# فصل ۱

# مدارهای نگاشت‌های یک بُعدی

در این فصل به معرفی دستگاه‌های دینامیکی یک بعدی و تحلیل چند مثال ابتدایی می‌پردازیم. مطالعه‌ی تکرار در روش نیوتن، به‌طور طبیعی به مفهوم جذب نقاط ثابت برای دستگاه‌های دینامیکی منجر می‌شود. روش نیوتن به‌عنوان انگیزه‌ی مهمی برای مطالعه‌ی دستگاه‌های دینامیکی مورد تاکید قرار می‌گیرد. این فصل را با معیارهای مختلفی برای تعیین پایداری نقاط ثابت یک دستگاه دینامیکی به پایان می‌رسانیم.

## ۱.۱ تکرار توابع و دستگاه‌های دینامیکی

در این بخش، دستگاه‌های دینامیکی گسسته، حاصل از تغییرات گسسته در زمان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به‌عنوان مثال، می‌توانیم مدل‌سازی تعداد اعضای یک جامعه با سرشماری روزانه را در نظر بگیریم. فرض کنیم $x_0$ جمعیت اولیه و $x_n$ تعداد اعضای جامعه در روز $n$–ام باشد. در جستجوی تابعی چون $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هستیم به طوری که $x_1 = f(x_0)$، $x_2 = f(x_1)$ و به‌طور کلی برای هر عدد صحیح نامنفی داشته باشیم

$$x_{n+1} = f(x_n),$$

که منجر به تکرار توابع به روش زیر خواهد شد:
برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنیم $x_n = f^n(x_0)$، که در آن $f^n(x_0) = f \circ f \circ \cdots \circ f(x_0)$ ($n$ بار ترکیب تابع $f$ با خودش). در این صورت $x_1 = f(x_0)$، $x_2 = f^2(x_0)$ و در حالت کلی

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n).$$

**تعریف.** برای $x_0$ داده شده، مدار $x_0$ تحت نگاشت $f$ که آن را با $\mathcal{O}(x_0)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), \cdots\}.$$

در حالت کلی‌تر، ممکن است $f$ روی زیربازه‌ی $I$ از $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. در این حالت، برای این‌که تکرارهای $x_0 \in I$ تحت $f$ قابل تعریف باشند، نیاز داریم برد تابع $f$ شامل $I$ باشد. بنابراین از این به بعد تابع $f$ را به‌صورت $f : I \longrightarrow I$ در نظر می‌گیریم و مطالعه‌ی تکرارهای

نگاشت‌های یک بُعدی را آغاز می‌کنیم.

**تعریف.** یک دستگاه دینامیکی یک بُعدی، زوج مرتب $(I,f)$ است که در آن تابع $f : I \longrightarrow I$ و $I$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است. تقریباً همیشه، $I$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ است اما این امکان نیز وجود دارد که $I = \mathbb{R}$.

اغلب یک دستگاه دینامیکی را با $f : I \longrightarrow I$ یا در حالتی که دامنه‌ی $f$ مشخص است با $f$ نمایش می‌دهیم. تابع $f$ می‌تواند پیوسته یا ناپیوسته باشد. برای مثال، تابع $f : [0,1] \to [0,1]$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ و $g : [0,1] \to [0,1]$ با ضابطه‌ی

$$g(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1 & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

دستگاه‌های دینامیکی هستند (که تابع $f$ پیوسته و $g$ ناپیوسته است) اما تابع $h : [0,2] \to [0,4]$ با ضابطه‌ی $h(x) = x^2$ دستگاه دینامیکی نیست چون دامنه و برد متفاوتی دارد.

برای دستگاه دینامیکی $f$، معادله‌ی $x_{n+1} = f(x_n)$، یک معادله‌ی تفاضلی است که از دستگاه دینامیکی یک بعدی $f$ ناشی می‌شود. به‌عنوان مثال، $x_n$ ممکن است نشان دهنده تعداد باکتری‌ها در یک کشت پس از $n$ ساعت، یا جرم مواد رادیواکتیو باقی مانده پس از گذشت $n$ روز از زمان آزمایش باشد. تناظر آشکاری بین نگاشت‌های یک بعدی و این معادلات تفاضلی وجود دارد. برای مثال، معادله‌ی تفاضلی که معمولاً برای محاسبه جذر عدد ۲، استفاده می‌شود؛ یعنی

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

متناظر با تابع $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ است. اگر با تقریب اولیه‌ی $x_0 = 2$ (یا هر عدد حقیقی دیگری) شروع کرده و سپس $x_1$، $x_2$ و $\cdots$ را محاسبه کنیم، دنباله‌ای خواهیم داشت که به سرعت به $\sqrt{2}$ نزدیک می‌شود. یکی از مسائلی که در این فصل بررسی می‌کنیم، چگونگی به وجود آمدن این معادله تفاضلی و مفید بودن آن در محاسبه جذر اعداد است.

## ۲.۱ مثال‌هایی از دستگاه‌های دینامیکی

۱- توابع مثلثاتی: تکرارهای تابع مثلثاتی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = \sin(x)$ را در نظر می‌گیریم. عدد $x_0 \in \mathbb{R}$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. برای مثال قرار می‌دهیم $x_0 = 2$ و برای $n = 0, 1, 2, \cdots$ تعریف می‌کنیم $x_{n+1} = \sin(x_n)$. با افزایش $n$ چه اتفاقی برای $x_n$ می‌افتد؟ یک راه برای بررسی این دستگاه دینامیکی استفاده از نرم‌افزار است؛ $\sin(2)$ را وارد می‌کنیم، به دنبال آن ENTER و سپس $\sin(\text{ANSWER})$ و این روند را ادامه می‌دهیم . این کار را بارها انجام می‌دهیم تا ایده‌ی خوبی از آنچه در حال رخ دادن است داشته باشیم. در این بین استفاده از یک دستگاه جبری کامپیوتری می‌تواند انجام محاسبات را آسان‌تر کند.

حال اگر تابع سینوس را با تابع کسینوس جایگزین و این کار را تکرار کنیم، چگونه می‌توان آنچه که در هر مورد اتفاق می‌افتد را توضیح داد؟ این‌ها سوالاتی است که در این فصل پاسخ داده خواهد شد.

۲- نگاشت‌های خطی: این دستگاه‌ها احتمالاً ساده‌ترین دستگاه‌های دینامیکی برای مدل‌سازی رشد جمعیت و همچنین ساده‌ترین دستگاه‌هایی هستند که از منظر دینامیکی با آن‌ها مواجه می‌شویم، زیرا می‌توانیم توصیف روشنی از رفتار بلندمدت آنها به‌دست

آوریم. هر نگاشت خطی $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$، به‌صورت $f(x)=a\,x$ است که $a\in\mathbb{R}$. فرض کنیم $x_n$ تعداد اعضای جامعه در زمان $n$ باشد، با این ویژگی که برای $a>0$ داشته باشیم، $x_{n+1}=a\,x_n$. این نمونه‌ای از یک مدل خطی برای رشد جمعیت است.

اگر جمعیت اولیه $x_0>0$ باشد، آنگاه $x_1=a\,x_0$، $x_2=a\,x_1=a^2\,x_0$ و در حالت کلی برای $n=0,1,2,\cdots$ خواهیم داشت $x_n=a^n\,x_0$. این جواب دقیق (یا فرم بسته‌ی جواب) برای معادله‌ی تفاضلی $x_{n+1}=a\,x_n$ است. واضح است که $f(x)=a\,x$ دستگاه دینامیکی متناظر است و می‌توانیم از جواب به‌دست آمده، برای تعیین رفتار بلندمدت رشد جمعیت استفاده کنیم.

دنباله‌ی $(x_n)$ بسیار خوش رفتار است زیرا

آ) اگر $a>1$، آنگاه هنگامی که $n\longrightarrow\infty$ داریم $x_n\longrightarrow\infty$،

ب) اگر $0<a<1$، آنگاه هنگامی که $n\longrightarrow\infty$ داریم $x_n\longrightarrow 0$ (یعنی جمعیت منقرض می‌شود)،

پ) اگر $a=1$، آنگاه جمعیت ثابت باقی می‌ماند.

---

**مثال.** جمعیت شته‌ها را در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$a(n)$ = تعداد شته‌های ماده‌ی بالغ در نسل $n$–ام،

$p(n)$ = تعداد فرزند در نسل $n$–ام،

$m$ = تلفات نسبی در شته‌های جوان،

$q$ = تعداد فرزندان هر شته‌ی ماده،

$r$ = نسبت شته‌های ماده به کل شته‌های بالغ.

چون هر شته‌ی ماده $q$ فرزند تولید می‌کند بنابراین

$$p(n+1)=qa(n). \tag{۱.۱}$$

حال از این $p(n+1)$ فرزند، $rp(n+1)$ شته‌ی ماده‌ی جوان هستند که $(1-m)rp(n+1)$ زنده می‌مانند تا بالغ شوند. پس

$$a(n+1)=r(1-m)p(n+1).$$

با جایگذاری از معادله‌ی (۱.۱) داریم:

$$a(n+1)=rq(1-m)a(n),$$

که یک دستگاه دینامیکی خطی است. بنابراین

$$a(n)=[rq(1-m)]^n a(0).$$

حال سه حالت برای بررسی وجود دارد.

آ) اگر $rq(1-m)<1$، آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}a(n)=0$ و جمعیت شته‌ها رو به انقراض می‌رود.

ب) اگر $rq(1-m)=1$، آنگاه $a(n)=a(0)$ و یک جمعیت ثابت داریم.

پ) اگر $rq(1-m) > 1$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} a(n) = \infty$ و جمعیت به طور نمایی به بی‌نهایت رشد می‌کند.

---

۳- نگاشت‌های آفین: توابعی چون $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت $f(x) = a\,x + b$ هستند که در آن $a$ و $b$ اعداد حقیقی ثابت‌اند و $a \neq 0$. تکرار چنین نگاشت‌هایی را در نظر می‌گیریم:

$$f^2(x) = f(a\,x+b) = a(a\,x+b)+b = a^2\,x + a\,b + b,$$
$$f^3(x) = a^3\,x + a^2\,b + a\,b + b,$$
$$f^4(x) = a^4\,x + a^3\,b + a^2\,b + a\,b + b,$$

و در حالت کلی

$$f^n(x) = a^n\,x + a^{n-1}\,b + a^{n-2}\,b + \cdots + a\,b + b.$$

فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}$. قرار می‌دهیم $x_n = f^n(x_0)$. بنابراین اگر $a \neq 1$ فرم بسته‌ی جواب عبارت است از

$$x_n = a^n\,x_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)\,b = a^n\,x_0 + b\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right) = \left(x_0 + \frac{b}{a-1}\right)\,a^n + \frac{b}{1-a}.$$

در حالتی که $a = 1$، جواب به‌صورت $x_n = x_0 + n\,b$ خواهد بود. می‌توانیم از این روابط برای تعیین رفتار بلند مدت $x_n$ استفاده کنیم. خواهیم دید که

آ) اگر $|a| < 1$، آنگاه هنگامی که $n \longrightarrow \infty$ داریم $a^n \longrightarrow 0$ و بنابراین $\lim_{n\to\infty} x_n = \dfrac{b}{1-a}$.

