و نیمی دیگر را روی صافی ۲ می‌ریزیم. اگر چیزی از صافی ۳ عبور کند B وجود خواهد داشت و چیزی که از صافی عبور نکند D است و C وجود ندارد.
اگر چیزی از صافی ۳ عبور نکند B وجود ندارد و چیزی که از صافی ۲ عبور کند C است و ماده‌ای که روی صافی باقی می‌ماند D خواهد بود.

b) چیزی که از صافی ۱ عبور نکرده است ترکیبی از A و E است که آن را روی صافی ۵ می‌ریزیم. چیزی که عبور می‌کند A و آن‌چه روی صافی می‌ماند E خواهد بود.

توجه: آن‌هایی که به روش‌های سم‌شناسی قرن نوزدهم علاقه‌مند هستند می‌توانند به مرجع زیر مراجعه کنند:

Jürgen Thorwald, *The Century of Detective*, Harcourt, Brace & Word, New York, 1965.

مسئله‌ی ۱۵. مبارزه با توسی

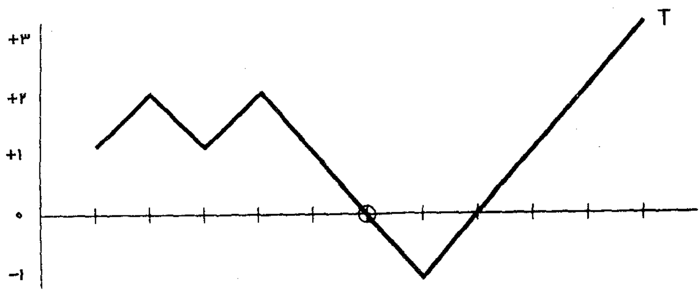
تِد اولین حامل ویروس توسی بوده است و باب از بیماری مصون است. وقتی لی، مری را روز سه‌شنبه ملاقات کرد، مری بایستی قبلاً دچار بیماری بوده باشد چون او از آن روز به بعد شخص دیگری را ملاقات نکرده و در انتها دچار بیماری بوده است.

بنابراین وقتی لی، باب را بعد از دیدن مری ملاقات کرد، لی حامل ویروس بوده است. ولی باب دچار بیماری نشده است. بنابراین باب از بیماری مصون است و کیت مستعد مبتلا شدن به بیماری است. ولی اگر آلیس، آلن، مری یا لی حامل اولیه‌ی ویروس بودند، کیت باید دچار بیماری می‌شد که در نتیجه تنها تِد به عنوان حامل اولیه‌ی ویروس باقی می‌ماند.

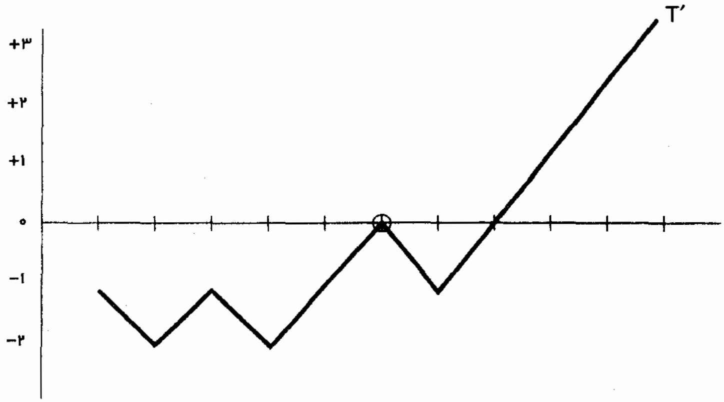
مسئله‌ی ۱۶. آزمون ریاضی یا اردوی تفریحی

مسئله را در حالت کلی حل می‌کنیم. به‌ازای هر مجموعه‌ی n تایی از پرتاب سکه‌ها نموداری به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم. بسته به این‌که پرتاب اول A یا B بیاید به‌ترتیب نقطه‌ی به مختصات (۱،۱) یا (۱،−۱) را انتخاب و از آن شروع به حرکت می‌کنیم. از پرتاب دوم به بعد به‌ازای هر A به اندازه‌ی قطر مربع واحد در جهت شمال شرقی و به ازای هر B به همان اندازه در جهت جنوب شرقی حرکت می‌کنیم.

به‌عنوان مثال، شکل ۴۸ نمودار مربوط به پرتاب‌های A A B A B B B A A A A (از چپ به راست) را نشان می‌دهد. نمودار مربوط به پرتاب‌های B B A B A A B A A A A هم در شکل ۴۹ نشان داده شده است.



شکل ۴۸. از چپ به راست: A A B A B B B A A A A



شکل ۴۹. از چپ به راست: B B A B A A B A A A A

با توجه به نحوه‌ی بازی واضح است که می‌خواهیم تعداد نمودارهایی را بشماریم که انتهایشان در خانه‌ای به طول n قرار می‌گیرد و در هیچ قسمتی محور طول‌ها را قطع نمی‌کنند. برای این‌کار، تعداد نمودارهایی را که از خانه‌ی $(۱,۱)$ شروع و به خانه‌ی (n,m) ختم می‌شوند و محور طول‌ها را قطع نمی‌کنند (مگر در آخرین نقطه که در آن $m=۰$) $T_{n,m}$ می‌نامیم.

برای شمردن $T_{n,m}$، به‌طریق زیر عمل می‌کنیم. یک نمودار را در نظر بگیرید که در شرایط بازی صدق می‌کند. این نمودار یا محور $y=۱$ را قطع می‌کند و یا خیر. در حالت دوم تعداد چنین نمودارهایی برابر $T_{n-۱,m-۱}$ است، چرا که پرتاب دوم باید A باشد و می‌توانیم فرض کنیم که محور طول‌ها یک واحد به بالا انتقال یافته است.

اگر نمودار موردنظر محور $y=۱$ را قطع کند، طول اولین محل تقاطع با مقدار $y=۱$ را i فرض می‌کنیم. واضح است که تعداد چنین نمودارهایی برابر $T_{i-۱,۰}\times T_{n-i,m}$ است.

با این توضیح تعداد کل نمودارها، برابر است با

$$T_{n,m}=\sum_{i=۳}^{n-۱}T_{i-۱,۰}\times T_{n-i,m}+T_{n-۱,m-۱},\quad m,n\geq ۰$$

که در آن $T_{۲k-۱,۲k'}=T_{۲k,۲k'-۱}=۰$.

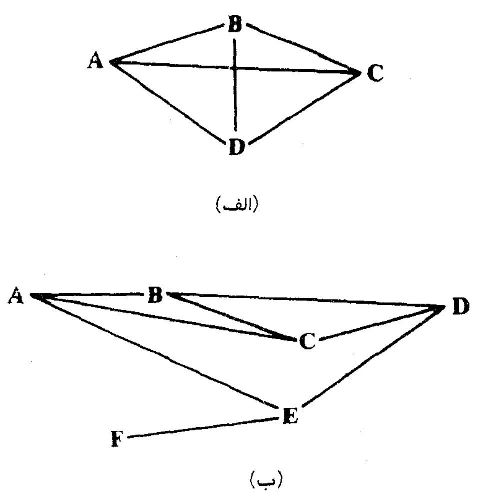
از طرف دیگر، تعداد کل حالت‌هایی که نفر اول در آن‌ها با n پرتاب برنده است، یا S_n، برابر است با مجموع $T_{n,m}$ها به‌ازای $m>۰$ $(S_n=\sum_{m=۱}^{n}T_{n,m})$. چون در مجموع به ۲^n حالت می‌توان سکه را پرتاب کرد، پس کلاً احتمال بردِ A برابر $\frac{S_n}{۲^n}$ است.

مسئله‌ی ۱۷. مسابقه‌ی علمی ریاضی و فیزیک

۱. حداقل تعداد افراد شرکت کننده ٦ نفر است. تعداد ۳ نفر و یاکم‌تر که به‌وضوح غیر ممکن است. زیرا یک نفر باید با ۳ نفر دیگر دست داده باشد. ۴ نفر نیز غیرممکن است زیرا اگر ۳ نفر با ۳ نفر دیگر دست داده باشند نفر چهارم نیز باید با ۳ نفر دیگر دست داده باشد (شکل ۵۰-الف). ۵ نفر نیز به‌دلیل مشابه غیر ممکن است، ولی ٦ نفر کافی است.

اگر این افراد را A، B، C، D، E و F بنامیم، افراد می‌توانند به این ترتیب با هم دست بدهند: A با B، B با C، C با D، D با E، E با F، A با C، A با E. و B با D (شکل ۵۰-ب).

۲. خیر. تعداد افراد این مهمانی نمی‌تواند ۲۱ باشد. به‌طور کلی تعداد افراد این مهمانی نمی‌تواند یک عدد فرد باشد. زیرا هرگاه ۲ نفر با یک‌دیگر دست دهند، مجموع کل تعداد دست‌دادن‌های افراد ۲ واحد اضافه می‌شود (یکی برای هر کدام از آن ۲ نفر). ولی اگر تعداد افراد مهمانی ۲۱ نفر باشد مجموع تعداد دست دادن‌ها برابر ٦۱ = ۱ + ۲۰ × ۳ می‌شود که غیرممکن است.



شکل ۵۰. الف) نمی‌تواند فقط ۴ نفر در مهمانی باشند. ب) نحوه‌ی دست‌دادن ٦ نفر.

۳. اگر تعداد افراد مهمانی یک عدد زوج بزرگ‌تر از ٦ باشد، به این دلائل شرایط مسئله ارضاء می‌شود: اولاً هیچ عدد فردی نمی‌تواند در شرایط مسئله صدق کند. از طرفِ دیگر به‌راحتی می‌توان دید که تعداد ٦ به‌اضافـه‌ی هر مضرب ۴ نیز می‌تواند درست باشد. زیرا با توجه به قسمت ۱، شش نفر می‌توانند طوری با هم دست بدهند که در شرایط مسئله صدق کند. از سوی دیگر در هر گروه ۴ نفره بقیه‌ی افراد با یک‌دیگر دست می‌دهند. در نتیجه بقیه‌ی افراد هم هرکدام با ۳ نفر دست می‌دهند، پس در شرایط مسئله صدق می‌کند. هم‌چنین می‌توان نشان داد که تعداد هشت به اضافه‌ی هر گروه ۴ تایی نیز درست کار می‌کند، زیرا اگر ۸ نفر اولیه A، B، C، D، E، F، G و H باشند، در آن‌صورت این افراد ممکن است به این صورت با هم دست بدهند: A با B، B با C، C با D، D با E، E با F، F با G، G با H، H با C، H با B، D با F، و G با E. در این حالت، A فقط با یک نفر دیگر دست داده است و بقیه هر کدام با ۳ نفر دست داده‌اند. در گروه‌های ۴ تایی هم اگر هر یک از افراد با بقیه‌ی هم‌گروهی‌هایش دست بدهد مسئله حل می‌شود.

مسئله‌ی ۱۸. زبان «یا» یی

۱. برنامه‌ی زیر این کار را انجام می‌دهد:

$$\begin{aligned} X &\leftarrow X \otimes Y \\ Y &\leftarrow X \otimes Y \\ X &\leftarrow X \otimes Y \end{aligned}$$

برای این‌که با نحوه‌ی کار برنامه آشنا شوید توجه کنید که بدون توجه به مقدار اولیه‌ی X و Y داریم:

$$X \otimes Y \otimes X = X \otimes X \otimes Y = Y \otimes X \otimes X = Y$$

با استفاده از این اصل، آن‌چه را که در حین اجرای برنامه اتفاق می‌افتد مشاهده می‌کنیم. فرض کنید مقدار اولیه‌ی X برابر X_i و مقدار اولیه‌ی Y برابر Y_i باشد. بعد از اجرای دستور اول داریم: $X = X_i \otimes Y_i$، بعد از اجرای خط دوم داریم: $Y = (X_i \otimes Y_i) \otimes Y_i$ یا $Y = X_i$ و بعد از اجرای خط سوم برنامه داریم: $X = (X_i \otimes Y_i) \otimes X_i = Y_i$.

۲. برنامه‌ای که مشاهده می‌کنید در ۱۸ خط، عمل موردنظر را انجام می‌دهد. برنامه را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم:

گام اول:

$$\begin{aligned} Y &\leftarrow Y \otimes Z \\ X &\leftarrow X \otimes Y \\ W &\leftarrow W \otimes X \\ V &\leftarrow V \otimes W \\ U &\leftarrow U \otimes V \\ T &\leftarrow T \otimes U \end{aligned}$$

گام دوم:

$$\begin{aligned} Z &\leftarrow Y \otimes Z \\ Y &\leftarrow X \otimes Y \\ X &\leftarrow W \otimes X \\ W &\leftarrow V \otimes W \\ V &\leftarrow U \otimes V \\ U &\leftarrow T \otimes U \end{aligned}$$

در این مرحله، تمامی متغیرها دارای مقدار صحیح می‌باشند جز T که باید با تمام متغیرهای اولیه یای انحصاری شود.

گام سوم:

$$\begin{aligned} T &\leftarrow T \otimes U \\ T &\leftarrow T \otimes V \\ T &\leftarrow T \otimes W \\ T &\leftarrow T \otimes X \\ T &\leftarrow T \otimes Y \\ T &\leftarrow T \otimes Z \end{aligned}$$

که عملیات در ۱۸ خط پایان می‌یابد. راه دیگر این است که با استفاده از راه‌حل قسمت اول مقدار Y را با Z، X را Y، V را با W، U را با V و سرانجام T را با U عوض کنیم.

۳. اگر مقداردهی چند متغیر به‌صورت موازی امکان‌پذیر باشد، برنامه‌ی زیر در یک گام، مقدار متغیرها را با هم عوض می‌کند:

$$\begin{aligned} Z &\leftarrow Y \\ Y &\leftarrow X \\ X &\leftarrow W \\ W &\leftarrow V \\ V &\leftarrow U \\ U &\leftarrow T \\ T &\leftarrow Z \end{aligned}$$

مسئله‌ی ۱۹. مسابقه‌ی هوش

اعضای گروه را A و B می‌نامیم.

۱. برای این‌که بفهمیم یای انحصاریِ دو عدد، تعداد فردی یک دارد یا خیر، به این ترتیب عمل می‌کنیم: اگر عددی که به A داده شده است تعداد فردی یک داشته باشد، A یک ۱ و در غیر این صورت یک ۰ به B می‌فرستد. اگر فقط یکی از دو عددی که به A و B داده شده است تعداد فردی یک داشته باشد، یای انحصاری دو عدد نیز تعداد فردی یک خواهد داشت و درغیر این صورت این‌چنین نخواهد بود. B با استفاده از این واقعیت با دریافت کارتِ A جواب درست را به داور اعلام می‌کند.

۲. به نظر می‌رسد که باید تمام بیت‌های عددی که در اختیار A قرار داده شده است، به B منتقل شود تا او بتواند مجموع را محاسبه کند. ولی می‌توانیم از این نکته که رسیدنِ هر کارت از A به B یک دقیقه طول می‌کشد استفاده کنیم. در واقع از سکوت (نفرستادن کارت) برای ارسال اطلاعات استفاده می‌کنیم. عدد داده‌شده به A را به ۵ قسمت ۳ بیتی و یک قسمت ۲ بیتی تقسیم می‌کنیم. برای ارسال هر قسمت سه بیتی ۴ دقیقه فرصت لازم است. طی حداقل ۳ دقیقه از این ۴ دقیقه A هیچ کاری نمی‌کند و در یک دقیقه‌ی دیگر، یک کارت با مقدار صفر یا یک به B می‌فرستد. یکی از روش‌هایی که A می‌تواند استفاده کند در جدول (الف) می‌بینید. فرستادن ۵ قسمت ۳ بیتی با این روش ۲۰ دقیقه طول می‌کشد و ۲ بیت باقی‌مانده نیز طبق جدول (ب) طی ۲ دقیقه منتقل

می‌شوند. توضیح آن‌که در قسمت کد، چهار ستاره به‌نشانه‌ی ۴ دقیقه مهلت آمده است. اگر به‌جای یکی از این ستاره‌ها یک عدد صفر یا یک باشد، به‌معنی آن است که در دقیقه‌ی متناظر با آن ستاره، A یک کارت با عددی که جایگزین ستاره شده است به B می‌فرستد.

عدد سه بیتی	کد
000	****
001	***0
010	***1
011	**0*
100	**1*
101	*0**
110	*1**
111	0***

(الف)

عدد دو بیتی	کد
00	**
01	*0
10	*1
11	0*

(ب)

۳. A و B می‌توانند طی 2^{16} دقیقه یا حدود ۴۵ شبانه روز فقط با فرستادن یک کارت به جواب (ب) دست یابند. اگر ارزش عددی ۱۶ بیت اولِ عددی که نزد A است n باشد، A در دقیقه‌ی $(n + 1)$ام کارتی برای B می‌فرستد که روی آن بیت هفدهم (بیت آخر) نوشته شده است. به‌این ترتیب، B می‌تواند با محاسبه‌ی زمان رسیدن کارت و عدد نوشته‌شده روی آن عدد A را بفهمد.

مسئله‌ی ۲۰. هلیچ!

۱. با شمردن تمام حالت‌های ممکن مشاهده می‌شود که ۴ حالت از ۹ حالتِ ممکن فرد (یعنی به ضررِ بَر) و ۵ حالت دیگر زوج است، پس بازی معمولاً به نفعِ بَر تمام خواهد شد.

۲. با اطلاع داشتن از خاصیت بند قبل، بازی‌کن دوم همیشه ۲ انگشت می‌آورد. به این ترتیب هرگاه بَر ۱ یا ۳ بیاید بازنده خواهد بود.

۳. فرض کنیم بَر استراتژی خاصی اتخاذ و آن را اعلام کند. اگر در این استراتژی او در کم‌تر از نیمی از دفعات بازی ۲ بیاید، نفر دوم به‌طور متوسط خواهد برد اگر همیشه ۲

بیاید. اگر در این استراتژی بَر در بیش از نصف دفعات بازی ۲ بیاید، نفر دوم می‌تواند همواره با آمدن ۱ یا ۳ در بیش از نصف دفعات برنده شود و بالاخره اگر بَر دقیقاً نصف دفعات را ۲ و نصف دیگر را غیر از ۲ بیاید، نفر دوم هر طور که بازی کند بازی مساوی خواهد شد. بنابراین بَر نمی‌تواند استراتژی خود را اعلام کند و برنده شود.

۴. اگر هیچ‌یک از طرفین استراتژی خاصی اعلام نکند، هر دو طرف باید در نیمی از دفعات ۲ و در بقیه ۱ یا ۳ بیایند. اگر یکی از طرفین از استراتژی خاصی استفاده کند و آن را آشکار کند، طرف دوم می‌تواند از آن طبق قسمت قبل به نفع خودش بهره‌برداری کند. برای مثال اگر بَر دو انگشت را در بیش از نیمی از حالت‌ها بیاورد بازی‌کن دوم باید در کم‌تر از نصف دفعات بازی ۲ بیاید.

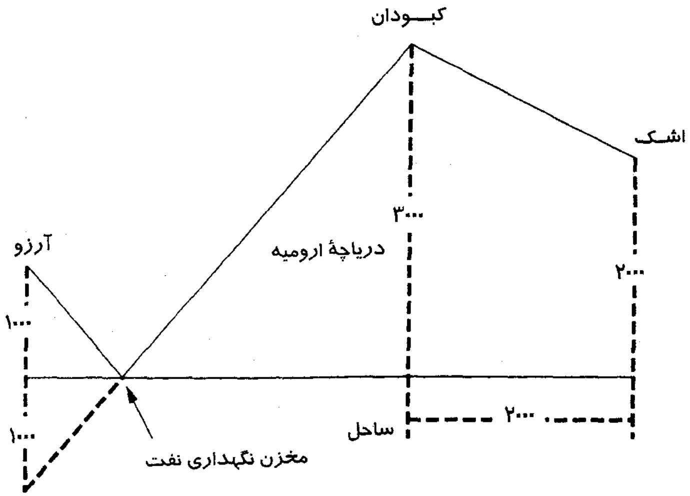
۵. اگر فرد دوم نیمی از دفعات ۲ و نیمی دیگر ۳ را انتخاب کند. بَر هیچ استراتژی بردی ندارد. برای اثبات، حالت‌هایی را که بَر ۱ بیاید درنظر بگیرید. به‌طور متوسط فردِ دوم نیمی از دفعات ۲ آمده و خواهد باخت و در نیمی دیگر ۳ آمده و خواهد برد. به همین نحو می‌توان در مورد حالت‌هایی که بر ۳ بیاید استدلال کرد. با این تفاوت که در این حالت بازی‌کن دوم وقتی ۲ بیاید می‌برد و وقتی ۳ بیاید می‌بازد.

