

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضیات

و کاربردهای آن

فصل اول: مجموعه ها (۶۰ اسلاید)

فصل سوم: توابع (۸۹ اسلاید)

فصل چهارم: مشتق (۸۹ اسلاید)

فصل پنجم: کاربردهای مشتق (۳۱ اسلاید)

فصل اول

مجموعه ها

اهداف کلی

هدف کلی از ارائه ی این فصل آشنایی با مفاهیم اولیه ی نظریه ی مجموعه ها است. سپس به بیان اصول دوگانی و استقراء ریاضی می پردازیم و مقدماتی از آنالیز ترکیبی را ارائه خواهیم داد.

اهداف رفتاری

در انتهای این فصل از دانشجو انتظار می‌رود به اهداف زیر نائل گردد:

(۱) تشخیص دهد چه دسته‌ای از اشیاء تشکیل یک مجموعه می‌دهند.

(۲) بتواند اشتراک، اجتماع و تفاضل دو مجموعه را بدست آورد.

(۳) مجموعه‌های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، اصم و حقیقی را بشناسد.

(۴) بتواند حاصل ضرب دو مجموعه را محاسبه کند.

(۵) اصل استقراء ریاضی را بداند و بتواند آن را در حل مسائل به کار ببرد.

(۶) دستور دو جمله ای را بداند.

(۷) بتواند اصول جمع و ضرب را به کار ببرد.

(۸) بتواند در حل مسائل ترکیبیاتی اصول ترتیب، ترتیب با حروف مکرر، تبدیل

(۹) جایگشت با حروف مکرر، ترکیب، ترکیب با تکرار حروف را به کار گیرد.

تعریف

مجموعه عبارت است از یک دسته از اشیاء یا اشخاص یا حروف یا اعداد ... که کاملاً مشخص شده باشند. هر یک از عوامل متشکله مجموعه را یک **عنصر** یا **عضو** مجموعه خوانند.

مثال :

۱. مجموعه اعداد ۱، ۳، ۷ و ۹.
۲. مجموعه افرادی که در ایران زندگی می کنند.



مجموعه ها را عموماً به دو طریق نشان می دهند. ممکن است یک مجموعه را با معرفی و نوشتن تمام عناصر آن مشخص کرد. مانند مجموعه

$$A = \{۱ \text{ و } ۳ \text{ و } ۵ \text{ و } ۷ \text{ و } ۹\}$$

ممکن است یک مجموعه را به وسیله تعریف خصوصیات اجزای آن مشخص کرد.

$$A = \{x \text{ عددی فرد و مثبت و کوچکتر از } ۱۱ \text{ است} : x\}$$

$$B = \{x \text{ عددی صحیح فرد است} : x\}$$



اگر عنصر a به مجموعه ای مانند A تعلق داشته باشد، یعنی A شامل a باشد،
در این صورت می نویسند $a \in A$ و می خوانند a متعلق است به A . عدم تعلق
 a را به مجموعه A به صورت $a \notin A$ نشان می دهند.

مجموعه های محدود و نامحدود

اگر تعداد عناصر یک مجموعه عدد محدود معینی باشد مجموعه را **محدود** خوانند، مانند مجموعه روزهای هفته، ولی اگر تعداد عناصر یک مجموعه نامحدود باشد مجموعه را نامحدود گویند.

تساوی دو مجموعه

دو مجموعه A , B را **مساوی** گویند اگر دقیقاً دارای عناصر همانندی باشند.

تساوی دو مجموعه را به صورت $A=B$ نشان می دهند. عدم تساوی دو

مجموعه را به $A \neq B$ نشان می دهند.

مجموعه تهی

مجموعه ای را که دارای عنصری نباشد مجموعه **تهی** یا **خالی** خوانند و آن را

با ϕ نشان می دهند. مثلاً مجموعه افرادی که قد آنها ۴ متر است.

زیر مجموعه

اگر هر عنصر متعلق به مجموعه A متعلق به مجموعه B نیز باشد، بنابه تعریف، A را **زیر مجموعه** B نامند و به صورت $A \subset B$ نشان می دهند و می خوانند A زیرمجموعه B است، در زبان ریاضی علامت $\forall$ به معنی «هر چه باشد» و علامت $\Rightarrow$ «نتیجه می دهد»، خوانده می شود. با توجه به معنای این علائم، مجموعه A را زیرمجموعه B می خوانند اگر :

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B$$



اگر A زیرمجموعه B , $A \neq B$ باشد، A را **زیرمجموعه محض** B خوانند.

در نتیجه دو مجموعه A , B برابرند، اگر و فقط اگر، هر یک زیرمجموعه دیگری باشند، یعنی :

$$(A \subset B, B \subset A) \Leftrightarrow A = B$$

مجموعه مجموعه ها

مجموعه ای، که عناصرش خود مجموعه باشند، را **مجموعه مجموعه ها** یا **کلاس** خوانند، مانند $A = \{\phi, \{1,2\}\}$ ، که یک کلاس است. بنا به تعریف، مجموعه ای که عناصرش تمامی زیرمجموعه های یک مجموعه باشند، **مجموعه توانی** آن مجموعه نامیده می شود. مثلاً اگر $A = \{۱ و ۲ و ۳\}$ باشد مجموعه توانی آن، که با $P(A)$ نمایش داده می شود، برابر است با :

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$$

مجموعه جهانی

اگر عناصر یک مجموعه را در نظر بگیریم می توان این مجموعه را زیرمجموعه یک مجموعه کلی تر دانست. این مجموعه کلی را **مجموعه جهانی** نامیده. با U نشان می دهیم. مثلاً اگر $A = \{۱ و ۲ و ۳\}$ باشد، A را می توان زیرمجموعه اعداد طبیعی دانست، لذا می توان U را مجموعه اعداد طبیعی فرض کرد.

عملیات بر روی مجموعه ها

بر روی مجموعه ها، عملیات اتحاد و اشتراک و تفاضل و حاصل ضرب را

تعریف می کنیم.

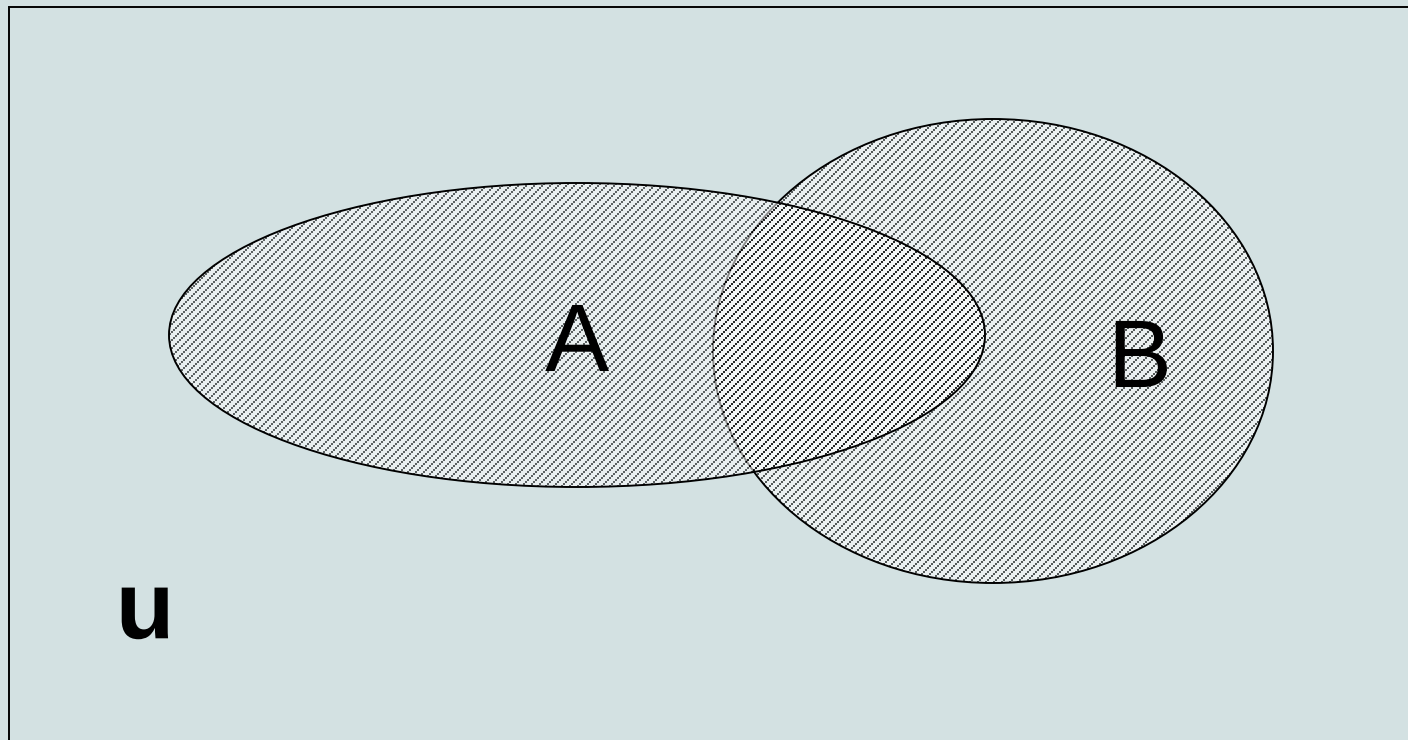
اتحاد یا اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A, B عبارت از مجموعه ای است که تمام عناصرش به مجموعه A یا مجموعه B و یا به هر دو مجموعه تعلق داشته باشند.

اتحاد دو مجموعه را می توان به صورت زیر نشان داد :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

