

به نام خدا

تمرین‌های درس ریاضی عمومی (۱)، مدرس: محفوظ رستم‌زاده

انتگرال

انتگرال

۱- انتگرال‌های معین و نامعین زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 & a. \int_0^1 5x\sqrt{x}dx \quad b. \int_0^1 x(1-x^2)^{2\sqrt{15}}dx \quad c. \int \frac{1}{\sqrt[5]{x}}dx \quad d. \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x}(1+\cos x)^{2015}dx \\
 & e. \int_0^{\pi} \sin^3 x dx \quad f. \int \frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)^3}dx \quad g. \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}dx \quad h. \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\sin 2x}dx \\
 & i. \int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx \quad j. \int \cos^{11} x \sin^3 x dx \quad k. \int x e^{-x^2} dx \quad l. \int \frac{e^{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \\
 & m. \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx \quad n. \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad o. \int \frac{1}{1-x^2} dx \quad p. \int \frac{5x^2 + x - 1}{x^2} dx \\
 & q. \int \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{\sqrt{x}} dx \quad r. \int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin^2 x} dx \quad s. \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \quad t. \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^6}} dx \\
 & u. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad v. \int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad w. \int x \sinh(1-x^2) dx \quad x. \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx \\
 & y. \int \sin(x) \cosh(1+\cos x) dx \quad z. \int \frac{\sqrt{1+\tanh x}}{\cosh^2 x} dx
 \end{aligned}$$

۲- انتگرال‌های زیر را با روش جزء به جزء حل کنید.

$$\begin{aligned}
 & i. \int \ln x dx \quad ii. \int x \ln x dx \quad iii. \int x \cos x dx \quad iv. \int \arcsin x dx \quad v. \int e^x \sin x dx \\
 & vi. \int \sin(\sqrt{x}) dx \quad vii. \int x e^{\sqrt{x}} dx \quad viii. \int \sin(\ln x) dx \quad ix. \int (\ln x)^2 dx \quad x. \int x^2 e^{-x^2} dx
 \end{aligned}$$

۳- انتگرال‌های زیر را با تغییر متغیر مثلثاتی حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 i. \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} dx & ii. \int (x^2-1)^{\frac{2}{3}} dx & iii. \int \frac{1}{9x^2-16} dx & iv. \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} dx \\
 v. \int \sqrt{x^2-x+1} dx & vi. \int \frac{x}{x^2+2x+5} dx & vii. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx & viii. \int x^{-1}(x^2-1)^{\frac{2}{3}} dx
 \end{array}$$

۴- انتگرال‌های زیر را با روش تجزیه کسرها حل کنید.

$$\begin{array}{llll}
 i. \int \frac{1}{1+x^3} dx & ii. \int \frac{x}{x^2-4} dx & iii. \int \frac{2x+3}{5x-4} dx & iv. \int \frac{1}{x^2(1+x^2)^2} dx \\
 v. \int \frac{3x^2-1}{x^4-1} dx & vi. \int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx & vii. \int \frac{x^2+2x}{(x^2-16)^2} dx & viii. \int \frac{x^2+1}{x^3-1} dx
 \end{array}$$

۵- مطلوبست محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر.

$$\begin{array}{llll}
 i. \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx & ii. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx & iii. \int \sqrt{1-x^2} \sin^{-1} x dx & iv. \int \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx \\
 v. \int x \cos(\sqrt{x}) dx & vi. \int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1+x}} dx & vii. \int \sqrt{1-\sin x} dx & viii. \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx
 \end{array}$$

۶- مطلوبست محاسبه‌ی طول هر یک از خم‌های زیر در بازه‌ی داده شده.

$$\begin{array}{ll}
 i. f(x) = \cosh x, \quad [0, 1] & ii. f(x) = 2x\sqrt{x}, \quad [0, \frac{1}{3}] \\
 iii. x = t, y = t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1
 \end{array}$$

۷- مساحت محصور بین توابع زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll}
 i. f(x) = 1, g(x) = x^2 & ii. f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2-x \\
 iii. f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, \quad x \in [\frac{\pi}{4}, 2\pi]
 \end{array}$$