ولی اگر بَر ۲ بیاید بازی‌کن دوم قطعاً خواهد برد. بنابراین به‌ترین استراتژیِ بر این است که در نیمی از دفعات یک و در نیمی دیگر سه را انتخاب کند.

مسئله‌ی ۲۱. لوله‌های انتقال نفت

به‌خاطر بیاورید کوتاه‌ترین مسیر بین دو نقطه، خط راستی است که آن دو را به هم وصل می‌کند. قرینه‌ی جزیره‌ی آرزو را نسبت به ساحل جنوبی به‌دست آورید. حالا خط راستی از قرینه‌ی جزیره‌ی آرزو به جزیره‌ی اشک وصل کنید. محل تقاطع این خط با ساحل، محلی است که باید مخزن نفت قرار بگیرد.

لوله‌های نفت باید به‌صورت خطوط راست از محل مخزن به جزیره‌ی آرزو، از محل مخزن به جزیره‌ی کبودان و از جزیره‌ی کبودان به جزیره‌ی اشک کشیده شوند. همان‌طور که در شکل ۵۱ در صفحه‌ی بعد دیده می‌شود، لوله‌ی رابط جزیره‌ی کبودان و مخزنِ نفت، انتقال‌دهنده‌ی نفت دو چاه نفت است. به این ترتیب طول لوله‌های انتقال‌دهنده‌ی نفت $(۱۰۰۰ \times \sqrt{۵}) + ۵۰۰۰$ متر خواهد بود که کمی کم‌تر از ۷۵۲۰ متر است.



شکل ۵۱. یک طرح لوله کشی با ۷۳۰۰ متر لوله‌ی انتقال دهنده‌ی نفت

مسئله‌ی ۲۲. مربی تنیس

۱. ابتدا ۸ بازی‌کن را به ۴ گروه دو نفره تقسیم کنید. بین هر دو نفر در یک گروه یک مسابقه برگزار کنید. به این ترتیب این مسابقه‌ها ۴ ساعت وقت می‌گیرد. حال ۲ گروه از این گروه‌های دو نفره، مثلاً X و Y را درنظر بگیرید و فرض کنید که x_1 در گروه X در مسابقه‌ی مرحله‌ی قبل از x_2 برده است و هم‌چنین در گروه Y هم y_1 از y_2 برده است.

یک مسابقه بین y_1 و x_1 برگزار کنید. هر کدام که ببرد نفر اول بین ۴ نفر است. سپس بازنده با نفر دومِ گروهِ دیگر بازی کند. (مثلاً اگر x_1 بازنده است، با y_2 بازی کند و اگر y_1 بازنده است با x_2 بازی کند.) هرکس که در این بازی ببرد نفر دوم این چهار نفر است. اگر دو نفر باقی‌مانده از یک گروه باشند که کار تمام می‌شود و می‌توان این چهار نفر را مرتب کرد. در غیر این‌صورت باید یک مسابقه‌ی دیگر بین دو نفر باقی‌مانده برگزار کرد تا نفر سوم و چهارم مشخص شوند. به این ترتیب این چهار نفر را با سه مسابقه مرتب کرده‌ایم. یعنی توانسته‌ایم با ٦ مسابقه‌ی اضافی افراد را به ۲ گروه چهار نفری تبدیل کنیم، به‌طوری‌که افراد هر گروه مرتب باشند.

این ترتیب را به‌صورتِ زیر نشان می‌دهیم:

افراد گروه ۱ به ترتیب از به‌ترین به بدترین	افراد گروه ۲ به ترتیب از به‌ترین به بدترین
A	E
B	F
C	G
D	H

برای این‌که رتبه‌بندی کامل شود، ۷ مرحله‌ی زیر را انجام می‌دهیم:

۱) A و E مبارزه می‌کنند و مثلاً A می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
B	E	A
C	F	
D	G	
	H	

۲) B و E مبارزه می‌کنند و مثلاً E می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
B	F	A
C	G	E
D	H	

۳) B و F مبارزه می‌کنند و مثلاً F می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
B	G	A
C	H	E
D		F

۴) B و G مبارزه می‌کنند و مثلاً G می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
B	H	A
C		E
D		F
		G

۵) B و H بازی می‌کنند و مثلاً B می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
C	H	A
D		E
		F
		G
		B

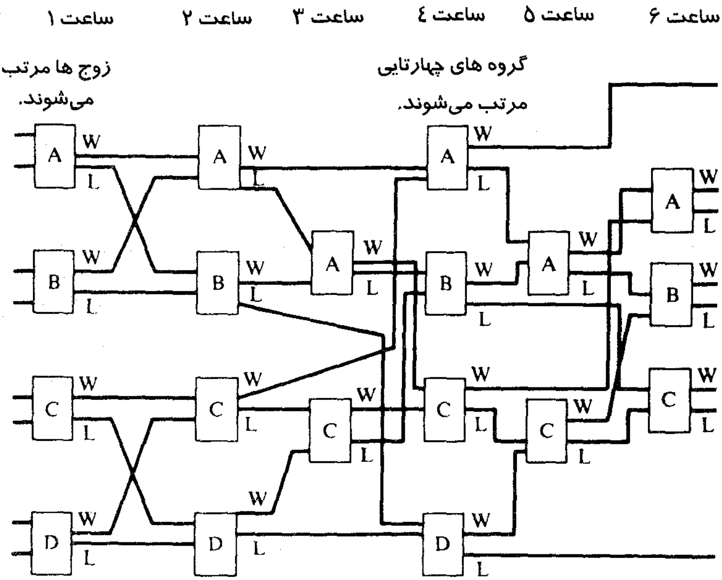
۶) C و H بازی می‌کنند و مثلاً C می‌برد:

گروه ۱	گروه ۲	ترتیب نهایی
D	H	A
		E
		F
		G
		B
		C

۷) D و H بازی می‌کنند و مثلاً D می‌برد. بنابراین ترتیب به‌صورت: A، E، F، G، B، C، D و H در می‌آید.

به این ترتیب با ۷ بازی می‌توان این افراد را از به‌ترین به بدترین مرتب کرد. پس کل بازی‌های لازم برابر است با ۱۷ = ۷ + ۳ × ۲ + ۴، که این ۱۷ بازی ۱۷ ساعت وقت می‌گیرد.

۲. با استفاده از ۴ زمین می‌توان بازی‌کنان را در ٦ ساعت رتبه‌بندی کرد. برنامه‌ی زمان‌بندی این بازی‌ها را در شکل ۵۲ مشاهده می‌کنید. زمین‌های بازی را A، B، C و D نامیده‌ایم. ابتدا افراد را به ۴ گروه تقسیم می‌کنیم. در شکل مشخص شده است که برنده‌ها (W) و بازنده‌های (L) هر بازی در مرحله‌ی بعد باید به کدام‌یک از زمین‌های



شکل ۵۲. نحوه‌ی تخصیص میدان‌ها به بازی‌کنان.

بازی بروند و با چه کسی بازی کنند. در بعضی ساعات بعضی از افراد بازی نمی‌کنند که اصطلاحاً می‌گوییم در این دور استراحت می‌کنند.

بعد از ساعت اول،

- برنده‌ی A در زمین A می‌ماند و بازنده‌ی A به زمین B می‌رود.
- برنده‌ی B به زمین A می‌رود و بازنده‌ی B در زمین B می‌ماند.
- برنده‌ی C در زمین C می‌ماند و بازنده‌ی C به زمین D می‌رود.
- برنده‌ی D به زمین C می‌رود و بازنده‌ی D در زمین D می‌ماند.

بعد از ساعت دوم،

- برنده‌ی A یک ساعت استراحت می‌کند و پس از آن در ساعت چهارم در زمین A بازی می‌کند.
- بازنده‌ی A در A می‌ماند.
- برنده‌ی B به A می‌رود. بازنده‌ی A یک ساعت استراحت می‌کند و در ساعت چهارم در زمین D بازی می‌کند.

- برنده‌ی C یک ساعت استراحت می‌کند و در ساعت چهارم در زمین A بازی می‌کند.
- بازنده‌ی C در C می‌ماند.
- برنده‌ی D به C می‌رود و بازنده‌ی D یک ساعت استراحت می‌کند و در ساعت چهارم در D بازی می‌کند.

بعد از ساعت سوم،

- برنده‌ی A به C می‌رود و بازنده‌ی A به B می‌رود.
- برنده‌ی C در C می‌ماند و بازنده‌ی C به B می‌رود.

بعد از ساعت چهارم،

- برنده‌ی A به‌ترین بازی‌کن می‌شود. بازنده‌ی A در A می‌ماند.
- برنده‌ی B به A می‌رود. بازنده‌ی B یک ساعت استراحت می‌کند، سپس در ساعت ششم در C بازی می‌کند.
- برنده‌ی C یک ساعت استراحت می‌کند، سپس در ساعت ششم در A بازی می‌کند.
- بازنده‌ی C در C می‌ماند.
- برنده‌ی D به C می‌رود. بازنده‌ی D بدترین بازی‌کن است.

بعد از ساعت پنجم،

- برنده‌ی A در A می‌ماند. بازنده‌ی A به B می‌رود.
- برنده‌ی C به B می‌رود. بازنده‌ی C در C می‌ماند.

بعد از ساعت ششم،

ترتیب بازی‌کن‌ها به این صورت است: به‌ترین و بدترین بازی‌کن را قبلاً پیدا کرده‌ایم. نفر دوم برنده‌ی A است و بازنده‌ی A نفر سوم است. برنده‌ی B، چهارم و بازنده‌ی B پنجمین نفر است. برنده‌ی C ششم و بازنده‌ی C هفتمین است.

۳. این مسئله که آیا می‌توان در ۵ ساعت این کار را انجام داد یا نه، هنوز حل نشده است! یعنی نه خودش و نه خلافش هنوز ثابت نشده است.

توضیح: در این مسئله دو نوع مرتب‌سازی را مشاهده کردید. اولین روش که یک روش بسیار متداول است، Merge-Sort نامیده می‌شود. دومین الگوریتم به نام Batcher-Sort معروف است. برای مطالعه در مورد Merge-Sort می‌توانید به کتاب‌های داده‌ساختارها و الگوریتم‌ها مانند کتاب زیر مراجعه کنید:

A. Aho, J. Hopcroft, and J. Ullman, *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley, 1983.

روش مرتب‌سازی Batcher-Sort را می‌توانید در کتاب زیر پیدا کنید:

Leighton, F.T., *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann, 1992.

و یا در فصل ۲۷ از کتاب زیر ببینید:

T. Cormen, C. Leiserson, R. Riverst, and C. Stein (CLRS) *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2001.

مسئله‌ی ۲۳. حادثه‌ی رانندگی

۱. با تحریک الکتریکی C، E و G شروع می‌کنیم. بعد از یک ماه F و I بهبود خواهند یافت و بعد از دو ماه D و بعد از سه ماه B بهبود خواهد یافت. در پایانِ ۴ ماه تمامی قسمت‌های مغز بهبود یافته‌اند.

۲. G باید یکی از ۴ قسمتی باشد که به آن‌ها شوک مستقیم الکتریکی وارد می‌شود، چرا که G تحت تأثیر سایر نواحی هرگز بهبود نمی‌یابد. اینک H و A را درنظر بگیرید. اگر هیچ‌یک از این دو ناحیه تحت تأثیر شوک الکتریکی قرار نگیرند، بعد از یک ماه هر دو بهبود نخواهند یافت، زیرا که هیچ ۳ قسمتی از مغز به هر دو متصل نیستند. اگر فقط یکی از A و H تحت اثر شوک الکتریکی قرار بگیرد، دیگری بعد از یک ماه بهبود نمی‌یابد، چرا که دو قسمت مجاور (مربوط) نیستند. بنابراین هر دو باید تحت تأثیر شوک مستقیم الکتریکی قرار بگیرند، ولی با این کار بسیاری از نواحی مثل F بعد از یک ماه بهبود نخواهند یافت.

۳. برای این‌که تمام ناحیه‌ها طی ۲ ماه بهبود یابند، با وارد کردن شوک مستقیم الکتریکی به B، C، E و G شروع می‌کنیم. بعد از یک ماه A، D، F و I بهبود می‌یابند و H بعد از ماه دوم بهبود خواهد یافت.

مسئله‌ی ۲۴. کاشی‌کاری در قصر

۱. چنین کاشی‌کاری امکان ندارد. این را با استفاده از اصل لانه‌کبوتری ثابت می‌کنیم. حیاط قصر را مطابق شکل ۵۳ جدول‌بندی و شماره‌گذاری می‌کنیم، به‌طوری‌که در کل از هر یک از عددهای ۰ تا ۳، ۶۴ تا روی جدول دیده شود.

توجه کنید که با چنین شماره‌گذاری هر کاشی چه افقی و چه عمودی یک عدد صفر، یک عدد ۱، یک عدد ۲، و یک عدد ۳ را می‌پوشاند ولی با قرار گرفتن ۴ حوض در ۴ گوشه حیاط، یک عدد صفر، دو تا ۳ و یک عدد ۲ پوشانده می‌شود و فقط ۶۲ خانه با شماره ۳ در جدول باقی می‌ماند. در نتیجه کاشی‌کار می‌تواند حداکثر ۶۲ کاشی در حیاط قرار دهد که برای پوشاندن سطح حیاط قصر کافی نیست و استفاده از ۶۳ کاشی بیش از این حد است.

۲. نشان می‌دهیم که در هر دو سر یک قطر نمی‌توان حوض قرار داد در نتیجه حداکثر ۲ حوض می‌توانند در گوشه‌های حیاط قصر قرار گیرند. برای اثبات این امر از یک شماره‌گذاری که نسبت به محور عمودی با شکل قبل متقارن است کمک می‌گیریم، و به هر خانه‌ی جدول به جای یک عدد، دو عدد (یکی عددی که در جدول قبل مشاهده کردید و دیگری قرینه آن نسبت به محور عمودی) نسبت می‌دهیم. به این ترتیب

۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲
۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲
۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲
۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳
۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰
۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱
۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲	۳	۰	۱	۲

شکل ۵۳. جدول ۱۶ در ۱۶ شماره‌گذاری‌شده.

ردیف بالا به‌صورت زیر در می آید:

$$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

و ردیف دوم (از بالا) به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

به این ترتیب هر کاشی از هر یک از دو دسته شماره‌ها، یک ۰، ۱، ۲ و ۳ را می‌پوشاند. بنابراین اگر مربع واقع در گوشه‌ی بالا و سمت چپ جدول و هم‌چنین مربع واقع در پایین و سمت راست جدول هر دو دارای حوض باشند، دو مربع که شماره‌ی پایینی آن‌ها ۳ است پوشیده خواهند شد. به همین ترتیب اگر مربع واقع در گوشه‌ی بالا و سمت راست جدول و نیز مربع واقع در پایین و سمت چپ جدول هر دو با هم دارای حوض باشند، دو مربع که شماره‌ی بالایی آن‌ها ۳ است پوشیده خواهد شد. بنابراین و با استدلال ذکر شده در بند ۱، حداکثر ٦۲ کاشی می‌توان در جدول قرار داد که همه‌ی آن را نمی‌پوشاند.

یک روش برای قراردادن دو حوض در گوشه‌ها این است که دو خانه‌ی مجاور در گوشه‌ی سمت چپ و بالا و دو خانه‌ی مجاور دیگر در گوشه سمت راست بالا را تبدیل به حوض کنیم.

۳. در یک مربع ۱۰ × ۱۰ روش ساده‌ای برای قراردادن حوض‌ها و کاشی‌ها وجود دارد. این مربع را به ۴ مربع ۵ × ۵ مساوی (و جدا از هم) تقسیم کنید، و مثلاً در مورد مربع ۵ × ۵ واقع در سمت چپ پایین، بعد از قرار دادن حوض در گوشه‌ی سمت چپ پایین، دو کاشی را طوری مجاور حوض قرار دهید که تشکیل یک L بدهند. مربع ۴ × ۵ باقی‌مانده به‌صورت افقی یا عمودی قابل پرکردن است.

بدون استفاده از حوض‌ها مربع ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با کاشی‌ها پر کرد. با شماره‌گذاری به همان ترتیب قبلی، ۲٦ مربع با شماره ۱ خواهیم داشت که ۲۵ کاشی نمی‌توانند همه‌ی آن‌ها را بپوشانند.

مسئله‌ی ۲۵. مسابقه‌ی زرگرها

۱. پنج بار توزین برای پیدا کردن سکه‌های تقلبی کافی است. سکه‌ها را A، B، C، D، E، F، G، H، I و J می‌نامیم. برای اختصار به‌جای عبارت «X، Y و Z را وزن کنید.» می‌گوییم «XYZ را وزن کنید.» راه‌حل مطابق الگوریتم زیر است:

۱. ABC را وزن کنید،

۲. اگر ۲ تا از ABC تقلبی باشند اول A و بعد B را وزن کنید و کار تمام است.

۳. اگر یکی از ABC تقلبی باشد آن‌گاه

◁ ADE را وزن کنید،

◁ اگر ۲ تا از ADE تقلبی باشند (A تقلبی است و هم‌چنین یکی از D و E)، آن‌گاه D را وزن کنید و کار تمام است.

◁ اگر یکی از ADE تقلبی باشد آن‌گاه

◁◁ AFG را وزن کنید،

◁◁ اگر ۲ تا تقلبی باشند (A و یکی از F و G تقلبی است)، آن‌گاه F را وزن کنید و کار تمام است.

◁◁ اگر یکی تقلبی باشد (A تنها سکه‌ی تقلبی بین A تا G است):

◁◁◁ HI را وزن کنید،

◁◁◁ اگر یکی تقلبی باشد H و در غیر این صورت J را وزن کنید و کار پایان می‌یابد.

◁◁ اگر هیچ‌یک از AFG تقلبی نباشند (یکی از B و C و یکی از D و E تقلبی است) آن‌گاه

◁◁◁ اول B و بعد D را وزن کنید و کار پایان می‌یابد.

◁ اگر هیچ‌یک از ADE تقلبی نباشند (ADE همگی واقعی و یکی از B و C تقلبی است) آن‌گاه

◁◁ BFG را وزن کنید،

◁◁ اگر ۲ تا تقلبی باشند (B باید تقلبی باشد) F را وزن کنید و کار تمام است.

◁◁ اگر یکی تقلبی باشد (B تقلبی است یا C و یکی از F و G تقلبی هستند)، آن‌گاه

◁◁◁ BHI را وزن کنید،

◁◁◁ اگر ۲ تا تقلبی باشند (B و یکی از H و I تقلبی هستند)، H را وزن کنید و کار تمام است.

◁◁◁ اگر یکی تقلبی باشد (B تنها سکه‌ی تقلبی بین A تا I است)، J را وزن کنید و کار تمام است.

◁◁◁ اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند (C و یکی از F و G تقلبی است)، آن‌گاه F را وزن کنید و کار پایان می‌یابد.

◁◁◁ اگر هیچ‌یک از سکه‌ها تقلبی نباشند (C تنها سکه‌ی تقلبی بین A تا G است)، آن‌گاه

- HI را وزن کنید،
- اگر یکی تقلبی باشد، H و در غیر این صورت J را وزن کنید و کار تمام است.