ب) اگر $a > 1$، آنگاه برای $b, x_0 > 0$ خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

پ) اگر $a = 1$، آنگاه برای $b > 0$، $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

در حالتی که $a \leq -1$ حد وجود ندارد.

---

**مثال.** در پایان هر ماه $T$ واحد پول به حساب بانکی شما واریز می‌شود و سود این حساب در هر ماه $r\%$ است. مقدار $A(n)$، سپرده‌ی شما در پایان ماه $n$ ام را بیابید. (فرض کنید $A(0) = T$)

حل. با فرض $A(0) = T$، $A(n)$ در معادله‌ی تفاضلی

$$A(n+1) = A(n) + A(n)r/100 + T = A(n)(1 + r/100) + T,$$

صدق می‌کند. با فرض $x_0 = T$، $a = 1 + r/100$ و $b = T$ از فرمول به‌دست آمده برای نگاشت‌های آفین، جواب عبارت است از

$$A(n) = (1 + r/100)^n\,T + T\left(\frac{(1 + r/100)^n - 1}{(1 + r/100) - 1}\right) = (1 + r/100)^n\,T + \frac{100\,T}{r}((1 + r/100)^n - 1).$$

---

**مثال.** دارویی هر ۶ ساعت یک‌بار تجویز شده است. فرض کنید $D(n)$ مقدار داروی موجود در خون در بازه‌ی ۶ ساعته‌ی $n$–اُم باشد. بدن در هر بازه‌ی زمانی، کسر معین $p$ از دارو را دفع می‌کند. اگر مقدار داروی تجویز شده $D_0$ باشد، $D(n)$ و $\lim_{n\to\infty} D(n)$ را بیابید.

حل. اولین قدم در حل این مثال آن است که یک معادله تفاضلی بنویسیم که رابطه‌ی مقدار دارو در بازه‌ی زمانی $(n+1)$–اُم یعنی $D(n+1)$ را با $D(n)$ بازگو کند. مقدار داروی $D(n+1)$ برابر است با مقدار $D(n)$ منهای کسر $p$ از $D(n)$ که از بدن دفع شده، به اضافه‌ی مقدار دُز جدید $D_0$. بنابراین

$$D(n+1) = (1-p)D(n) + D_0.$$

با حل دستگاه دینامیکی آفین فوق داریم

$$D(n) = (1-p)^n D_0 + D_0\left(\frac{1-(1-p)^n}{p}\right) = (D_0 - \frac{D_0}{p})(1-p)^n + \frac{D_0}{p}.$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} D(n) = \frac{D_0}{p}.$$

---

۴– روابط بازگشتی: بسیاری از دنباله‌ها را می‌توان به‌صورت بازگشتی با مشخص کردن چند جمله‌ی اول و سپس ارائه‌ی یک قانون کلی برای یافتن جمله‌ی $n$–ام بر حسب جملات قبلی، تعریف کرد. در این حالت با استفاده از استقراء ریاضی می‌توان دید که دنباله برای هر $n \in \mathbb{N}$ خوش‌تعریف است. دنباله‌ی فیبوناچی $(F_n)$ را می‌توان با فرض $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$، برای هر $n \geq 0$ توسط رابطه‌ی بازگشتی

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

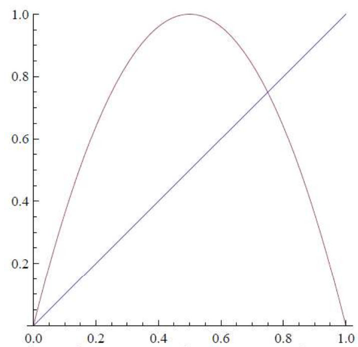
تعریف کرد. به کمک اصل استقرای ریاضی به سادگی می‌توان نشان داد که $F_n$ برای هر $n \geq 0$ تعریف شده است.

در حالت ایده‌آل، با توجه به دنباله‌ی بازگشتی تعریف شده‌ی $(x_n)$، می‌خواهیم یک فرمول خاص برای $x_n$ برحسب توابع مقدماتی داشته باشیم (به اصطلاح فرم بسته‌ی جواب). دستیابی به این امر اغلب بسیار دشوار یا غیرممکن است. در برخی حالت‌ها، نظیر نگاشت‌های آفین و نگاشت‌های لجستیک خاص، فرم بسته‌ی جواب وجود دارد. می‌توان از این ایده‌ها برای مطالعه‌ی برخی مسائل استفاده کرد که در مثال زیر نشان داده شده است.

۵– نگاشت لجستیک: در اواخر دهه 1940، جان فون نیومن[۱] این امکان را مطرح کرد که بتوان از نگاشت $f(x) = 4x(1-x)$ به‌عنوان یک مولد اعداد شبه تصادفی استفاده کرد. نگاشت‌هایی از این نوع جزء اولین نگاشت‌هایی بودند که با استفاده از رایانه‌های الکترونیکی مورد مطالعه قرار گرفتند. پائُل اشتاین[۲] و استانیسلاو اُولام[۳] در اوایل دهه 1950 مطالعه‌ی رایانه‌ای گسترده‌ای روی $f(x)$ و نگاشت‌های مرتبط با آن انجام دادند، اما بسیاری از این نگاشت‌ها مبهم باقی ماندند. در حالت کلی، نگاشت‌های $L_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $L_\mu(x) = \mu\, x\,(1-x)$، برای مدل‌سازی نوع خاصی از رشد جمعیت پیشنهاد شدند که در آن $\mu$، یک پارامتر حقیقی ثابت است. توجه کنید که اگر $0 < \mu \leq 4$، آنگاه $L_\mu$ یک دستگاه دینامیکی روی بازه‌ی $[0,1]$ است؛ یعنی $L_\mu : [0,1] \to [0,1]$. برای مثال وقتی

[1] Jon von Neumann
[2] Paul Stein
[3] Stanislaw Ulam

$\mu = 4$، $L_4(x) = 4\,x\,(1-x)$ و $L_4([0,1]) = [0,1]$، نمودار این نگاشت را در شکل ۱.۱ می‌توانید ببینید. اگر $\mu > 4$، آنگاه از آن‌جا که $L_\mu([0,1])$ زیرمجموعه‌ای از $[0,1]$ نیست، $L_\mu$ دیگر دستگاه دینامیکی روی بازه‌ی $[0,1]$ نخواهد بود. از نظر تاریخی،




شکل ۱.۱: نگاشت لجستیک برای $\mu = 4$.

زیست‌شناسان جمعیت به مقادیری از $\mu$ که باعث ایجاد جمعیت‌های پایدار پس از تکرار طولانی‌مدت می‌شوند، علاقه‌مند بودند. با این حال، خواهیم دید که با نزدیک شدن $\mu$ به 4، رفتار بلند مدت بسیار ناپایدار می‌شود. اولین بار جیمز یورک[4] در سال 1975 به ماهیت آشوبناک این رفتار اشاره کرد. رابرت می[5] در طول ملاقاتش با یورک در دانشگاه مریلند، عنوان کرد که متوجه رفتار $L_\mu$، با نزدیک شدن $\mu$ به عدد 4 نشده است، اما اندکی پس از آن، نتایج اصلی لی-یورک (۱۹۷۵) و می (۱۹۷۶) در این باره منتشر شدند.

**تذکر.** حدس زده می‌شود که تعیین فرم بسته‌ی جواب برای معادلات تفاضلی حاصل از نگاشت‌های لجستیک تنها وقتی $\mu = -2$، $\mu = 2$ و $\mu = 4$ باشد، امکان‌پذیر است. مثال‌های زیر را برای یافتن این جواب‌ها دنبال کنید.

**مثال.** اگر $\mu = 2$، آنگاه $x_{n+1} = 2\,x_n\,(1-x_n)$. با استفاده از تغییر متغیر $y_n = 1 - 2\,x_n$ نتیجه می‌شود که $x_n = \frac{1-y_n}{2}$. با جایگذاری در معادله‌ی لجستیک مورد بحث داریم $\frac{1-y_{n+1}}{2} = (1-y_n)(1-\frac{1-y_n}{2})$. پس $y_{n+1} = y_n^2$ که به $y_{n+1} = y_0^{2n}$ منجر می‌شود. بنابراین $1 - 2\,x_n = (1-2x_0)^{2n}$ و در نتیجه $x_n = \frac{1-(1-2x_0)^{2n}}{2}$.

در محاسبه‌ی $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ حالت‌های زیر رخ می‌دهد:

آ) آگر $|1-2x_0| < 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$ (جمعیت به تعادل می‌رسد)،

ب) آگر $|1-2x_0| = 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (جمعیت منقرض می‌شود)،

پ) آگر $|1-2x_0| > 1$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ (جمعیت به $\infty$ میل می‌کند).

**مثال.** اگر $\mu = 4$ باشد، آنگاه $x_{n+1} = 4\,x_n\,(1-x_n)$. در این حالت از تغییر متغیر $x_n = \sin^2\theta_n$ برای مقادیر $\theta_n \in (0, \pi/2]$ استفاده می‌کنیم. با جایگذاری در معادله‌ی لجستیک اخیر خواهیم داشت:

$$\sin^2(\theta_{n+1}) = 4\,\sin^2(\theta_n)(1-\sin^2(\theta_n)) = 4\,\sin^2(\theta_n)\cos^2(\theta_n) = (2\sin(\theta_n)\cos(\theta_n))^2 = \sin^2(2\theta_n).$$

[4] James Yorke
[5] Robert May

حال با استفاده از $\sin^2(\theta_{n+1}) = \sin^2(2\theta_n)$، می‌توان نشان داد که $\sin^2(\theta_{n+1}) = \sin^2(4\theta_{n-1})$ و در حالت کلی

$$x_n = \sin^2(\theta_n) = \sin^2(2^n\theta_0),$$

که در آن $\theta_0 = \arcsin(\sqrt{x_0})$.