اتحاد يا اجتماع دو مجموعه

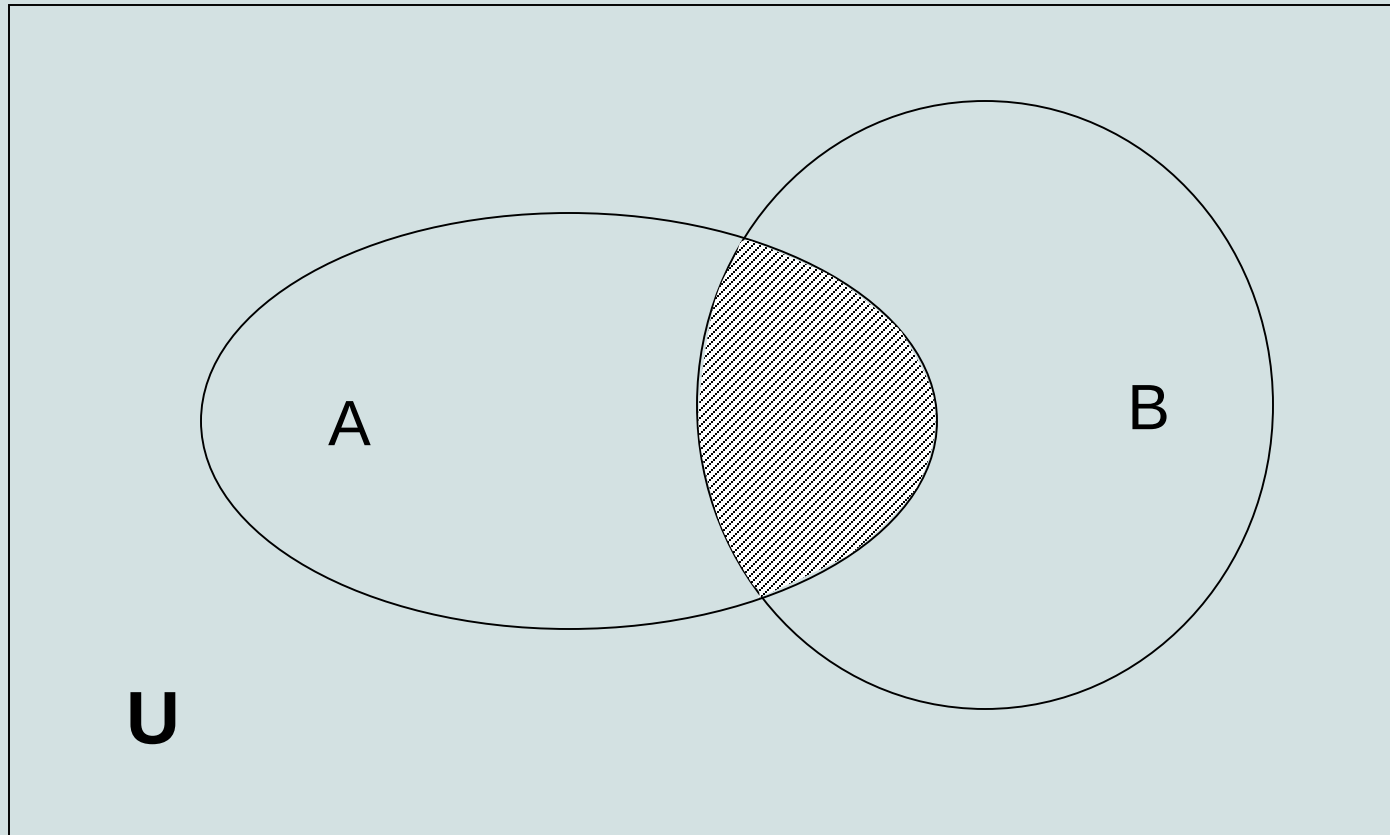


اشتراک

اشتراک دو مجموعه A , B مجموعه ای است که عناصرش به هر دو مجموعه
تعلق داشته باشند.

$$A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$$

اشتراک

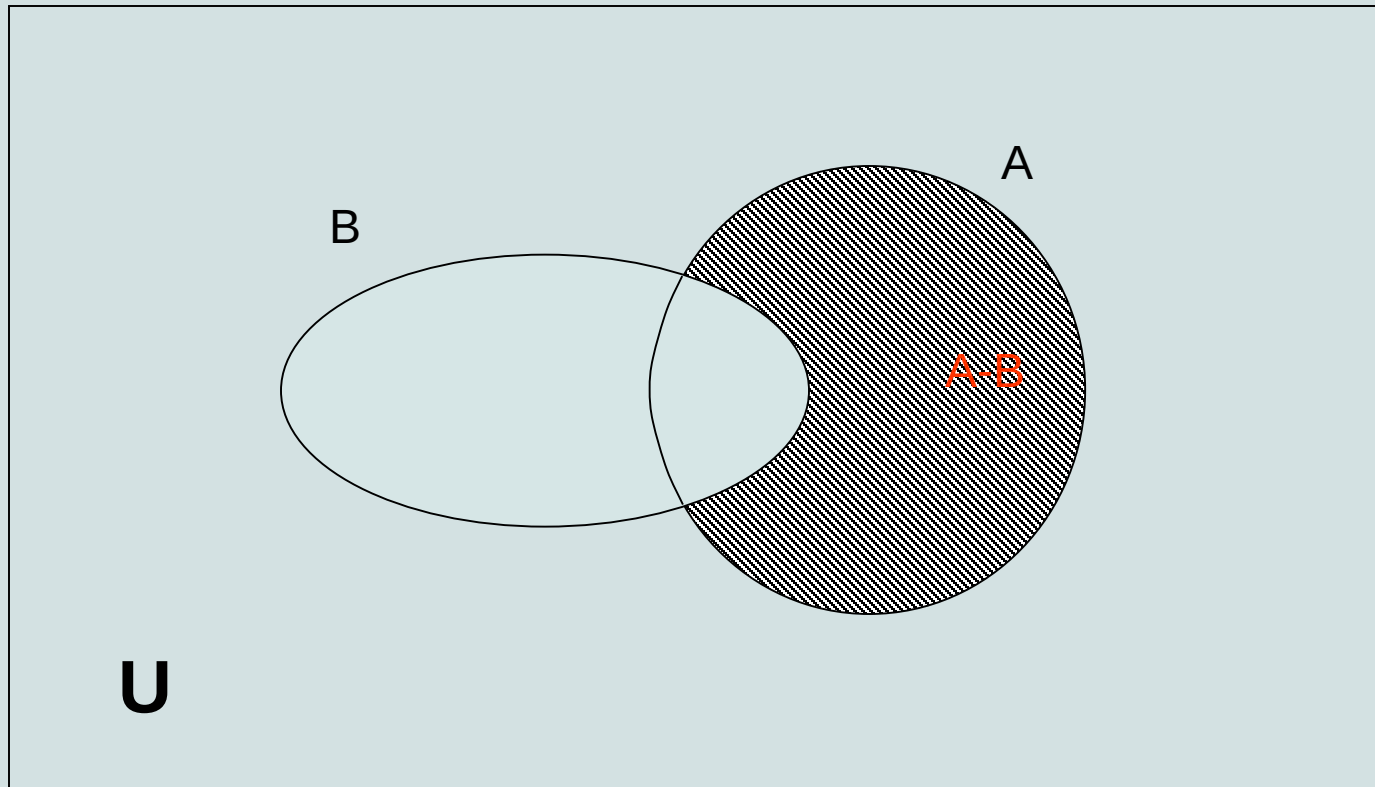


تفاضل

تفاضل دو مجموعه A ، B مجموعه ای است که عناصرش به A تعلق داشته، ولی به B تعلق نداشته باشند.

$$A - B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

تفاضل



مجموعه مکمل

بنا به تعریف، **مکمل مجموعه A**، مجموعه ای است از عناصر مجموعه جهانی U که به A تعلق نداشته باشند.

$$A' = \{x : x \notin A, x \in U\}$$

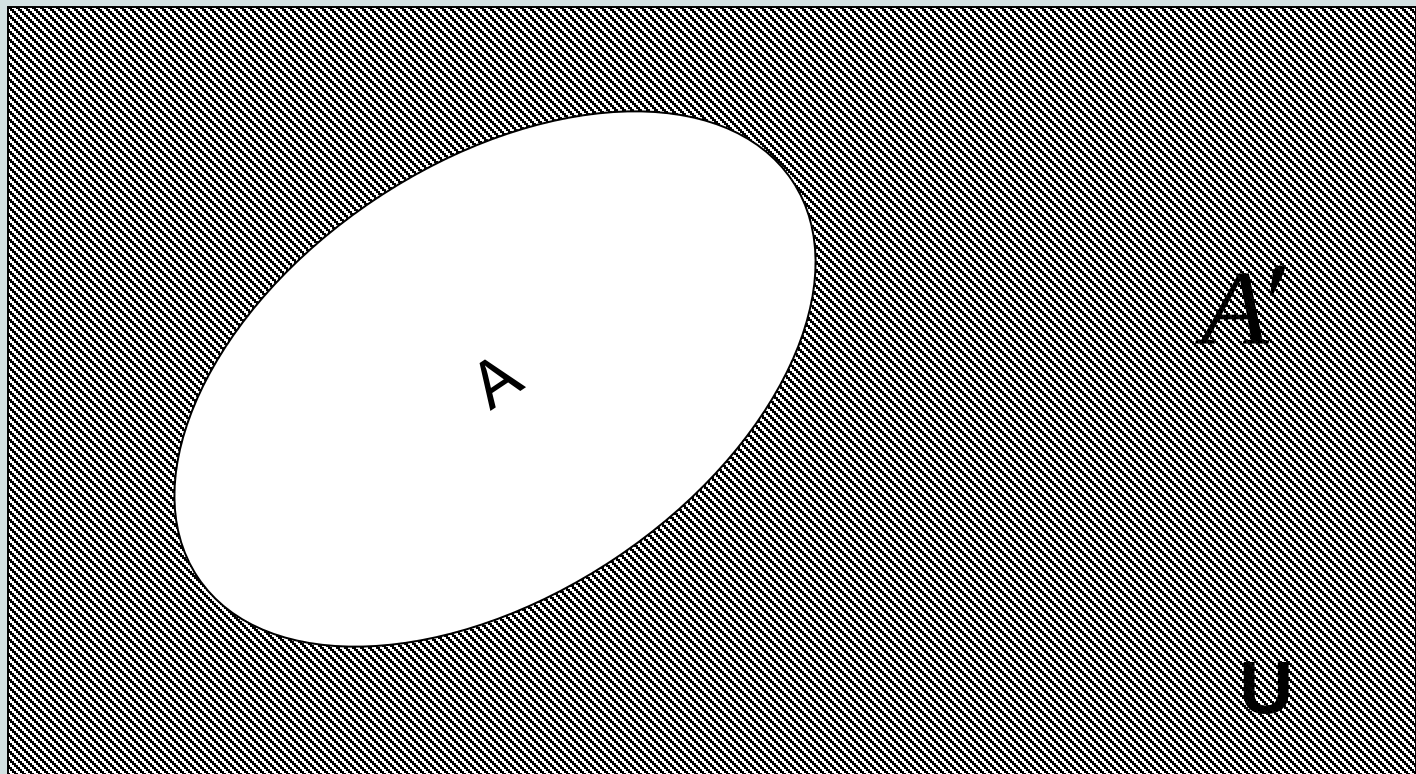
و یا به طور ساده .

$$A' = \{x : x \notin A\}$$

اگر توجه شود، داریم :

$$A' = U - A$$

مجموعه مکمل





اجتماع و اشتراک سه مجموعه دارای خاصیت شرکت پذیری است، یعنی :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

خاصیت توزیعی اشتراک نسبت به اتحاد

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

خاصیت توزیعی اشتراک نسبت به اتحاد

$$\left. \begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' \end{aligned} \right\}$$

همچنین قوانین دومورگان عبارتند از :

افراز مجموعه‌ها

تعریف : فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای ناتهی باشد، مجموعه P را که عناصر آن زیرمجموعه‌هایی از A می‌باشد یک افراز می‌خوانند، اگر

$$\forall i, j, \quad A_i, A_j \in P, \quad A_i, A_j \subset A, \quad A_i \cap A_j = \emptyset$$

و اگر تمامی عناصر P را در نظر بگیریم داریم :

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A$$

مثال

فرض کنید $A = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷\}$ باشد.

$$R_۱ = \{۴\} \text{ و } R_۲ = \{۱ و ۵\} \text{ و } R_۳ = \{۲ و ۶\} \text{ و } R_۴ = \{۳ و ۷\}$$

مجموعه $\{R_۱ و R_۲ و R_۳ و R_۴\}$ یک افراز A است.