۴. اگر هیچ‌یک از ABC تقلبی نباشند، آن‌گاه

◁ DEF را وزن کنید.

◁ اگر ۲ تا از DEF تقلبی باشند ابتدا D و سپس E را وزن کنید. و کار تمام است.

◁ اگر یکی از DEF تقلبی باشد، آن‌گاه

◁◁ DGH را وزن کنید،

◁◁ اگر ۲ تا تقلبی باشند (D و یکی از G و H تقلبی است) G را وزن کنید و کار پایان می‌یابد.

◁◁ اگر یکی از سکه‌ها تقلبی باشد (D یا یکی از E و F و یکی از H و G تقلبی است)، آن‌گاه

◁◁◁ EGI را وزن کنید،

◁◁◁ اگر ۲ تا تقلبی باشند، آن‌گاه E و G تقلبی هستند و کار تمام است.

◁◁◁ اگر یکی تقلبی باشد، آن‌گاه

- EFG را وزن کنید،
- اگر ۲ تا تقلبی باشند، آن‌گاه F و G سکه‌های تقلبی هستند و کار تمام است.
- اگر یکی تقلبی باشد، آن‌گاه سکه‌های تق‌لبی E و H هستند و کار پایان یافته است.
- اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند، آن‌گاه D و I سکه‌های تقلبی هستند و کار تمام است.

◁◁◁ اگر هیچ‌یک از EGI تقلبی نباشند (D یا هر دو F و H تقلبی‌اند) آن‌گاه.

- DJ را وزن کنید،
- اگر ۲ تا تقلبی باشند، کار تمام است.
- اگر فقط یکی تقلبی باشد، D تنها سکه‌ی تقلبی است و کار تمام است.
- اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند، آن‌گاه F و H سکه‌های تقلبی‌اند و کار پایان یافته است.

◁◁ اگر هیچ‌یک از DGH تقلبی نباشند (یکی از E و F تقلبی هستند)، آن‌گاه

◁◁◁ IE را وزن کنید،

◁◁◁ اگر هر دو تقلبی باشند که کار تمام است.

◁◁◁ اگر یکی تقلبی باشد، آن‌گاه

- JE را وزن کنید،
- اگر هر دو تقلبی باشند که کار تمام است.
- اگر فقط یکی تقلبی باشد، آن‌گاه E تنها سکه‌ی تقلبی است و کار پایان یافته است.
- اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند، آن‌گاه I و F سکه‌های تقلبی‌اند و کار تمام است.

◁◁◁ اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند (F تقلبی است)، J را وزن کنید و کار تمام است.

◁ اگر هیچ‌یک از DEF تقلبی نباشد (A-F همگی واقعی‌اند) آن‌گاه

◁◁ GH را وزن کنید،

◁◁ اگر هر دو تقلبی باشند که کار تمام است.

◁◁ اگر یکی تقلبی باشد، آن‌گاه

◁◁◁ GI را وزن کنید،

◁◁◁ اگر هر دو تقلبی باشند که کار تمام است.

◁◁◁ اگر یکی تقلبی باشد (G یا هر دوی H و I تقلبی‌اند)، آن‌گاه

- GJ را وزن کنید،
- اگر هر دو تقلبی باشند که کار تمام است.
- اگر فقط یکی تقلبی باشد، G تنها سکه‌ی تقلبی است.
- اگر هیچ‌یک تقلبی نباشند، H و I سکه‌های تقلبی هستند.

◁◁◁ اگر هیچ‌یک از GI تقلبی نباشند (H تنها سکه‌ی تقلبی بین A تا I است)، J را وزن کنید و کار تمام است.

◁◁ اگر هیچ‌یک از GH تقلبی نباشند (آن‌گاه A تا H همگی واقعی‌اند) آن‌گاه اول I و بعد J را وزن کنید و کار تمام است.

چهار بار وزن‌کردن سکه‌ها برای تعیین سکه‌های تقلبی کافی نیست. برای اثبات این امر توجه کنید که $\binom{10}{2}$ یا ۴۵ امکان مختلف برای سکه‌های تقلبی وجود دارد. ضمناً اگر فقط یک سکه‌ی تقلبی وجود داشته باشد، ۱۰ حالت دیگر نیز به این حالت‌ها افزوده می‌شود و یک حالت باقی می‌ماند که آن هم حالتی است که سکه‌ی تقلبی وجود نداشته باشد. بنابراین ۵۶ امکان مختلف وجود دارد.

فرض کنید از ۳ سکه‌ای که اول وزن کرده‌ایم هیچ‌یک تقلبی نباشند. آن‌گاه در به‌ترین حالت حداکثر ۳ سکه کنار می‌رود و $\binom{7}{2}$ حالت باقی می‌ماند. با اضافه کردن ۷ حالت یک سکه‌ی تقلبی و حالتی که در آن هیچ سکه‌ی تقلبی‌ای وجود ندارد جمعاً ۲۹ حالت وجود خواهد داشت. از آن‌جا که حداکثر ۳ بار دیگر می‌توانیم از ترازو استفاده کنیم و نتیجه‌ی هر حالت ۰، ۱ یا ۲ است، با این سه بار وزن‌کردن می‌توان حداکثر ۲۷ = ۳ × ۳ × ۳ حالت را تشخیص داد که برای ۲۹ حالت کافی نیست.

۲. برای حالتی که می‌توانیم تعداد دل‌خواهی سکه را وزن کنیم باز ۵ کم‌ترین تعداد دفعات لازم برای استفاده از ترازوست. در این حالت نیز چون حداکثر ۲ سکه‌ی تقلبی داریم، نتیجه‌ی هر بار استفاده از ترازو ۰، ۱ یا ۲ خواهد بود. بنابراین با هربار وزن‌کردن نمی‌توان تعداد حالت‌ها را به کم‌تر از یک سوم رساند. به‌وضوح وزن‌کردن ۳ سکه یا کم‌تر در دفعه‌ی اولِ استفاده از ترازو طبق بحثِ بند قبل هیچ کمکی نمی‌کند.

فرض کنید اولین بار چهار سکه وزن شوند و یکی از آن‌ها تقلبی باشد. بنابراین تعداد حالت‌های باقی‌مانده برای وجود سکه‌های تقلبی برابر با تعداد حالت‌هایی است که یکی از ۴ سکه و حداکثر یکی از ۶ سکه‌ی باقی‌مانده تقلبی باشد. تعداد حالت‌هایی که یکی از ۴ سکه ممکن است تقلبی باشد ۴ حالت است. تعداد حالاتی که صفر یا یکی از ۶ سکه‌ی تقلبی باشد ۷ = ۶ + ۱ حالت است، که حاصل‌ضرب آن‌ها ۲۸ است. با ۳ بار وزن‌کردن حداکثر ۲۷ حالت را می‌توان تشخیص داد که این‌جا نیز کافی نیست.

اگر بار اول ۵ سکه انتخاب کنیم و یکی تقلبی باشد، ۳۰ = (۱ + ۵) × ۵ حالت وجود دارد.

اگر بار اول ۶ سکه انتخاب کنیم و یکی تقلبی باشد، ۳۰ = (۱ + ۴) × ۶ حالت ممکن است.

اگر بار اول ۷ سکه انتخاب شوند و یکی تقلبی باشد، ۲۸ = (۱ + ۳) × ۷ حالت وجود دارد.

اگر بار اول ۸ سکه انتخاب شوند و دوتایشان تقلبی باشند، ۲۸ = $\binom{8}{2}$ حالت وجود دارد.

اگر ۹ سکه را بار اول انتخاب کنیم که دوتای آن‌ها تقلبی باشند، $\binom{9}{2} = 36$ حالت وجود دارد.

و اگر ۱۰ سکه را بار اول وزن کنیم و ۲ تای آن‌ها تقلبی باشند، $\binom{10}{2} = 45$ حالت وجود دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید هر طور که بار اول سکه‌ها را وزن کنیم ممکن است ۳ بار وزن‌کردن دیگر کافی نباشد.

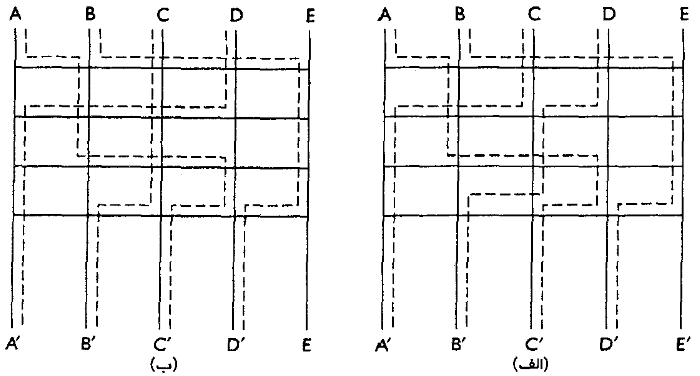
مسئله‌ی ۲۶. سینیور آلکاتراز و گاوهای وحشی

۱. خیر. هیچ راهی برای طراحی چنین مسیری وجود ندارد. برای اثبات فرض کنید $X - X'$ سمت چپ‌ترین مسیری است که در آن یک گاو مثلاً به‌نام «تورو» از یک مسیر عرضی برای رفتن به سمت راست استفاده می‌کند (دست‌کم یک گاو این چنین وجود دارد).

مسیرهای عرضی را از بالا به پایین با ۱ تا ... شماره‌گذاری کنید. فرض کنید مسیری عرضی که تورو برای رفتن به راست از آن استفاده کرده است مسیر iام باشد. حال گاوی را در نظر بگیرید که قبلاً سمت راست تورو حرکت می‌کرده است (در مسیر طولی‌ای که تورو پس از حرکت به راست در آن قرار گرفته است). با کمی دقت خواهید دید که او در مسیر عرضی iام نمی‌توانسته به سمت چپ برود. مسیر خودش هم که توسط تورو اشغال شده است. پس او هم باید به‌سمت راست برود و جای دیگری را اشغال کند... اما گاوی که در خط DD' است نمی‌تواند سمت راست برود.

۲. فقط ۴ خط عرضی برای چهار گاو و با پنج مسیر طولی کافی است. اولاً اگر جای‌گشت موردنظر شامل یک خط راست (که از هیچ مسیر عرضی استفاده نمی‌کند) باشد، مسئله به حالت ۳ گاو و ۴ مسیر تبدیل می‌شود که به‌سادگی قابل حل است. در غیر این صورت اگر هیچ مسیر مستقیمی وجود نداشته باشد، دو حالت اساسی جداگانه را درنظر می‌گیریم: حالت‌های با دو تعویض (دو جای‌گشت مجزا از دو مسیر) و صفر تعویض، که به‌عنوان نمونه می‌توان به جای‌گشت $A - C'$، $B - D'$، $C - A'$، $D - B'$ و هم‌چنین برای صفر تعویض به جای‌گشت $A - C'$، $B - D'$، $D - A'$، $C - B'$ اشاره کرد که در شکل ۵۴ (به‌ترتیب در الف و ب) دیده می‌شوند.

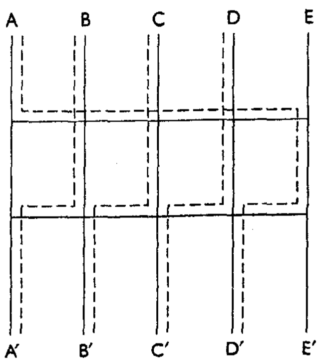
روش کار بسیار ساده و معمولی است. گاوها را به‌ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ شماره‌گذاری می‌کنیم که گاو شماره‌ی ۱ در A'، گاو شماره‌ی ۲ در B' و ... به انتها خواهد رسید. در



شکل ۵۴

اولین خط عرضی گاو شماره‌ی ۴ به مسیر $E-E'$ می‌رود و تا آخرین مسیر عرضی در همان مسیر باقی می‌ماند. در اولین مسیر عرضی گاوهای سمت چپ ِ گاو شماره‌ی ۴ هر کدام یک واحد به سمت ِ راست حرکت می‌کنند. بنابراین $A-A'$ بین اولین و دومین خط عرضی خالی خواهد بود.

در دومین خط عرضی گاو شماره‌ی ۱ به مسیر $A-A'$ می‌رود و تا آخر همان‌جا می‌ماند. بجز گاو ۴ تمام گاوهای سمت راست ِ گاو ۱ یک واحد در مسیر عرضی دوم به سمت چپ حرکت می‌کنند، پس فقط ممکن است گاوهای ۲ و ۳ خارج از ترتیب موردنظر باشند و در ضمن مسیر $D-D'$ خالی است. در سومین خط عرضی، گاو ۳ به مسیر $D-D'$ می‌رود و گاوها در ترتیب درست واقع خواهند شد و مسیر عرضی چهارم می‌تواند آن‌ها را در جاهای مناسبشان قرار دهد.



شکل ۵۵. یک راه حل فقط با استفاده از دو مسیر عرضی

۳. بله، مثلاً $A - D'$، $B - A'$، $C - B'$، $D - C'$ فقط به دو مسیر عرضی احتیاج دارد (شکل ۵۵).

۴. حل این بند به خود شما واگذار می‌شود.

مسئله‌ی ۲۷. میهمانی خیریه

راه‌حل‌های بازی همه بستگی به احتمال آمدن مجموع‌های مختلف در پرتاب دو تاس دارد. احتمال این‌که مجموع حاصل از پرتاب ۲ تاس ۲ باشد ۱ به ۳۶ است و احتمال آمدن مجموعِ ۳، ۲ به ۳۶، چرا که دو نوع پرتاب متفاوت نتیجه‌ی یکسان ۳ را می‌دهند. به همین ترتیب، بقیه‌ی احتمال‌ها محاسبه می‌شوند که در جدول آمده است.

۱. بنابراین در بازی اول میزبان به احتمال ۲۱ به ۳۶ و بازی‌کن به احتمال ۱۵ به ۳۶ می‌برد. اگر هر یک روی یک دلار شرط‌بندی کنند، بازی‌کن ۱۸/۷۵ دلار و میزبان ۲۱ دلار خواهد برد که در نتیجه در هر مرحله به‌طور متوسط بازی‌کن ۳۶/(۱۸/۷۵−۲۱) دلار یا ۶/۲۵ سنت می‌بازد.

۲. تحلیل بازی دوم قدری پیچیده‌تر است. یک روش برای بررسی این بازی آن است که بگوییم بازی‌کن ممکن است در دو وضعیت قرار داشته باشد، تند یا کند. در آغاز بازی‌کن در وضعیت کند قرار دارد. در وضعیت کند او به احتمال ۲۱ به ۳۶ می‌بازد و در همان موقعیت می‌ماند و به احتمال ۱۵ به ۳۶ برنده می‌شود و به وضعیت تند منتقل می‌شود. در وضعیت تند او به احتمال ۱۵ به ۳۶ برنده می‌شود و در همان وضعیت

مجموع	احتمال آمدن مجموع موردنظر
۲	۱ به ۳۶
۳	۲ به ۳۶
۴	۳ به ۳۶
۵	۴ به ۳۶
۶	۵ به ۳۶
۷	۶ به ۳۶
۸	۵ به ۳۶
۹	۴ به ۳۶
۱۰	۳ به ۳۶
۱۱	۲ به ۳۶
۱۲	۱ به ۳۶

باقی می‌ماند و به احتمال ۱۵ به ۳۶ می‌بازد و به وضعیت کند منتقل می‌شود و به احتمال ٦ به ۳٦ بدون هیچ تغییری در همان محل اولیه باقی می‌ماند که این حالت آخر را به‌راحتی حذف می‌کنیم. شکل ٥٦ احتمال‌های تغییر وضعیت را در این بازی به‌خوبی نشان می‌دهد.

فرض کنید P_{slow} احتمال این باشد که بازی‌کن در وضعیت کند و P_{fast} احتمال این باشد که بازی‌کن در حالت تند است. واضح است که $P_{fast} = ۱ - P_{slow}$.

از طرف دیگر، احتمال این‌که بعد از پرتاب تاس‌ها بازی‌کن در حالت کند باشد $(۲۱/۳٦) \times P_{slow} + (۰/۵) \times P_{fast}$ است. با حل این دو معادله به‌دست می‌آوریم $P_{fast} = ۵/۱۱$ و $P_{slow} = ٦/۱۱$.

حال در وضعیت کند انتظار می‌رود که بازی‌کن به‌ازای هر دلار مقدار زیر را به دست آورد:

$$(۱۵/۳٦) \times ۱/۰۵ - (۲۱/۳٦) = -۱۴/۴۸ \text{ سنت}$$

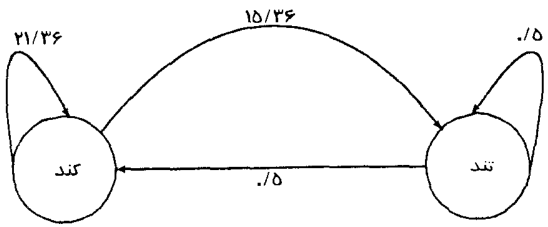
این مقدار را Win_{slow} می‌نامیم. در وضعیت تند بازی‌کن انتظار به‌دست آوردن $۱۲/۵۰ = (۰/۵) - (۱/۲۵)(۰/۵)$ سنت در هر بار پرتاب تاس‌ها به ازای هر دلار را دارد که آن را Win_{fast} می‌نامیم. با ضرب کردن این مقادیر در احتمال این‌که فرد در وضعیت تند یا کند باشد، مقدار متوسطی را که شخص به‌دست خواهد آورد محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$P_{slow} \times Win_{slow} + P_{fast} \times Win_{fast} = -۲/۳ \text{ سنت}$$

۳. در بازی جدید مقادیر P_{slow} و P_{fast} هیچ تغییری نمی‌کنند و داریم:

$$Win_{slow} = (۱۵/۳٦) \times ۱/۲۵ - (۲۱/۳٦) = -٦/۲۵ \text{ سنت در هر بازی}$$

$$Win_{fast} = (۰/۵)(۱/۰۵) - (۰/۵) = ۲/۵ \text{ سنت در هر بازی}$$



شکل ٥٦. احتمال تغییر وضعیت از حالت تند به کند و به عکس

که این بار هم داریم:

$$P_{slow} \times Win_{slow} + P_{fast} \times Win_{fast} = -۲/۳ \text{ سنت در هر بازی}$$

مسئله‌ی ۲۸. درهای فرد

همان‌طور که می‌دانید هر در، در هر طرف یک دست‌گیره دارد، پس هر در دو دست‌گیره دارد. پس تعداد درهای یک زیرزمین هرچه باشد مجموع تعداد دست‌گیره‌های آن زوج است. فرض کنید که n مجموع کل تعداد دست‌گیره‌های درهای یک زیرزمین است. اگر این زیرزمین ۳ در ورودی داشته باشد (که بتوان از بیرون و از طریق آن‌ها به اتاق‌های این زیرزمین وارد شد،) $n - ۳$ دست‌گیره دیگر باقی می‌ماند. می‌دانیم که n یک عدد زوج است، پس $n - ۳$ باید فرد باشد. $n - ۳$ در واقع برابر است با مجموع تعداد درهای همه‌ی اتاق‌های آن زیر زمین. تعداد درهای حداقل یکی از اتاق‌های این زیرزمین باید فرد باشد، چرا که $n - ۳$ فرد است. یعنی اتاقی که تعداد درهایش فرد است در این زیرزمین قرار دارد.
توجه: این استدلال با کمک «اصل لانه کبوتری» انجام شده است.