## ۳.۱ روش نیوتن و نقاط ثابت

آیزاک نیوتن[۶] (۱۶۶۹ میلادی) و جوزف رافسون[۷] (۱۶۹۰ میلادی) حالت‌های خاصی از روشی که ما آن را امروزه روش نیوتن می‌نامیم، معرفی کردند که نسخه مدرن آن توسط توماس سیمپسون[۸] در سال ۱۷۴۰ میلادی ارائه شد. روش نیوتن الگوریتمی برای یافتن سریع مقادیر تقریبی صفرهای توابع است.

برای تابع مشتق‌پذیر مفروض $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و تحت شرایط مناسب، روش نیوتن اجازه می‌دهد تقریب‌های خوبی از صفرهای $f(x)$ بیابیم، یعنی جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ را تخمین بزنیم. ایده‌ی روش نیوتن به این ترتیب است که باید با تقریب اولیه‌ی $x_0$ از ریشه‌ی مورد نظر شروع کنیم، سپس خط مماس بر $f(x)$ را در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ رسم می‌کنیم. گیریم این خط محور $x$ها را در $x_1$ قطع می‌کند. در این صورت اگر $f'(x_0) \neq 0$، آن‌گاه

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

اگر حدس اولیه‌ی $x_0$ به اندازه‌ی کافی به ریشه نزدیک باشد، $x_1$ تقریب بهتری از ریشه خواهد بود. این فرآیند را با رسم خط مماس بر $f(x)$ در $(x_1, f(x_1))$ تکرار می‌کنیم. با تکرار این فرآیند در گام $n+1$–ام داریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

که الگوریتمی به شکل یک معادله‌ی تفاضلی است که در آن $x_0$ اولین تقریب از صفر تابع $f(x)$ است. تابع حقیقی متناظر با این معادله‌ی تفاضلی که به تابع نیوتن موسوم است عبارت است از

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

برای مثال اگر $f(x) = x^2 - a$، آن‌گاه $f'(x) = 2x$ و

$$N_f(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}).$$

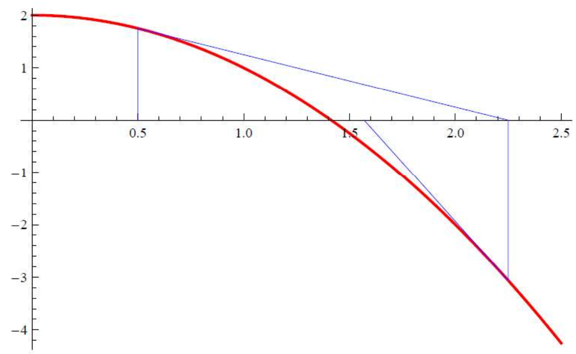
پس

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}),$$

معادله‌ی تفاضلی ذکر شده در بخش قبل را ارائه می‌دهد که برای تقریب $\sqrt{2}$ وقتی $a = 2$ استفاده می‌شود.

توجه کنید که اگر $f(x) = 0$، آن‌گاه $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$ و به طور متقابل، اگر $N_f(x) = x$، آن‌گاه $f(x) = 0$. این نشان می‌دهد نقاطی که به ازای آن‌ها تابعی چون $g(x)$ در شرط $g(x) = x$ صدق می‌کند، حائز اهمیت است. بنابراین تعریف زیر را داریم.

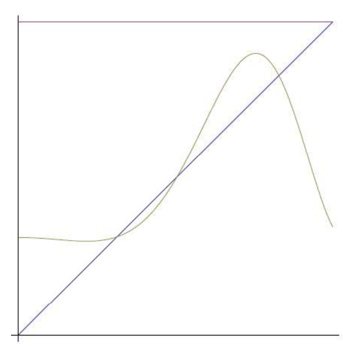
[6] Isaac Newton
[7] Joseph Raphson
[8] Thomas Simpson




شکل ۲.۱: دو تقریب اول برای حل $f(x) = 2 - x^2$ با شروع از $x_0 = 0.5$.

**تعریف.** تابع $f : I \to I$ را که در آن $I$ زیر بازه‌ای از $\mathbb{R}$ است، در نظر بگیرید. نقطه‌ی $c \in I$ را نقطه ثابت $f$ گوئیم هرگاه $f(c) = c$.

نقاط ثابت $f$، نقاطی هستند که در آن نمودار تابع $f(x)$ خط $y = x$ را قطع می‌کند. مجموعه‌ی نقاط ثابت $f$ را با $Fix(f)$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۳.۱: نقاط ثابت $f$ محل تقاطع نمودار $y = f(x)$ با خط $y = x$ است.

---

**مثال.** تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ مفروض است. در این صورت از $x = x^2$ نتیجه می‌شود $x(x-1) = 0$. بنابراین نقاط ثابت $f$ عبارتند از $c = 0$ و $c = 1$. پس $Fix(f) = \{0, 1\}$.

---

**مثال.** تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - x$ مفروض است. در این صورت از $x = x^3 - x$ نتیجه می‌شود $x(x^2 - 2) = 0$. بنابراین نقاط ثابت $f$ عبارتند از $c = 0$ و $c = \pm\sqrt{2}$ و در نتیجه $Fix(f) = \{0, \pm\sqrt{2}\}$.

---

**مثال.** همان‌طور که پیش از این گفتیم برای مقادیر $0 < \mu \le 4$، نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu\, x\,(1-x)$، یک دستگاه دینامیکی روی $[0,1]$ است. اگر $\mu > 4$، آنگاه برای برخی مقادیر $x$ در $[0,1]$، $L_\mu(x) > 1$ و تکرارهای بعدی آن به $-\infty$ میل خواهند کرد.
از معادله‌ی $L_\mu(x) = x$ نتیجه می‌شود $x = 0$ و یا $x = 1 - \frac{1}{\mu}$. اگر $0 < \mu < 1$، آنگاه $1 - \frac{1}{\mu} < 0$ و بنابراین در این حالت $c = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت در $[0,1]$ خواهد بود، اما برای $1 < \mu \le 4$، نگاشت لجستیک دارای دو نقطه ثابت $c = 0$ و $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ است.
به‌ویژه نگاشت لجستیک $L_4(x) = 4\,x\,(1-x)$، $0 \le x \le 1$ دارای ویژگی‌های زیر است:
$L_4(0) = 0$ (نقطه ثابت نگاشت)، $L_4(1) = 0$، نگاشت در $x = \frac{1}{2}$ ماکسیمم مقدار خودش را اختیار می‌کند که برابر است با $L_4(1/2) = 1$.
از معادله‌ی $L_4(x) = x$ نتیجه می‌شود $4\,x^2 = 3\,x$، پس $c = 0$ و $c = 3/4$ نقاط ثابت نگاشت هستند. نقاط $x = 1$ و $x = \frac{1}{2}$ نقاط جالبی هستند چون $x = 1$ پس از یک بار تکرار و $x = \frac{1}{2}$ پس از دوبار تکرار به نقطه ثابت $c = 0$ می‌رسند. پس تعریف زیر را داریم.

> **تعریف.** گوئیم $x^* \in \mathbb{R}$ نقطه‌ی در نهایت ثابت $f(x)$ است، هرگاه نقطه ثابت $c$ از $f(x)$ و $r \in \mathbb{Z}^+$ چنان موجود باشند که $f^r(x^*) = c$، اما برای هر $0 \le s < r$، $f^s(x^*) \ne c$.

برای $L_4(x) = 4\,x\,(1-x)$ همانطور که دیدیم $L_4(0) = 0$ و $L_4(1) = 0$، بنابراین $c = 1$ نقطه‌ی در نهایت ثابت نگاشت است. همچنین $L_4(1/4) = 3/4$، بنابراین $c = 1/4$ نیز نقطه‌ی در نهایت ثابت است، همانطور $c = (2+\sqrt{3})/4$. می‌توانیم بررسی کنیم که نقاط درنهایت ثابت بیشتری برای این نگاشت وجود دارد.

---

**مثال.** نگاشت چادر: تابع $T : [0,1] \to [0,1]$ با ضابطه‌ی

$$T(x) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}| = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1/2 \\ 2\,(1-x) & 1/2 < x \le 1, \end{cases}$$

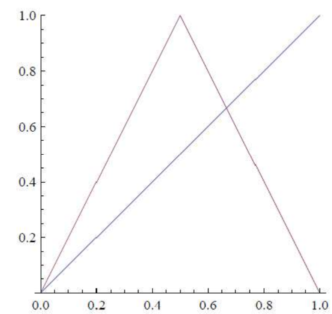
را نگاشت چادر می‌نامیم. نقاط ثابت این نگاشت با توجه به اینکه $T(0) = 0$ و $T(2/3) = 2/3$، مشخص می‌شود. به‌علاوه از آن‌جا که $T(1/4) = 1/2$، $T(1/2) = 1$ و $T(1) = 0$، نقاط $x = 1/4, 1/2, 1$ نقاط در نهایت ثابت نگاشت چادر هستند. بررسی اینکه نگاشت چادر دارای بی‌نهایت نقطه‌ی در نهایت ثابت است، چندان دشوار نیست (در واقع نشان دهید اگر $x = \frac{k}{2^n}$ که $k$ و $n$ اعداد طبیعی‌اند و $0 < \frac{k}{2^n} \le 1$، آنگاه $x$ نقطه‌ی درنهایت ثابت است).

---

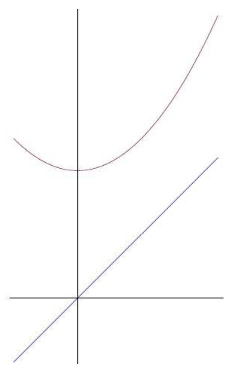
**مثال.** برخی نگاشت‌ها نقطه ثابت ندارد. به‌عنوان مثال نگاشت $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2 + 1$ هیچ نقطه ثابتی ندارد، چون معادله‌ی $x^2 + 1 = x$ دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

---

**مثال.** فرض کنید $c \in \mathbb{R}$ و $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f_c(x) = x^2 + c$ تعریف شده باشد. می‌خواهیم بدانیم برای کدام مقادیر از $c$، $f_c$ نقطه ثابت دارد؟ اگر نمودار $f_c$ را با ابزار جبری رایانه‌ای رسم کنیم و آن را برازش نماییم، خواهیم دید به ازای $c = 1$ هیچ نقطه ثابتی وجود ندارد (مثال قبل)، اما با کاهش $c$، در برخی مقادیر از $c$، $f_c$ خط $y = x$ را قطع می‌کند. مقادیر $c$ در جایی که این اتفاق می‌افتد می‌توانند به صراحت تعیین شود. در واقع با حل $x^2 + c = x$ درمی‌یابیم که برای $c < \frac{1}{4}$، نگاشت $f_c$ دارای دو نقطه ثابت $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$ و $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$ است. در $c = \frac{1}{4}$ تنها یک نقطه ثابت $x = \frac{1}{2}$ را داریم و برای $c > \frac{1}{4}$ نقطه ثابت نداریم.