اصل دوگانی

اگر در یک گزاره درباره نظریه مجموعه ها، علامت $\cap$ به $\cup$ و ϕ به $\cup$ تبدیل گردد، گزاره جدید نیز برقرار می باشد و به دوگان اولی موسوم است. مثلاً بنا به خاصیت شرکت پذیری اتحاد داریم:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

طبق اصل دوگانی، دوگان این رابطه عبارت است از :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

و بر همین اساس، اگر بخواهیم صحت یک گزاره در مورد نظریه مجموعه ها را ثابت کنیم می توانیم صحت دوگان آنها را ثابت نماییم.

حاصل ضرب مجموعه ها

جفت یا زوج مرتب:

بنا به تعریف، یک زوج مرتب مشتمل بر دو عنصر a , b بوده که به (a, b) نشان داده می شود. A را مولفه (یا مختص) اول و b را مولفه (یا مختص) دوم می نامند. دو زوج مرتب هنگامی و فقط هنگامی با هم برابرند که مختصات متناظر آنها نظیر به نظیر با یکدیگر برابر باشند.

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \quad , \quad b = d$$



بنا به تعریف n گانه مرتب مشتمل بر n عنصر a_1 و a_2 و ... a_n است و آن را به صورت $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ نشان می دهند.

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ و } i = 1, 2, \dots, n$$

حاصل ضرب مجموعه ها

دو مجموعه A , B مفروضند. بنا به تعریف، **حاصل ضرب** این دو مجموعه که آن را به $A \times B$ نشان داده و A در B می خوانیم برابر است با :

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

اصل استقرای ریاضی

اصل استقراء :

اگر n عدد صحیح و $P(n)$ خاصیتی مربوط به اعداد صحیح باشد :

(الف) فرض می کنیم $P(1)$ صحیح است.

(ب) فرض می کنیم $P(k)$ صحیح بوده و $k > 1$ است، ثابت می کنیم که

$P(k+1)$ صحیح است، در این صورت خاصیت $P(n)$ برای تمامی اعداد وجود

دارد.

مثال

به روش استقراء ثابت کنید که داریم :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

تعریف نماد جمع بندی با استفاده از اصل استقراء

نماد Σ زیگما که حرفی یونانی است، برای جمع به کار می رود.

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

که i را عامل گردان زیگما می نامند ۱ را کرانه پایین و n را کرانه بالای زیگما گویند. به جای عامل گردان i می توان هر نماد دیگری را به کار برد.

تعریف نماد ضرب با استفاده از اصل استقراء

نماد ضرب نیز به صورت زیر تعریف می شود :

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 . a_2 a_n$$

کرانه پایین ($i=1$) می تواند هر مقدار کمتر از n یا مساوی آن باشد.



این دو نماد خواص زیر را دارا می باشند :

اگر k عددی ثابت باشد :

$$\sum_{i=1}^n k = nk, \quad \prod_{i=1}^n k = k^n$$

اگر k عددی ثابت باشد :

$$k \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n k a_i$$



اگر $1 \leq m < n$ باشد :

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=m+1}^n a_i \quad , \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^m a_i \cdot \prod_{i=m+1}^n a_i$$

اگر کرانه های دو زیگما یا دو نماد ضرب مساوی باشند، داریم :

$$\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (a_i \pm b_i)$$

$$\prod_{i=1}^n a_i \cdot \prod_{i=1}^n b_i = \prod_{i=1}^n a_i b_i$$

فاکتوریل

تعریف : به کمک استقراء، برای عدد صحیح غیرمنفی n ، عدد $n!$ (فاکتوریل n) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ (n+1)! = n!(n+1) \end{cases}, \quad n \geq 0$$

با توجه به تعریف فوق به کمک استقراء می توان نشان داد :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

تعریف

به ازای هر عدد صحیح m ، n که $0 \leq m \leq n$ باشد، عدد طبیعی $n!m!(n-m)!$ به ضریب دو جمله ای نیوتن موسوم است و به C_n^m و یا $\binom{m}{n}$ نمایش داده می شود.

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

دستور دو جمله ای

قضیه :

به ازای هر عدد طبیعی n داریم :

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r x^r$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} x^r + \dots + x^n$$

بسط دو جمله ای $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = c_n^0 a^n + c_n^1 a^{n-1} b + c_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + c_n^n b^n$$
$$= \sum_{r=0}^n c_n^r a^{n-r} b^r$$

تعمیم دستور دو جمله ای

$$(a + b + c)^n = \sum_{n_1=0}^n \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} a^{n_1} b^{n_2} c^{n_3}$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

در برخی از کتاب ها ضریب بسط فوق را به صورت زیر نشان می دهند:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} = \binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad n_3}$$

آنالیز ترکیبی

اصل جمع:

اگر A و B دو مجموعه محدود و مجزا باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ به طوری که
تعداد عناصر مجموعه A ، $n(A) = m_1$ و تعداد عناصر مجموعه B ، $n(B) = m_2$
فرض شود، در این صورت داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m_1 + m_2$$



اصل ضرب:

فرض می کنیم مجموعه های محدود A دارای $n(A)$ عضو و B ، دارای $n(B)$ عضو باشند، در این صورت $A \times B$ مجموعه محدودی است که دارای $n(A) \cdot n(B)$ عضو می باشد.

تعریف آنالیز ترکیبی

آنالیز ترکیبی مجموعه عملیاتی است که روی حرف یا اعداد، اشیاء یا اشخاص، ... انجام می شود و مقصود از آن تعیین تعداد گروه هایی است که از ترکیبات مختلف این حروف با اعداد یا اشیاء یا اشخاص ... به دست می آید. این عملیات به سه دسته تقسیم می شود؛ تبدیل، ترتیب و ترکیب.

ترتیب

تعریف:

مجموعه‌ای مشتمل بر n عنصر متمایز را در نظر می‌گیریم، از این عناصر، r ($r \leq n$) عنصر را انتخاب نموده و به صورت‌های مختلف می‌نویسیم. حالات ممکن را ترتیب n حرف r به r می‌نامند و آن را به $P(n, r)$ نمایش می‌دهند.

مثال

با شش حرف a, b, c, d, e و f به چند طریق می توان سه حرف انتخاب نموده و آنها را به صورت های مختلف نوشت؟

بنابر اصل ضرب، حالات ممکن برابر است با $6 \times 5 \times 4 = 120$ یعنی داریم،

$$P(6, 3) = 120.$$

قضیه

اگر n حرف متمایز داشته باشیم تعداد ترتیبات n حرف r به r برابر است با:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$



در $r \leq n, P(n, r)$ است. اگر $r = n$ باشد، یعنی $P(n, n)$ ، غالباً مسئله را **تبدیل** یا **جایگشت** می نامند و در این صورت، داریم :

$$P(n) = n!$$

در تبدیل یا جایگشت، n حرف وجود دارد و این n حرف را انتخاب نموده و به صورت های مختلف کنار هم قرار می دهیم.

مثال

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، بدون تکرار ارقام، چند عدد پنج رقمی می توان ساخت؟

حل :

مسئله ترتیب ۵ رقم پنج به پنج (یا تبدیل) است. پس تعداد آنها برابر است با :

$$P(5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

ترتیب با حروف مکرر

n حرف متمایز را در نظر گرفته و از میان این n حرف r حرف را انتخاب می‌کنیم و به صورت ممکن کنار هم قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم هر یک از حروف را بتوان تکرار کرد.

قضیه :

اگر n حرف متمایز داشته باشیم تعداد ترتیب مکرر n حرف r به r برابر است با:

$$P'(n, r) = n^r$$

تبدیل یا جایگشت با حروف مکرر

قضیه :

n حرف را که در آن n_1 حرف شبیه هم، n_2 حرف همانند و ... و n_r حرف نیز همانند باشند، تبدیل یا جایگشت این n حرف با حروف مکرر برابر است با :

$$P'(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}$$

ترکیب

تعریف: n عنصر متمایز را در نظر می گیریم. اگر از این n عنصر r عنصر انتخاب نموده $(r \leq n)$ آنها را بدون جابه جایی بنویسیم، مسئله، مسئله ترکیب است و آن را ترکیبات n حرف r به r می نامند و حالات ممکن را به C_n^r یا $\binom{n}{r}$ نشان می دهند.

قضیه: تعداد ترکیبات n حرف متمایز r به r برابر است با :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ترکیب با تکرار حروف

n حرف متمایز $a, b, c, \dots$ را در نظر می گیریم و می خواهیم از این n حرف ترکیبات r تایی بسازیم؛ با این تفاوت که، هر یک از حروف را بتوان تا r بار تکرار کرد. این مسئله را ترکیب با تکرار حروف می نامیم. حالات ممکن را به $C_n'^r$ نشان می دهیم.

قضیه : n حرف متمایز را در نظر می گیریم. در این صورت :

$$C_n'^r = C_{n+r-1}^r$$

مختصات

برای تعیین وضعیت نقاط واقع بر روی یک صفحه ، یا فضا، ... از مختصات استفاده می شود.

مختصات قطبی

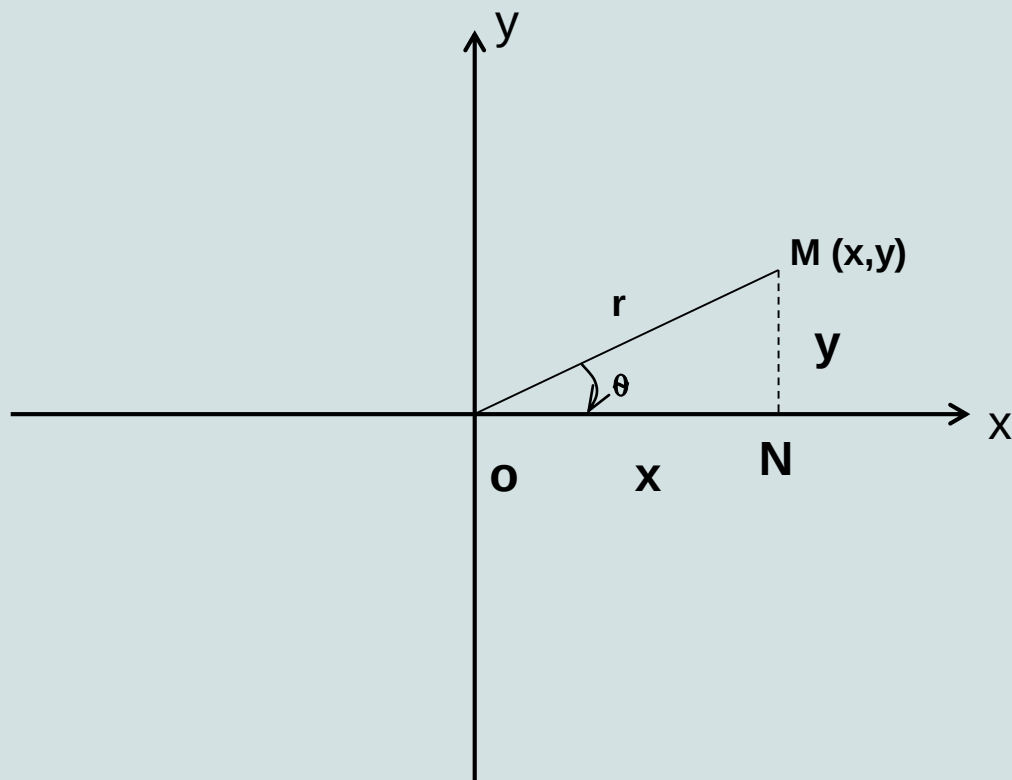
برای این منظور محور را رسم نموده و بر روی آن نقطه O را انتخاب می‌کنیم. بنا به تعریف، O را **قطب** و محور x ها را **محور قطبی** می‌نامند.

