با سمه تعالی

تحلیل سوالات تکمیلی ارشد ۹۶ رشته برق

+ همراه پاسخ تشریحی (از بروس دفترچه F)

مهدی نعمتی

تحلیل کلی سوالات:

سطح کلی آزمون متوسط بود. حداقل ۸ سوال ریاضی با جلد اول قابل حل بود، اگرچه می‌توان گفت ۱۰ سوال با ایده‌ها و مباحث بیان شده در جلد اول (در صورت تسلط) قابل پاسخ دادن بود.

۲ سوال (۱۱۱ و ۱۱۳) مشابه تست‌های تألیفی کتاب. و مثال‌های متن کتاب بود (با تغییرات جزئی).

اکثر سوالات نیز صرفاً با حل دقیق و کامل قابل پاسخ دادن بود نه با روش‌های سردرگمی! (همانطور که بارها تأکید کرده بودم.)

در ادامه، حل تشریحی سوالات را ملاحظه کنید.

۱۰۲) گزینه ۱ صحیح است. (بسیار ساده)

شبیه این سؤال به وفور در فصل ۲ وجود دارد

دوستانی که به خطی بودن سیستم شک دارند، کافی است

که مثال ۱۵ صفحه ۹۲ قسمت الف، ضابطه دوم سیستم‌ها

ملاحظه نمایند!

---

۱۰۴) گزینه ۴ صحیح است. (ساده) (شبیه مثال ۱۵ صفحه ۴۲۴)

البته این سؤال اشکال دارد و ناحیه همگرایی باید به صورت

$|z| > \frac{4}{3}$ باشد! به هر حال چون درجه صورت و مخرج برابر است

بهترین روش برای محاسبه عکس Z در اینجا، روش تقسیم است!

$$
\begin{array}{r|l}
z^8 + 2z^4 & z^4 - 2 \\ \cline{2-2}
-(z^8 - 2z^4) & z^4 + 4 + 8z^{-4} \\ \cline{1-1}
4z^4 & \\
-(4z^4 - 8) & \\ \cline{1-1}
8 &
\end{array}
$$

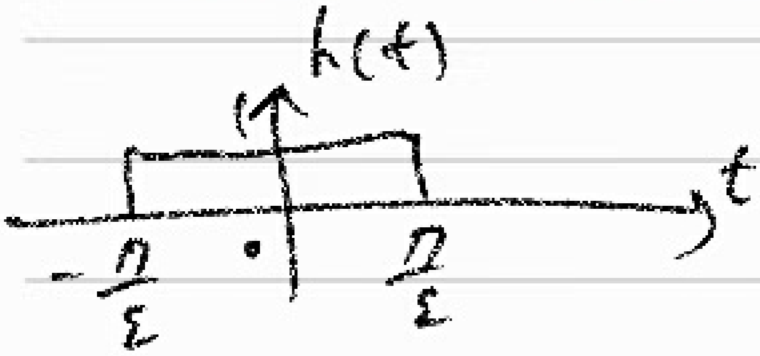
$8 \rightarrow x[4]$

---

۱۰۵) گزینه ۴ صحیح است. (متوسط)

مشابه ([illegible]) تست ۲۴ ص ۲۳۷

$x(t) = \cos 2t \quad , \quad 0 < t < \frac{\pi}{4}$



برای محاسبه خروجی در لحظه $t = \frac{\pi}{4}$، کافیست $h(t)$ را قرینه کرده و به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست انتقال داده و در $x(t)$ ضرب نموده و سطح را می‌یابیم:

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = \frac{1}{2}$$

۱۰۶) گزینه ۲ صحیح است. (متوسط)

این سؤال تنها سؤالی بود که این‌ها و مبحث آن به طور خاص مربوط به جلد دوم کتاب بود (فصل ۱۲)

این حل سریع، تستی و در عین حال عمومی این نوع سؤالات که در فصل ۱۲ ارائه شده است که البته در حال حاضر به طور فراگیر توسط تقریباً همه عزیزان استفاده می‌شود. نسبت به این تست سایر تفاسیر در صفحات ۲۶۱ و ۲۶۲ جلد دوم کتاب ملاحظه کنید.

