

۱- کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هر یک از مجموعه‌های زیر را بدست آورید.

$$A = \left\{ \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \mid 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$E = \{2^{-x} + 3^{-y} + 5^{-z} : x, y, z \in \mathbb{N}\}$$

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2}} - \frac{(-1)^m}{(2m-1)\sqrt{2}} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

۲- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه غیر تهی و کران‌دار از  $\mathbb{R}$  باشند قرار می‌دهیم

$$A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$$

ثابت کنید:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad (\text{الف})$$

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B \quad (\text{ب})$$

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\} \quad (\text{ج})$$

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} \quad (\text{د})$$

(و) در مورد  $\sup(A \cap B)$  و  $\inf(A \cap B)$  چه می‌توان گفت؟

۳- فرض کنید  $(S, \leq)$  یک مجموعه مرتب که دارای خاصیت کوچکترین کران بالایی است اگر  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه غیر

تهی و کران‌دار از  $S$  باشند به طوری که  $A \subseteq B$  ثابت کنید

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$$

۴- فرض کنید توابع  $f, g$  با ضابطه‌های  $f(x) = x$  و  $g(x) = 1 - x$  بر مجموعه‌ی  $A = [0, 1]$  تعریف شده باشند در اینصورت  $\sup_A(f + g)$  و  $\inf_A(f + g)$  را بدست آورید.

۵- فرض کنید  $A$  زیر مجموعه غیر تهی و کران‌دار از اعداد حقیقی باشد  $(-A)$  را به صورت  $-A = \{-x \mid x \in A\}$  تعریف می‌کنیم ثابت کنید:

$$\sup(-A) = -\inf A \quad (\text{الف})$$

$$\inf(-A) = -\sup A \quad (\text{ب})$$

۵- اگر  $A = \left\{ \frac{1-\delta n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$  مقدار  $\sup A + \sup(-A)$  را بدست آورید.

۶- فرض کنید  $A$  و  $B$  دو زیر مجموعه غیر تهی و کران دار از اعداد حقیقی مثبت باشند قرار می دهیم:

$$C = AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

ثابت کنید

$$\sup C = \sup A \sup B \quad (\text{الف})$$

$$\inf C = \inf A \inf B \quad (\text{ب})$$