اکنون نقطه غیرمشخص M (در صفحه) را به قطب وصل می‌کنیم. طول OM را به r (عددی مثبت است) و زاویه OM با جهت مثبت محور x ها را به θ که بر حسب رادیان می‌باشد نشان می‌دهیم. R را **شعاع حامل** و θ را **زاویه قطبی** نقطه M می‌نامند، که می‌نویسند $M(r, \theta)$

رابطه بین مختصات قطبی و کارتزین

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



فصل سوم

توابع

اهداف کلی

هدف کلی از ارائه ی این فصل معرفی توابع و انواع آن می باشد. سپس به حد و پیوستگی توابع پرداخته و استعمال برخی از توابع را در اقتصاد و بازرگانی مورد بررسی قرار می دهیم.

اهداف رفتاری

در انتهای این فصل از دانشجو انتظار می رود به اهداف زیر نائل گردد:

- (۱) بتواند تشخیص دهد که رابطه ی داده شده یک رابطه ی هم ارزی است یا خیر.
- (۲) بتواند تشخیص دهد که رابطه ی داده شده یک تابع است یا خیر.
- (۳) دامنه و برد تابع داده شده را بدست آورد.
- (۴) یک به یک بودن و پوشا بودن تابع داده شده را بررسی کند.
- (۵) مفهوم هندسی یک به یک بودن و پوشا بودن تابع را بداند.
- (۶) عملیات جبری روی توابع را انجام دهد.
- (۷) بتواند ترکیب دو تابع را محاسبه کند و برای تابع حاصله دامنه و برد بدست آورد.

۸) تشخیص دهد کدام تابع دارای معکوس است.

۹) در صورت وجود تابع معکوس بتواند آن را محاسبه کند.

۱۰) بتواند حد، حد چپ و حد راست توابع را محاسبه نماید.

۱۱) قضایای حد را به کار گیرد.

۱۲) پیوستگی و گسستگی توابع را تشخیص دهد.

۱۳) حد دنباله ها را محاسبه کند.

۱۴) بتواند توابع را در مسائل اقتصاد و بازرگانی به کار گیرد.

۱۵) بتواند توابع تقاضا، عرضه، هزینه کل، هزینه متوسط و نقطه تعادل بازار را مشخص کند.

توابع

رابطه :

دو مجموعه A , B را در نظر می گیریم، هر زیرمجموعه ای از $A \times B$ را یک **رابطه** (یا بستگی) ای از A در B خوانند. اگر $(x, y) \in R$ ، باشد، می نویسند، xRy و می گویند x رابطه R با y دارد.

رابطه معکوس

اگر R ، رابطه ای از A در B باشد معکوس رابطه R عبارت است از :

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

رابطه انعکاسی

رابطه F را در مجموعه A ، **انعکاسی** خوانند، اگر

$$\forall a \in A \Rightarrow (a, a) \in F$$

برای مثال اگر مجموعه خطوط صفحه را در نظر بگیریم، رابطه موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطه انعکاسی است.

رابطه متقارن

رابطه F را در مجموعه A ، رابطه **متقارن** خوانند، اگر داشته باشیم.

$$\forall (a, b) \in F \Rightarrow (b, a) \in F$$

به عنوان مثال اگر مجموعه خطوط صفحه را در نظر بگیریم و رابطه F به مفهوم موازی بودن باشد F یک رابطه متقارن است.

رابطه متعدی

رابطه F را در مجموعه A یک رابطه **متعدی** گویند، اگر

$$\begin{cases} \forall (a, b) \in F \\ (b, c) \in F \end{cases} \Rightarrow (a, c) \in F$$

برای مثال، رابطه موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطه متعدی است.

رابطه هم ارزی

رابطه F را در مجموعه A یک **رابطه هم ارزی** گویند، اگر اولاً انعکاسی، ثانیاً متقارن و ثالثاً متعدی باشد.

مثال :

اگر مجموعه A ، (تمامی) مثلث های واقع بر یک صفحه باشد و رابطه F نیز در مجموعه به مفهوم متشابه بودن باشد، این رابطه یک رابطه هم ارزی است.

رابطه هم ارزی و افراز

فرض می کنیم F رابطه ای هم ارزی در A باشد. برای هر عنصر a از A . کلاس هم ارزی a برابر است با

$$[a] = \{x : (a, x) \in F\}$$

مجموعه تمامی کلاس های هم ارزی A را به $\frac{A}{F}$ نشان داده و

$$\frac{A}{F} = \{[a] : a \in A\}$$

قضیه

فرض کنیم که F رابطه‌ای هم‌ارزی در A باشد، در این صورت مجموعه $\frac{A}{F}$ افزاری در A می‌باشد، یعنی داریم :

الف) برای تمامی a های متعلق به A ، داریم $a \in [a]$

ب) $[a] = [b]$ است، اگر و فقط اگر $(a, b) \in F$ باشد.

ج) اگر $[a] \neq [b]$ باشد در این صورت مجموعه‌های $[a]$ و $[b]$ مجزا می‌باشند.

رابطه ضدمتقارن

رابطه F را در مجموعه A یک رابطه **ضدمتقارن** می نامند، اگر داشته باشیم

$(a, b) \in F$ و $(b, a) \in F$ ، نتیجه شود $a = b$.

توابع

تعریف :

اگر A , B دو مجموعه باشد، هر رابطه از A در B را یک تابع خوانند، اگر در آن دو زوج مرتب پیدا نشود که مختص اول آنها مساوی و مختص دومشان متفاوت باشد.

دامنه تعریف و حوزه مقادیر

فرض می کنیم f تابعی از A در B باشد.

مجموعه ای متشکل از تمامی مختصات اول زوج های مرتب $(x,y) \in f$ را **دامنه** تعریف f گویند و آن را به D_f نشان می دهند و مجموعه مختصات دوم را به R_f نشان داده و آن را **برد** تابع گویند.

اگر $R_f = B$ باشد تابع را **پوششی** خوانند.

تابع یک به یک و تناظر یک به یک

فرض می کنیم f تابعی از A در B باشد. F را تابع **یک به یک** خوانند، اگر

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

اگر f تابعی یک به یک از A در B بوده و در ضمن f تابعی پوششی باشد، f را **تناظر یک به یک** خوانند.

تساوی دو تابع

دو تابع f , g هنگامی و فقط هنگامی با هم برابرند، که اولاً f , g دارای دامنه و برد مساوی و ثانیاً.

$$\forall a \in D_f \Rightarrow g(a) = f(a)$$

تابع مرکب

دو تابع f, g را در نظر می گیریم :

$$f : A \rightarrow B$$

$$g : B \rightarrow C$$

عنصر a از مجموعه A را در نظر بگیرید. (فرض کنید .

$$b = f(a)$$

و نیز

$$c = g[f(a)]$$

از آنجا



در این صورت می گوییم، a به وسیله $g \circ f$ به عنصر c نظیر گردیده است،
یعنی $(a, c) \in g \circ f$ ، $g \circ f$ تابع مرکب نام دارد، و داریم :

$$g \circ f = \{(a, c) : a \in A, c = g[f(a)]\}$$

عملیات جبری بر روی توابع

اگر f, g دو تابع باشند، توابع $f + g$ و $f - g$ توابعی هستند که :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = D_{f-g}$$



به همین ترتیب حاصل ضرب و خارج قسمت این توابع، به صورت زیر تعریف می گردد.

$$f \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$$

معکوس یک تابع

فرض می کنیم f تابعی از A در B باشد.

معکوس تابع f برابر است با :

$$f^{-1} = \{(x, y) : x = f(y)\}$$

تابع معکوس

گاهی معکوس یک تابع، خود یک تابع است. در این صورت آن را **تابع معکوس** خوانند.

اگر تابع f ، اولاً یک به یک و ثانیاً پوششی باشد، f^{-1} تابع خواهد بود. یعنی در این صورت، f دارای تابع معکوس است.

توابع جبری

توابع جبری، توابعی هستند که در معادله آنها، y از حل یک معادله به صورت چندجمله ای از متغیرهای x ، y نسبت به y به دست آید.

اگر تابعی جبری نباشد آن را تابع **غیرجبری**، ترنسندنتان گویند. توابعی مانند توابع مثلثاتی لگاریتمی، توابعی غیرجبری هستند.

توابع زوج و فرد

در تابع زوج با تبدیل x به $-x$ ، $f(x)$ یا y ، (یعنی عرض نقطه) تغییر نمی کند.
در تابع $y = f(x)$ ، اگر محور y ها محور تقارن آن باشد، تابعی زوج است.

تابع f را فرد می نامند، اگر x را به $-x$ تبدیل کنیم، داشته باشیم :

$$f(-x) = -f(x)$$

اگر تابعی فرد باشد، مبدأ مختصات مرکز تقارن آن می باشد.

حد

حد $f(x)$ هنگامی که x به سمت a میل کند برابر L است، اگر x به طریقی به سمت a میل کند (بدون آنکه با آن مساوی شود)، $f(x)$ به سمت L میل می کند، و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال

حد تابع $y = \frac{1/x - 1/3}{x - 3}$ را در نقطه $x = 3$ تعیین کنید

$$y = -\frac{x-3}{3x(x-3)} \quad \text{داریم:}$$

اگر $x \neq 3$ باشد، می توان عامل مخالف صفر ($x-3$) را از صورت و مخرج حذف نمود.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{3x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9} \quad \text{پس داریم:}$$

حد چپ و راست

اگر در تابع $f(x)$ ، x با مقادیر بزرگتر از a به سمت a میل کند، حد به دست آمده را **حد راست** می نامند و می نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$$

اگر در تابع $f(x)$ ، x با مقادیر کوچکتر از a به سمت a میل کند، حد به دست آمده را **حد چپ** می نامند و می نویسند :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$$



مشخص است که حد f زمانی موجود است که :

$$\lim_{x \rightarrow x^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

تعریف حد

تعریف : حد تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ برابر L است و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

اگر به ازای هر عدد مثبت ε ، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته به طوری که

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

قضایای اساسی حد

فرض می کنیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

در این صورت داریم :

(قضیه ۱)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

(قضیه ۲)

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 - L_2$$



(قضيه ٣)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

(قضيه ٤)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0$$

قضیه

اگر

$$\forall x \in N_{\delta}(a) \Rightarrow f(x) > 0$$

آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \geq 0$$

قضیه فشردگی

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in N_{\delta}(a) \Rightarrow h(x) \leq f(x) \leq g(x) \\ , \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال

نشان دهید که داریم؛

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$$

توجه داریم :

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq +1 \Rightarrow -|x| \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

اما

با استفاده از قضیه فشردگی مسأله حل است.