۸- مطلوبست محاسبه‌ی انتگرال‌های ناسره‌ی زیر.

$$i. \int_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{x^3} dx \quad ii. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} dx \quad iii. \int_{-1}^{+1} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad iv. \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$$

۹- همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره‌ی زیر را بررسی کنید.

$$i. \int_{-1}^{+\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^4 - x + 1} dx \quad ii. \int_{-1}^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \quad iii. \int_{-1}^{+1} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad iv. \int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{\ln x} dx$$

$$v. \int_{-1}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx \quad vi. \int_{-1}^{+\infty} e^{-x} \sin x dx \quad vii. \int_{-1}^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx \quad viii. \int_{-1}^{+1} \frac{\tan x}{x^2} dx$$

۱۰- حجم حاصل از دوران تابع داده شده را حول محور خواسته شده به دست آورید.

یادآوری می‌کنیم که حجم حاصل از دوران تابع f حول محور y ها در بازه‌ی $[a, b]$ عبارتست

$$از $V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$$

الف. تابع $f(x) = \sin x$ حول محور y ها و در بازه‌ی $[0, \pi]$.

ب. تابع $f(x) = \ln x$ حول محور x ها و در بازه‌ی $[1, e]$.

نکته: فرض کنیم $F(x) = \int f(x) dx + c$. در نتیجه با توجه به تعریف انتگرال نامعین داریم

$F'(x) = f(x)$. برای توابع مشتق‌پذیر g و h اگر تابع $G(x)$ را به صورت $G(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt$

تعریف کنیم، در این صورت بنا بر تعریف انتگرال معین $G(x) = F(h(x)) - F(g(x))$. حال مشتق تابع $G(x)$ عبارتست از

$$G'(x) = h'(x)F'(h(x)) - g'(x)F'(g(x)) = h'(x)f(h(x)) - g'(x)f(g(x)).$$

مثال: برای تابع $y = \int_{x^2}^{x^4} \ln(t^4) dt$ ،

$$y' = 4x^3 \ln((x^4)^4) - 0 \times \ln(2^4) = 4x^3 \ln(x^{16}) = 64x^3 \ln x$$

مثال: مشتق تابع $y = G(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{\ln t}{1+\tan t} dt$ عبارتست از

$$y' = 4x^3 \times \frac{\ln x}{1+\tan x} - 2x \times \frac{\ln(x^2)}{1+\tan(x^2)}$$

مثال: مشتق تابع $y = \int_{\ln(x+1)}^{\sin x} \frac{1+\sin t}{1+t^2} dt$ در نقطه‌ی صفر عبارتست از

$$y' = \cos x \times \frac{1+\sin(\sin x)}{1+\sin^2 x} - \frac{1}{x+1} \times \frac{1+\sin(\ln(x+1))}{1+(\ln(x+1))^2}$$

در نتیجه به ازای $x = 0$ داریم:

$$y'_{|x=0} = \cos 0 \times \frac{1 + \sin(\sin 0)}{1 + \sin^2 0} - \frac{1}{0 + 1} \times \frac{1 + \sin(\ln(0 + 1))}{1 + (\ln(0 + 1))^2} = 1 - 1 = 0$$

مثال: حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan(t^2) dt}{x^6}$$

به وضوح با جایگذاری مستقیم، این حد منجر به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می شود. از هوییتال استفاده

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \tan(t^2) dt}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \tan(x^2)}{6x^5} = \frac{1}{3} \text{ می کنیم و داریم:}$$

۱۱ - مطلوبست مشتق توابع زیر در نقطه‌ی داده شده.

$$f(x) = \int_{x^2}^x \sin(t^2) dt, \quad x = 0 \quad g(x) = \int_{x^2}^1 \frac{1}{1+t^2} dt, \quad x = 1$$

$$h(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\cos(t^2)}{1+t^2} dt, \quad x = \sqrt[3]{\pi}$$

۱۲ - مقدار حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$i. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^{x^2} \ln(t^2 + 1) dt}{x - 1} \quad ii. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \frac{1}{\sin(t-1) + \ln t} dt}{\ln x}$$

$$iii. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{-x^2}^0 e^{t^2} dt}{x^2} \quad iv. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t}{\sin t} dt}{x}$$