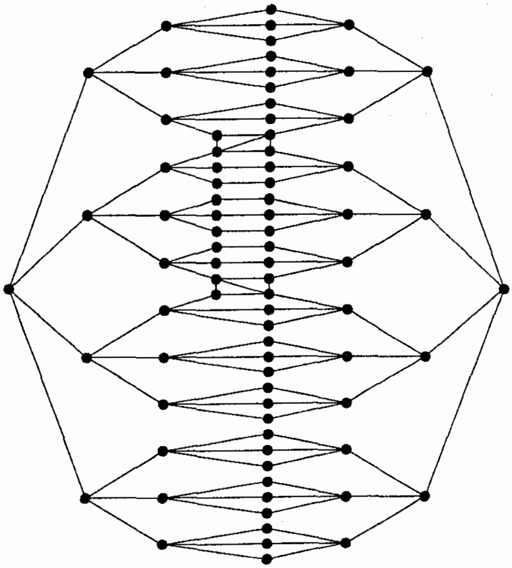
مسئله‌ی ۲۹. شهرک فضایی

شکل شهرک را در شکل ۵۷ مشاهده می‌کنید. می‌توانید با ساختن شهرک‌هایی با ۵۳، ۷۰، ۷۹ و ۸۱ واحد به این طرح برسید. البته اثباتی برای این‌که ۸۱ بیش‌ترین تعداد واحدها برای چنین شهرکی است تا کنون ارائه نشده است. شاید شما بتوانید جواب به‌تری پیدا کنید.

مسئله‌ی ۳۰. ماسه‌شمار

۱. کافی است سطلی پر از ماسه را به مرتاض نشان دهید. سپس از او بخواهید که محل را ترک کند و تعداد کمی از دانه‌های ماسه‌ی سطل (آن قدر که خودتان بتوانید بشمارید) را بردارید و بعد از بازگشت از مرتاض بپرسید که چند دانه‌ی ماسه از سطل برداشته‌اید.

با این کار به هیچ وجه کار مرتاض ساده‌تر نخواهد شد. ضمن این‌که او مجبور نیست به سؤالی که شما جوابش را نمی‌دانید جواب دهد! شما برای اثبات راست‌گو بودن مرتاض



شکل ۵۷. طرح شهرک فضایی

می‌توانید این کار را چند بار تکرار کنید تا احتمال این‌که او به‌طور تصادفی عددی انتخاب کرده باشد نیز بسیار کاهش یابد.

۲. فرد مقلد در بین یک جمع می‌تواند ادعای ماسه‌شمار بودن بکند و کار او را تقلید کند. او وقتی که سطلی از ماسه در اختیار او قرار داده می‌شود که تعداد ماسه‌های آن‌را بشمارد، همان سطل را به مرتاض نشان می‌دهد و اگر مرتاض جوابی دهد آن‌را به سؤال‌کننده می‌گوید. بار دوم همان سطل را که تعدادی از دانه‌ی ماسه از آن برداشته شده است از طرف سؤال‌کننده به او داده می‌شود که تعداد دانه‌های برداشته‌شده را بشمارد، آن را به مرتاض نشان می‌دهد و همان سؤال (شمارش تعداد دانه‌های ماسه‌ی برداشته‌شده) را از او می‌پرسد و جواب مرتاض را به سؤال‌کننده می‌گوید.

سؤال دیگر در این موضوع که از سوی پروفسور مایکل رابین از دانشگاه هاروارد مطرح شده است این‌چنین است. آیا می‌توانید آن‌را حل کنید؟

> فرض کنید که قانع شده‌اید که مرتاض ر قدرت شمارش تعداد شن‌های یک سطل را دارد. اگر شما یک سطل پر از ماسه را به او نشان دهید و از او بخواهید که ماسه‌ها را بشمارد، او عددی را در پاسخ می‌گوید. آیا می‌توانید آزمایشی (سؤال‌هایی) را طراحی کنید که با انجام آن بتوانید درستی پاسخ او اثبات کنید؟

مسئله‌ی ۳۱. در جستجوی اردوگاه

۱. یک روش برای حل این مسئله به این ترتیب است: ابتدا فرمانده از یک مسیر می‌رود و ۳ نفر از سربازان را از مسیر دوم، ۳ نفر دیگر را از مسیر سوم و ۲ نفر دیگر را از مسیر چهارم می‌فرستد. اعضای هر گروه در مسیر خود بعد از ۲۰ دقیقه پیاده‌روی متوجه خواهند شد که آیا اردوگاه در مسیر آن‌ها قرار دارد یا خیر. همه بعد از ۲۰ دقیقه پیاده‌روی به محل تقاطع برمی‌گردند و هر سرباز آن‌چه را که دیده است گزارش می‌دهد. فرمانده می‌تواند با استفاده از گفته‌های سربازان به این ترتیب محل اردوگاه را پیدا کند:

حالت اول: اگر خود فرمانده اردوگاه را پیدا کرده باشد که مسئله حل می‌شود و همه‌ی افراد را به سمت اردوگاه هدایت می‌کند.

حالت دوم: در این حالت فرمانده اردوگاه را در مسیر خود پیدا نکرده است و بین صحبت‌های گروه‌های ۳ نفری اختلاف وجود دارد؛ یعنی در هر گروه ۳ نفره یک نفر وجود دارد که گفته‌هایش با بقیه تفاوت دارد. در این حالت چون حداکثر ۲ دروغ‌گو در بین سربازان وجود دارد، در هر گروه سه نفری یک دروغ‌گو وجود دارد که در این مورد دروغ می‌گوید. در این صورت اگر فرمانده نظر اکثریت را قبول کند، وضعیت هر ۴ مسیر مشخص می‌شود.

حالت سوم: اگر اختلاف نظر در یک گروه سه نفری و در یک گروه دو نفری باشد، در این حالت نیز در هر کدام از این ۲ گروه یک دروغ‌گو وجود دارد. فرمانده در این حالت گروه دو نفری را کنار می‌گذارد و نظر اکثریت را در گروه‌های دیگر می‌پذیرد. به این ترتیب وضعیت ۳ مسیر مشخص می‌شود و در نتیجه وضعیت مسیر چهارم نیز معین می‌شود.

حالت چهارم: اگر اختلاف نظر فقط در یک گروه باشد، فرمانده آن گروه را کنار می‌گذارد و با توجه به نظر بقیه‌ی گروه‌ها وضعیت مسیر را مشخص می‌کند.

حالت پنجم: اگر در هیچ‌کدام از گروه‌ها اختلاف نظر وجود نداشته باشد، تنها گروهی که ممکن است همگی دروغ بگویند (چون تعداد دروغگوها حداکثر دو نفر است) گروه دو نفری است. پس فرمانده این گروه را کنار می‌گذارد و با توجه به نظر بقیه‌ی گروه‌ها وضعیت مسیرها را مشخص می‌کند.

۲. خیر. در این حالت ممکن نیست، زیرا یک جفت مسیر مانند A و B وجود دارند که فرمانده به آن مسیرها نرفته است و افرادی که به این مسیر فرستاده شده‌اند ۴ نفر هستند. اگر ۴ نفر به مسیر A رفته باشند و کسی به مسیر B نرفته باشد، هنگام برگشت،

اگر دو نفر از افراد بگویند که اردوگاه در مسیر A است و دو نفر بگویند نیست فرمانده نمی‌تواند تصمیم بگیرد که اردوگاه در مسیر A واقع است یا در مسیر B.

اگر ۳ نفر به مسیر A بروند و یک نفر به مسیر B و پس از بازگشت، بین ۳ نفر که به A رفته‌اند اختلاف نظر باشد، فرمانده نمی‌تواند تصمیم بگیرد که آیا دروغ‌گوها هر دو در مسیر A رفته‌اند و یا یک نفر در مسیر A است و یک نفر در مسیر B. در نتیجه نمی‌تواند محل اردوگاه را پیدا کند.

اگر دو نفر در مسیر A و دو نفر در مسیر B بروند و هنگام برگشت جواب هر دو گروه یکسان باشد، باز هم فرمانده نمی‌تواند تشخیص بدهد که اردوگاه در کدام مسیر واقع شده است.

۳. با ۵ نفر دروغ‌گو، حداقل ۱۷ سرباز برای پیدا کردن محل اردوگاه لازم است. در این حالت اگر در مسیر ۱۰ نفر یا کم‌تر را بفرستیم، مانند حالت قبلی که بحث شد، چون تعداد دروغ‌گوها پنج نفر است نمی‌توان مسیر را تشخیص داد، پس باید به هر زوج مسیر حداقل ۱۱ نفر فرستاده شود. یعنی فرمانده دست‌کم به ۱۷ سرباز احتیاج دارد و باید آن‌ها را به این ترتیب بفرستد. فرمانده خود در یک مسیر می‌رود و ٦ نفر را در یک مسیر و ٦ نفر دیگر را در مسیر دوم و ۵ نفر را در مسیر سوم می‌فرستد. در بازگشت یکی از این حالت‌ها اتفاق می‌افتد:

حالت اول: اگر خود فرمانده اردوگاه را پیدا کند که مسئله حل می‌شود.

حالت دوم: اگر در هیچ گروهی اختلاف نظر نباشد، او گروه ۵ نفری را که ممکن است همگی دروغ بگویند کنار می‌گذارد و با توجه به نظر بقیه، اردوگاه را پیدا می‌کند.

حالت سوم: اختلاف در دو گروه یا بیش‌تر باشد. در دو گروه تعدادی را که در اقلیت هستند می‌شماریم. این تعداد در هر گروه برابر کم‌ترین تعداد دروغ‌گوها در آن گروه است. با توجه به این امر اگر در گروهی اکثریت بیش‌تر از پنج (تعداد کل دروغ‌گوها) منهای مجموع اقلیت‌ها در ۲ گروه دیگر (حداقل تعداد دروغ‌گوهای آن گروه‌ها) باشد، اکثریت آن گروه حتماً راست‌گو هستند. از طرف دیگر چون فقط ۵ نفر دروغ‌گو هستند پس حتماً دو گروه پیدا می‌شوند که اکثریت‌شان راست بگویند. به این ترتیب فرمانده اردوگاه را پیدا خواهد کرد.

با فقط ۱٦ سرباز زوج مسیرهایی پیدا می‌شوند که فقط ۱۰ نفر دارند. در این صورت مسئله راه‌حلی ندارد.

۴. یک راه‌حل ممکن ولی ناموفق به این صورت می‌تواند باشد. این ۱۰۰ دقیقه را به دو دور ۴۰ دقیقه‌ای تقسیم می‌کنیم که در هر دور هر کس می‌تواند یک مسیر را برود و به

محل تقاطع برگردد. در ۲۰ دقیقه‌ی آخر نیز بعد از پیدا کردن محل اردوگاه می‌توانند همگی به اردوگاه بروند. فرمانده دو مسیر A و B و سربازها دو مسیر C و D را بررسی می‌کنند. اگر فرمانده مسیر درست را پیدا نکند، با شرایط مسئله، راهی برای پیدا کردن مسیر درست بین C یا D وجود ندارد.

راه‌حل دیگر ممکن است به‌صورت زیر باشد: در دور اول فرمانده در مسیر A می‌رود و ۴ نفر دیگر را در مسیر B می‌فرستد. پس از بازگشت اگر فرمانده اردوگاه را پیدا کرده باشد که مسئله حل می‌شود. در غیر این صورت اگر ۳ یا ۴ نفر از گروه ۴ نفری B را مسیر درست بدانند، در آن‌صورت B جواب است. ولی اگر اگر ۳ یا ۴ نفر بگویند که مسیر درست B نیست، در آن صورت فرمانده خود در دور بعدی مسیر C را بررسی می‌کند و سربازان استراحت می‌کنند. به این ترتیب مشخص می‌شود که اردوگاه در کدام مسیر است.

ولی اگر در گروه ۴ نفری، دو نفر بگویند که اردوگاه در مسیر B هست و دو نفر دیگر بگویند نیست، در دور بعدی فرمانده خود به مسیر B می‌رود و دو نفر از سربازان را گفته بودند که B جواب نیست برای بررسی مسیر C می‌فرستد. اگر پس از بازگشت فرمانده مسیر درست را پیدا کند که مسئله تمام است. وگرنه افرادی که به C رفته‌اند باید راست‌گو باشند و بنابراین مسیر درست پیدا می‌شود. (اشتباه این استدلال در چیست؟)

مسئله‌ی ۳۲. آدم‌ربایی در آمازون

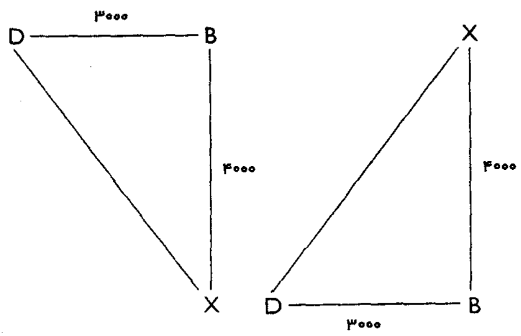
۱. مبادلات می‌تواند به‌ترتیب زیر انجام شود:

$2A \to N \to 2G \to 4C\ 4D \to N\ H\ C \to H\ C\ 2G \to H\ 5C\ 4D \to H\ 2C \to$
$\to N\ H \to 2H\ 2C\ 2G \to 2H\ 2C\ 4C\ 4D \to 3H\ 3C\ N \to 3H\ 3C\ 2G \to M \to$
$\to 2H\ C\ 2G \to M\ 2H\ A\ 2G \to M\ 2H\ B\ C\ F\ 2G \to M\ 2H\ B\ A\ F\ 2G \to M \to$
$\to 3H\ 3G\ BF \to$ کارل هیل و چند چیز جزئی دیگر.

۲. حل این سؤال به خود شما واگذار می‌شود.

مسئله‌ی ۳۳. گنج در کشتی غرق‌شده

محل گنج را با X نشان می‌دهیم. چون D در غرب B واقع شده و نیز به‌دلیل این‌که نسبت فاصله‌های بین DB، BX و DX به‌ترتیب برابر ۳:۴:۵ است، سه نقطه‌ی D، B و X یک مثلث

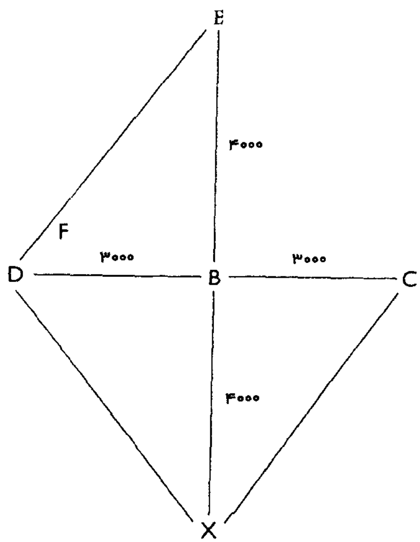


شکل ۵۸. دو حالت ممکن برای مثلث راست‌گوشه‌ی DBX

راست‌گوشه تشکیل می‌دهند که X در شمال یا جنوب B قرار دارد (شکل ۵۸).

CBX نیز یک مثلث راست‌گوشه است. تا این‌جا ممکن است C و D یک نقطه باشند ولی چون در متن آمده است که D از C به نقطه‌ی F نزدیک‌تر است، این امکان از بین می‌رود و نتیجه می‌شود که DB و CB در یک راستا قرار دارند (شکل ۵۹).

از سویی دیگر EBD نیز یک مثلث راست‌گوشه است. چون E از جزیره به گنج نزدیک‌تر است، EBD و XBD نسبت به BD قرینه‌ی هم‌اند. پس فاصله‌ی E و X، ۸۰۰۰ متر است.



شکل ۵۹. چون CB و BD هم‌راستا هستند، F در شمال C قرار دارد و E از F به X نزدیک‌تر است، می‌توانیم محل گنج را تعیین کنیم.

از آن‌جا که E از X به F نزدیک‌تر است، E باید در شمالِ پاره‌خط BD واقع باشد (زیرا که F در شمال این پاره‌خط قرار دارد، این از عبارتی که موقعیت F را نسبت به C نشان می‌دهد نتیجه می‌شود). چون فاصله‌ی E از جزیره ۱۰۰۰ متر و فاصله‌ی X از جزیره ۹۰۰۰ متر است، پاره‌خطی که از X به جزیره کشیده می‌شود باید شامل XE باشد. پس دماغه‌ی جزیره در ۹۰۰۰ متری شمال محل گنج قرار دارد.

مسئله‌ی ۳۴. سندباد در سرزمین غول‌های متفکر

۱. سندباد باید همیشه کارت دوم یعنی کارتی را که روی زمین قرار دارد انتخاب کند، هرچند مجبور باشد که دوبار بازی کند.

۲. احتمال این‌که کارتی که سندباد بار اول انتخاب کرده است، علامت‌دار باشد برابر $\frac{1}{13}$ و احتمال این‌که کارت دوم یعنی کارتی که روی زمین باقی می‌ماند علامت‌دار باشد برابر $\frac{12}{13}$ است. بنابراین اگر سندباد طبق بند ۱ بازی کند، به احتمال $\frac{12}{13}$ دفعه‌ی اول و به احتمال $\frac{12}{13}$ در دفعه‌ی دوم بازی موفق خواهد شد. در کل، احتمال برد سندباد برابر $(\frac{12}{13})^2$ خواهد بود که بیش‌تر از مقدار $\frac{11}{13}$ است.

مسئله‌ی ۳۵. آدم‌خوارها

فرد شماره‌ی ۹ و فرد شماره‌ی ۱۰ باید غیر آدم‌خوار باشند. از آن‌جا که شماره‌های ۱۸ و ۱۹ یک‌دیگر را به آدم‌خوار بودن متهم می‌کنند، دست‌کم یکی از آن‌ها باید آدم‌خوار باشد. بنابراین شماره‌های ۱۱ تا ۱۷ و ۲۰ همگی آدم‌خوارند، چرا که همگی ادعا می‌کنند که شماره‌های ۱۸ و ۱۹ غیرآدم‌خوارند.

چون ۱۸ و ۱۹، هر دو ۱۱ تا ۱۷ و ۲۰ را غیر آدم‌خوار معرفی می‌کنند در واقع باید ۱۸ و ۱۹ هر دو آدم‌خوار باشند.

چون ۱ تا ۵ ادعا می‌کنند که ۱۴ آدم‌خوار نیست، همگی باید آدم‌خوار باشند، و چون ٦ تا ۸ ادعا می‌کنند که ۳ غیر آدم‌خوار است، خود باید آدم‌خوار باشند. ۹ و ۱۰ می‌توانند غیرآدم‌خوار باشند و ۲۱ تا ۲۵ می‌توانند آدم‌خوار باشند، ولی عکس این مطلب نمی‌تواند درست باشد. چون اگر گروهی غیرآدم‌خوار باشند ۹ و ۱۰ نیز جزء آن‌ها خواهند بود. به‌هرحال رییس و بقیه‌ی افرادِ قبیله همگی آدم‌خوارند.

مسئله‌ی ۳۶. ملوان زبل! و کوسه‌های خون‌خوار

ملوان زبل برای نجات از دست کوسه‌ها باید از A شروع به حرکت کند و به‌طرف نقطه‌ی B برود. او باید تعدادی از ماهی‌هایی که با خود آورده است را در B رها کند و با آمدن دو کوسه‌ی C و J، کوسه‌ی C را تفنگش بکشد. با این کار همه‌ی کوسه‌ها بجز G و H را به‌طرف خودش می‌کشاند. ملوان در زمانی که کوسه‌ها مشغول خوردن C هستند باید به B برگردد و بقیه‌ی ماهی‌های سرخ کرده را در فاصله‌ی ۱۰ متری B در جهت C رها کند. سپس او باید منتظر بماند و اولین کوسه‌ای را که نزدیک می‌شود بکشد و بعد از B به J و از آن‌جا به طرف F شنا کند و از مهلکه نجات یابد.

مسئله‌ی ۳۷. مبارزه‌ی انتخاباتی

۱. اگر ترتیب مبارزات به این صورت باشد C می‌برد:

ابتدا D با B مبارزه کند (D با ۵۱ رأی در مقابل ۴۹ رأی می‌برد).
سپس D با A مبارزه کند (A با ٦٦ رأی در مقابل ۳۴ رأی می‌برد).
سپس A با C مبارزه کند (C با ۵۱ رأی در مقابل ۴۹ رأی می‌برد).