حدود نامحدود

تعریف :

در تابع $y = f(x)$ ، هنگامی که x به سمت بینهایت میل می کند، y به سمت عدد L میل می نماید، اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \forall x \quad |x| > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$



تعریف :

در تابع $y = f(x)$ ، هنگامی که x به سمت a میل کند y به سمت بینهایت میل می نماید، اگر

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M$$

و می نویسیم

$$f(x) = \infty$$

$$x \rightarrow a$$



تعریف:

حد تابع $f(x)$ هنگامی که x به سمت بی نهایت میل کند برابر بی نهایت است.

$$\text{اگر } \forall M > 0 \circ \exists N \forall x (|x| > N \Rightarrow |f(x)| > M)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

و می نویسیم :

محاسبه حد

به طور کلی

(الف) حد کسرهایی که صورت و مخرج آنها هم درجه است، هنگامی که X به سمت بینهایت میل می کند، برابر نسبت ضریب بزرگترین درجه صورت به ضریب بزرگترین درجه مخرج است.

(ب) در کسرهایی که درجه صورت از درجه مخرج کمتر است، اگر X به سمت بینهایت میل کند، حد آن کسر برابر صفر است.



(ج) اگر در کسرهایی که درجه صورت از درجه مخرج بیشتر است، x به سمت بینهایت می کند، حد کسر برابر بینهایت است.

(هـ) اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ به صورت $\div$ درآید و نقطه a به دامنه تعلق نداشته باشد، می توان با حذف عامل صفرکننده، حد تابع را تعیین کرد.

(و) اگر عبارت به صورت $\infty - \infty$ است. صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می کنیم.

تعریف

حد عبارت $(1 + \frac{1}{n})^n$ ، هنگامی که n به سمت بینهایت میل کند، برابر عددی است که آن را به e نشان می دهند، یعنی، خواهیم داشت :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

e به عدد **نپر** موسوم است.

می توان ثابت کرد به ازای هر مقداری که x اختیار کند همواره داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

پیوستگی

تابع $y=f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوئیم اگر سه شرط به صورت زیر در این نقطه برقرار باشد:

(۱) تابع در این نقطه تعریف شده باشد، یا $a \in D_f$ باشد (یا تابع در این نقطه معین باشد).

(۲) تابع در این نقطه حد داشته باشد.

(۳) حد تابع برابر مقدار تابع باشد.



شروط ۲ و ۳ را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\lim_{n \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

یا معادلاً به ازای هر عدد مثبت ε می بایست عددی مانند δ وجود داشته

باشد به طوری که

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = a$ یکی از سه شرط پیوستگی را نداشته باشد در این نقطه **منفصل** یا **گسسته** است.

گسستگی

اگر تابع به معادله $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ یکی از سه شرط پیوستگی را نداشته باشد نقطه **منفصل** یا **گسسته** است.

اگر تابع f در نقطه $x=a$ دارای حد چپ و راست بوده، ولی در این نقطه گسسته باشد، **گسستگی از نوع اول** می باشد. اگر لااقل یکی از حدود وجود نداشته باشد، تابع را **منفصل از نوع دوم** خوانند. اگر تابع در نقطه ای حد داشته باشد ولی در این نقطه گسسته باشد، گسستگی را «**حذف شدنی**» گویند.

مثال

نقاط گسستگی تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = \frac{x^2}{x}$$

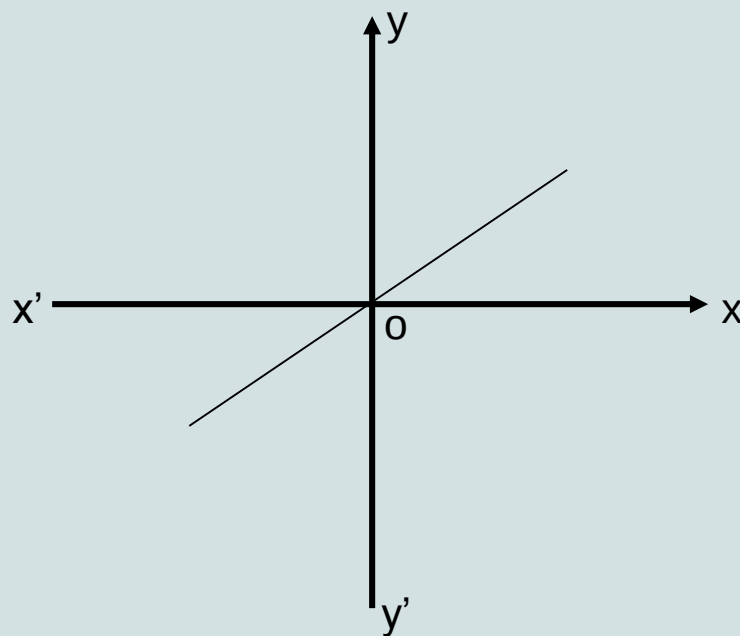
حل :

این تابع در 0 نامعین است، ولی در این نقطه حد دارد. نوع این گسستگی، گسستگی حذف شدنی است.



شکل زیر را ملاحظه کنید. معادله این تابع پس از حذف یا رفع گسستگی به صورت زیر است :

$$y = \begin{cases} \frac{x^2}{x} = x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



دنباله ها

تعریف :

یک **دنباله** تابعی است که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی باشد

$$f : N \rightarrow R$$

و یا :

$$f = \{(n, U_n) : U_n = f(n), n \in N\}$$



ضابطه تابع یعنی $U_n = f(n)$ ، موسوم به **جمله عمومی** دنباله است.

U_n را **جمله عمومی** دنباله، گویند و آن را به صورت $\{U_n\}$ نیز نشان می دهند.

مثال

دنباله $U_n = \frac{1}{n^2}$ مفروض است، چند جمله اول این دنباله را بنویسید.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \dots$$

حد یک دنباله

دنباله $U_n = f(n)$ را در نظر می گیریم، بنا به تعریف حد این تابع هنگامی که n به سمت بینهایت میل کند برابر l است، اگر به ازای هر عدد مثبت ε ،
(هر اندازه کوچک) عددی مانند N وجود داشته باشد، به طوری که اگر $n > N$ باشد دنباله U_n به l نزدیک باشد، و یا

$$n > N \Rightarrow |U_n - l| < \varepsilon$$



یک دنباله را همگرا به سمت **l** (و یا همگرا) نامند، اگر

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$$

که در آن ، عدد معلوم باشد. اگر **l** بینهایت (یا نامعین) باشد، دنباله را واگرا به سمت بینهایت (و یا واگرا) خوانند.

مثال

همگرایی یا واگرایی دنباله زیر را تعیین کنید.

$$U_n = \frac{\sqrt{n}}{9+n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{9+n} = 0$$

پس این دنباله، همگرا به سمت صفر است.

قضیه کوشی

شرط لازم و کافی برای همگرا بودن دنباله $\{U_n\}$ این است که به ازای هر عدد مثبت ε عددی مانند $N(\varepsilon)$ وجود داشته باشد به طور که داشته باشیم :

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |U_{n+p} - U_n| < \varepsilon$$

که در آن P عددی طبیعی و دلخواه است.



اگر در دنباله $\{U_n\}$ داشته باشیم، $U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq \dots \leq U_n \leq \dots$ ، دنباله را
صعودی خوانند

و اگر $U_1 \geq U_2 \geq U_3 \geq \dots \geq U_n \geq \dots$ باشد، دنباله را **نزولی** خوانند.

اگر دنباله ای صعودی و یا نزولی باشد، دنباله را **یکنوا** خوانند.



عددی مانند M را **کرانه بالای** دنباله U_n خوانند، اگر به ازای جميع مقادیر n ،
داشته باشیم $U_n \leq M$

به همین ترتیب **کرانه پایین** به صورت $\forall n, U_n \geq M_1$ **تعریف**
می گردد.

یک دنباله، اگر، دارای کرانه و کرانه پایین باشد، آن را **کراندار** خوانند.

مثال

دنباله $U_n = \frac{2n}{n+1}$ مفروض است.

حل :

چون داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 2$ ، پس U_n همگراست. اما داریم $U'_n = \frac{2}{(n+1)^2}$ ، چون به ازای جميع مقادير n ، U'_n همواره مثبت است، پس دنباله U_n یک دنباله صعودی است. بزرگترین کرانه پایین آن $M_1=1$ و کوچکترین کرانه بالا $M_2=2$ است.

تابع تقاضا

با بررسی رفتار مصرف کننده درمی یابیم که اگر قیمت ها و درآمد او تغییر کند، مقدار خریدش از کالای خاص، تغییر می کند.

فرض می کنیم درآمد مصرف کننده ثابت باشد؛ ضمناً فرض می کنیم مقدار خرید از یک کالا تنها به قیمت آن کالا بستگی داشته باشد؛ در این صورت اگر مقدار خرید را به q و قیمت را به p نشان دهیم، به ازای هر قیمت p ، مقداری از q مشخص می شود (یعنی مقدار q تابعی از قیمت p است). این تابع را **تابع تقاضا** می نامند.

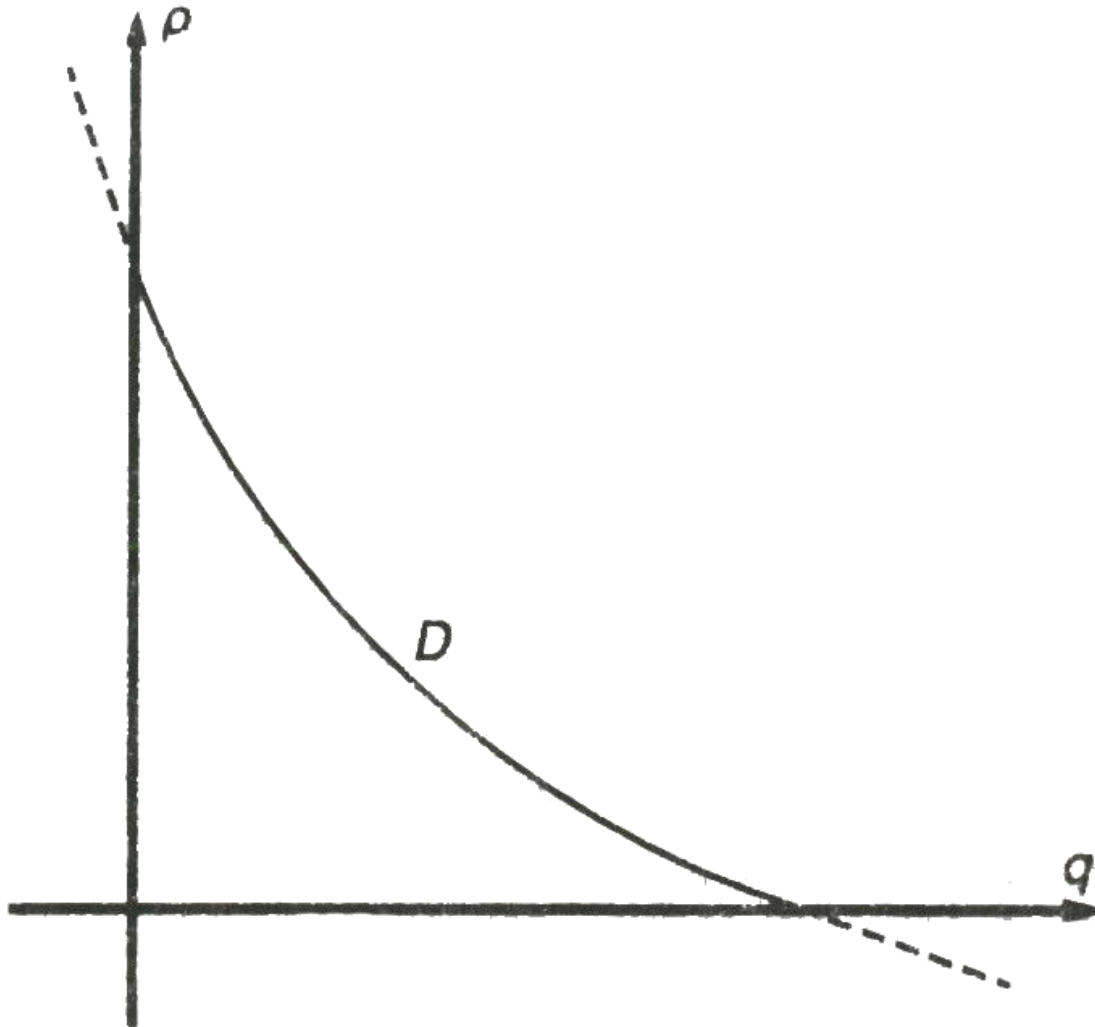


اگر تابع تقاضا را به **D** نشان دهیم، داریم :