شکل ۴.۱: نگاشت چادر خط $y = x$ را در نقاط $x = 0$ و $x = \frac{3}{4}$ قطع می‌کند.



شکل ۵.۱: نمودار $f(x) = x^2 + 1$ خط $y = x$ را قطع نمی‌کند.

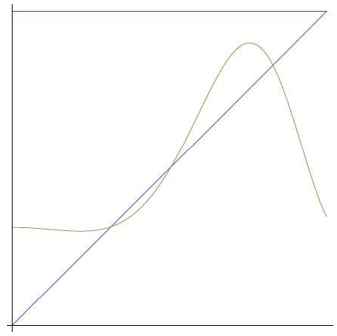
---

نتیجه بعدی حالت خاصی از قضیه‌ی نقطه ثابت است. اثبات این قضیه مستلزم استفاده از قضیه‌ی مقدار میانی است. قضایای نقطه ثابت در دستگاه‌های دینامیکی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، زیرا نقاط ثابت ممکن است اطلاعاتی در مورد رفتار بلندمدت تابع ارائه دهند.

**قضیه.** گیریم $I = [a, b]$ و فرض می‌کنیم $f : I \to I$ یک تابع پیوسته باشد. در این صورت، $f(x)$ دارای نقطه ثابتی نظیر $c \in I$ است.

اثبات. تابع پیوسته‌ی $g(x) = f(x) - x$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان فرض کرد $f(a) \neq a$ و $f(b) \neq b$، چون در غیر این صورت چیزی برای اثبات نخواهیم داشت. پس باید داشته باشیم $f(a) > a$ و $f(b) < b$؛ یعنی $g(a) = f(a) - a > 0$ و $g(b) = f(b) - b < 0$. پس قضیه‌ی مقدار میانی وجود $c \in (a, b)$ را با شرط $g(c) = 0$ تضمین می‌کند. اگر $g(c) = 0$، آنگاه $f(c) = c$ و $c$ نقطه ثابت $f(x)$ خواهد بود. □

تذکر. قضیه‌ی اخیر یک قضیه‌ی وجودی است. این قضیه چیزی درباره‌ی چگونگی پیدا کردن نقطه یا نقاط ثابت، جایی که واقع هستند و یا حتی تعداد آن‌ها نمی‌گوید و تنها بیان می‌کند که اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته بر بازه‌ی $I$ با شرط $f(I) \subset I$ باشد، آنگاه $f(x)$ در $I$ نقطه ثابت

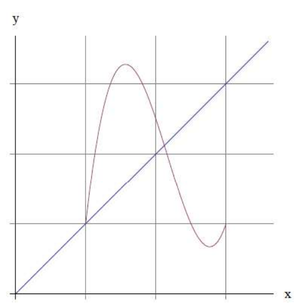


شکل ۶.۱: نمودار $y = f(x)$ همیشه خط $y = x$ را قطع می‌کند.

دارد. قضیه‌ی بعدی نیز نمونه‌ی مهم دیگری از قضایای وجودی است که بیان می‌کند اگر $I \subset f(I)$، آنگاه $f(x)$ در $I$ نقطه ثابت دارد.

**قضیه.** گیریم $I = [a, b]$ که $a < b$ و $f : I \to \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته با شرط $I \subset f(I)$ باشد. در این صورت $f(x)$ در $I$ نقطه ثابت دارد.

اثبات. تابع $g(x) = f(x) - x$ را در نظر می‌گیریم. $c_1 \in [a, b]$ با شرط $f(c_1) < c_1$ ( در حقیقت $f(c_1) < a < c_1$ ) وجود دارد. به‌علاوه (از آنجا که $f([a, b])$ بازه‌ای بسته و کراندار است) $c_2 \in [a, b]$ با شرط $f(c_2) > c_2$ نیز وجود دارد. بنابراین $g(c_1) < 0$ و $g(c_2) > 0$.
حال از آنجا که $g(x)$ تابعی پیوسته است، از قضیه‌ی مقدار میانی نتیجه می‌شود $c \in I$ ($c_1 < c < c_2$ یا $c_2 < c < c_1$) با شرط $g(c) = 0$ و بنابراین $f(c) = c$ وجود دارد. $\square$

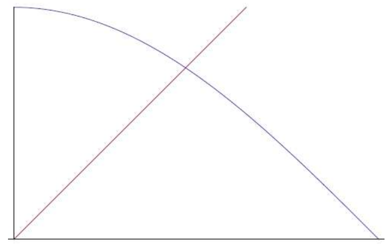



شکل ۷.۱: اگر $I \subset f(I)$، آنگاه $f$ نقطه ثابت دارد.

---

**مثال.** اغلب محاسبه‌ی صریح نقاط ثابت دشوار است. برای مثال، فرض کنیم $f(x) = \cos x$. در این صورت قضیه‌ی مقدار میانی را برای تابع $g(x) = \cos x - x$ به کار می‌بریم. از آنجا که $g(0) = 1 > 0$ و $g(\pi/2) = -\pi/2 < 0$، پس $g$ یک ریشه مانند $c$ در بازه‌ی $(0, \pi/2)$ دارد. بنابراین $c$ نقطه ثابت تابع $f(x)$ است، اما هیچ روشی برای محاسبه‌ی مقدار دقیق $c$ نداریم. تنها مقدار تقریبی آن را می‌توانیم با

به‌کارگیری روش نیوتن برای تابع $g(x)$ بیابیم. در این حالت همگرایی این روش بسیار سریع است و خواهیم دید $c$ تقریباً برابر با $0.739085...$ خواهد بود.



شکل ۸.۱: تابع $f(x) = \cos x$ در $[0, \frac{\pi}{2}]$ یک نقطه ثابت دارد.

---

## ۴.۱ تکرار ترسیمی

در این بخش به معرفی مفهوم نقاط ثابت جاذب و دافع می‌پردازیم. درگام اول این مفاهیم را از دیدگاه ترسیمی معرفی می‌کنیم. سپس تعریف دقیق آنها را ارائه خواهیم کرد. برای درک رفتار تابع $f(x)$ تحت تکرار، دنبال کردن تکرارهای تابع از نقطه‌ی شروع $x_0$ با استفاده از فرآیندی به نام تکرار ترسیمی، مفید خواهد بود. در این فرآیند، نمودار تابع $y = f(x)$ و خط $y = x$ را رسم می‌کنیم. از نقطه‌ی $x_0$ روی محور $x$ خطی را بر نمودار تابع $f(x)$ عمود کرده، سپس از نقطه‌ی تقاطع این خط با نمودار به‌صورت افقی به سمت خط $y = x$ و بعد از آن مجدداً به‌صورت عمودی به سمت نمودار حرکت می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. مجموعه نقاطی که حاصل می‌شوند عبارتند از

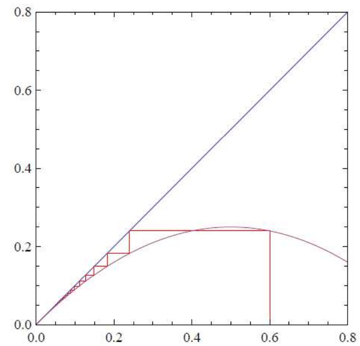
$$(x_0, 0) \longrightarrow (x_0, f(x_0)) \longrightarrow (f(x_0), f(x_0)) \longrightarrow (f(x_0), f^2(x_0)) \longrightarrow (f^2(x_0), f^2(x_0)) \longrightarrow \cdots .$$

در این فرآیند خواهیم دید که در برخی نگاشت‌ها تکرارها به یک نقطه ثابت همگرا می‌شوند، در برخی $f^n(x_0) \longrightarrow \infty$ و در برخی دیگر $f^n(x_0)$ بین نقاط متفاوت در نوسان است و یا به روشی کاملاً غیرقابل پیش‌بینی رفتار می‌کند. به مثال‌های زیر دقت کنید.

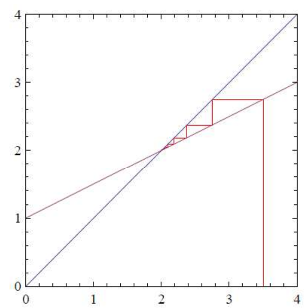
**مثال.** نگاشت $f(x) = x(1-x)$ را در نظر می‌گیریم. در این مثال، بررسی تکرارهای ترسیمی نشان می‌دهد که مدار هر نقطه در $[0, 1]$ به نقطه ثابت $x = 0$ نزدیک می‌شوند. در چنین حالتی نقطه ثابت $x = 0$ یک نقطه‌ی ثابت جاذب نامیده می‌شود.

---

**مثال.** نگاشت $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ را که یک نگاشت آفین با $a = \frac{1}{2}$ و $b = 1$ است، را در نظر می‌گیریم. در این مثال از آنجا که $|a| = \frac{1}{2} < 1$، براساس آنچه در مطالعه‌ی نگاشت آفین به‌دست آوردیم، انتظار داریم تکرارها به $\frac{b}{1-a} = 2$ همگرا شوند، که این مورد به روشنی در ترسیم تکرارها نیز قابل مشاهده است. آنچه که در واقع اتفاق می‌افتد این است که $c = 2$ یک نقطه‌ی ثابت جاذب از نگاشت $f(x)$ است که همه‌ی نقاط $\mathbb{R}$ را جذب می‌نماید. چنین نقطه‌ای جاذب سراسری نامیده می‌شود، چون برای هر $x \in \mathbb{R}$، هنگامی که $n \longrightarrow \infty$ داریم $f^n(x) \longrightarrow 2$.



شکل ۹.۱: تکرارهای $f(x)=x(1-x)$ با شروع از $x_0=0.6$.



شکل ۱۰.۱: تکرارهای $f(x)=\frac{x}{2}+1$ با شروع از $x_0=3.5$.

---

**مثال.** با توجه به نمودار نگاشت $f(x)=\sin x$، به نظر می‌رسد نقطه ثابت $c=0$، نقطه ثابت جاذب نگاشت است. بعداً نشان خواهیم داد که این نقطه ثابت، جاذب سراسری است یعنی برای هر $x\in\mathbb{R}$، هنگامی که $n\longrightarrow\infty$ داریم $f^n(x)\longrightarrow 0$. یک نرم‌افزار رایانه‌ای این ادعا را نشان می‌دهد. اما توجه کنید که همگرایی به صفر، بسیار کند است.