از آنجا که دوره تناوب‌های x_1 و x_2 مستقل و ثابتند، یک دوره تناوب مشترک برای آنها در نظر می‌گیریم که برابر ک.م.م دوره تناوب‌ها یعنی $T = 4T_1$ می‌باشد. حال ضرایب فوریه x_1 و x_2 را بر اساس دوره تناوب $T = 4T_1$ می‌یابیم:

$T = 2T_1 , \quad x_1(t) \xleftrightarrow{FS} a_{(2)}[k]$

$T = 2T_1 = T_2 , \quad x_2(t) \xleftrightarrow{FS} b[k]$

$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$

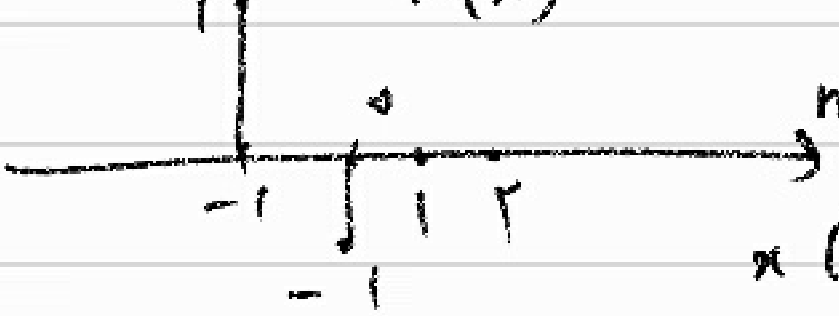
$\downarrow$

$$c[k] = a_{(2)}[k] + b[k] = \begin{cases} a[\frac{k}{2}] + b[k] , & k \text{ مضرب ۲} \\ b[k] & o.w. \end{cases}$$

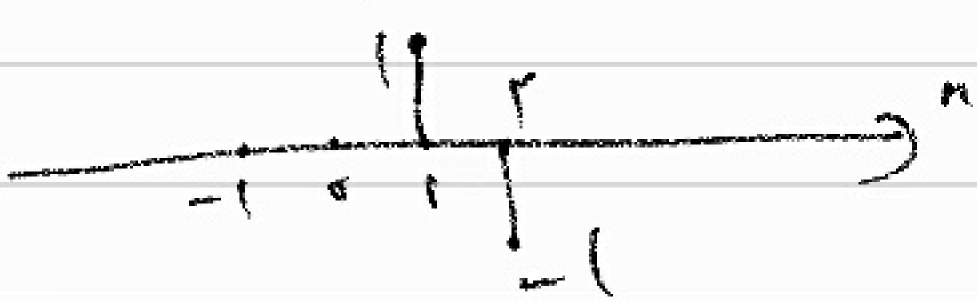
---

۱۰۷) گزینه ۴ صحیح است. (متوسط حل بکنید)

این را هم سؤال مشابه این تست ۴ صفحه ۱۲۹ جواب بدید.



