دفاع از پایان‌نامه
با بیمر فارسی

پژوهشگر:

ایمان بیات

اساتید راهنما:

دکتر جیمز وات،
دکتر آلبرت انیشتین

دانشکده مهندسی مکانیک

بهار ۱۳۹۹

دانشگاه فردوسی مشهد

iLATEX Iman Bayat

- دگرگونی اقتصاد جهانی در دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی باعث ابداع و تکامل ابزارهای متعدد مالی شده‌است.

iLaTeX
Iman Bayat

مقدمه

- دگرگونی اقتصاد جهانی در دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی باعث ابداع و تکامل ابزارهای متعدد مالی شده‌است.
- قرارداد اختیار معامله یکی از شایع‌ترین مشتقات مالی و صورت تکامل یافته‌ی دیگر قراردادها است.

iLaTeX
Iman Bayat

مقدمه

- دگرگونی اقتصاد جهانی در دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی باعث ابداع و تکامل ابزارهای متعدد مالی شده‌است.
- قرارداد اختیار معامله یکی از شایع‌ترین مشتقات مالی و صورت تکامل یافته‌ی دیگر قراردادها است.
- امروزه قیمت‌گذاری اختیار معامله یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی است، که از پیشگامان این حوزه می‌توان بلک و شولز و مرتون را نام برد.

iLaTeX
Iman Bayat

مقدمه

- دگرگونی اقتصاد جهانی در دهه‌های اخیر و توسعه‌ی اقتصادی باعث ابداع و تکامل ابزارهای متعدد مالی شده‌است.
- قرارداد اختیار معامله یکی از شایع‌ترین مشتقات مالی و صورت تکامل یافته‌ی دیگر قراردادها است.
- امروزه قیمت‌گذاری اختیار معامله یکی از مسائل اساسی در ریاضیات مالی است، که از پیشگامان این حوزه می‌توان بلک و شولز و مرتون را نام برد.

فرمول کلاسیک بلک–شولز، جهت قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ی اروپایی استفاده می‌شود که تغییرپذیری تصادفی در پارامترهای بازار در این مدل به خوبی منعکس نشده است. تحقیقات جدید در این زمینه بر مدل به اصطلاح تبدیل–وضعیت (رژیم–متغیر) متمرکز شده‌اند.

iLaTeX Iman Bayat

تعریف

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > ۰$ است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$$

باشد.

Iman B

تعریف

متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با پارامتر $\lambda > 0$ است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$\varphi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

باشد.

تعریف

متغیر تصادفی X را بی‌حافظه گوییم اگر،

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t), \qquad s, t \geq 0 .$$

تعریف

فرض کنید μ یک عدد حقیقی و σ یک عدد حقیقی مثبت باشند. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ , \quad x \in \mathbb{R}$$

باشد.

Iman B

تعریف

فرض کنید μ یک عدد حقیقی و σ یک عدد حقیقی مثبت باشند. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ است، هرگاه تابع چگالی احتمال آن به صورت

$$\varphi(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^۲}{۲\sigma^۲}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

باشد.

توزیع نرمال $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک نامیده می‌شود که تابع چگالی آن عبارت است از

$$\varphi(z) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} e^{\frac{-z^۲}{۲}}, \qquad z \in \mathbb{R}\,.$$

تعریف

فرآیند تصادفی $\{B_t : t \geq ۰\}$ را یک حرکت براونی گویند اگر

1. $B_۰ = ۰$،
2. $B_t - B_s$ برای $s \leq t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ باشد،
3. B_t دارای نموهای مستقل باشد، یعنی متغیرهای تصادفی $B_{t_۲} - B_{t_۱}$، $B_{t_۳} - B_{t_۲}$، ...، $B_{t_n} - B_{t_{n-۱}}$ برای $t_۱ \leq t_۲ \leq \dots \leq t_n$ مستقل باشند.

تعریف

فرض کنید I مجموعه‌ای متناهی (یا شمارا) باشد. یک Q-ماتریس روی I، ماتریس $Q=(q_{ij})_{i,j\in I}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

1. برای هر $i \in I$، $0 \leq -q_{ii} < \infty$،
2. برای هر $i \neq j$، $q_{ij} \geq 0$،
3. برای هر $i \in I$، $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0$،

چنین ماتریسی، ماتریس مولد نام دارد.