---

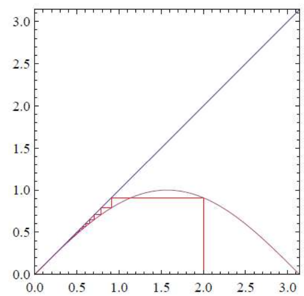
دو حالت اساسی در تکرارهای نزدیک به یک نقطه ثابت اتفاق می‌افتد

الف) مدار پایدار، که در آن تکرارهای ترسیمی به یک نقطه ثابت نزدیک می‌شوند.

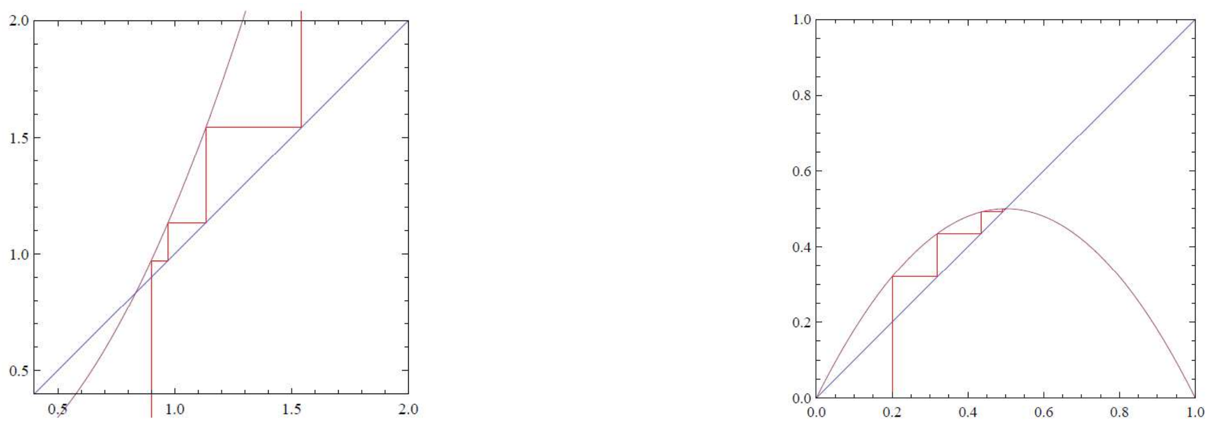
ب) مدار ناپایدار، که در آن تکرارهای ترسیمی از یک نقطه ثابت دور می‌شوند.

گزاره‌ی زیر نشان می دهد که اگر دنباله‌ی $x_n=f^n(x_0)$ به نقطه‌ای مانند $c$ همگرا شود، آنگاه $c$ یک نقطه ثابت نگاشت $f$ است.

**گزاره ۱.** اگر $f:I\to I$ یک تابع پیوسته روی بازه‌ی $I$ و $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)=c\in I$ ، آنگاه $f(c)=c$ (یعنی اگر مداری به نقطه‌ی $c$ همگرا باشد، آنگاه $c$ نقطه ثابت نگاشت $f$ است).




شکل ۱۱.۱: تکرارهای $f(x) = \sin x$ با شروع از $x_0 = 2$.




(آ) مدار پایدار.

(ب) مدار ناپایدار.

شکل ۱۲.۱: مدارهای پایدار و ناپایدار.

اثبات. به وضوح از $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = c$ نتیجه می‌شود که $f(\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0)) = f(c)$ و چون $f$ پیوسته است پس

$$\lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = f(c).$$

از طرفی $\lim\limits_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = c$ و بنابر یکتایی حد نتیجه می‌شود $f(c) = c$. □

## ۵.۱ پایداری نقاط ثابت

در بخش قبل، یک ایده‌ی شهودی برای مفهوم نقاط ثابت جاذب و دافع ارائه کردیم. به‌منظور ارائه معیارهایی برای تعیین جاذب و یا دافع بودن نقاط ثابت، به تعریف دقیقی از این مفاهیم نیاز داریم.

تعریف. فرض کنیم $I$ زیربازه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: I \to I$ تابعی با نقطه ثابت $c \in I$ باشد، یعنی داشته باشیم $f(c) = c$.

آ) نقطه ثابت $c$ پایدار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ چنان موجود باشد که اگر $x \in I$ و $|x-c| < \delta$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $|f^n(x) - c| < \varepsilon$. در غیر این صورت $c$ را ناپایدار می‌نامیم.

ب) نقطه ثابت $c$ جاذب نامیده می‌شود هرگاه عدد حقیقی $\eta > 0$ چنان موجود باشد که اگر $x \in I$ و $|x-c| < \eta$، آنگاه $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = c$.

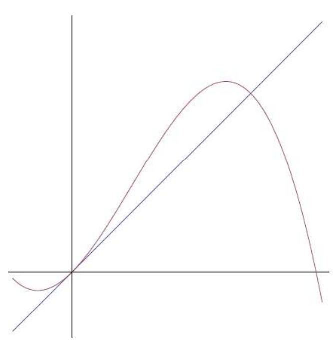
پ) نقطه ثابت $c$ مجانبی پایدار نامیده می‌شود هرگاه پایدار و جاذب باشد.

تذکر. با توجه به تکرارهای ترسیمی بخش، به نظر می‌رسد که اگر یک نقطه ثابت $c$ از $f$ دارای این ویژگی باشد که $|f'(c)| < 1$، آنگاه $c$ مجانبی پایدار است و این همان مطلبی است که در قضیه بعدی مطرح می‌شود. به‌ویژه، اگر $f'(x)$ در همسایگی $x = c$ پیوسته باشد، آنگاه برای $x$ در همسایگی $c$، $|f'(x)| < 1$.

اگر $c$ یک نقطه‌ی ثابت ناپایدار باشد، می‌توان $\varepsilon > 0$ و $x$ به اندازه‌ی کافی نزدیک به $c$ را چنان یافت که برخی از تکرارهای $x$، مثلاً $f^n(x)$، در شرط $|f^n(x) - c| > \varepsilon$ صدق کند. این مورد همانطور که در قضیه‌ی بعدی نشان خواهیم داد زمانی اتفاق می‌افتد که $|f'(c)| > 1$. یک نقطه ثابت می‌تواند پایدار باشد در حالی که جاذب نیست. همچنین می‌تواند جاذب باشد در حالی که پایدار نیست.

تعریف. نقطه ثابت $c$ از نگاشت $f$ را هذلولوی گوییم هرگاه $|f'(c)| \neq 1$. اگر $|f'(c)| = 1$، آنگاه $c$ را غیرهذلولوی می‌نامیم (دلیل این نام‌گذاری‌ها زمانی مشخص می‌شود که نقاط ثابت نگاشت‌های $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ را بررسی کنیم).

اگر $c$ نقطه ثابت غیرهذلولوی باشد، آنگاه $f'(c) = 1$ یا $f'(c) = -1$. بنابراین در یک نقطه ثابت غیرهذلولوی نمودار تابع $f(x)$ بر خط $y = x$ مماس است و یا آن را با زاویه‌ی 90 درجه قطع می‌کند (شکل ۱۳.۱ را ببینید).



شکل ۱۳.۱: تابع $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x$ هر دو نوع نقطه ثابت غیرهذلولوی را دارد.

در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم که تعیین پایداری نقاط ثابت هذلولوی آسان است. در اثبات این قضیه، از قضیه‌ی مقدار میانگین استفاده خواهیم کرد.

**قضیه.** فرض کنیم $f : I \to I$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق اول پیوسته باشد (در این صورت گوئیم $f$ از رده‌ی $C^1$ است).

آ) اگر $c$ یک نقطه ثابت $f(x)$ باشد و $|f'(c)| < 1$، آنگاه $c$ مجانبی پایدار است. در این حالت تکرارهای نقاطی در همسایگی $c$ به طور هندسی به $c$ همگرا هستند (یعنی ثابت $0 < \lambda < 1$ موجود است که برای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x$ به اندازه‌ی کافی نزدیک به $c$ داریم $|f^n(x) - c| < \lambda^n |x - c|$).

ب) اگر $c$ یک نقطه ثابت $f(x)$ باشد و $|f'(c)| > 1$، آنگاه $c$ ناپایدار است.

اثبات. آ) می‌توان فرض کرد $I$ بازه‌ای باز شامل $c$ باشد. عدد $\lambda > 0$ را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $|f'(c)| < \lambda < 1$. بنابر پیوستگی $f'(x)$، بازه‌ی باز $J \subset I$ شامل $c$ چنان موجود است که برای هر $x \in J$ داریم $|f'(x)| < \lambda < 1$. برای $x \in J$، بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین $a \in J$ بین $x$ و $c$ وجود دارد به طوری که

$$f'(a) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

و در نتیجه

$$|f(x) - c| = |f'(a)||x - c| < \lambda |x - c|.$$

یعنی $f(x)$ از $x$ به $c$ نزدیک‌تر است. با جایگزینی $f(x)$ به جای $x$ داریم $|f^2(x) - c| < \lambda^2 |x - c|$. با ادامه‌ی این روند برای هر عدد طبیعی $n$ خواهیم داشت

$$|f^n(x) - c| < \lambda^n |x - c|.$$

این پایداری $c$ را نتیجه می‌دهد. از طرفی چون $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$، پس $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = c$، یعنی $c$ جاذب است.

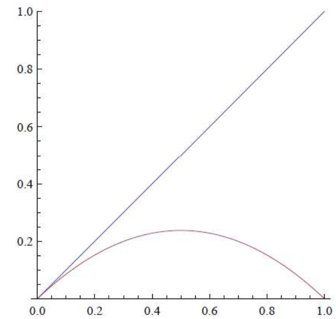
ب) اثبات قسمت ب) به‌صورت مشابه قابل بیان است.

□

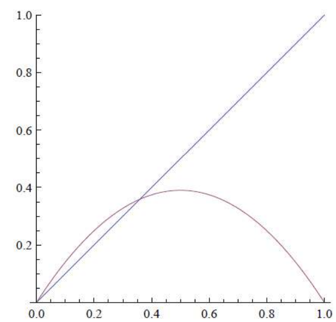
**مثال.** پیش از این دیدیم که نقاط ثابت نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu\, x\,(1 - x)$ در $x = 0$ و $x = 1 - 1/\mu$ واقع‌اند. اگر $0 < \mu \le 1$، آنگاه $1 - 1/\mu \le 0$ و بنابراین در این حالت $c = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت در $[0, 1]$ است. به‌علاوه $L'_\mu(x) = \mu - 2\,\mu\, x$ و درنتیجه $L'_\mu(0) = \mu$. بنابراین $c = 0$، برای $0 < \mu < 1$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار و برای $\mu = 1$ یک نقطه ثابت غیرهذلولوی است.
اگر $\mu > 1$، آنگاه $0$ و $1 - 1/\mu$ هردو نقاط ثابت نگاشت $L_\mu$ در $[0, 1]$ هستند. با توجه به محاسبات بالا، این‌بار $c = 0$، نقطه ثابت ناپایدار است. همچنین

$$L'_\mu(1 - 1/\mu) = \mu - 2\,\mu\,(1 - 1/\mu) = 2 - \mu.$$

از طرفی $|L'_\mu(1 - 1/\mu)| = |2 - \mu| < 1$ اگر و تنها اگر $1 < \mu < 3$. بنابراین $x = 1 - 1/\mu$ برای $1 < \mu < 3$ مجانبی پایدار و برای $\mu > 3$ ناپایدار (دافع) است. توجه می‌کنیم که $L'_1(0) = 1$ و $L'_3(2/3) = 1$، پس به ازای این مقادیر از $\mu$، نقطه‌ی ثابت غیرهذلولوی داریم. در بخش بعد، پایداری نقاط ثابت غیرهذلولوی $x = 0$ و $x = 2/3$ را به‌ترتیب به ازای $\mu = 1$ و $\mu = 3$ بررسی می‌کنیم.