۲. خیر. اگر حریف انتخاب درستی بکند D یا B انتخاب خواهند شد. به این ترتیب که می‌دانیم B از هر کس به‌غیر از D می‌برد. در نتیجه اگر D در دور اول حذف شده باشد، B در نهایت انتخاب می‌شود. ولی اگر D مانده باشد و A و C نیز هر دو باقی مانده باشند، حریف می‌تواند در دور دوم، مبارزه را بین A و C برگزار کند که در نتیجه C می‌برد. سپس C در مقابل D حذف می‌شود و در این حالت نهایتاً D انتخاب می‌شود. اگر D مانده باشد و یکی از A و یا C باشند در این حالت حریف می‌تواند مبارزه را بین B و A یا C که حذف نشده‌اند برگزار کند. در این حالت B می‌برد و در دور آخر فقط B و C باقی می‌مانند.

۳. در قسمت اول نشان دادیم که C چگونه می‌تواند انتخاب شود. ترتیب مبارزات برای انتخاب بقیه به این صورت است:

برای بردن A : به‌ترتیب (C,B)، (D,B) و(A,D) و در نتیجه A می‌برد.
برای بردن D : به‌ترتیب (B,A)، (C,B) و (D,B) و در نتیجه D می‌برد.
برای بردن B : به‌ترتیب (D,A)،(B,A) و (C,B) و در نتیجه B می‌برد.

۴. خودتان حل کنید!

مسئله‌ی ۳۸. جنگ قدرت

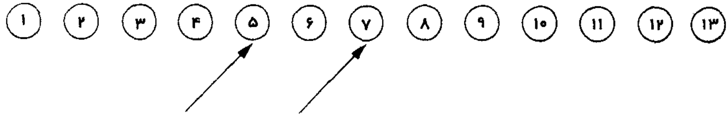
۱. اگر نخست‌وزیر همیشه رأی می‌داد، به‌وضوح او دقیقاً به اندازه‌ی یک نماینده‌ی مجلس سنا قدرت می‌داشت. با کنار گذاشتنِ نخست‌وزیر، رأی‌گیری یا به تساوی می‌انجامد و یا یکی از طرفین (گروه‌های با رأی‌های مثبت و منفی) دست‌کم دو رأی از دسته‌ی دیگر جلوتر است. در حالت اول نخست‌وزیر می‌تواند رأی بدهد و در حالت دوم حتا اگر اجازه‌ی رأی دادن داشته باشد (که ندارد) باز هم نظر او نمی‌تواند نتیجه‌ی رأی‌گیری را عوض کند. بنابراین قدرت نخست‌وزیر به اندازه‌ی یک نماینده‌ی مجلس سناست.

۲. اگر نمایندگان بتوانند رأی ممتنع بدهند، موقعیت برای نخست‌وزیر بدتر می‌شود. چرا که اگر تعدادِ فردی از نمایندگان رأی ممتنع بدهند، نخست‌وزیر نمی‌تواند نظر خودش را اعلام کند و رأی دهد. به‌طور مثال اگر در مورد خاصی ٦١ نماینده رأی بدهند و نتیجه‌ی ٦٠ نفر اول ۳۰ به ۳۰ باشد، نماینده‌ی ٦١ام می‌تواند نتیجه رأی‌گیری را مشخص کند بدون این‌که نخست‌وزیر بتواند نظری بدهد.

۳. با این شرایط نخست‌وزیر قدرت بیش‌تری از یک نماینده‌ی مجلس سنا خواهد داشت. موقعیتی را درنظر بگیرید که در آن ۵۰ نفر رأی مثبت و ۴۹ نفر رأی منفی بدهند و نخست‌وزیر و یک نماینده باقی مانده باشند. بدون توجه به رأی نماینده، نخست‌وزیر می‌تواند نتیجه‌ی رأی‌گیری را تعیین کند. اگر تعداد فردی از نمایندگان رأی مثبت یا منفی بدهند، باز قدرت نخست‌وزیر از یک نماینده‌ی عادی مجلس سنا بیش‌تر است و هیچ موقعیتی وجود ندارد که در آن یک نماینده‌ی مجلس سنا بتواند بدون توجه به نظر نخست‌وزیر نتیجه‌ی رأی‌گیری را تعیین کند.

مسئله‌ی ۳۹. چاه‌های نفت

۱. اگر انگلیس چاه وسطی را انتخاب کند، آرژانتین می‌تواند چاه شماره‌ی ۵ را انتخاب کند. سپس اگر انگلیس چاهی را در سمت چپ چاه ۱۲ انتخاب کند، آرژانتین باید چاه سمت راست سمت راست‌ترین چاه انگلیس را انتخاب کند که با این کار حداقل ۷ چاه به آرژانتین تعلق می‌گیرد. اگر انگلیس چاه ۱۲ یا ۱۳ را انتخاب کند، آرژانتین می‌تواند چاه شماره‌ی ۸ را انتخاب کند که باعث می‌شود دست‌کم ۷ چاه تحت کنترل آرژانتین قرار بگیرد.



شکل ۶۰. انتخاب چاه‌های نفت

۲. اگر آرژانتین چاه‌های شماره ۴ و ۱۰ را انتخاب کند مطمئناً برنده خواهد بود. برای اثبات، سه حالت زیر را درنظر بگیرید. (در بقیه‌ی حالت‌ها انگلیس به‌وضوح بازنده است و یا جزء حالت‌های متقارن با سه حالت زیر است.)

حالت اول: انگلیس چاه‌های ۳ و ۱۱ را انتخاب می‌کند که آرژانتین مالک ۷ چاهِ ۴ تا ۱۰ خواهد بود.

حالت دوم: انگلیس چاه ۳ و یک چاه بین ۵ تا ۹ را انتخاب می‌کند. در این حالت آرژانتین مالک چاه‌های ۱۰ تا ۱۳ است و دست‌کم به اندازه‌ی انگلیس در بین چاه‌های ۴ تا ۹، چاه خواهد داشت. در نتیجه ۷ به ۶ یا ۶ به ۵ خواهد برد.

حالت سوم: انگلیس ۵ و ۹ را انتخاب می‌کند که در این صورت ۸ چاه تحت کنترل آرژانتین خواهد بود.

۳. اگر آرژانتین چاه ۴ را انتخاب کند، انگلیس باید چاه ۱۰ را بگیرد (طبق جواب ۲). سپس آرژانتین می‌تواند ۱۱ را بگیرد. اگر انگلیس به‌صورت متقارن بازی نکند (خانه ۳ را بگیرد) خواهد باخت و بازی متقارن منجر به تساوی می‌شود.

مسئله‌ی ۴۰. تقسیم قدرت

۱. خیر، تقسیم قدرت به‌صورتی که گفته شده باعث می‌شود نماینده‌ی درچو هیچ قدرتی نداشته باشد. درچو هرگز نمی‌تواند روی نتیجه‌ی نهایی تأثیری بگذارد چرا که هر زیرمجموعه‌ی دوتایی از آبینو، برزمو و کارپف تشکیل یک مجموعه‌ی برنده می‌دهد.

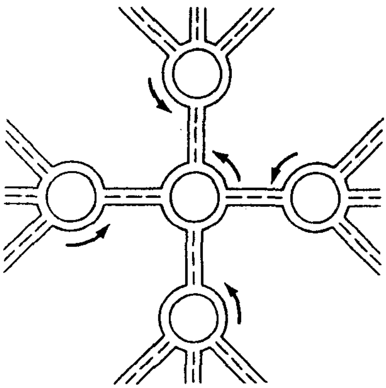
۲. نه، هیچ روشی برای این کار وجود ندارد. چون جمعیت آبینو و برزمو با هم برابر است، باید قدرت آن‌ها با هم برابر باشد. ضمناً آبینو و برزمو باید از درچو و کارپف قدرت بیش‌تری داشته باشند. اگر آبینو و کارپف با هم قدرت بیش‌تری از برزمو و درچو داشته

باشند، درچو هیچ قدرتی نخواهد داشت ولی اگر قدرت آبینو و کارپف کم‌تر باشد، قدرت کارپف به اندازه‌ی درچو خواهد بود که باز غیر قابل قبول است.

۳. بله، چنین تقسیمی وجود دارد. برای این کار اقلیت آبینو را به دو دسته‌ی آبینوی بزرگ با ۳۰۰۰ نفر و آبینوی کوچک با ۱۰۰۰ نفر جمعیت تقسیم می‌کنیم. به همین ترتیب اقلیت برزمو را به دو دسته‌ی برزموی بزرگ با ۳۰۰۰ نفر و برزموی کوچک با ۱۰۰۰ نفر جمعیت تقسیم می‌کنیم. به نماینده‌ی هر دسته به‌ازای هر هزار نفری که در دسته وجود داشته باشند حق یک رأی می‌دهیم. به این ترتیب همه دارای قدرت خواهند بود چرا که آبینوی بزرگ، آبینوی کوچک، برزموی کوچک و درچو می‌توانند با هم تشکیل یک گروه برنده دهند، درحالی که اگر هر یک از آبینوی کوچک، برزموی کوچک یا درچو نظرشان را عوض کنند گروه مقابل برنده خواهد بود. ضمناً آبینوی بزرگ و برزموی بزرگ هر یک از کارپف قدرتمندترند، چرا که آبینوی بزرگ و برزموی بزرگ با هم می‌توانند برنده شوند ولی آبینوی بزرگ و کارپف نمی‌توانند؛ بالأخره کارپف از آبینوی کوچک، برزموی کوچک یا درچو قوی‌تر است، چرا که آبینوی بزرگ، کارپف و آبینوی کوچک با هم می‌توانند برنده باشند در حالی که آبینوی بزرگ، برزموی کوچک و آبینوی کوچک نمی‌توانند.

مسئله‌ی ۴۱. کنترل ترافیک

با ۵ میدان که ۴ میدان در اطراف و یک میدان در وسط باشد و هر کدام از میدان‌های خارجی ۳ ورودی داشته باشند، حداکثر عدد تصادف ماشین‌ها برابر ۹ خواهد بود (شکل ۶۱).



شکل ۶۱. با ۵ میدان می‌توان عدد تصادف را به ۹ رساند.

مسئله‌ی ۴۲. محافظانِ جنگل

۱. اگر محافظان ۱ تا ۱۶ باشند، یکی از روش‌های انجام مکالمات به‌صورت زیر است:

دقیقه‌ی اول: ۱ و ۲، ۳ و ۴، ۵ و ٦، ۷ و ۸، ۹ و ۱۰، ۱۱ و ۱۲، ۱۳ و ۱۴، ۱۵ و ۱٦ با هم ارتباط برقرار می‌کنند.

دقیقه‌ی دوم: ۳ و ۱، ۴ و ۲، ۷ و ۵، ۸ و ٦، ۱۱ و ۹، ۱۲ و ۱۰، ۱۵ و ۱۳، ۱٦ و ۱۴ با هم ارتباط برقرار می‌کنند.

دقیقه‌ی سوم: ۵ و ۱، ۷ و ۳، ٦ و ۲، ۸ و ۴، ۱۳ و ۹، ۱۵ و ۱۱، ۱۴ و ۱۰، ۱٦ و ۱۲ با هم ارتباط برقرار می‌کنند.

دقیقه‌ی چهارم: ۹ و ۱، ۱۳ و ۵، ۱۱ و ۳، ۱۵ و ۷، ۱۰ و ۲، ۱۴ و ٦، ۱۲ و ۴، ۱٦ و ۸ با هم ارتباط برقرار می‌کنند.

۲. خیر. زیرا در دقیقه‌ی اول هر نفر می‌تواند فقط با یک نفر دیگر ارتباط برقرار کند. در نتیجه حداکثر از اطلاعات ۱ نفر دیگر مطلع می‌شود. بنابراین با اطلاعات خودش از ۲ مطلب مطلع می‌شود. به‌همین ترتیب در دقیقه‌ی دوم حداکثر از ۴ مطلب اطلاع حاصل می‌کند و در دقیقه سوم حداکثر از ۸ مطلب. در نتیجه هر نفر حداقل در ۴ دقیقه می‌تواند از کلیه‌ی اخبار مطلع شود.

۳. بله، امکان دارد و یک جواب آن به این صورت است:

دقیقه‌ی اول: ۲ و ۱، ۴ و ۳، ٦ و ۵، ۸ و ۷، ۱۰ و ۹.

دقیقه‌ی دوم: ۷ و ۱، ۳ و ۲، ۹ و ۴، ۸ و ۵، ۱۰ و ٦.

دقیقه‌ی سوم: ۹ و ۱، ۵ و ۲، ۱۰ و ۳، ۸ و ۴، ۷ و ٦.

دقیقه‌ی چهارم: ۲ و ۱، ۴ و ۳، ٦ و ۵، ۸ و ۷، ۱۰ و ۹.

۴. خیر. اگر محافظان ۴ نفر باشند در ۲ دقیقه می‌توانند از کلیه‌ی اخبار مطلع شوند. ولی اگر ۳ نفر باشند حداقل ۳ دقیقه وقت لازم است.

مسئله‌ی ۴۳. برج یک کیلومتری

۱. در این حالت ۱۳ هفته طول می‌کشد. به این صورت:

در پایان هفته‌ی اول: ۵۰۰ ستون به ارتفاع ۲ متر
در پایان هفته‌ی دوم: ۲۵۰ ستون به ارتفاع ۴ متر
در پایان هفته‌ی سوم: ۱۲۵ ستون به ارتفاع ۸ متر
در پایان هفته‌ی چهارم: ۶۲ ستون به ارتفاع ۱۶ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۸ متر
در پایان هفته‌ی پنجم: ۳۱ ستون به ارتفاع ۳۲ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۸ متر
در پایان هفته‌ی ششم: ۱۵ ستون به ارتفاع ۶۴ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۴۰ متر
در پایان هفته‌ی هفتم: ۷ ستون به ارتفاع ۱۲۸ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۱۰۴ متر
در پایان هفته‌ی نهم: ۳ ستون به ارتفاع ۲۵۶ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۲۳۲ متر
(این یک هفته اختلاف به‌دلیل زیاد شدن ارتفاع و تأخیر مربوط به آن است.)
در پایان هفته‌ی یازدهم: ۱ ستون به ارتفاع ۵۱۲ متر و ۱ ستون به ارتفاع ۴۸۸ متر
در پایان هفته‌ی سیزدهم: ۱ ستون یک کیلومتری

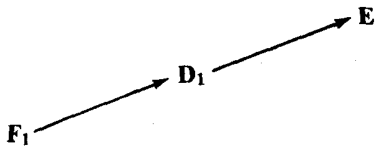
۲. در این حالت ۲۱ هفته طول می‌کشد.

توضیح: این مسئله نشان می‌دهد که هر قدر که کارها موازی انجام شوند، باز هم محدودیتی در رسیدن به کم‌ترین زمان انجام کار وجود دارد. دقت کنید هر قدر هم این سرمایه‌دار، پول‌دار باشد باز نمی‌تواند این برج را یک روزه بسازد. در مسئله‌ی اول شما ۱۰۰۰ برج (قطعاتِ پیش‌ساخته) ورودی و یک برج خروجی که تلفیق همه‌ی این ورودی‌هاست داشتید. چون اتصال هر ۲ برج و تبدیل آن‌ها به یک برج بزرگ‌تر یک عمل محسوب می‌شود، در هر مرحله تعداد می‌تواند نصف شود و به‌همین دلیل حداقل ۱۰ عمل که ۱۳ هفته وقت می‌گیرد لازم است.

مسئله‌ی ۴۴. هزینه‌ی ساخت

۱. کم‌ترین زمان لازم برای ساختن واحد صنعتی ۶/۵ سال است. زیرا مطابق شکل ۶۲ (صفحه‌ی بعد)، کار E مدت ۳ سال طول می‌کشد و وقتی شروع می‌شود که نصف کار D انجام شده باشد که آن‌هم ۲ سال طول می‌کشد. کار D وقتی شروع می‌شود که نصفِ F تمام شده باشد که آن هم ۱/۵ سال طول می‌کشد. پس کم‌ترین زمان برابر است با ۲ + ۱/۵ + ۳ یا ۶/۵ سال.

۲. می‌توان با پرداخت ۱۵ میلیون دلار و نصف کردن زمانِ B، D و E زمان کل را به ۴ سال رساند.



شکل ٦٢. کم‌ترین زمان انجام پروژه ٦/۵ سال است.

مسئله‌ی ۴۵. مشکل وکیل مدافع

ترتیب نوشتن مدارک روی تابلوها به‌صورت زیر است:

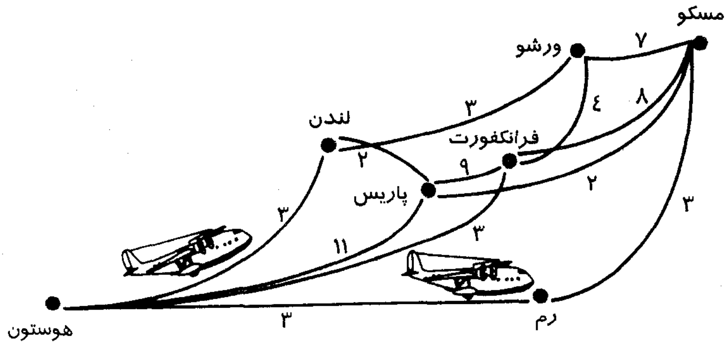
تابلوی ۱: G، I، K، S، A، D و R
تابلوی ۲: H، J، L، F، B، E و U
تابلوی ۳: O، C و N
تابلوی ۴: P و M
تابلوی ۵: Q و T

مدارک گفته‌شده باید روی تابلوهای مربوطه نوشته شوند و ترتیب اثبات آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$\begin{array}{rcl} G, H & \to & O \\ I, J & \to & P \\ K, L & \to & Q \\ O, P, Q & \to & S \\ S, F & \to & T \\ A, B, C & \to & M \\ D, E & \to & N \\ M, N & \to & R \\ R, T & \to & U \end{array}$$

مسئله‌ی ۴٦. حمل بار

۱. بله می‌تواند. در شکل ٦٣ بارهایی که در هر مسیر باید حمل شوند تا ۲۰ تن بار از هوستون به مسکو برود درج شده‌اند.



شکل ٦۳. میزان باری که باید در هر مسیر حمل شود (برحسب تن).

۲. بیش‌ترین بار قابل انتقال ۲۰ تن است ، زیرا از رم به مسکو بیش‌تر از ۳ تن بار نمی‌توانید حمل کنید. هرچند که ظرفیت آن ۱۳ تن است. زیرا بیش‌ترین باری که به رم می‌رسد از هوستون و ۳ تن است، پس بیشینه‌ی باری که ممکن است به مسکو برسد (۳ + ۲ + ۸ + ۷ =) ۲۰ تن است که چگونگی انتقال آن نیز در شکل نشان داده شده است.

اثبات دیگر به این طریق است که در یک شبکه نمی‌توان بیش‌تر از ظرفیت خطوط برشی بار انتقال داد. خطوط برشی خطوطی (یال‌هایی) هستند که اگر وجود نداشته باشند ارتباط مبدأ و مقصد قطع می‌شود و برای انتقال بار گذر از آن‌ها اجتناب‌ناپذیر است. می‌توان اثبات کرد که یک خط برشی با حداقل مجموع ظرفیت وجود دارد که ظرفیت آن کاملاً پر می‌شود و این مقدار جواب است. در این مسئله خطوط برشی کمینه عبارتند از: هوستون به رم، ورشو به مسکو، فرانکفورت به مسکو و پاریس به مسکو که ظرفیت مجموع آن ۲۰ تن است.

۳. اگر یک پرواز بین ورشو و مسکو و سه پرواز بین هوستون و رم اضافه شود، از مسیر رم به مسکو می‌توان ۹ تن بار بیش‌تر از حالت قبل انتقال داد و از مسیر هوستون به لندن و به ورشو می‌توان ۳ تن بیش‌تر بار انتقال داد.