$$D = \{(p, q) : q = D(p), p, q \in R\}$$

اگر تابع تقاضا خطی باشد، غالباً شیب آن منفی است. زیرا هنگامی که **p** افزایش (یا کاهش) می یابد، برعکس **q** کاهش (و یا افزایش) پیدا می کند.

تابع تقاضا در حالت کلی



مثال

هنگامی که قیمت ساعت (مچی کامپیوتری) بچه گانه ۸۰ تومان باشد، روزانه ۱۰ عدد به فروش می رسد. زمانی که قیمت ۶۰ تومان باشد، ۲۰ ساعت فروخته می شود؛ تابع تقاضا را پیدا کنید.

حل

این تابع از دو نقطه $(۸۰، ۱۰)$ و $(۶۰، ۲۰)$ می گذرد. اگر تابع تقاضا را خطی فرض کنیم، معادله خطی را که از این دو نقطه می گذرد به دست می آوریم.

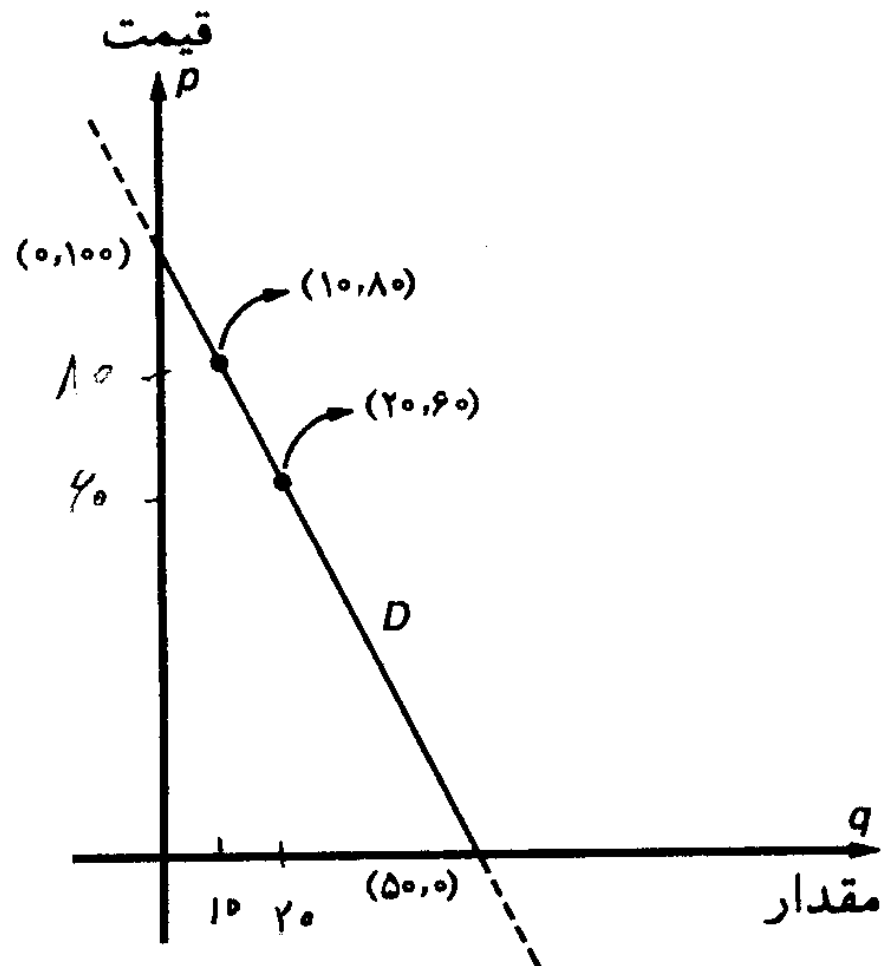
$$\frac{p-80}{60-80} = \frac{q-10}{20-10}$$

$$q = \frac{1}{2} p + 50$$

پس تابع تقاضا به صورت زیر است :

$$p = -2q + 100, \quad p, q \geq 0$$

تابع تقاضای مثال قبل

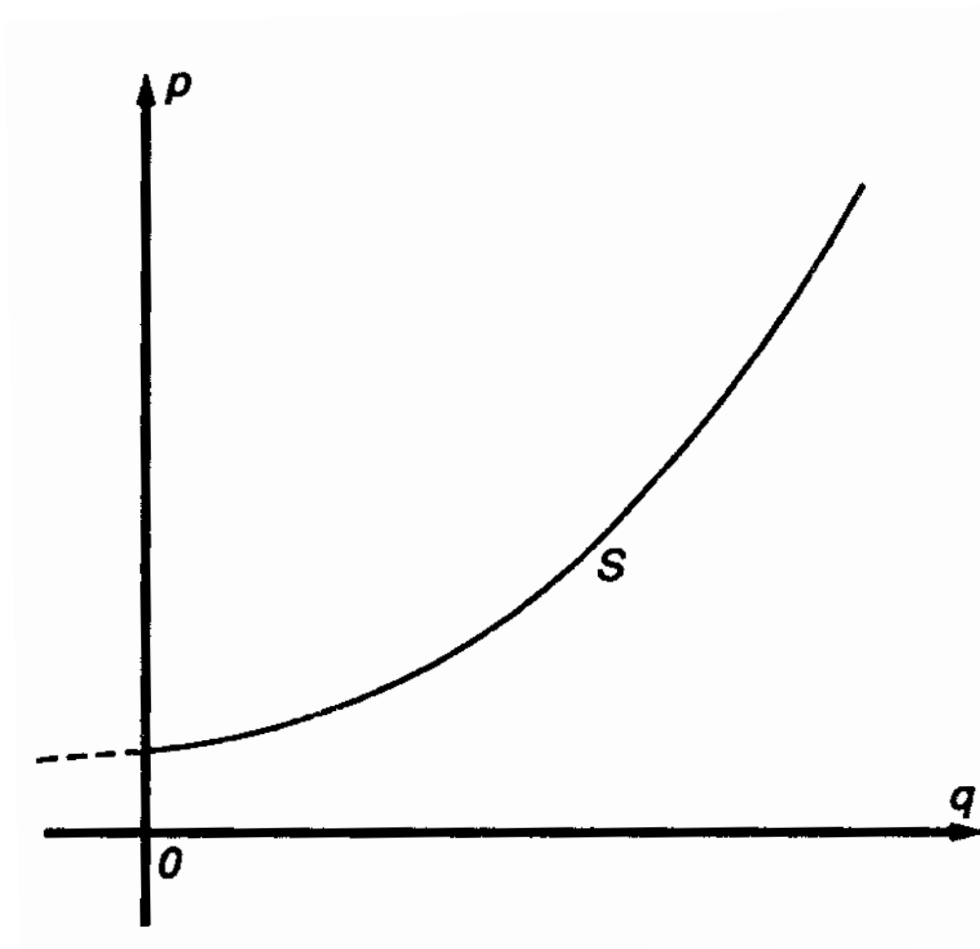


تابع عرضه

تولیدکنندگان در برابر تغییرات به وجود آمده در سیستم اقتصادی، از خود واکنش نشان می دهند.

با افزایش قیمت (p) مقدار عرضه (q) افزایش می یابد و یا با کاهش قیمت، مقدار عرضه نیز کاهش می یابد، **تابع عرضه** خطی در حالت کلی تابعی صعودی است.

منحنی عرضه در حالت کلی



مثال

اگر قیمت کالا ۲۵ تومان باشد، اصولاً کالایی به بازار عرضه نمی شود، با افزایش هر ۱۰ تومان به قیمت این کالا تعداد ۳۰ واحد بیشتر از این کالا عرضه می شود. معادله عرضه را بدست آورید.

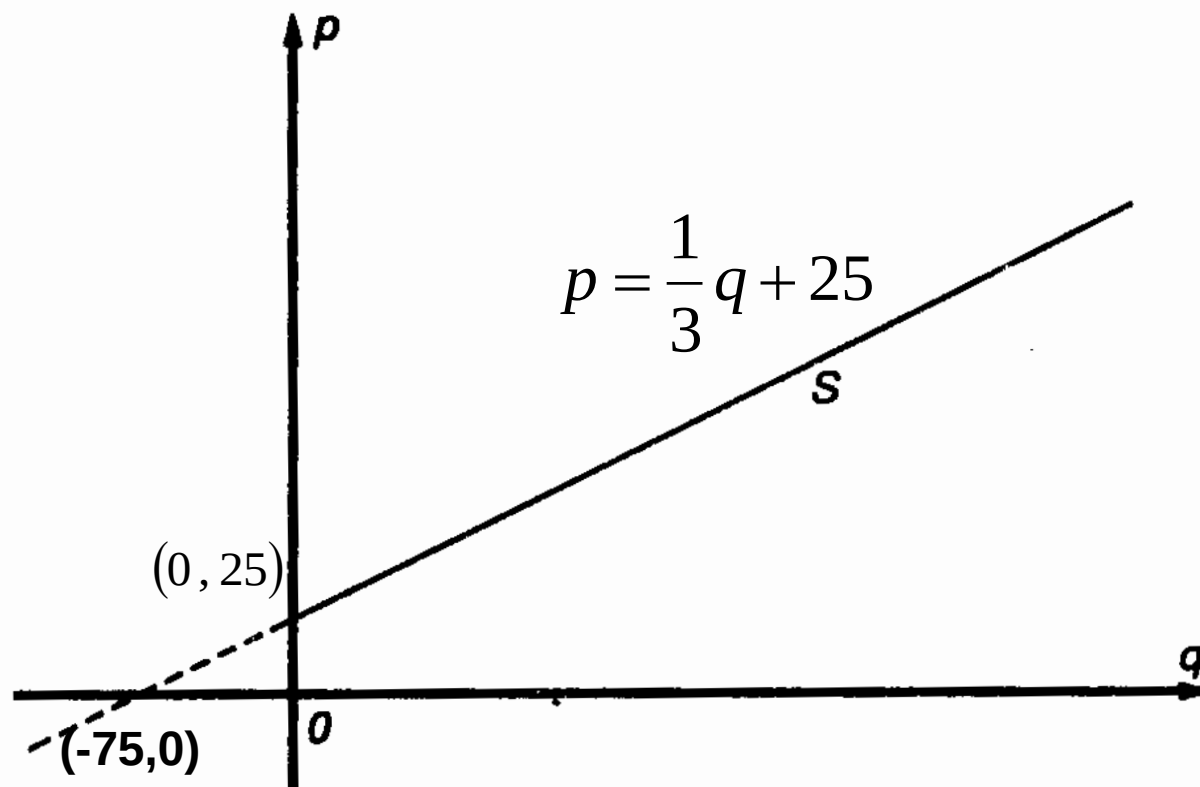
حل

چون به ازای هر ۱۰ تومان افزایش قیمت، ۳۰ واحد کالا بیشتر فروخته می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت که شیب ثابت و برابر $\frac{10}{30}$ است، یعنی $m = \frac{1}{3}$ می‌باشد. از طرفی این خط از نقطه (۰، ۲۵) نیز می‌گذرد. لذا داریم :

$$p - 25 = \frac{1}{3}(q - 0)$$

$$p = \frac{1}{3}q + 25$$

منحنی عرضه در حالت کلی



تعادل بازار

فرض می کنیم $q = f(p)$ معادله تقاضا و $q = g(p)$ ، معادله عرضه باشد.