$x(n-2)$

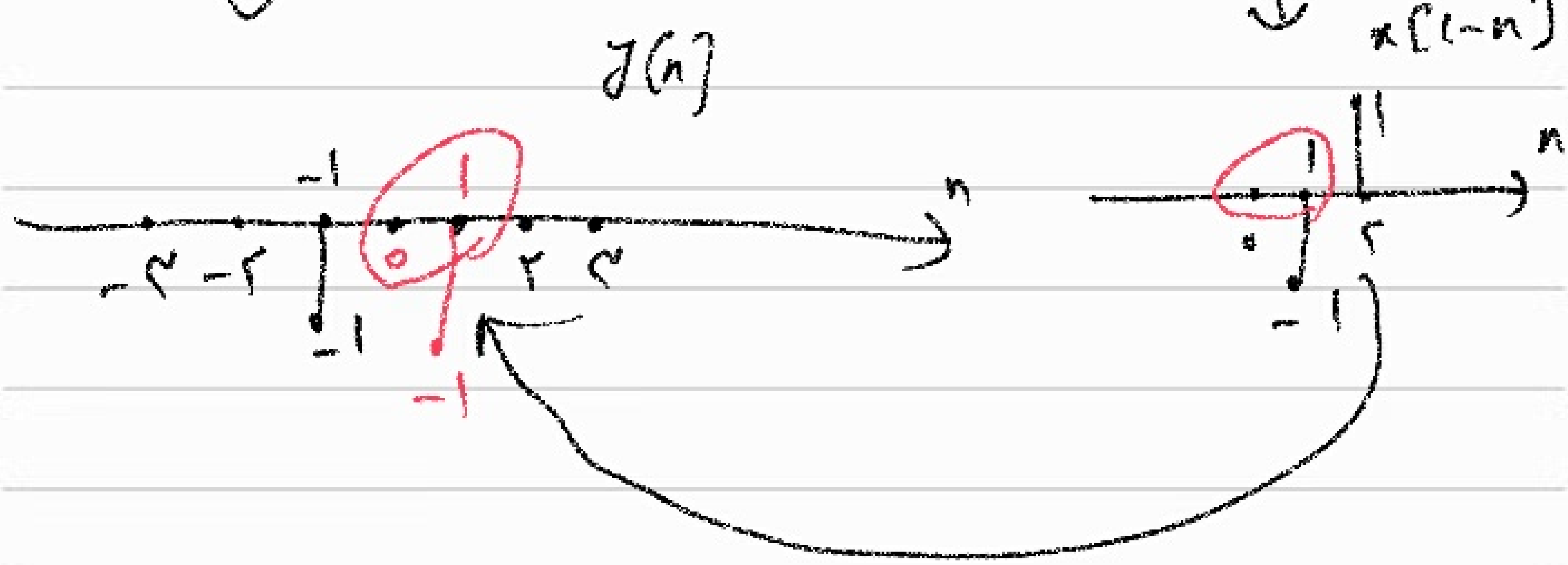


در هر nهایی که $x[n]>x[n-2]$ ، خروجی برابر $-x[n]$ می‌شود.

$n>2$ و $n<-1$

۱ ۲ ۳ ۴ ۰

در بقیه نقاط خروجی از روی شکل $x[1-n]$ قابل ترسیم است.



۱۰۸) گزینه ۲ صحیح است. (متوسط)

مشابه تست ۳۰ صفحه ۳۲۴ و مثال ۲۶ صفحه ۳۰۹ فصل B

(الف به طور معکوس)

$$x'(t) \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

$$\Longrightarrow \quad x'(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, X(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega$$

$$x'(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega\, X(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} j\omega\, j\sqrt{\pi}\,\mathrm{sgn}(\omega)\, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} -\sqrt{\pi}\,|\omega|\, d\omega = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{1} \omega\, d\omega = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

---

۱۰۹) گزینه ۳ صحیح است. (مسمت)

برای حل مناسب است این سؤال بهتر است از اطلاعات جلسه دوم فصل ۱۱۴ استفاده شود
(مبحث تبدیل z سیستم‌های غیرمستقیم)

از آنجا که سیستم، یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت است، شرط سکون اولیه ایجاب می‌کند که سیستم LTI و علی باشد
(به این موضوع در فصل ۹ جزوه درسی اشاره شده و در فصل ۱۱ کتاب نیز عنوان شده ۱۰ است).

$$H(z)=\frac{2+3z^{-1}}{1+z^{-2}}\ ,\quad X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{2+3z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}=\frac{\frac{5}{2}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{5}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}}{1+z^{-2}}$$

با کمی جبر

$$=\frac{\frac{5}{2}}{1-z^{-1}}+\frac{\overbrace{-\frac{5}{2}z^{-3}+\frac{1}{2}z^{-2}+\frac{5}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}}^{F(z)}}{1-z^{-4}}$$

یک سیگنال نیمه متناوب با دوره تناوب ۴ (نکته ۱۱۹)

$$\Rightarrow y(n)=\frac{5}{2}u(n)+\sum_{k=0}^{+\infty}f(n-4k)$$

$$y(53)=\frac{5}{2}+f(1)=\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=5$$

$(53 \bmod 4)=1$ ← زیرا با ۴ متناوب است.

اگرچه این سؤال در حوزه z نیز قابل حل است، اما روش منطقی و روتین آن، همین روش است.

۱۱۵) گزینه ۲ صحیح است. (سخت)

نکته: این سوال از درسنامه فصل ۹ ، و فرمول وجود دارد

دوره تناوب ورودی $N=4$ می‌باشد که این موضوع هم با بررسی

$x(n)$ و هم با استفاده از نکته $\underline{۸۷}$ درسنامه قابل تشخیص است.