توضیح: این مسئله از مسائل شبکه‌ی شاره است که در کتاب‌های مختلف الگوریتم در خصوص آن بحث شده است، از جمله در کتاب زیر:

T. Cormen, C. Leiserson, R. Riverst, and C. Stein (CLRS) *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 2001.

مسئله‌ی ۴۷. انبار بشکه

۱. این کار را در ۳ مرحله‌ی مختلف انجام می‌دهیم. چون هر مرحله ۴ روز طول می‌کشد کلاً کار در ۱۲ روز انجام می‌شود.

مرحله‌ی اول:

- بشکه‌های حامل C_1، C_2، C_3 و C_4 را از انبار W_5 به W_1 انتقال می‌دهیم و بشکه‌های حامل C_5، C_6، C_7 و C_8 را از انبار W_1 به W_5 انتقال می‌دهیم.
- همین کار را برای انبارهای W_2 و W_6 انجام می‌دهیم.
- همین کار را برای انبارهای W_3 و W_7 انجام می‌دهیم.
- همین کار را برای انبارهای W_4 و W_8 انجام می‌دهیم.

مرحله‌ی دوم:

- بشکه‌های C_1، C_1، C_2 و C_2 را از انبار W_3 به W_1 و بشکه‌های C_3، C_3، C_4 و C_4 را از انبار W_1 به W_3 می‌بریم.
- همان بشکه‌ها را بین W_2 و W_4 جابه‌جا می‌کنیم.
- بشکه‌های C_5، C_5، C_6 و C_6 را از انبار W_7 به W_5 و بشکه‌های C_7، C_7، C_8 و C_8 را از انبار W_5 به W_7 می‌بریم.
- همان بشکه‌ها را بین انبارهای W_6 و W_7 جابه‌جا می‌کنیم.

مرحله سوم:

- چهار بشکه‌ی C_2 را از انبار W_1 به W_2 و ۴ بشکه‌ی C_1 را از W_2 به W_1 می‌بریم.
- چهار بشکه‌ی C_4 را از انبار W_3 به W_4 و ۴ بشکه‌ی C_3 را از W_4 به W_3 می‌بریم.
- چهار بشکه‌ی C_6 را از انبار W_5 به W_6 و ۴ بشکه‌ی C_5 را از W_6 به W_5 می‌بریم.
- چهار بشکه‌ی C_8 را از انبار W_7 به W_8 و ۴ بشکه‌ی C_7 را از W_8 به W_7 می‌بریم.

۲. اگر ۴ عدد کامیون داشته باشیم، هر مرحله از کار در یک روز تمام می‌شود و کار کلاً ۳ روز طول می‌کشد. این زمان کمینه است، زیرا بعد از روز اول هر انبار حداکثر شامل ۲ بشکه از یک نوع ماده است. به همین ترتیب، بعد از روز دوم هر انبار (فرض کنید به نام W_1) فقط می‌تواند با یک انبار دیگر که فقط شامل ۲ بشکه از ماده‌ای است که W_1 می‌خواهد، مبادله انجام دهد و به‌همین دلیل بعد از روز دوم W_1 حداکثر حاوی ۴ بشکه از یک نوع ماده‌ی شیمیایی است. در نتیجه یک روز دیگر برای انجام کار لازم است.

مسئله‌ی ۴۸. مشکل شماره‌ی تلفن

۱. همان‌طور که می‌بینید هر دو شماره‌ی تلفن در دو رقم با هم فرق دارند و هر شماره تلفن هم از رقم‌های متفاوتی تشکیل شده است. در نتیجه با جابه‌جایی رقم‌های یکی از این شماره تلفن‌ها، شماره‌ی موردنظر تبدیل به شماره‌ای می‌شود که در لیست موجود نیست.

۲. راه‌حل‌های زیادی برای این مسئله وجود دارد. یکی از آن‌ها به این ترتیب است که برای هر عدد پنج‌رقمی مانند $vwxyz$ یک رقم ششم q به این ترتیب می‌سازیم که عبارت $A = q + ۲z + y + ۲x + w + ۲v$ بر ۱۰ بخش‌پذیر شود. به‌طور مثال اگر عدد موردِ نظر ۴۲۷۸۵ باشد، عبارتِ $q + ۱۰ + ۸ + ۱۴ + ۲ + ۸ = q + ۴۲$ باید بر ۱۰ بخش‌پذیر شود. در نتیجه q برابر ۸ است و عدد تبدیل به ۴۲۷۸۵۸ می‌شود.

برای اثبات این مطلب که هیچ جابه‌جایی ارقام کنار هم، عدد را به عددی که جزء تلفن‌ها باشد تبدیل نمی‌کند، عدد ٦ رقمی $vwxyzq$ را درنظر بگیرید. فرض کنید ۲ رقمی که جابه‌جا می‌شوند d و d' باشند. در نتیجه اختلاف عدد جدید با عدد اصلی برابر $d - d'$ است. اگر بخواهید عدد جدید نیز در لیست شماره‌های قابل قبول باشد، باید عبارت A برای عدد جدید نیز بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد. اگر عدد جدید را N و عدد قدیم را O بنامیم، آن‌گاه داریم $N - O = d - d'$، و چون حاصل عبارت A برای O بر ۱۰ بخش‌پذیر است، وقتی عبارت A برای N بر ۱۰ بخش‌پذیر می‌شود که $d - d'$ نیز بر ۱۰ بخش‌پذیر شود، و چون d و d' یک رقمی هستند این امر امکان‌پذیر نیست. در نتیجه $d = d'$ و عدد جدید همان عدد اصلی قبلی است. پس به‌این ترتیب با تبدیل جای هیچ دو رقم عددی نمی‌توان به عدد دیگری رسید که در لیست شماره تلفن‌ها موجود باشد.

مسئله‌ی ۴۹. کدسازی

یک مجموعه کد قابل قبول برای پیام‌ها باید طوری باشد که کد هیچ پیامی در ابتدای کد دیگر نیاید، و یا به‌عبارت دقیق‌تر پیشوند آن نباشد. آنان که با مفهوم «درخت» آشنا هستند توجه کنند که یک مجموعه کد قابل قبول را می‌توان با یک درخت دودویی نشان داد به‌طوری که پیام‌ها برگ‌های آن درخت و شاخه‌های درخت برچسب‌های «نقطه» یا «خط» داشته باشند. در آن‌صورت، کد یک پیام ترتیب برچسب‌های موجود در مسیری از ریشه‌ی درخت به آن پیام است. با ساخت این درخت می‌توانید کدها و در نتیجه متوسط زمان انتقال یک متن ۱۰۰ حرفی از پیام‌ها را به‌دست آورد. با کمی دقت مشخص می‌شود که قاعدتاً باید پیام‌هایی که

احتمال آمدن آن‌ها بیش‌تر است به ریشه نزدیک‌تر و آن‌هایی که احتمال‌شان کم‌تر است از ریشه دورتر باشند. هم‌چنین روشن است که در این درخت هر گره دقیقاً دو فرزند دارد.

برای پیام‌های داده‌شده و با توجه به احتمال آمدن آن‌ها در متن می‌توان کدهای زیر را ساخت. این کدها قابل قبول هستند. توجه کنید که کدها از چپ به راست ارسال می‌شوند. (عددهای داخل پرانتز نشان‌دهنده‌ی احتمال آمدن هر پیام است).

D:	نقطه نقطه	(۳۱)
G:	نقطه خط نقطه	(۱۹)
A:	خط خط نقطه	(۱۰)
B:	نقطه خط	(۲۰)
E:	نقطه نقطه خط خط	(۷)
F:	خط نقطه خط خط	(۴)
C:	خط خط خط	(۹)

با توجه به این کدها، فرستادن یک متن ۱۰۰ حرفی ۱۸۶ ثانیه طول می‌کشد.

توضیح: این مسئله بر اساس الگوریتم هافمن طراحی شده است که روشی بهینه برای ساخت کدهایی از ۰ و ۱ با حداقل متوسط طول کد است. در الگوریتم اصلی هافمن فرض بر این است که مقدار زمان ارسال نقطه و خط برابر است. این الگوریتم را می‌توان برای حالت‌های مشابه با این مسئله هم تعمیم داد. در مقاله‌ی زیر می‌توانید گسترش‌های نوین این الگوریتم را ببینید:

D.S. Parker, “Conditions for Optimality of the Huffman Algorithm,” *SIAM Journal of Computing*, Vol. 9, No. 3, 1980, 470-489.

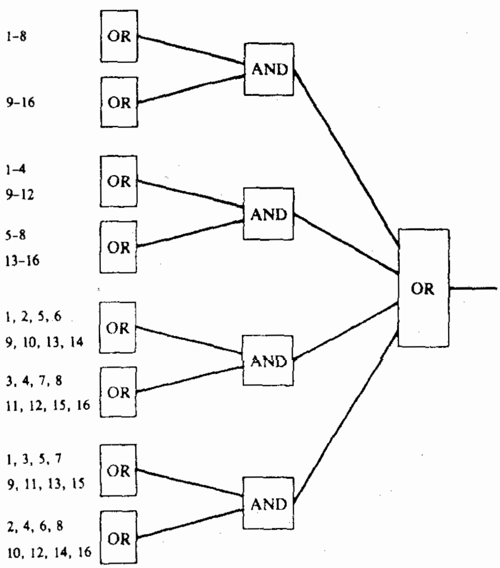
مسئله‌ی ۵۰. مشکل مهندس برق

همان‌طور که در راه‌حل مسئله‌ی ۴ تایی دیده می‌شود، ابتدا سیگنال‌ها را طوری به دروازه‌های OR می‌دهیم که هر دو سیگنال مختلف به دو دروازه‌ی مختلف OR که خروجی‌هایشان به دروازه‌ی AND می‌رود متصل شوند. به این ترتیب خروجی AND، ۱ می‌شود و اگر خروجی همه‌ی این دروازه‌های AND را با هم OR کنیم، اگر یکی هم ۱ بشود خروجی کل مدار ۱ می‌شود و مشخص می‌شود که دو مدار مختلف پیام GO را دریافت کرده‌اند.

برای این کار ابتدا سیگنال‌های ۱ تا ۱۶ را به دو دسته‌ی ۸ تایی تقسیم می‌کنیم و هر دسته را به یک دروازه OR می‌فرستیم. خروجی این دو دروازه را به یک دروازه‌ی AND می‌فرستیم. در این حالت اگر دو مداری که سیگنالِ GO را دریافت کرده‌اند هر کدام در یک دسته باشند (هر دو در یک دسته نباشند)، خروجی دروازه‌ی AND، یک می‌شود و مشخص می‌کند که دو مدار پیام GO را دریافت کرده‌اند. ولی اگر دو مدار مذکور در یک

دسته باشند خروجی AND صفر خواهد بود. به همین دلیل دسته‌های ۸ تایی را نصف و تبدیل به ۴ دسته‌ی ۴ تایی می‌کنیم، یعنی دسته‌های ۱ تا ۴ ، ۵ تا ۸، ۹ تا ۱۲ و ۱۳ تا ۱۶. سپس دسته‌هایی را که در ورودی‌های قبلی با هم بودند از هم جدا می‌کنیم. یعنی ۴—۱ و ۱۲—۹ را به یک دروازه‌ی OR و ۸—۵ و ۱۶—۱۳ را به یک دروازه‌ی OR دیگر می‌فرستیم. خروجی‌های این دروازه‌ها را به یک دروازه‌ی AND می‌فرستیم.

اگر دو مداری که سیگنال GO را دریافت کرده‌اند هر دو در یک دسته‌ی ۴ تایی نباشند، یا در قسمت اول یا در قسمت دوم خروجی یکی از دروازه‌های AND را ۱ کرده‌اند. ولی مدارهایی که در یک دسته هستند هنوز نمی‌توانند خروجی را ۱ کنند. به همین دلیل دسته‌های ۴ تایی را نصف و تبدیل به ۸ دسته دوتایی ۱ و ۲، ۳ و ۴، ۵ و ٦، ۷ و ۸، ۹ و ۱۰، ۱۱ و ۱۲، ۱۳ و ۱۴، و ۱۵ و ١٦ می‌شوند و دسته‌هایی را که در قسمت‌های قبلی با هم بوده‌اند به ورودی‌های جداگانه می‌دهیم. یعنی ۱ و ۲، ۵ و ٦، ۹ و ۱۰، و ۱۳ و ۱۴ را به یک دروازه‌ی OR و ۳ و ۴، ۷ و ۸، ۱۱و ۱۲، و ۱۵ و ١٦ را به یک دروازه‌ی OR دیگر می‌فرستیم. خروجی این دروازه‌ها را با یک‌دیگر AND می‌کنیم. حال فقط مدارهایی که در یک دسته دوتایی هستند هنوز مشکل دارند. پس اگر مدارهای ۱۵، ۱۳، ۱۱، ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ را به یک دروازه‌ی OR و ١٦، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۸، ٦ ، ۴ و ۲ را به یک دروازه‌ی OR دیگر بفرستیم و خروجی‌ها را AND کنیم مسئله حل می‌شود (شکل ٦۴).

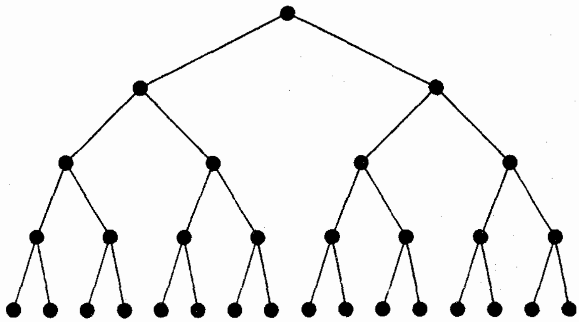


شکل ٦۴. مداری با ۱۳ دروازه برای کنترل نیروگاه اتمی.

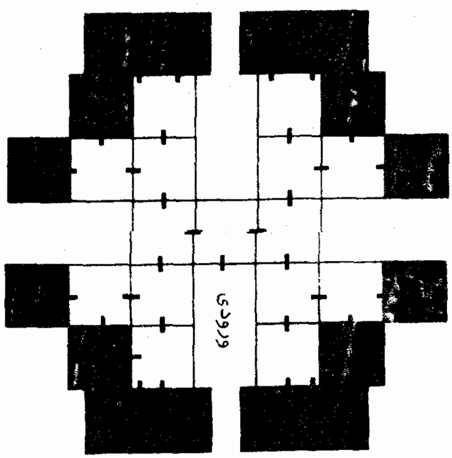
مسئله‌ی ۵۱. مشکل معمار

برای این‌که ببینیم آیا این طرح ممکن است یا خیر، به‌ازای هر اتاق یک نقطه قرار می‌دهیم و بین هر دو اتاقی که یک در مشترک دارند یک خط می‌کشیم (در واقع گرافی با شرایط گفته شده در صورت مسئله، مانند شکل ٦۵ می‌سازیم). به این ترتیب بدون توجّه به نحوه‌ی قرار گرفتن اتاق‌ها می‌توان دید که آیا چنین طرحی ممکن است یا خیر.

همان‌طور که در شکل ٦٦ نشان داده شده است، اتاق‌های سطح آخر، هر کدام یک در و بقیه‌ی اتاق‌ها هر کدام ۳ در دارند. برای رفتن از هر اتاق به اتاق دیگر نیاز به گذشتن از ۷ در است.



شکل ٦۵. گراف معادل با مسئله‌ی مشکل معمار.



شکل ٦٦. چگونگی قرار گرفتن اتاق‌ها در یک زمین ۱٦۰ متر در ۱٦۰ متر.

مسئله‌ی ۵۲. شرکت هواپیمایی میکرونزیا

۱. شهرها را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری می‌کنیم. مبدأ و مسیر پرواز هواپیماهای مختلف به ترتیب زیر است:

هواپیمای اول ۱، ۲، ۴، ۱، ۲، ۴، ...
هواپیمای دوم ۳، ۴، ۶، ۳، ۴، ۶، ...
هواپیمای سوم ۲، ۳، ۵، ۳، ۳، ۵، ...
هواپیمای چهارم ۴، ۵، ۷، ۴، ۵، ۷، ...
هواپیمای پنجم ۱، ۵، ۶، ۱، ۵، ۶، ...
هواپیمای ششم ۲، ۶، ۷، ۲، ۶، ۷، ...
هواپیمای هفتم ۱، ۳، ۷، ۱، ۳، ۷، ...

۲. اگر فقط ٦ هواپیما وجود داشته باشد، با برنامه‌ی زیر می‌توانیم رسیدن هر مسافر را در ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه تضمین کنیم. توجه کنید که هر هواپیما بعد از ۷ ساعت از شروع برنامه دوباره برنامه‌اش را از اول اجرا می‌کند.

هواپیمای اول شروع در ساعت ۰:۰۰ و ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ...
هواپیمای دوم شروع در ساعت ۲:۲۰ و ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ...
هواپیمای سوم شروع در ساعت ۴:۴۰ و ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ٦ ۷ ...
هواپیمای چهارم شروع در ساعت ۱:۱۰ و ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ...
هواپیمای پنجم شروع در ساعت ۳:۳۰ و ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ...
هواپیمای ششم شروع در ساعت ۵:۵۰ و ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۷ ٦ ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ...

مسئله‌ی ۵۳. ببر فراری

۱. اگر نگهبانان را $K_۱$، $K_۲$ و $K_۳$ بنامیم، مراحل جست‌وجو به‌طوری‌که ببر نتواند فرار کند به این ترتیب است:

در ۲۰ دقیقه‌ی اول: باید $K_۱$ در ورودی باشد، $K_۲$ در C و $K_۳$ در یکی از دو اتاقی باشند که از C منشعب می‌شوند.

در ۲۰ دقیقه‌ی دوم: $K_۱$ در ورودی، $K_۲$ در اتاقِ دیگری که از C منشعب می‌شود و $K_۳$ در B قرار می‌گیرند.

در ۲۰ دقیقه‌ی سوم: K_1 در A باشد، K_2 و K_3 در دو اتاقی باشند که از B منشعب می‌شود.

در ۲۰ دقیقه‌ی چهارم: K_1 در D، K_2 در E و K_3 در F.

در ۲۰ دقیقه‌ی پنجم: K_1 در G، K_2 در K و K_3 در J.

در ۲۰ دقیقه‌ی ششم: K_1 در G، K_2 در L و K_3 در M.

در ۲۰ دقیقه‌ی هفتم: K_1 در H، K_2 در I و K_3 در اتاقی که از M منشعب می‌شود.

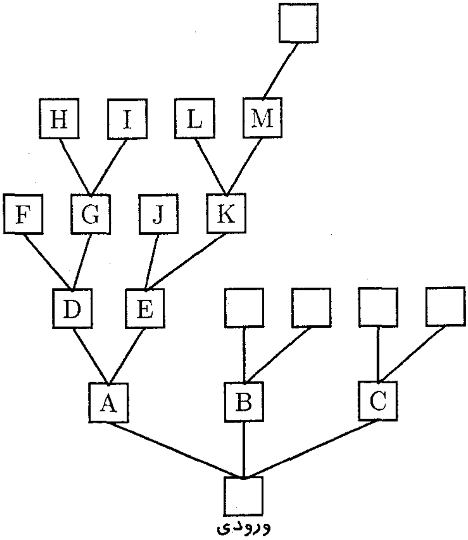
۲. زمان به‌دست آمده کمینه است. زیرا اگر هر کس در هر دور، یک اتاق جدید را بگردد در ۶ دور حداکثر $6 \times 3 = 18$ اتاق جست‌وجو می‌شوند. می‌دانیم که ۱۹ اتاق باید جست‌وجو شوند، پس دستِ‌کم ۷ دور لازم است.

۳. دو تا از نگهبانان در ورودی منتظر می‌مانند در حالی که سومین نگهبان ساختمان را جست‌وجو می‌کند. او باید هر یک سه «گروه» اتاق‌هایی که از اتاق ورودی منشعب می‌شوند را وارسی کند. البته او ممکن است فقط برحسب اتفاق ببر را پیدا کند، چرا که ببر می‌تواند از یک اتاق به اتاق دیگر بدود و مخفی بماند. ولی این نگهبان می‌تواند تعداد اتاق‌های هر گروه را بشمارد و از این اطلاعات همه استفاده کنند.