نقطه تعادل بازار نقطه ای است که در آن نقطه قیمت خرید و مقدار کالای تقاضا شده برابر با قیمت فروش و مقدار عرضه کالا می باشد. مقدار و قیمت تعادل، متناظر با مختصات نقاط تلاقی منحنی های عرضه و تقاضا است.

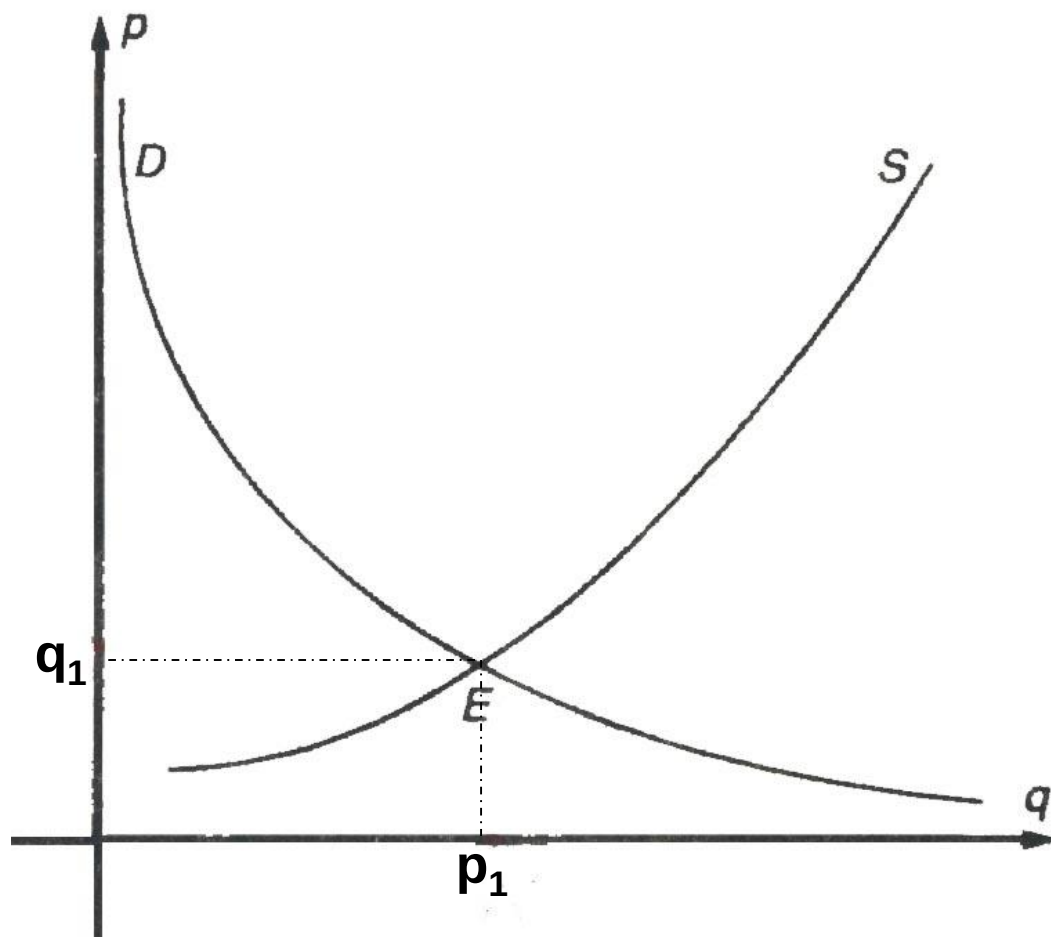


از حل معادله $f(p) = g(p)$ قیمت تعادل به دست می آید؛ و آن را با p_1 نشان می دهیم. اگر آن را در هر یک از معادلات عرضه یا تقاضا قرار دهیم، مقدار تقاضا نیز به دست می آید.

$$q_1 = f(p_1) = g(p_1)$$

نقطه $E(p_1, q_1)$ نقطه تعادل بازار می باشد.

منحنی تعادل بازار





اگر منحنی های عرضه و تقاضا هر دو خطوطی مستقیم باشند تعادل بامعناست،
اگر و فقط اگر، عرض نقطه تلاقی منحنی تقاضا بیشتر یا مساوی عرض نقطه
تلاقی منحنی عرضه با محور عرض ها باشد و همچنین طول نقطه تلاقی منحنی
تقاضا بیشتر یا مساوی با طول نقطه تلاقی آن با محور طول ها باشد.

مثال

نقطه تعادل معادلات عرضه و تقاضای زیر را تعیین کنید.

$$y_s = \frac{3}{2}x + 1$$

$$y_D = 10 - 2x$$

حل

طول از مبدأ این دو منحنی به ترتیب $x_S = -\frac{2}{3}$, $x_D = 5$ است، پس $x_D > x_S$ می باشد. و عرض از مبدأ این دو منحنی $y_D = 10$, $y_S = 1$ است، پس $y_D > y_S$ می باشد و می توان نتیجه گرفت که برای این مسئله تعادل بامعناست. حال نقطه تلاقی را تعیین می کنیم، داریم :

$$E\left(\frac{18}{7}, \frac{34}{7}\right)$$

تابع هزینه کل و هزینه متوسط

هزینه ثابت با تغییر سطح تولید ثابت می ماند این هزینه را به F_0C_0 نشان می دهیم.

هزینه متغیر با سطح تولید تغییر می کند و آن را با V_0C_0 نمایش می دهیم.

هزینه کل در هر سطح تولید برابر با مجموع هزینه ثابت و هزینه متغیر در آن سطح تولید است.



هزینه کل را به T_0C_0 نشان $f(x)$ می دهند و
 اگر هزینه کل تولید و بازاریابی x واحد از
 یک کالا باشد، هزینه یک واحد آن را به $\bar{y} = \frac{f(x)}{x}$ نشان داده داریم

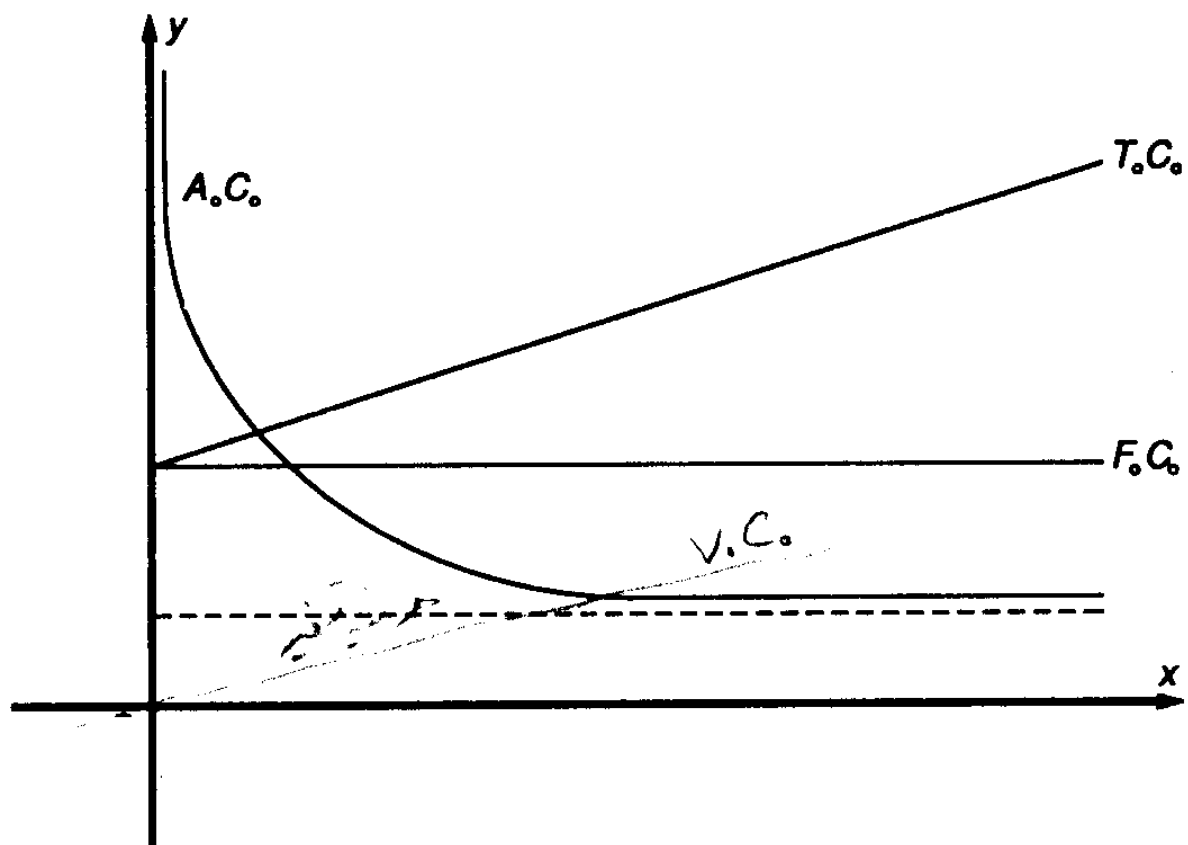
$$A_0C_0$$

و آن را **هزینه متوسط** نامیده و به $T_0C_0 = f(x)$ نشان می دهند

$$\begin{cases} T_0C_0 = f(x) \\ A_0C_0 = \bar{y} = \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} \end{cases}$$
 هزینه کل