ماتریس مولد

تعریف

فرض کنید I مجموعه‌ای متناهی (یا شمارا) باشد. یک Q-ماتریس روی I، ماتریس $Q = (q_{ij})_{i,j\in I}$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

1. برای هر $i \in I$، $0 \le -q_{ii} < \infty$،
2. برای هر $i \neq j$، $q_{ij} \ge 0$،
3. برای هر $i \in I$، $\sum_{j\in I} q_{ij} = 0$،

چنین ماتریسی، ماتریس مولد نام دارد.

تذکر

اگر تعریف کنیم $q_{ii} = -q_i$ و $P(t)$ تابعی از t و Q مقداری ثابت باشد، آنگاه

$$P(t) = e^{Qt} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Qt)^i}{i!}$$

تعریف

فرض کنید X متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{G}$ سیگما-جبر مشمول در $\mathcal{F}$ $(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F})$ باشد. امید ریاضی X به شرط $\mathcal{G}$ با متغیر تصادفی $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ تعریف می‌شود، به‌طوری‌که

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$، یک متغیر تصادفی $\mathcal{G}$-اندازه پذیر است،

Iman B
Iman

تعریف

فرض کنید X متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{G}$ سیگما–جبر مشمول در $\mathcal{F}$ $(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F})$ باشد. امید ریاضی X به شرط $\mathcal{G}$ با متغیر تصادفی $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ تعریف می‌شود، به‌طوری‌که

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$، یک متغیر تصادفی $\mathcal{G}$–اندازه پذیر است،
- برای هر $A \in \mathcal{G}$،

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) dP = \int_A X dP \ .$$

Iman B

تعریف

فرض کنید X متغیر تصادفی انتگرال‌پذیر در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{G}$ سیگما-جبر مشمول در $\mathcal{F}$ $(\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F})$ باشد. امید ریاضی X به شرط $\mathcal{G}$ با متغیر تصادفی $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ تعریف می‌شود، به‌طوری‌که

- $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$، یک متغیر تصادفی $\mathcal{G}$-اندازه پذیر است،
- برای هر $A \in \mathcal{G}$،

$$\int_A \mathbb{E}(X \mid \mathcal{G}) dP = \int_A X dP \; .$$

تعریف

فرض کنید $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ مجموعه‌ای از زیر سیگما-جبرهای $\mathcal{F}$ در Ω باشد. مجموعه‌ی $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ را یک پالایه می‌نامیم، هرگاه برای هر $0 \leq s \leq t$ رابطه‌ی $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ برقرار باشد.

فرآیند ایتو

تعریف

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال و $\{B_t : t \geq 0\}$ یک حرکت براونی با پالایه‌ی $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ باشد. فرآیند پیشرو اندازه پذیر X_t برای $t \geq 0$ به صورت

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dB_s \ ,$$

و یا شکل دیفرانسیلی

$$dX_t = a(t)dt + b(t)dB_t \ ,$$

را یک فرآیند ایتو با مشخصه‌های a و b گویند به‌طوری‌که a و b به ازای هر $T > 0$ فرآیندهای پیشرو اندازه پذیر هستند و همچنین داریم:

$$\mathbb{E}\int_0^T |a(s)|ds < \infty \ , \quad \mathbb{E}\int_0^T |b(s)|^2 ds < \infty \ .$$

تعریف

فرض کنید $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ یک فضای احتمال باشد. خانواده‌ی $\{X_t : t \geq 0\}$ از متغیرهای تصادفی نسبت به پالایه‌ی $\{\mathscr{F}_t : t \geq 0\}$ مارتینگل است اگر و تنها اگر در سه شرط زیر صدق کند:

1. $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$،
2. X_t، $\mathscr{F}_t$-اندازه پذیر است،
3. به ازای هر $0 \leq s < t$، $\mathbb{E}(X_t \mid \mathscr{F}_s) = X_s$.