با توجه به نکته ۷۵ داریم: $N=4$ و $\omega_0=\frac{\pi}{2}$

$$y(n)=\sum_{k=-2}^{1} a_k H\left(k\frac{\pi}{2}\right) e^{jk\frac{\pi}{2}n}$$

$$H\left(k\frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \begin{cases} H(0)=0 \quad , \quad k=0 \\ H\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=2 \quad , \quad k=\pm 1 \\ H(-\pi)=4 \quad , \quad k=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(n)=4a_{-2}e^{-j\pi n}+2a_{-1}e^{-j\frac{\pi}{2}n}+2a_1 e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

برای محاسبه a_k با توجه به نکته ۴۲ داریم:

$x(n) \longrightarrow X(\omega) = 1 - e^{-j2\omega}$

$a_k = \frac{1}{4}\left(1 - e^{-jk\pi}\right)$

$\Rightarrow a_{-2} = 0 \, , \, a_{-1} = \frac{1}{2} \, , \, a_1 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y(n) = 2\cos\frac{\pi}{2}n$

---

۱۱۱) گزینه ۲ صحیح است. (متوسط)

(این تست عیناً مشابه سؤال ۲۳ صفحه ۲۰۳ و مثال صفحه ۱۲۱ جزوه (بخش سوم)
(با یک تغییر مقدار جزئی و یک ضریب)

$$I = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}n}{n^2} = \pi^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\pi n} \right|^2$$

$$= \pi^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \right|^2 d\omega = \frac{\pi^2}{2}$$

صورت سوال

۱۱۲) گزینه ۱ صحیح است. (متوسط)

$$f(t) * f(t) = 2 f\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F(\omega)\cdot F(\omega) = 4 F(2\omega) \qquad (1)$$

تبدیل فوریه سیگنال $f(t) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{5-jt}$ با استفاده از

خاصیت دوگانی برابر $F(\omega) = 4e^{-5\omega}u(\omega)$ می‌باشد که در رابطه

(۱) صدق می‌کند.

این سؤال، عیناً تبدیل فوریه $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{5-jt}$ بود که در جلد رهپویان

۲ صفحه ۱۴۰ توضیح داده شده است.

در جزوه ۶ رهپویان درجلسه اول سؤال ۲۴ نیز می‌باشد.

۱۱۴) گزینه ۴ صحیح است. (متوسط)

این تست عیناً تست تالیفی ۴۱ صفحه ۲۲۲ جزوه می‌باشد، که $T=1$ فرض شده است.
[illegible] مشابه اون نیز در تست ۳ صفحه ۱۵۹ (سراسری ۷۸) جلسه دوم نیز آمده بود

گزینه ۴ صحیح است.

۴۱. سیگنال زمان‌پیوسته $z(t)$ با تبدیل فوریه زمان‌پیوسته $Z(\omega)$ و سیگنال زمان‌گسسته $f[n]$ با تبدیل فوریه زمان‌گسسته $F(\omega)$ مفروض است. اگر سیگنال زمان‌پیوسته $x(t)$ را به‌صورت $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n]z(t-nT)$ تعریف کنیم، تبدیل فوریه آن برابر کدام گزینه است؟

۱) $X(\omega)=Z(\omega)\cdot F(\frac{\omega}{T})$

۲) $X(\omega)=Z(T\omega)\cdot F(\omega)$

۳) $X(\omega)=Z(\omega)\cdot F(T\omega)$

۴) $X(\omega)=Z(\frac{\omega}{T})\cdot F(\omega)$

$$y(t)=\sum_n a(n)x(t-n)=x(t)*\sum_n a(n)\delta(t-n)$$

$$Y(\omega)=X(\omega)\cdot\underbrace{\sum_n a(n)e^{-j\omega n}}_{A(\omega)}$$

۱۱۴) گزینه ۱ صحیح است. (متوسط)

مشابه تست ۱۳ صفحه ۶۶۲ (آزمون ۸۷) کتاب و صفحه ۲۰۴ جزوه

$$H(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{\pi}\right) e^{-j\omega} \Longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega}$$

$$X(\omega) = 0 \,, \quad |\omega| > \pi$$

$$\to y(t) = x(t-1)$$