در مرحله‌ی بعد اتاق‌ها به سه گروه تقسیم می‌شوند و نگهبانان گروهی که بیش‌تری تعداد اتاق را دارد در آخر وارسی می‌کنند. دو گروه دیگر نمی‌توانند هر یک بیش از ۸ اتاق داشته باشند. چرا که در مجموع ۱۸ اتاق در این سه گروه است و به‌علت آن‌که فقط یک اتاق به دو اتاق دیگر راه دارد، تنها گروهی که این اتاق در آن قرار دارد تعداد زوجی اتاق دارد و دو گروه دیگر باید تعداد فردی اتاق دارند. و نمی‌توان دو گروه هر کدام ۹ اتاق داشته باشند.

حال یکی از نگهبانان در اتاق ورودی می‌ایستد و دو تای دیگر اتاق‌های دو گروه کوچک را طوری بررسی می‌کنند که امکان فرار ببر نباشد. اگر ببر در یک اتاق از یکی از این گروه اتاق‌ها با حداکثر ۸ اتاق باشد، به‌طریق زیر می‌توان آن‌را پیدا کرد. با توجه به شرایط مسئله، فقط دو فرم کاملاً متفاوت برای ۸ اتاق وجود دارد که در شکل ۶۷ نشان داده شده است. نوع ساختار اتاق‌ها را بدون نقشه می‌توان تعیین کرد. در ساختار اول یک نگهبان اتاق انتهایی سمت چپ را می‌گردد و اگر ببر را پیدا نکرد باز می‌گردد و هر دو به اتاق سمت راست می‌روند تا ۶ اتاق باقی‌مانده با بررسی کنند. روشن است که این کار به‌همین روش قابل انجام است.

در مورد ساختار دوم، یک نگهبان در اتاق ورودی این مجموعه قرار می‌گیرد و نگهبان بعدی از اتاق انتهایی سمت راست شروع و سه اتاق شاخه‌ی راست را جست‌وجو می‌کند. اگر ببر پیدا نشود، کار جست‌وجو در بخش سمت چپ ادامه پیدا می‌کند.



شکل ۶۷. دو ساختار کاملاً متفاوت برای نقشه‌ی یک بخش از ساختمان با ۸ اتاق.

اگر ببر در هیچ‌یک از اتاق‌های این دو گروه نباشد، سه نگهبان می‌توانند به اتاق ورودی گروه سوم بروند و کار جست‌وجو را در آن گروه دنبال کنند. می‌دانیم که این گروه حداکثر ۱۶ اتاق دارد. همین روش برای بررسی اتاق‌های این بخش از ساختمان کار می‌کند.

مسئله‌ی ۵۴. توزین

۱. اگر گیره‌ها را نوع ۱ تا ۱۸ بنامیم، در بارِ اول توزین (۴ دقیقه‌ی اول) گیره‌های ۱ و ۲، ۳ و ۴، ۵ و ۶، ۷ و ۸، ۹ و ۱۰، ۱۱ و ۱۲، ۱۳ و ۱۴، و ۱۵ و ۱۶ را با هم مقایسه می‌کنیم. پس از این کار دقیقاً ۸ گیره حذف می‌شوند (این گیره‌ها سبک‌ترین نیستند زیرا هرکدام از یک گیره سنگین‌تر یا حداقل هم‌وزن آن است). ۱۰ گیره باقی می‌ماند که آن‌ها را ۱ تا ۱۰ می‌نامیم. در بارِ دوم توزین گیره‌های ۲ و ۱، ۳ و ۱، ۳ و ۲، ۵ و ۴، ۵ و ۶، ۷ و ۸، ۹ و ۱۰ را با هم مقایسه می‌کنیم.

دقت کنید در این مرحله از این واقعیت که از هر گیره چند نمونه‌ی با وزن یکسان داریم استفاده کرده‌ایم. پس از این مقایسه از بین ۱ و ۲ و ۳ فقط یک گیره می‌ماند. هم‌چنین از بین ۴ و ۵ و ۶ هم فقط یک گیره باقی می‌ماند. از ۸ و ۷ هم فقط یکی و از ۹ و ۱۰

هم فقط یکی باقی می‌ماند.

پس در انتهای این مراحل ۴ نوع گیره باقی می‌ماند که آن‌ها را ۱ تا ۴ می‌نامیم. در آخرین مرحله‌ی توزین هر ۲ گیره از این گیره‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. به این ترتیب که ۱ و ۲، ۱ و ۳، ۱ و ۴، ۲ و ۳، ۲ و ۴، ۳ و ۴ را با هم مقایسه می‌کنیم. بدیهی است که در انتها گیره‌ی با کم‌ترین وزن مشخص می‌شود.

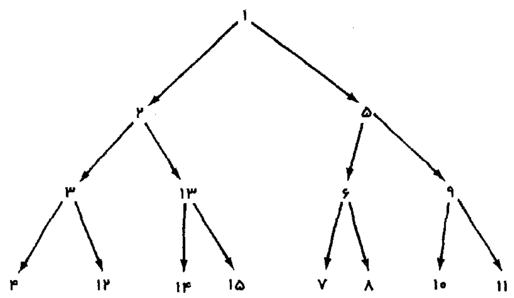
۲. در حقیقت بیش‌ترین تعداد انواع گیره‌ها برابر ۱۸ است. زیرا اگر این تعداد ۱۹ باشد بعد از توزین اول حداقل ۱۱ گیره باقی می‌ماند. بعد از توزین دوم ۵ گیره و بعد از توزین سوم ۲ گیره باقی می‌ماند. در نتیجه با ۳ بار توزین نمی‌توان سبک‌ترین گیره را تشخیص داد.

مسئله‌ی ۵۵. مخابره‌ی پیام

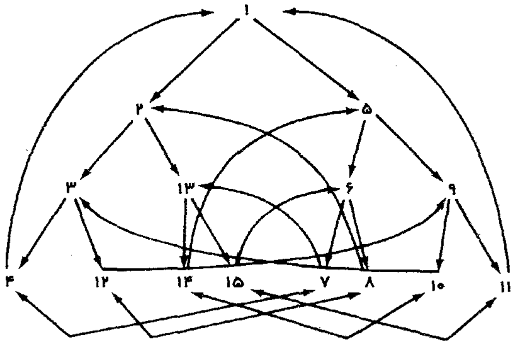
۱. مراکز را از ۱ تا ۱۵ شماره‌گذاری می‌کنیم (مرکز شماره‌ی ۱ مرکز فرماندهی است) و اتصال از مرکز X به مرکز Y را با $X \to Y$ نمایش می‌دهیم. اتصال‌ها باید مطابق شکل ٦٨ باشد.

۲. شکل ٦٩ جواب است.

۳. با کم‌تر از ۳۰ اتصال این کار امکان‌پذیر نیست. با ۳۰ اتصال، هر مرکز می‌تواند دو فرستنده و دو گیرنده داشته باشد. با کم‌تر از آن، باید یک مرکز به‌نام A باشد که فقط از یک مرکز دیگر مانند B پیام دریافت کند. در آن‌صورت اگر B خراب شود، A نمی‌تواند پیامی دریافت کند.



شکل ٦٨. نحوه‌ی اتصال بین مراکز مخابراتی (قسمت اول مسئله).



شکل ٦۹. نحوه‌ی اتصال بین مراکز مخابراتی (قسمت دوم مسئله).

مسئله‌ی ٥٦. استخراج نفت

۱. میزان انتقال مایع در این لوله برابر ۱٫۲۵ بشکه در دقیقه است. در هر ۱۰۰ دقیقه این موارد اتفاق می‌افتد: ۱۰۰ بشکه نفت از محل چاه به ساحل فرستاده می‌شود (این کار ۸۰ دقیقه طول می‌کشد). ٦ دقیقه برای این‌که بعد از آن بتوان آب را فرستاد صرف می‌شود. ۱۰ بشکه آب از ساحل به محل چاه فرستاده می‌شود (۸ دقیقه) و بالأخره ٦ دقیقه‌ی دیگر نیز برای این‌که لوله بعد از آن بتواند نفت را از خود عبور دهد صرف می‌شود.

۲. اگر حجم منبع ذخیره‌ی آب به ۲۰ بشکه برسد، در این حالت با میزان انتقال ۱٫۲ بشکه در دقیقه می‌توانیم در هر دقیقه ۱ بشکه نفت استخراج کنیم.

در این حالت، در هر ۲۰۰ دقیقه این موارد تکرار می‌شود: ابتدا ۲۰ بشکه آب از ساحل به محل چاه فرستاده می‌شود (۱۷ دقیقه). سپس ٦ دقیقه برای تغییر حالت لوله از حالت عبور آب به حالت عبور نفت طول می‌کشد. سپس ۲۰۰ بشکه نفت از محل چاه به ساحل فرستاده می‌شود (در کم‌تر از ۱۷۰ دقیقه) و بالأخره ٦ دقیقه نیز برای تغییر حالت لوله از حالت عبور نفت به حالت عبور آب لازم است.

مسئله‌ی ٥۷. مبادلات طلا

۱. اگر این فرد به‌ازای هر بلیتی که می‌فروشد یک گرم طلا بخرد و یک بلیت نوع دوم نیز از آقای A بخرد، ۲۵ سنت به‌ازای هر بلیت سود خواهد کرد. زیرا اگر قیمت طلا

افزایش یابد که باید ۱ دلار به‌ازای هر بلیتی که فروخته است بپردازد و چون ۵۵ سنت را بابت قیمت بلیت گرفته است پس ۴۵ سنت بابت هر بلیت باید بپردازد، و چون طلاهایش گران شده است پس ۱ دلار هم به‌ازای هر گرم طلا استفاده کرده است. پس تا این‌جا ۵۵ سنت استفاده کرده است. چون به‌ازای هر بلیت فروخته شده ۱ بلیت نوع دوم به قیمت ۳۰ سنت هم خریده است، پس در مجموع ۲۵ سنت به‌ازای فروش هر بلیت استفاده کرده است.

اگر قیمت طلا کاهش پیدا کند او ۵۵ سنت بابت فروش هر بلیت استفاده کرده است ولی قیمت طلاهایش ۱ دلار کم شده است، پس تا این‌جا ۴۵ سنت ضرر کرده است. ولی به‌ازای هر بلیت نوع دوم که خریده است ۷۰ سنت سود کرده است، یعنی در مجموع در این حالت نیز ۲۵ سنت به‌ازای فروش هر بلیت استفاده کرده است.

۲. در این حالت نیز باید مانند حالت قبل عمل کند ولی به‌ازای هر بلیت نوع دومی که می‌فروشد یک بلیت نوع اول از A بخرد و یک گرم طلا هم به دولت بفروشد.

۳. او باید به اندازه‌ی مساوی از هر ۲ بلیت به قیمت مثلاً ۵۵ سنت بفروشد. او در این حالت ۱ دلار و ۱۰ سنت به‌ازای هر دو بلیت می‌گیرد (یکی از نوع اول و دیگری از نوع دوم) ولی در نهایت ۱ دلار باید پرداخت کند. یعنی ۱۰ سنت سود می‌کند.

مسئله‌ی ۵۸. معدن سنگ آهن

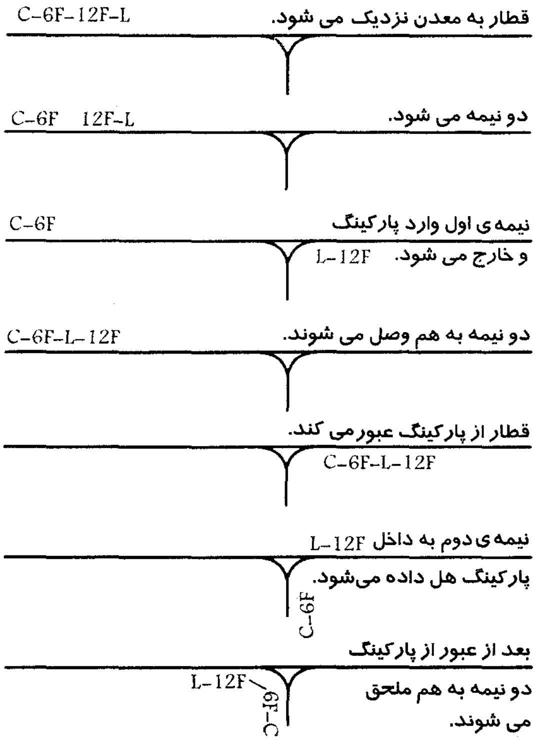
۱. لوکوموتیو را با L، واگن‌ها را با F و واگن غذاخوری را با C نشان می‌دهیم. همان‌طور که در شکل ۷۰ دیده می‌شود، ابتدا باید قطار را از جایی به دو قسمت کرد که لوکوموتیو و ۱۲ واگن از ۶ واگن و واگن غذاخوری جدا شوند. لوکوموتیو به‌همراه ۱۲ واگن به‌صورت دنده‌عقب به درون پارکینگ می‌رود و از آن خارج می‌شود. سپس به‌ترتیب، اعمال زیر را انجام می‌دهد: برمی‌گردد، به قسمت قبلی وصل می‌شود، جلو می‌رود، واگن غذاخوری و ۶ واگن دیگر را به درون پارکینگ هل می‌دهد و سپس جدا می‌شود. بعد از آن دوباره واگن‌ها به هم می‌چسبند و به طرف مقصد می‌روند. به این ترتیب جهت برعکس می‌شود.

۲. خیر. می‌دانیم هر قطع واگن‌ها قطار را به دو بخش تقسیم می‌کند که مجدداً باید به‌هم وصل شوند. نشان می‌دهیم که یک بار اتصال کافی نیست. در ابتدا فاصله‌ی لوکوموتیو

و محل نهایی‌اش ۱۹ واگن است. اگر یک قطع داشته باشیم، سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

- لوکوموتیو وارد پارکینگ می‌شود و سپس قطع می‌شود. در این صورت ٦ واگن بین لوکوموتیو و مقصدش قرار دارد.
- لوکوموتیو از پارکینگ رد می‌شود و سپس عقب‌عقب وارد پارکینگ می‌شود. در این صورت نیز فاصله تا مقصد ٦ واگن خواهد بود.
- لوکوموتیو از پارکینگ استفاده نمی‌کند. در آن‌صورت هر قطعی ۱۹ واگن بین لوکوموتیو و مقصدش قرار می‌دهد.

روشن است که هیچ اتصالی کمک نمی‌کند که لوکوموتیو به مقصدش برسد.



شکل ۷۰. تعویض جهت قطار.

مسئله‌ی ۵۹. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۱)

الف) اگر A راست‌گو باشد، می‌گوید خودش راست‌گوست و اگر دروغ‌گو باشد بازهم در مورد خودش می‌گوید که راست‌گوست. بنابراین B دروغ‌گو و C راست‌گوست.

ب) بازهم B دروغ و C راست می‌گوید. فرض کنید B راست‌گو باشد، در آن‌صورت C دروغ‌گوست. حال اگر A راست‌گو باشد، ۲ نفر راست‌گو در جمع وجود دارد، در حالی‌که A گفته است است ۱ نفر. اگر A دروغ‌گو باشد، ۱ نفر راست‌گو وجود دارد و چون A هم همان‌را گفته است، پس A باید راست‌گو باشد. در نتیجه در هر دو حالت به تناقض برمی‌خوریم.

پ) اگر A راست‌گو باشد، B دروغ‌گو است و گفته‌ی A هم راست است. ولی اگر A دروغ‌گو باشد، گفته‌ی او راست است که این حالت غیر ممکن است.

ت) اگر A دروغ‌گو باشد، گزاره‌ی او به‌هرحال درست است. پس A راست‌گو و در نتیجه B هم راست‌گوست.

ث) A به‌وضوح دروغ‌گوست. حال اگر B هم دروغ‌گو باشد، چون حرف B غلط است، پس C هم دروغ‌گوست. پس حرف A درست می‌شود که این غیرممکن است. پس B راست‌گو و C دروغ‌گوست.

ج) هر دو دروغ‌گو هستند.

چ) دروغ‌گوست!

ح) اگر آن‌فرد جواب «بلی» بدهد، ممکن است هر دو راست‌گو یا هر دو دروغ‌گو باشند. ولی اگر جواب «خیر» بدهد، به‌وضوح خود آن فرد دروغ‌گو و دیگری راست‌گوست.

مسئله‌ی ۶۰. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۲)

الف) از گفته‌ی A می‌فهمیم که او نمی‌تواند راست گفته باشد. اگر A معمولی باشد، بالاجبار B راست‌گو و حرف C درست است. پس چون C نمی‌تواند دروغ‌گو باشد، به تناقض برمی‌خوریم. پس A دروغ‌گو، B معمولی و C راست‌گوست.

ب) اگر A معمولی باشد، B یا راست‌گوست که در آن‌صورت حرف او نادرست می‌شود، و یا دروغ‌گوست که در آن‌صورت حرف او راست می‌گردد. اگر A دروغ‌گو باشد، به‌ناچار C

باید راست‌گو و B معمولی باشد. در این‌صورت C خواهد گفت: «سطح B بالاتر است.»
اگر A همیشه راست بگوید، B معمولی و C دروغ‌گو خواهد بود و باز خواهد گفت: «سطح B بالاتر است.»

[illegible] هر دو یک گزاره را گفته‌اند، پس هر دو معمولی‌اند. هم‌چنین، چون D هم [illegible] راست‌گوست. حالتی که یکی از C و D دروغ‌گو و دیگری راست‌گو باشد [illegible] هر چهار نفر معمولی‌اند. و در عین حال هر سه گزاره در مورد C دروغ است.

مسئله‌ی ۶۱. آلیس در جنگل فراموشی (۱)

الف) با کمی دقت می‌توان دریافت که آن دو این حرف را فقط روز پنج‌شنبه می‌توانند بزنند. (شیر به درستی می‌گوید که دیروز دروغ گفته است و اسب به‌دروغ می‌گوید که روز قبل از روزهای دروغ گفتن او بوده است.)

ب) مطمئناً آن روز از روزهای راست‌گویی شیر نبوده است، چون او فقط در روز پنج‌شنبه می‌تواندگزاره‌ی ۱ را بگوید و در آن روز گزاره‌ی ۲ را نمی‌تواند بگوید. به دلیل آن‌که شیر گزاره‌ی ۱ را به‌دروغ گفته است، آن روز دوشنبه بوده است.

پ) در هیچ روزی از هفته نمی‌تواند این دو حرف را با هم بگوید.

ت) در روزهای دوشنبه و چهارشنبه.

مسئله‌ی ۶۲. آلیس در جنگل فراموشی (۲)

الف) چون در هیچ روزی از هفته هر دوی آن‌ها دروغ نمی‌گویند، هر دو راست گفته‌اند و آن روز هم یک‌شنبه بوده است.

ب) حرف گربه‌ی دوم مطمئناً یک گزاره‌ی درست است، چون اگر حرف اولی درست باشد گربه‌ی دوم ملوس خواهد بود. در ضمن آن روز نمی‌تواند یک‌شنبه باشد. چون در بند قبل، در روز یک‌شنبه آن‌ها را ملاقات کرده بود و ملاقات دوم بعد از ملاقات اول است. پس در آن روز حتماً یکی از آن‌ها دروغ گفته است. حال چون دومی راست گفته است، اولی ملوس و دومی پیشی است.

پ) گربه‌ی اول مطمئناً دروغ گفته است، پس جواب گربه‌ی دوم حتماً «خیر» است. چون هر دو در یک روز دروغ نمی‌گویند.

ت، ث، ج) گربه‌ی اول راست گفته است، چون در صورتی‌که آن روز یک‌شنبه باشد. روز راست‌گویی هر دو است و او نمی‌توانسته بگوید «امروز یک‌شنبه نیست.» چون آن روز یک‌شنبه نیست، حتماً گربه‌ی دوم در آن روز دروغ می‌گوید، پس آن روز دو شنبه هم نیست.