شکل ۱۴.۱: برای $0 < \mu \leq 1$ نقطه‌ی $x = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت $L_\mu(x)$ است.




شکل ۱۵.۱: برای $1 < \mu \leq 3$ نقطه‌ی $x = 0$ نقطه ثابت ناپایدار و $x = 1 - 1/\mu$ نقطه ثابت پایدار نگاشت $L_\mu(x)$ است.

**مثال.** نگاشت $G_\lambda(x) = 1 - \lambda x^2$ را برای $\lambda \in (0, 2]$ روی بازه‌ی $[-1, 1]$ در نظر بگیرید. نقاط ثابت $G_\lambda(x)$ را یافته و پایداری آن‌ها را تعیین کنید.

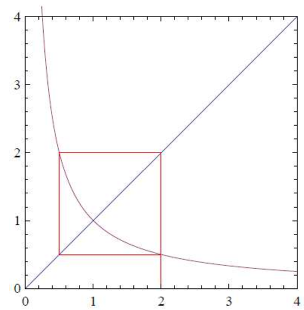
حل. برای یافتن نقاط ثابت $G_\lambda(x)$، معادله‌ی $1 - \lambda x^2 = x$ یا $\lambda x^2 + x - 1 = 0$ راحل می‌کنیم. دو نقطه ثابت

$$c_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda}, \qquad c_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2\lambda},$$

به‌دست می‌آیند. ملاحظه می‌شود که $G'_\lambda(x) = -2\lambda x$. بنابراین $|G'_\lambda(c_1)| = 1 + \sqrt{1 + 4\lambda} > 1$ و در نتیجه نقطه‌ی $c_1$ برای هر $\lambda \in (0, 2]$ ناپایدار است. علاوه‌براین $|G'_\lambda(c_2)| = \sqrt{1 + 4\lambda} - 1 < 1$ اگر و فقط اگر $\sqrt{1 + 4\lambda} < 2$. با حل آخرین نامساوی برای $\lambda$، داریم $\lambda < \frac{3}{4}$. طبق قضیه‌ی ۵.۱ نتیجه می شود که نقطه ثابت $c_2$ مجانبی پایدار است اگر $0 < \lambda < \frac{3}{4}$ و ناپایدار است اگر $\lambda > \frac{3}{4}$. وقتی $\lambda = \frac{3}{4}$، $c_2 = \frac{2}{3}$ و $G'_\lambda(\frac{2}{3}) = -1$. پس $c_2$ غیرهذلولوی است و پایداری نقاط غیرهذلولوی را در بخش بعد بررسی می‌کنیم.

---

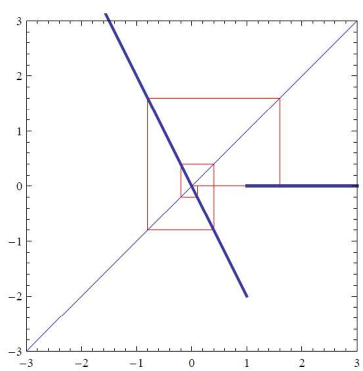
**مثال.** تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم. از آنجا که $f'(x) = -1/x^2$، پس $f'(\pm 1) = -1$؛ یعنی نقاط ثابت $x = \pm 1$ غیرهذلولوی هستند. گرچه هر دو نقطه ثابت این نگاشت پایدار هستند اما از آنجا که برای هر $x \neq 0$، $f^2(x) = f(1/x) = x$ جاذب نیستند. نقاطی که در همسایگی $\pm 1$ هستند نه به $\pm 1$ نزدیک می‌شوند و نه از آن دور.




شکل ۱۶.۱: نقطه ثابت $c = 1$ نه جاذب است نه دافع.

**مثال.** تابع $f_a(x) = \begin{cases} -2x & x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$ را برای $a > 0$ در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی $c = 0$ نقطه ثابت ناپایدار اما جاذب نگاشت $f_a$ است؛ یعنی برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\lim_{n\to\infty} f_a^n(x) = 0$.

یادآوری می‌کنیم که چنین نقطه ثابتی، جاذب سراسری نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که تابع $f_a$ در $x = a$ پیوسته نیست. محققین پیش از این نشان داده‌اند که یک نگاشت پیوسته‌ی حقیقی مقدار، نمی‌تواند نقطه ثابت ناپایداری داشته باشد که جاذب سراسری است.




شکل ۱۷.۱: نقاط نزدیک به $x = 0$ در ابتدا از 0 دور می شوند، اما در نهایت مستقیماً به 0 نگاشته می‌شوند.

---

**مثال.** بازبینی روش نیوتن:

در این مثال بررسی می‌کنیم که چرا روش نیوتن در یافتن مقدار تقریبی ریشه‌های یک تابع مانند $f(x)$ کارآمد است. در واقع بررسی می‌کنیم که چرا تکرارهای تابع نیوتن برای اکثر انتخاب‌های حدس اولیه، به سرعت به یک ریشه از $f$ همگرا می شوند؟ فرض کنیم که $f : I \to I$ تابعی است که $c$ ریشه‌ای از آن است که باید با استفاده از روش نیوتن تقریب زده شود. تابع نیوتن نظیر $f$ عبارت است از $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ که در آن فرض می‌کنیم $f'(c) \neq 0$ و $f''(x)$ در یک بازه‌ی باز شامل $c$ موجود باشد. توجه کنید از آنجا که $f(c) = 0$ داریم $N_f(c) = c$،

یعنی $c$ نقطه ثابت نگاشت $N_f$ است. مشتق $N_f(x)$ به‌صورت

$$N'_f(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \quad \to \quad N'_f(c) = \frac{f(c)f''(c)}{(f'(c))^2} = 0.$$

است. از آنجا که $f(c) = 0$، پس $N'_f(c) = \frac{f(c)f''(c)}{(f'(c))^2} = 0$. بنابراین $|N'_f(c)| = 0 < 1$ و از این رو $c$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار برای $N_f$ است. به‌ویژه، درصورتی که $x_0$ (اولین تقریب) به اندازه‌ی کافی به $c$ نزدیک باشد، داریم $\lim_{n\to\infty} N_f^n(x_0) = c$.

**تعریف.** نقطه ثابت $c$ از نگاشت $f(x)$ را اَبَرجاذب نامیم هرگاه $f'(c) = 0$. در این حالت نقاطی که در نزدیکی $c$ واقع هستند بسیار سریع به آن همگرا می‌شوند.

**تذکر.** اگر $f'(c) = 0$، آنگاه $N_f(x)$ در $x = c$ تعریف نمی‌شود. در این حالت اگر بتوانیم $f$ را به‌صورت $f(x) = (x-c)^k\,h(x)$ بنویسیم که در آن $h(c) \neq 0$ و عدد طبیعی $k$ بزرگ‌تر از ۱ است (برای مثال، اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای با ریشه‌ی تکراری در $c$ باشد)، آنگاه

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-c)^k\,h(x)}{k(x-c)^{k-1}\,h(x) + (x-c)^k\,h'(x)} = \frac{(x-c)\,h(x)}{k\,h(x) + (x-c)\,h'(x)}|_{x=c} = 0.$$

بنابراین $N_f(x)$ یک ناپیوستگی رفع شدنی در $x = c$ دارد (با قرار دادن $N_f(c) = c$ ناپیوستگی رفع می‌شود). حال $N'_f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که $N'_f(x)$ یک ناپیوستگی رفع شدنی در $x = c$ دارد که می‌توان آن را با قرار دادن $N'_f(c) = \frac{(k-1)}{k}$ رفع نمود که نتیجه می‌دهد $|N'_f(c)| < 1$.

آنچه در بالا گفته شد را در قضیه‌ی بعدی خلاصه می‌کنیم. شرط اینکه $f$ چندجمله‌ای باشد می‌تواند باعث شود تا نتیجه کلی‌تری به‌دست آید.

**قضیه.** فرض کنیم $f : I \longrightarrow I$ یک تابع چندجمله‌ای و $I$ یک بازه شامل $c$ باشد که $c$ ریشه‌ای از تابع $f(x)$ است. در این صورت، $x = c$ یک نقطه ثابت ابرجاذب از نگاشت نیوتن $N_f$ است اگر و تنها اگر $f'(c) \neq 0$.

اثبات. اگر $f'(c) \neq 0$، آنگاه از آنجا که $f(c) = 0$ خواهیم داشت $N'_f(c) = f(c)\,f''(c)/(f'(c))^2 = 0$. بالعکس، فرض کنیم $x = c$ یک نقطه ثابت ابرجاذب از نگاشت نیوتن $N_f$ باشد. می‌دانیم $f(c) = 0$. در این حالت اگر $f'(c) = 0$، آنگاه می‌توان نوشت $f(x) = (x-c)^k\,h(x)$ که در آن $h(c) \neq 0$ و $k > 1$. در نکته‌ای که پیش از این گفته شد، نشان دادیم که در این حالت $N_f(c) = c$ و $N'_f(c) = \frac{(k-1)}{k} \neq 0$ که در تناقض با ابرجاذب بودن $c$ است و این نتیجه می‌دهد $f'(c) \neq 0$. $\square$

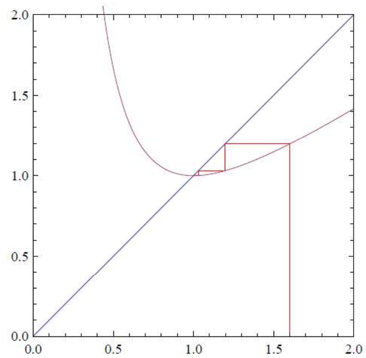
---

**مثال.** گیریم $f(x) = x^3 - 1$. بنابراین $f(1) = 0$ و

$$N_f(x) = x - f(x)/f'(x) = x - \frac{x^3-1}{3\,x^2} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3\,x^2}, \qquad N'_f(x) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3\,x^3},$$

از این رو $N_f(1) = 1$ و $N'_f(1) = 0$. از تکرارهای ترسیمی مشاهده می‌کنیم که چون نمودار $f$ در $x = 1$ بسیار مسطح است، همگرایی بسیار سریعی به نقطه ثابت $N_f$ داریم. به همین دلیل است که روش نیوتن الگوریتم خوبی برای یافتن ریشه‌ی توابع است.