قضیه (قضیه گیرسانو)

فرض کنید برای $0 \leq t \leq T$، B_t یک حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ پالایه‌ی مربوط به آن باشد. فرض کنید β_t یک فرآیند ساز گار (سازوار) باشد. همچنین فرض کنید

$$Z_t = \exp(-\int_0^t \beta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_u^2 du),$$

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \beta_u du,$$

قضیه (قضیه گیرسانو)

فرض کنید برای $0 \leq t \leq T$، B_t یک حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ پالایه‌ی مربوط به آن باشد. فرض کنید β_t یک فرآیند ساز گار (سازوار) باشد. همچنین فرض کنید

$$Z_t = \exp(-\int_0^t \beta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_u^2 du),$$

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \beta_u du,$$

که در آن

$$\mathbb{E}\int_0^T \beta_u^2 Z_u^2 du < \infty .$$

قضیه (قضیه گیرسانو)

فرض کنید برای $0 \leq t \leq T$، B_t یک حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ پالایه‌ی مربوط به آن باشد. فرض کنید β_t یک فرآیند ساز گار (سازوار) باشد. همچنین فرض کنید

$$Z_t = \exp(-\int_0^t \beta_u dB_u - \frac{1}{2}\int_0^t \beta_u^2 du),$$

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \beta_u du,$$

که در آن

$$\mathbb{E}\int_0^T \beta_u^2 Z_u^2 du < \infty .$$

قرار دهید $Z = Z_T$، آنگاه $\mathbb{E}(Z) = 1$ و تحت اندازه‌ی احتمال $\tilde{P}$ تعریف شده با رابطه‌ی

$$\tilde{P}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) ,$$

فرآیند $\tilde{B}_t$ برای $0 \leq t \leq T$ یک حرکت براونی است.

تعریف

فرض کنید (X,d) و (Y,d') دو فضای متریک باشند. در این‌صورت $f : X \longrightarrow Y$ را یک تابع لیپ‌شیتز گوییم، هرگاه

$$\exists \ell > \circ \quad s.t \quad \forall x, y \in X \qquad d'(f(x), f(y)) \leq \ell d(x,y) \ .$$

iLaTeX
Iman Bayat

تعریف

فرض کنید (X,d) و (Y,d') دو فضای متریک باشند. در این‌صورت $f:X\longrightarrow Y$ را یک تابع لیپ‌شیتز گوییم، هرگاه

$$\exists \ell>0 \quad s.t \quad \forall x,y\in X \qquad d'(f(x),f(y))\leq \ell d(x,y)\ .$$

تعریف

فرض کنید (X,d) و (Y,d') دو فضای نرم‌دار باشند. $f:X\longrightarrow Y$ یک تابع لیپ‌شیتز با ثابت $\ell\in(0,1)$ باشد، آن‌گاه f را یک عملگر انقباضی می‌نامیم.

Iman B

تعریف

فرض کنید (X, d) و (Y, d') دو فضای متریک باشند. در این‌صورت $f : X \longrightarrow Y$ را یک تابع لیپ‌شیتز گوییم، هرگاه

$$\exists \ell > ۰ \quad s.t \quad \forall x, y \in X \qquad d'(f(x), f(y)) \leq \ell d(x, y) \ .$$

تعریف

فرض کنید (X, d) و (Y, d') دو فضای نرم‌دار باشند. $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع لیپ‌شیتز با ثابت $\ell \in (۰, ۱)$ باشد، آن‌گاه f را یک عملگر انقباضی می‌نامیم.

قضیه (قضیه نقطه ثابت باناخ)

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل و $f : X \longrightarrow X$ یک نگاشت انقباضی باشد. در این‌صورت f در X نقطه‌ی ثابت منحصر به فرد دارد و برای هر $x_۰ \in X$، $f^n(x_۰)$ به این نقطه‌ی ثابت میل می‌کند.

قضیه

- ψ یک جواب منحصر به فرد برای معادله‌ی

$$\psi(s,y,i) = \mathcal{T}\psi(s,y,i) + e^{q_{ii}(T-s)}\psi^{\circ}(s,y,i)\ .$$

است.

- فرض کنید $\psi^{\circ} = \psi_{\circ}$ و $\{\psi_n\}$ برای $n = ۱, ۲, \ldots$ را به صورت بازگشتی تعریف کنید طوری‌که

$$\psi_{n+۱}(s,y,i) = \mathcal{T}\psi_n(s,y,i) + e^{q_{ii}(T-s)}\psi^{\circ}(s,y,i)\ .$$

آن‌گاه دنباله‌ی $\{\psi_n\}$ به ψ همگرا است.


از توجه شما متشکرم