از دومین گزاره‌ی گربه‌ی دوم در می‌یابیم که روز قبل یکی از روزهای راست گفتن شیر بوده است، بنابراین آن روز جمعه یا شنبه است. در این دو روز اسب دروغ و شیر راست می‌گوید، پس گربه‌ی اول رفتار شیر و گربه‌ی دوم رفتار اسب را دارد. از گزاره‌ی دوم گربه‌ی اول می‌فهمیم که آن روز جمعه بوده است: در غیر این‌صورت، چون در روز بعد از شنبه کسی دروغ نمی‌گوید، گزاره‌ی گربه‌ی اول غلط می‌شود. هم‌چنین از همین گزاره متوجه می‌شویم که رفتار ملوس مانند اسب است. پس گربه‌ی دوم ملوس و گربه‌ی اول پیشی است.

مسئله‌ی ۶۳. در میان پرونده‌های بازرس

الف) A مجرم است. چون B رانندگی بلد نیست حتما یکی از A و C در دزدی شرکت داشته اند و چون C بدون A دزدی نمی‌کند پس حتما A یکی از سارقین بوده‌است.

ب) مجرمین بین A و B هستند. شرکت A منجر به شرکت B در دزدی می‌شود. پس B گناه‌کار است.

پ) این فرد B است، زیرا اگر B بی‌گناه باشد، از گزاره‌ی ۱ و ۳ می‌فهمیم که C و A هر دو گناه‌کارند و از گزاره‌ی ۳ پی به غلط بودن این فرضیه می‌بریم.

ت) با استفاده از گزاره‌ی ۱، A را حذف می‌کنیم. اگر D بی‌گناه باشد، پس یکی از B و C حتماً گناه‌کار است. گناه‌کار بودن هریک در نهایت به گناه‌کار بودن D منجر می‌شود.

ث) گزاره‌ی C درست است. پس A و B دروغ‌گو هستند و در نتیجه A جنایت‌کار است.

ج) هر چهار نفر گناه‌کارند. از گزاره‌ی ۳ و ۴ می‌فهمیم که A به‌هرحال گناه‌کار است. از گزاره‌ی ۱ و سپس از گزاره‌ی ۲ می‌فهمیم که B و C هم گناه‌کارند. و بالاخره چون A و C هر دو گناه‌کارند، از گزاره‌ی ۳ می‌فهمیم که D گناه‌کار است.

مسئله‌ی ۶۴. توپ‌های آبی و قرمز

۳ توپ را باید از کیسه بیرون بیاورد.

مسئله‌ی ۶۵. توپ‌های قرمز و آبی!

با بیرون آوردن ۳ توپ یقیناً ۲ توپ هم‌رنگ خواهیم داشت. از طرفی اگر تعداد توپ‌های آبی (و قرمز) موجود در کیسه n باشد، برای اطمینان از آن‌که حداقل ۲ توپ ناهم‌رنگ از کیسه بیرون آورده‌ایم، باید $n + ۱$ عدد توپ بیرون بیاوریم. پس $n + ۱ = ۳$، یعنی از هر رنگ ۲ توپ در کیسه موجود است.

مسئله‌ی ۶۶. مو شماری!

قسمت اول: بله. اگر فرض کنیم n فرد در آن شهر زندگی می‌کنند، تعدا موهای افراد از ۱ تا $n - ۱$ است. فرض کنید $n - ۱$ اتاق با شماره‌های ۱ تا $n - ۱$ در اختیار داریم و به هر فرد می‌گوییم به اتاق با شماره‌ی تعداد موهایش برود. حال چون n نفر به $n - ۱$ اتاق رفته‌اند، حتماً اتاقی وجود دارد که در آن دو نفر مستقر شوند. پس آن دو نفر تعداد موهای سرشان با هم برابر است.
قسمت دوم: ۵۱۸ نفر. فرض کنید این شهر n نفر شهروند دارد. اگر $n > ۵۱۸$، تعداد موهای افراد بین صفر تا $n - ۱$ است (و ۵۱۸ نمی‌تواند باشد.) می‌توانیم $n - ۱$ اتاق با شماره‌های صفر تا ۵۱۷ و ۵۱۹ الی $n - ۱$ درست کنیم و به افراد بگوییم که هر فرد در اتاقی که شماره‌اش برابر تعداد موهایش است مستقر شود. چون n نفر در $n - ۱$ اتاق مستقر شده‌اند، باز هم به‌وضوح دو نفر هم‌اتاقند و آن دو تعداد موهایشان یک‌سان است. حال آن‌که این مطلب خلاف فرض مسئله است. اما به وضوح اگر این شهر ۵۱۸ نفر جمعیت داشته باشد و افراد بین ۰ تا ۵۱۷ مو داشته باشند، شرایط مسئله برقرار می‌گردد.

در ریاضیات اصلی وجود دارد که می‌گوید: اگر n کبوتر در $n - ۱$ آشیانه ساکن شوند، آشیانه‌ای وجود دارد که در آن بیش از یک کبوتر ساکن‌اند. این مطلب «اصل لانه‌ی کبوتری» نام دارد. در واقع ما برای حل این مسئله از این اصل استفاده کرده‌ایم.

مسئله‌ی ۶۷. سکه‌های تقلبی

با استفاده از راه‌حلی که در ادامه ارائه می‌شود می‌توان با ۳ بار توزین وضعیت ۴ سکه را مشخص کرد. بنابراین با استفاده از این راه‌حل می‌توان وضعیت ۲۰ سکه را با ۱۵ بار توزین مشخص کرد.

اگر چهار سکه را A، B، C و D بنامیم، ابتدا A، B و C را وزن می‌کنیم. اگر هر سه سکه تقلبی باشند، وزن حاصل حتماً بین ۳۱/۸ و ۳۲/۱ خواهد بود. در نتیجه متوجه می‌شویم که هر سه سکه تقلبی هستند. سپس سکه‌ی D را وزن می‌کنیم و واقعی یا تقلبی بودن آن هم مشخص می‌شود. یعنی در این حالت با دو بار توزین وضعیت سکه‌ها مشخص شده است.

اگر دو تا از سه سکه‌ی A، B و C تقلبی باشند و یکی از آن‌ها واقعی باشد، وزن حاصل بین ۳۱/۲ و ۳۲/۵ خواهد بود، و اگر یک سکه تقلبی باشد و دو سکه‌ی دیگر واقعی باشند، وزن کل بین ۳۲/۶ و ۳۲/۹ خواهد بود. اما اگر هر سه سکه واقعی باشند، وزن‌شان بین ۳۳ و ۳۳/۳ خواهد بود. در حالتی که هر سه سکه تقلبی باشند، مسئله حل شده است. در حالتی که هر سه سکه واقعی باشند نیز مانند حالت اول می‌توان با یک توزین دیگر، نوع سکه‌ی D را مشخص کرد. برای دو حالت باقی‌مانده، (D و A) و (D و B) را به‌طور جداگانه وزن می‌کنیم. در هر کدام از این توزین‌ها مشخص می‌شود که آیا دو تا از سکه‌ها تقلبی هستند (۲۱/۴ تا ۲۲/۲) و یا یکی از آن‌ها تقلبی و دیگر واقعی (۲۱/۶ تا ۲۱/۸) است و یا هر دو واقعی هستند (۲۲ تا ۲۲/۲).

اگر در یکی از این دو دسته هر دو تقلبی و یا هر دو واقعی باشند، وضعیت همه‌ی سکه‌ها به‌راحتی مشخص می‌شود. مثلاً فرض کنید D و B هر دو واقعی هستند. حال اگر یکی از A و D تقلبی باشد، حتماً آن سکه A خواهد بود. و اگر از A، B و C دو سکه تقلبی باشند، C هم تقلبی خواهد بود؛ در غیر این صورت، اگر یکی از A و D واقعی و هم‌چنین یکی از B و D واقعی باشد، دو حالت وجود خواهد داشت: اگر از A، B و C دو سکه واقعی باشند، A و B واقعی خواهند بود و C و D تقلبی؛ ولی اگر از A، B و C دو سکه تقلبی باشند، A و B تقلبی خواهند بود و C و D واقعی.

مسئله‌ی ۶۸. گرگ‌های آدم‌نما

الف) اگر گرگ آدم‌نما راست‌گو باشد، هم A و هم B انسان هستند. زیرا اگر یکی از آن‌ها آدم‌نما باشد، گناه را بر گردن دیگری نمی‌انداخت (چون آدم‌نما راست‌گوست.) پس C آدم‌نما و راست‌گوست. از طرفی B و A هم راست گفته‌اند. پس حرف C دروغ در

می‌آید، که تناقض دارد. بنابراین گرگ آدم‌نما دروغ‌گوست.

ب) مطمئناً A نمی‌تواند آدم‌نما باشد. در غیر این‌صورت A یک آدم‌نمای دروغ‌گو و B یک انسان راست‌گو خواهد بود. اگر C راست‌گو باشد، در جمع یک دروغ‌گو وجود دارد و حرف C غلط از آب در می‌آید. اگر C دروغ‌گو باشد، حرف او راست است. پس در هر دو حال به تناقض بر می‌خوریم و در نتیجه A حتماً یک انسان است. با کمی دقت می‌توان فهمید که B یا C می‌توانند آدم‌نما باشند.

پ) از شرایط مسئله می‌دانیم که گرگ‌های آدم‌نما دروغ‌گویند. چون حداقل یک آدم‌نمای دروغ‌گو داریم، B راست می‌گوید. بنابراین حرف A هم درست است. چون A و B راست‌گویند، هیچ‌یک آدم‌نما نیستند. پس C آدم‌نماست.

ت) A مسلماً راست‌گوست، در غیر این‌صورت، چون خود او دروغ‌گوست، حرفش درست است و این امکان ندارد. بنابر حرف A، یکی از B و C دروغ‌گوست. اگر B راست بگوید، C هم راست‌گوست که باز امکان ندارد. پس B دروغ‌گوست و بنابر حرف B، C هم دروغ‌گوست. چون آدم‌نما راست‌گوست، فقط A می‌تواند آدم‌نما باشد.

ث) بازهم دقیقاً مثل مسئله‌ی قبل، می‌دانیم A راست‌گوست. اگر B راست بگوید، C چون آدم‌نماست راست‌گو هم هست. پس حرف A غلط می‌شود. در نتیجه B راست‌گوست پس آدم‌نما نیست. از حرف B می‌فهمیم که C هم آدم‌نما نیست. پس A آدم‌نماست.

ج) اگر B راست‌گو و آدم‌نما بود، نمی‌گفت C آدم‌نماست، پس B دروغ‌گوست. از طرفی، C هم آدم‌نما نیست (بنا بر حرف B) پس A آدم‌نماست.

مسئله‌ی ۶۹. جزیره‌ی راست‌گوها و دروغ‌گوها (۳)

الف) اگر A دروغ‌گو باشد، بنابر جبر گزاره‌ها، گزاره‌ی او («اگر من راست‌گو باشم، آن‌گاه B هم راست‌گوست») درست است، که این مطلب با دروغ‌گو بودن او در تناقض است. پس A راست‌گوست و از گزاره‌اش مشخص است که B هم راست‌گوست.

ب) چون تالی گزاره‌ی A درست است پس گزاره‌ی او در هر حالت درست است. در نتیجه A راست‌گوست.

پ) اگر A راست‌گو باشد، چون تالیِ گزاره‌اش درست است، به‌هرحال گزاره‌اش درست است که تناقض دارد. پس A راست می‌گوید و از گزاره به‌وضوح می‌تواند راست‌گو باشد.

ت) فرض کنید z گزاره‌ی منطقی $\{X$ مجرم است. $\} = z$ و w گزاره‌ی منطقی $\{y$ مجرم است. $\} = w$ باشند. می‌دانیم که گزاره‌ای که A بیان کرده برابر $z \Rightarrow w$ و گزاره‌ی B برابر $\bar{z} \vee w$ است. از جبر بول می‌دانیم که این دو گزاره معادل‌اند. یعنی A و B از نظر راست‌گویی و دروغ‌گویی مانند هم‌اند.

ث) اگر A دروغ‌گو باشد، B هم دروغ‌گوست. حال گزاره‌ی B به‌علت غلط بودن مقدم همواره درست است، که این با دروغ‌گو بودن B متناقض است. پس A و B راست‌گو و در نتیجه C دروغ‌گوست.

مسئله‌ی ۷۰. فلسفه و منطق (۱)

الف) A نمی‌تواند راست‌گو باشد، در غیر این صورت B هم راست‌گوست و سخن B که A دروغ‌گو است غلط در می‌آید. اگر B راست‌گو باشد، از گزاره‌ی B می‌فهمیم که جزیره‌ی اول «مایا» است. ولی در آن‌صورت گزاره‌ی A کاملاً درست می‌شود که با دروغ‌گو بودن A متناقض است. حال که B هم دروغ‌گوست، چون قسمت اول گزاره‌اش (دروغ‌گو بودن A) درست است، حتماً قسمت دوم گزاره‌اش غلط است، یعنی جزیره‌ی اول «مایا» نیست.

ب) A حتماً دروغ‌گوست، زیرا هیچ راست‌گویی به‌خودش دروغ‌گو نمی‌گوید، و B هم دروغ‌گوست، زیرا A را راست‌گو نامیده است. حال چون قسمت اول گزاره‌ی A درست است، حتماً قسمت دوم آن نادرست است، یعنی جزیره‌ی دوم هم «مایا» نیست.

پ) A نمی‌تواند راست‌گو باشد، در غیر این صورت بنابر حرف خودش، B دروغ‌گو خواهد بود. در حالی که، B گفته است که A راست‌گوست. حال چون A دروغ‌گوست. حداقل یک دروغ‌گو وجود دارد، یعنی قسمت اول گزاره‌ی A درست است؛ پس حتما قسمت دوم آن نادرست است و جزیره‌ی سوم هم «مایا» نیست.

ت) مطمئناً A دروغ‌گوست و این از قسمت اول حرفش مشخص است. حال اگر B راست‌گو باشد، طبق حرف B جزیره‌ی چهارم «مایا» نیست. این در حالی است که B نمی‌تواند دروغ‌گو باشد، زیرا در آن‌صورت قسمت اول حرف هر دو نفر درست می‌شود. بنابراین قسمت دوم حرف هر دو باید نادرست باشد، که این غیر ممکن است. پس «مایا» جزیره‌ی چهارم هم نیست.

ث) A به‌خاطر قسمت اول گزاره‌اش دروغ‌گوست. اگر B دروغ‌گو باشد، چون قسمت اول گزاره‌ی A درست می‌شود، به‌وضوح قسمت دوم گزاره‌اش غلط است و جزیره‌ی پنجم «مایا» نخواهد بود. اگر B راست‌گو باشد نیز طبق گفته‌ی خودش جزیره‌ی پنجم «مایا» نیست.

ج) اگر آن جزیره «مایا» نباشد، قسمت دوم گزاره‌ی هر دو نفر غلط می‌شود؛ پس درستی و نادرستی گزاره‌ی آن‌ها با درستی و نادرستی قسمت اول گزاره‌ی آن‌ها یکی می‌شود. حال اگر A راست‌گو باشد، به‌ناچار طبق گزاره‌ی خودش B هم راست‌گو خواهد بود. ولی این با حرف B در مورد دروغ‌گو بودن A سازگار نیست. پس A دروغ‌گوست. در نتیجه طبق گفته‌ی A، B هم باید دروغ‌گو باشد. اما چون گزاره‌ی B در مورد دروغ‌گو بودن A درست است، این حالت هم غیر ممکن است. در نتیجه امکان ندارد که جزیره‌ی ششم «مایا» نباشد.

چ) E نمی‌تواند دروغ‌گو باشد، در غیر این‌صورت گزاره‌اش («یا من دروغ‌گو هستم یا ...») به‌علت درستی قسمت اول آن درست است، و این با دروغ‌گو بودن E سازگار نیست. حال از حرف E می‌فهمیم که C و D از لحاظ راست‌گویی و دروغ‌گویی مثل هم‌اند. اگر C و D دروغ‌گو باشند، برای نادرست بودن گفته‌ی D باید A راست‌گو و B دروغ‌گو باشد. در این صورت گفته‌ی C درست از آب در می‌آید. پس این حالت امکان ندارد. در نتیجه، C و D هر دو راست‌گو هستند. از راست‌گویی C می‌فهمیم که یکی از A و B راست‌گوست. از طرفی بنابر گزاره‌های A و B و این‌که حداکثر یکی از نقشه‌های X یا Y نقشه‌ی «بال» است، می‌فهمیم که دقیقاً یکی از A و B راست‌گو و دیگری دروغ‌گوست. حال با دقت در حرف D می‌فهمیم که A دروغ‌گو و B راست‌گوست. در نتیجه Y، نقشه‌ی مورد نظر است.

مسئله‌ی ۷۱. فلسفه و منطق (۲)

الف) اگر شخص دروغ‌گو باشد، قسمت اول گزاره‌اش درست است. درنتیجه کل گزاره‌اش درست است و این با دروغ‌گو بودن شخص در تناقض است. پس آن فرد راست‌گوست. حال از گزاره به‌وضوح می‌فهمیم که او یک میمون هم هست.

ب) مسلماً آن‌شخص راست‌گو نیست. چون هیچ راست‌گویی به‌خود دروغ نمی‌گوید. از طرفی، او بنابر گفته‌اش نمی‌تواند یک میمون دروغ‌گو باشد، پس یک انسان دروغ‌گوست.

پ) اگر آن‌شخص دروغ‌گو باشد، به‌وضوح یک میمون راست‌گو نیست. پس حرف‌اش درست است که با دروغ‌گو بودنش تناقض دارد. چون او راست‌گوست، از گزاره‌اش مشخص است که یک انسان راست‌گوست.

مسئله‌ی ۷۲. فلسفه و منطق (۳)

الف) اگر B دروغ‌گو باشد، گزاره‌اش درست می‌شود که با دروغ‌گو بودنش در تناقض است. پس B راست‌گوست و بنابر حرف او A دروغ‌گوست. پس برای غلط بودن حرف A باید هر دوی آن‌ها انسان باشند. در نتیجه A یک انسان دروغ‌گو و B یک انسان راست‌گوست.

ب) B دروغ‌گوست، زیرا هیچ راست‌گویی به‌خود دروغ نمی‌گوید. بنابر دروغ‌گو بودن B و از روی حرفش می‌فهمیم که A راست‌گوست. پس بنابر حرف A، هر دو میمون‌اند. یعنی A یک میمون راست‌گو و B یک میمون دروغ‌گوست.

پ) اگر B راست‌گو باشد، بنابر گفته‌اش A هم راست‌گوست و بنابراین گفته‌ی A مبنی بر دروغ‌گو بودن B با راست‌گو بودن B در تناقض است. در نتیجه B دروغ‌گوست و از گفته‌اش می‌فهمیم که A هم دروغ‌گوست. با توجه به دروغ‌گو بودن A و گزاره‌اش، خواهیم دانست که B یک انسان دروغ‌گو و A یک میمون دروغ‌گوست.

مسئله‌ی ۷۳. فلسفه و منطق (۴)

اگر H دروغ‌گو باشد، مقدم گزاره‌اش غلط می‌شود. در نتیجه کل گزاره‌ی شرطی‌اش درست خواهد بود که با دروغ‌گو بودن H سازگار نیست. پس H راست‌گوست. حال اگر A دروغ‌گو باشد، به‌وضوح C هم به‌خاطر گفته‌ی نادرست‌اش دروغ‌گو خواهد بود. حال چون مقدم گزاره‌ی شرطی G نادرست است، گزاره‌ی G کلاً درست می‌باشد و G راست‌گو خواهد بود. اما این مطلب گزاره‌ی H مبنی بر راست‌گو بودن A را رد می‌کند. پس A راست‌گو خواهد بود و می‌فهمیم که X یکی از راه‌های درست است.

اما در باره‌ی درهای دیگر چیزی نمی‌توان گفت؛ ممکن است همه‌ی آن‌ها راه درست باشند و همه‌ی افراد هم راست‌گو باشند. و ممکن است که فقط X راه درست باشد و فقط A، B، C و H راست‌گو باشند.