---




شکل ۱۸.۱: همگرایی سریع به نقطه ثابت.

## ۶.۱ نقاط ثابت غیرهذلولوی

در بخش قبل، محکی برای تعیین نوع پایداری نقاط ثابت هذلولی بیان کردیم. در این بخش معیارهایی برای بررسی پایداری نقاط ثابت غیرهذلولی ارائه می‌کنیم.

فرض کنیم $I$ زیربازه‌ای از $\mathbb{R}$ شامل $c$ باشد. پیش از این دیدیم که اگر $f : I \to I$ دارای مشتق اول پیوسته باشد و $f(c) = c$، آنگاه نقطه ثابت $c$ در حالتی که $|f'(c)| < 1$، مجانبی پایدار و در حالتی که $|f'(c)| > 1$، ناپایدار است. همچنین اگر $|f'(c)| = 1$، آنگاه $c$ یک نقطه ثابت غیرهذلولوی از $f$ است. در اولین قضیه از این بخش به حالتی که $c$ یک نقطه‌ی ثابت غیرهذلولوی برای نگاشت $f$ با $f'(c) = 1$ باشد، می‌پردازیم و بحث را با در نظر گرفتن آنچه برای حالت $f'(c) = -1$، ممکن است رخ دهد به پایان می‌رسانیم. بررسی نقاط ثابت غیرهذلولی را با یک مثال آغاز می‌کنیم.

**مثال.** اگر $f(x) = \sin x$، آنگاه $f(0) = 0$ و $|f'(0)| = 1$. بنابراین $c = 0$ یک نقطه ثابت غیرهذلولوی از $f$ است که فعلاً محکی برای تعیین نوع پایداری آن نداریم. با این حال، تکرارهای ترسیمی نشان می‌دهند که $c = 0$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار است و برای هر $x \in \mathbb{R}$ داریم $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = 0$.

قبل از اینکه نقاط ثابت غیرهذلولی را با جزئیات بررسی کنیم، اجازه دهید حکم مثال اخیر را به‌صورت تحلیلی اثبات کنیم.

**گزاره ۲.** نقطه ثابت $c = 0$ از نگاشت $f(x) = \sin x$ جاذب سراسری و پایدار است.

اثبات. توجه کنید که $c = 0$ تنها نقطه ثابت $\sin x$ است. زیرا اگر $\sin c = c$، آنگاه چون برای هر $x$، $|\sin x| \le 1$ این تساوی مقادیری از $c$ که $|c| > 1$ را شامل نمی‌شود. برای $0 < c \le 1$، از قضیه‌ی مقدار میانگین نتیجه می‌شود که $a \in (0, c)$ چنان موجود است که

$$f'(a) = \cos a = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{\sin c}{c}.$$

در نتیجه $\sin c = c\cos a$. از آنجا که $0 < a < 1$، پس $0 < \cos a < 1$ که نتیجه می‌دهد $\sin c < c$ و در این حالت هیچ نقطه ثابتی وجود ندارد. به‌طور مشابه، می‌توان نشان داد برای حالتی که $-1 \le c < 0$ نیز نقطه ثابتی برای $f(x) = \sin x$ نداریم. پس همانطور که ادعا کردیم $c = 0$ تنها نقطه ثابت $f$ است.

برای اینکه نشان دهیم $c = 0$ یک نقطه ثابت جاذب سراسری از نگاشت $f(x)$ است، فرض می‌کنیم $x \in \mathbb{R}$. حتی می‌توانیم فرض کنیم $-1 \leq x \leq 1$، زیرا با توجه به برد تابع $f$ پس از اولین تکرار نقاط در این فاصله قرار می‌گیرند.

ابتدا فرض کنید $0 < x \leq 1$. توجه کنید که روی این بازه، $0 < f'(x) < 1$. بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین $a \in (0, x)$ چنان موجود است که

$$f'(a) = \cos a = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

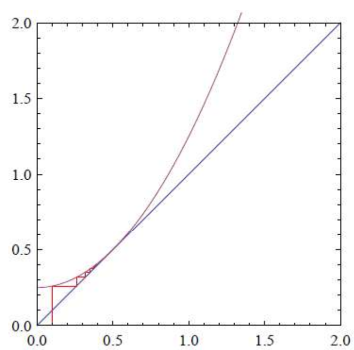
در نتیجه $0 < f(x) = (cos a)x < x$. بنابر صعودی بودن $f$ روی $(0, 1)$ داریم

$$0 < f^n(x) < f^{n-1}(x) < \cdots < f(x) < x.$$

بنابراین دنباله‌ی $x_n = f^n(x)$ نزولی و از پایین به صفر کراندار و در نتیجه همگراست. بنا بر گزاره‌ی ۱، حد این دنباله از تکرارها باید یک نقطه ثابت باشد. از آنجا که $c = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت است، پس $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = 0$. برهان مشابه می‌تواند در حالتی که $-1 \leq x < 0$ مورد استفاده قرار گیرد. $\square$

---

**مثال.** ممکن است نقطه ثابت ناپایدار با پایداری یک طرفه باشد که در این حالت نیمه پایدار نامیده می‌شود. برای مثال، تابع $f(x) = x^2 + 1/4$ را که تنها یک نقطه‌ی ثابت غیرهذلولوی در $c = 1/2$ دارد، در نظر می‌گیریم. این نقطه ثابت از سمت چپ پایدار است، اما از سمت راست ناپایدار است.




شکل ۱۹.۱: اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{4}$، آنگاه برای $x_0 < \frac{1}{2}$ داریم $f^n(x_0) \to \frac{1}{2}$ و برای $x_0 > \frac{1}{2}$ داریم $f^n(x_0) \to \infty$.

---

پایداری و پایداری مجانبی در سمت راست و چپ یک نقطه ثابت را می‌توان به‌صورت واضح تعریف کرد. در قضیه‌ی بعدی معیارهایی برای بررسی پایداری نقطه ثابت غیرهذلولی $x = c$ که $f'(c) = 1$، ارائه می‌دهیم.

**قضیه.** گیریم $c$ یک نقطه ثابت غیرهذلولوی $f$ با $f'(c)=1$ باشد. اگر $f'(x)$، $f''(x)$ و $f'''(x)$ در $x=c$ پیوسته باشند، آنگاه

آ) اگر $f''(c)\neq 0$، آنگاه $c$ نیم‌پایدار است. به‌ویژه

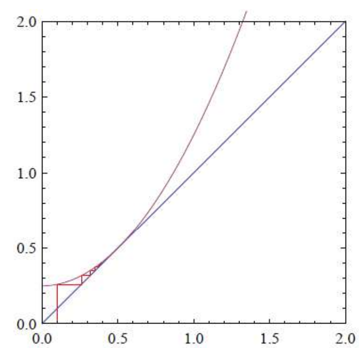
۱) اگر $f''(c)>0$، آنگاه $c$ از چپ مجانبی پایدار است.

۲) اگر $f''(c)<0$، آنگاه $c$ از راست مجانبی پایدار است.

ب) اگر $f''(c)=0$ و $f'''(c)>0$، آنگاه $c$ ناپایدار است.

پ) اگر $f''(c)=0$ و $f'''(c)<0$، آنگاه $c$ مجانبی پایدار است.

اثبات. آ) توجه کنید که چون $f'(c)=1$، پس $f(x)$ در $x=c$ بر خط $y=x$ مماس است. برای اثبات ۱) فرض کنیم که $f''(c)>0$. در این صورت $f(x)$ در $x=c$ تقعر رو به بالا دارد و نمودار آن باید به‌صورت ۲۰.۱ باشد. نمودار نشان‌دهنده‌ی پایداری در سمت




شکل ۲۰.۱: تابع $f$ در نزدیکی $x=c$ محدب است.

چپ نقطه ثابت و ناپایداری در سمت راست آن است. این چیزی است که می‌خواهیم ثابت کنیم. از آنجا که مشتقات $f$ در $c$ پیوسته هستند و $f''(c)>0$، عدد $\delta>0$ موجود است که برای هر $x\in(c-\delta,c+\delta)$ داریم $f''(x)>0$. از این رو، تابع $f'(x)$ باید روی این بازه صعودی باشد. به‌ویژه، از آنجا که $f'(c)=1$ پس برای هر $x\in(c-\delta,c)$ داریم $f'(x)<1$ و برای هر $x\in(c,c+\delta)$ داریم $f'(x)>1$. همچنین با توجه به پیوستگی $f'(x)$ می‌توانیم فرض کنیم که روی بازه‌ی $(c-\delta,c+\delta)$ داریم $f'(x)>0$. با به‌کارگیری قضیه‌ی مقدار میانگین برای تابع $f(x)$ روی بازه‌ی $[x,c]\subset(c-\delta,c]$، نتیجه می‌شود $q\in(x,c)$ چنان موجود است که

$$f'(q)=\frac{f(c)-f(x)}{c-x}.$$

حال چون $0<f'(q)<1$، $f(c)=c$ و $c>x$، پس $1>\frac{f(c)-f(x)}{c-x}>0$ که نتیجه می‌دهد $x<f(x)<c$. با توجه به صعودی بودن $f$ خواهیم داشت $f(x)<f^2(x)<c$ و در حالت کلی خواهیم دید که دنباله‌ی $f^n(x)$ صعودی و از بالا به $c$ کراندار است. بنابراین باید به نقطه ثابت نگاشت همگرا باشد. اما هیچ نقطه ثابت دیگری جز $c$ در این بازه نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا اگر نقطه‌ی

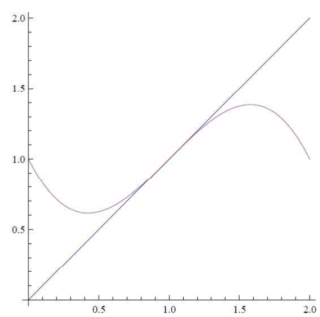
دیگری وجود داشت، مثلاً $d \neq c$، آنگاه بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین عدد $q_1 \in (d,c)$ موجود است که $f'(q_1) = \frac{f(c)-f(d)}{c-d} = 1$ که تناقض است. پس $f^n(x)$ به $c$ همگراست و بنابراین $c$ از چپ مجانبی پایدار است.

از طرف دیگر اگر $[c,x] \subset [c,c+\delta)$، آنگاه از قضیه‌ی مقدار میانگین نتیجه می‌شود $q \in (c,x)$ چنان موجود است که $f'(q) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 1$ و چون $x - c > 0$، پس $f(x) > x > c$. با توجه به صعودی بودن $f$، $f^2(x) > f(x) > c$ و در حالت کلی دنباله‌ی $f^n(x)$ صعودی است. پس نقطه‌ی $x$ تحت تکرار از $c$ دور می‌شود. بنابراین نقطه ثابت از سمت راست ناپایدار است.

اگر $f''(c) < 0$، آنگاه نمودار $f(x)$ در $x = c$ تقعر رو به پایین دارد و با استدلالی مشابه حالت ۱)می‌توان حالت ۲) را نیز اثبات کرد.

ب) اثبات قسمت ب)، مشابه آ) است.

پ) فرض می‌کنیم $f'''(c) < 0$، $f''(c) = 0$ و $f'(c) = 1$. در این حالت مانند نمودار ۲۱.۱، یک نقطه‌ی عطف در $x = c$ داریم که به وضوح نشان می‌دهد که $c$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار است.




شکل ۲۱.۱: تابع $f$ در $x = c$ یک نقطه‌ی عطف دارد.

برای اثبات توجه کنید که بنابر آزمون مشتق دوم، $f'(x)$ یک ماکسیمم موضعی در $x = c$ دارد (تابع پیوسته‌ی $f'(x)$ تقعر رو به پایین دارد). بنابراین $\delta > 0$ موجود است که برای هر $x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$، $f'(x) < 1$.

حال با استدلالی مشابه برهان آ)، فرض می‌کنیم $x \in (c, c+\delta)$. در این صورت $a \in (c,x)$ وجود دارد که $1 > f'(a) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. چون $x - c > 0$ و $f(c) = c$ پس $f(x) < x$. با تکرار این روند خواهیم دید دنباله‌ی $f^n(x)$ نزولی و از پایین کراندارست. به طور مشابه، اگر $x \in (c-\delta, c)$ به $x < f(x)$، برای به دست آوردن یک دنباله صعودی و از بالا کراندار می‌رسیم. بنابراین دنباله‌ی تکرارها از هر دو طرف به نقطه ثابت نگاشت همگرا هستند. پس $c$ مجانبی پایدار است. □

---

**مثال.** به تابع $f(x) = \sin x$ برمی‌گردیم. واضح است که $f'(0) = 1$، $f''(0) = 0$ و $f'''(0) = -1$. بنابراین شرایط حالت پ) از قضیه‌ی ۶.۱ برقرار است و $x = 0$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار از نگاشت است.

---

**مثال.** گیریم $f(x) = -x^3 + x$. در این صورت $c = 0$ تنها نقطه ثابت $f$ است. توجه کنید که $f'(0) = 1$، $f''(0) = 0$ و $f'''(0) < 0$. بنابراین طبق حالت پ) از قضیه‌ی ۶.۱، $c = 0$ مجانبی پایدار است.

**مثال.** اگر $f(x) = \tan x$، آنگاه $f'(x) = \sec^2 x$ و $f'(0) = 1$. به‌علاوه $f''(x) = 2\sec^2 x \tan x$ و $f''(0) = 0$. همچنین $f'''(x) = 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x$ و $f'''(0) = 2 > 0$. شرایط حالت ب) از قضیه‌ی ۶.۱ برقرار است و بنابراین $x = 0$ یک نقطه‌ی ثابت ناپایدار از نگاشت است.

**مثال.** برای تابع $f(x) = x^2 + 1/4$ داریم $f(1/2) = 1/2$، $f'(1/2) = 1$ و $f''(1/2) = 2 > 0$. پس بنا به حالت آ) از قضیه‌ی ۶.۱، $x = 1/2$ از چپ پایدار و از راست ناپایدار است (نیمه پایدار).

### ۱.۶.۱ مشتق شوارتزی

در این بخش می‌خواهیم ببینیم در مواجه با حالتی که برای نقطه ثابت $c$ داریم $f'(c) = -1$، چگونه باید رفتار کنیم؟ در این حالت مفهوم مشتق شوارتزی ایفای نقش می‌کند.

**تعریف.** مشتق شوارتزی $f(x)$ را که با $Sf(x)$ نشان می‌دهیم، درصورت وجود $f'''(x)$ و برقراری شرط $f'(x) \neq 0$ به‌صورت

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2,$$

تعریف می‌شود. اگر $f'(x) = -1$، آنگاه

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}\left(f''(x)\right)^2.$$

قضیه‌ی بعدی محکی برای بررسی پایداری نقطه ثابت غیرهذلولوی $x = c$ در حالتی که $f'(c) = -1$، ارائه می‌دهد. ایده‌ی این قضیه اعمال شرایط قضیه‌ی ۶.۱ بر تابع $g(x) = f^2(x)$ است. از آنجا که $Sf(x)$ به‌طور طبیعی از مشتق سوم $g$ حاصل می‌شود، به نتیجه‌ی موردنظر دست پیدا می‌کنیم. مشتق شوارتزی اولین بار توسط جوزف لاگرانژ[۹] در سال ۱۷۸۱ میلادی کشف شد، اما به افتخار هرمان شوارتز[۱۰] توسط کِیْلی[۱۱] نامگذاری شد.

**قضیه.** فرض کنیم $c$ یک نقطه ثابت از نگاشت $f(x)$ با $f'(c) = -1$ باشد. اگر $f'(x)$، $f''(x)$ و $f'''(x)$ در $x = c$ پیوسته باشند، آنگاه

آ) اگر $Sf(c) < 0$، آنگاه $x = c$ یک نقطه ثابت مجانبی پایدار است.

ب) اگر $Sf(c) > 0$، آنگاه $x = c$ یک نقطه ثابت ناپایدار است.

[9] Joseph Lagrange
[10] Hermann Schwartz
[11] Cayley

اثبات. آ) قرار می‌دهیم $g(x) = f^2(x)$. در این صورت $g(c) = c$. واضح است که اگر $c$ برای $g$ مجانبی پایدار باشد، آنگاه برای $f$ نیز مجانبی پایدار است. توجه کنید که

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(f(f(x)) = f'(f(x)).f'(x).$$

در نتیجه $g'(c) = f'(c).f'(c) = (-1)(-1) = 1$. بنابراین اجازه داریم قضیه‌ی ۶.۱ را برای تابع $g(x)$ به کار ببریم. از طرفی

$$g''(x) = f''(f(x)).(f'(x))^2 + f'(f(x)).f''(x).$$

از آنجا که $f'(c) = -1$، پس $g''(c) = f''(c).(f'(c))^2 + f'(c).f''(c) = 0$. همچنین

$$g'''(x) = f'''(f(x)).(f'(x))^3 + 2f''(f(x)).f'(x).f''(x) + f''(f(x)).f'(x).f''(x) + f'(f(x)).f'''(x).$$

با توجه به اینکه $f'(c) = -1$، داریم

$$\begin{aligned} g'''(c) &= f'''(c).(-1)^3 + 2f''(c).(-1).f''(c) + f''(c).(-1).f''(c) + (-1).f'''(c) \\ &= -2f'''(c) - 3(f''(c))^2 = 2Sf(c) < 0 \end{aligned}$$

و نتیجه از حالت پ) قضیه‌ی ۶.۱ به‌دست می‌آید.

ب) اثبات این حالت با پیروی از برهان قسمت ب) از قضیه‌ی ۶.۱ به‌دست می‌آید. □

تذکر. اثبات بالا نشان می‌دهد که چگونه مشتق شوارتزی به‌عنوان مشتق $g = fof = f^2$ به‌دست می‌آید. به‌علاوه در حالتی که $f'(c) = -1$ داریم $g''(c) = 0$ و $Sf(c) = \frac{1}{2}g'''(c)$.

---

**مثال.** برای نگاشت لجستیک $L_\mu(x) = \mu\, x\,(1-x)$ داریم

$$L'_\mu(x) = \mu - 2\mu\, x, \qquad L''_\mu(x) = -2\mu, \qquad L'''_\mu(x) = 0.$$

برای $\mu = 1$، $x = 0$ تنها نقطه ثابت نگاشت است که بنا به حالت آ) قسمت ۲) از قضیه‌ی ۶.۱، مجانبی پایدار از راست است (نیمه‌پایدار). با این حال، این نقطه را به‌عنوان یک نقطه ثابت پایدار $L_\mu : [0,1] \to [0,1]$ در نظر می‌گیریم. چون نقاط سمت چپ آن در دامنه‌ی $L_\mu$ نیستند.

برای $\mu = 3$، $c = 2/3$ نقطه ثابت و از آنجا که $L'_3(2/3) = -1$ نقطه ثابت غیرهذلولوی نگاشت است. از طرفی

$$Sf(2/3) = 0 - \frac{3}{2}(-6)^2 < 0.$$

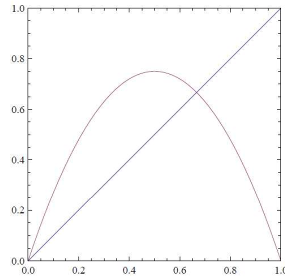
یعنی در این نقطه مشتق شوارتزی منفی داریم. پس بنا بر حالت آ) از قضیه‌ی ۱.۶.۱، $x = 2/3$ مجانبی پایدار است.

**مثال.** نگاشت $f(x) = x^2 + 3x$ را روی بازه‌ی $[-3,3]$ در نظر بگیرید. نقاط تعادل آن را یافته و پایداری آن‌ها را تعیین کنید.

حل. نقاط ثابت $f$ با حل معادله‌ی $x^2 + 3x = x$ به‌دست می‌آیند. بنابراین دو نقطه ثابت $c_1 = 0$ و $c_2 = -2$ وجود دارند. برای $c_1$، $f'(0) = 3$ که طبق قضیه‌ی ۵.۱، $c_1$ ناپایدار است. برای $c_2$ داریم $f'(-2) = -1$، که به قضیه‌ی ۱.۶.۱، نیازمند است. ملاحظه می‌کنیم که

$$Sf(-2) = -f'''(-2) - \frac{3}{2}[f''(-2)]^2 = -6 < 0.$$

بنابراین، $c_2$ مجانبی پایدار است.




شکل ۲۲.۱: برای $\mu = 3$ داریم $L_3'(\frac{2}{3}) = -1$ و $c = \frac{2}{3}$ نقطه ثابت مجانبی پایدار $L_3$ است.