هزینه متوسط

تابع هزینه کل و متوسط



تابع درآمد

فرض می کنیم معادله تابع تقاضا بوده که در آن قیمت هر واحد تعداد واحدهاست. می دانیم بر اساس این تابع، اگر قیمت y باشد، خریداران x واحد خواهند خرید، در نتیجه میزان فروش، که آن را **دریافت** و یا **درآمد** می نامیم، برابر است با

$$R = x \cdot y = x \cdot f(x)$$



پس تابع درآمد کل به صورت زیر است :

$$T_o R_o = \{(x, R) : R = x \cdot f(x), \quad x \in D_f\}$$

درآمد متوسط، که به $A_o R_o$ نشان داده می شود، در واقع درآمد حاصل از فروش واحد است که همان تابع تقاضاست.

$$\bar{R} = \frac{R}{x} = \frac{x \cdot f(x)}{x} = f(x)$$

مثال

تابع تقاضای کالایی به صورت $3x + 4y = 12$ است، که در آن y قیمت یک واحد و x تعداد واحدها می باشد داریم :

$$y = 3 - \frac{3}{4}x$$

درآمد کل برابر است با:

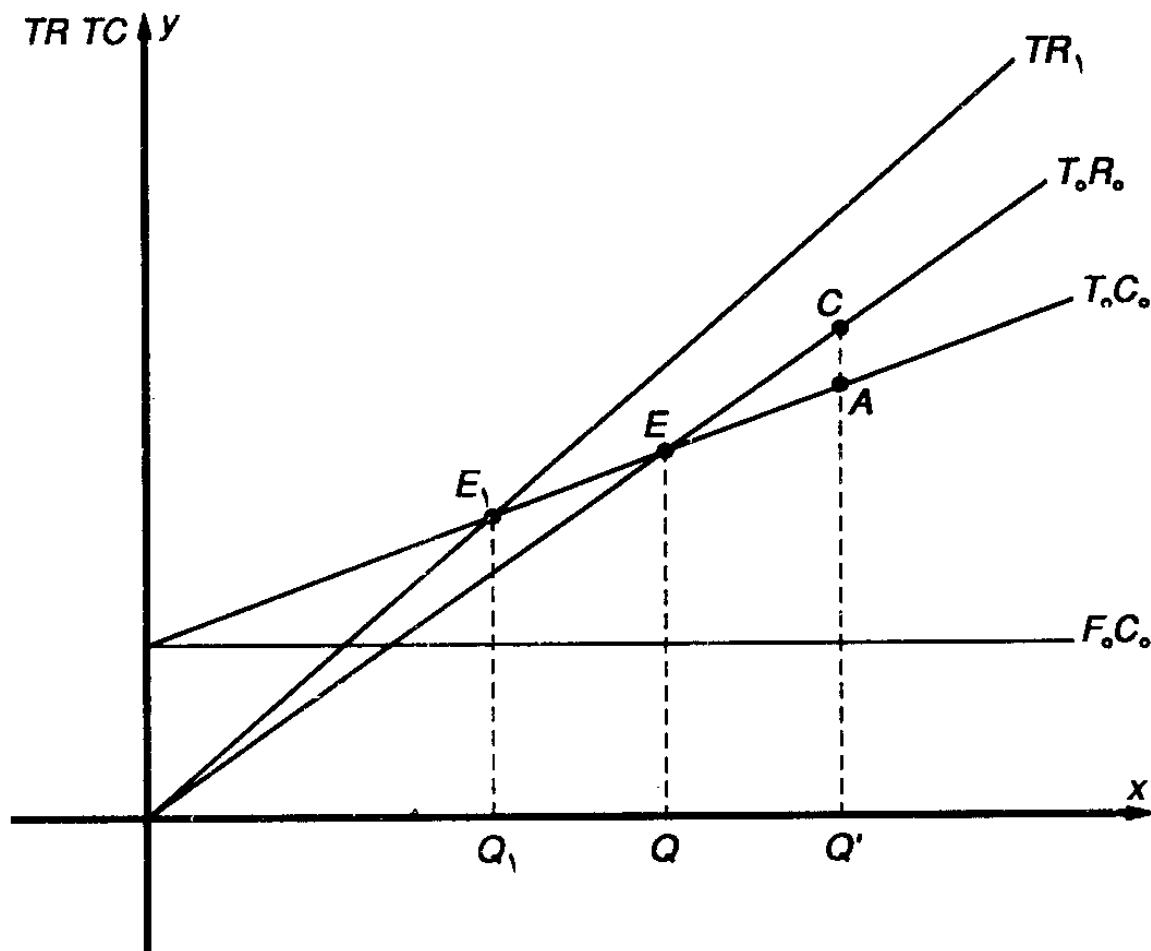
$$R = x \cdot y = x \left(3 - \frac{3}{4}x \right) = 3x - \frac{3}{4}x^2$$

تحلیل نقطه سر به سر

بنا به تعریف، **نقطه سر به سر** نقطه ای که در آن مقدار، شرکت تولیدی سود و یا زیان نمی برد، بلکه فروش او کاملاً هزینه های او را می پوشاند و یا به عبارت دیگر داریم:

$$T_o R_o = T_o C_o$$

تحليل نقطة سر به سر



مثال

هزینه ثابت تولید یک کالا ۵۰/۰۰ تومان و هزینه متغیر برای تولید هر واحد از آن ۸/۰ تومان می باشد، و هر واحد از کالا ۱ تومان به فروش می رسد. توابع هزینه کل و درآمد کل را مشخص کنید و نقطه سر به سر را به دست آورید. تعیین کنید در چه نقطه ای سود برابر ۱۰۰۰۰ تومان است.



$$T.C. = \{(x, y) : y = 0 / 8x + 50000, x \geq 0\}$$

$$T.R. = \{(x, y) : y = x, x \geq 0\}$$

$$T.R. \cap T.C. \qquad 0 / 8 + 50000 = x$$

$$0 / 2x = 50000$$

$$x = 250000$$

$$y = 250000$$



پس در نقطه سر به سر داریم :

$$E = (250000, 250000)$$

هزینه کل - درآمد کل = سود

$$\pi = T_o R_o - T_o C_o$$

$$\pi x - 0/8x - 50000$$

$$10000 = 0/2x - 50000$$

$$x = 300000$$

تابع تبدیل تولید

یک **منحنی تابع تبدیل تولید**، نشان دهنده رابطه بین مقادیر دو کالای مختلف وابسته است، که به وسیله یک واحد تولیدی، با به کارگیری ملزومات مشترک از قبیل مواد اولیه و نیروی کار تولید می شود.



منحنی تبدیل تولید دارای خواص مهمی است. اولاً با کاهش یک محصول، محصول دیگر افزایش می یابد، و برعکس. ثانیاً تعقر آن به سمت پایین است. ثالثاً هر اندازه منحنی تبدیل تولید از مبدأ دورتر باشد، متناظر با مقادیر بیشتری از منابع مصرفی خواهد بود. شیب منحنی تبدیل تولید در یک نقطه خاص، نرخ نهایی تبدیل x به y ، (MRT_{xy}) در آن نقطه است. این نرخ نشان می دهد، که در این فرایند تولیدی چه مقدار باید از تولید (مثلاً y) کاست تا با آزاد شدن عوامل تولیدی مربوط به آن بتوان از x ، یک واحد بیشتر تولید نمود.

مثال

یک شرکت تولیدی در فرایند تولید خود، دو نوع فولاد به مقادیر x ، y تولید می کند. منحنی تبدیل تولید برای منابع استفاده شده به صورت $5x^2 + 2y^2 = 98$ می باشد. شکل اسلاید بعد را ملاحظه کنید. اولاً، بیشترین مقادیر ، که می توان تولید کرد، را محاسبه کنید. ثانیاً چه مقدار از x ، y می توان تولید کرد به طوری که $y = \frac{3}{4}x$ باشد.

حل

اولاً

اگر داشته باشیم، $x=0$ ، خواهیم داشت $y=+7$. یعنی بیشترین مقداری که می‌توان از فولاد نوع دوم تولید کرد، برابر 7 واحد می‌باشد. به همین ترتیب اگر $y=0$ ، $x \approx 4.4$



ثانیاً، اگر داشته باشیم :

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ 5x^2 + 2y^2 = 98 \end{cases}$$

$$x=4 \quad y=3$$

یعنی از نوع اول به میزان ۴ واحد و از نوع دوم به مقدار ۳ واحد تولید می گردد.

فصل چہارم

مشتق

اهداف کلی

هدف کلی از ارائه ی این فصل معرفی مشتق یک تابع و بیان تعبیر هندسی آن می باشد. سپس کاربرد توابع نمایی را در مسائل مرابحه ی مرکب، مساله ی تشکیل سرمایه و پرداخت وام نشان می دهیم. در خاتمه دیفرانسیل یک تابع را معرفی کرده و محاسبه ی تقریبی را به کمک دیفرانسیل نشان می دهیم.

اهداف رفتاری

در انتهای این فصل از دانشجو انتظار می رود به اهداف زیر نائل گردد:

۱) مفهوم هندسی مشتق را بیان کرده و بتواند معادله ی خط مماس بر یک نقطه از نمودار یک تابع را بنویسد.

۲) مشتق انواع توابع را بدست آورد.

۳) مشتق تابع معکوس انواع توابع را بدست آورد.

۴) بتواند توابع نمایی را در مسائل مربوط به مرابحه مرکب و ارزش فعلی به کار بندد.

(۵) مساله هایی از قبیل تشکیل سرمایه ، پرداخت وام و توابع رشد را به کمک توابع نمایی حل کند.

(۶) دیفرانسیل یک تابع را بگیرد.

(۷) از یک تابع چند بار متوالی دیفرانسیل گیری کند.

(۸) مقدار تقریبی عبارتی را به کمک دیفرانسیل به دست آورد.

(۹) خطای محاسبه ی عبارتی را به دست آورد.

مشتق

تعریف مشتق

تابع $y = f(x)$ را در نظر می گیریم، به x نموی به اندازه h نسبت می دهیم،

_____ به

$x + h$ تبدیل می شود. اختلاف این دو مقدار را **نمو متغیر** می خوانند و به Δx

نیز نشان می دهند، یعنی :

$$\Delta x = x + h - x = h$$



در این صورت $y = f(x)$ به $y = f(x+h)$ بدل می شود. اختلاف این دو مقدار را

نموتابع می خوانند و به Δy نشان می دهند.

$$\Delta y = y_1 - y = f(x+h) - f(x)$$



بنا به تعریف، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را **متوسط تغییرات تابع** در فاصله x تا $x + h$ گویند.
اگر کسر فوق دارای حدی باشد، این حد را **مشتق تابع y نسبت به x** می نامیم.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = y' \text{ or } f' \text{ or } y'_x \text{ or } f'_x$$

نماد لایب نیتز :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

محاسبه مشتق توابع با استفاده از تعریف

مثال :

مشتق تابع ثابت به معادله $y = f(x) = c$ را تعیین کنید.

نمو متغیر $\Delta x = x+h-x=h$

نمو تابع $\Delta y = f(x+h) - f(x) = c - c = 0$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

تعبیر هندسی مشتق

نمودار هندسی تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم، و بر روی این شکل نقطه $M(x,y)$ را در نظر می گیریم.

داریم :

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) = NM_1$$

$$\tan(\angle M_1 \hat{M} N) = \frac{NM_1}{MN} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



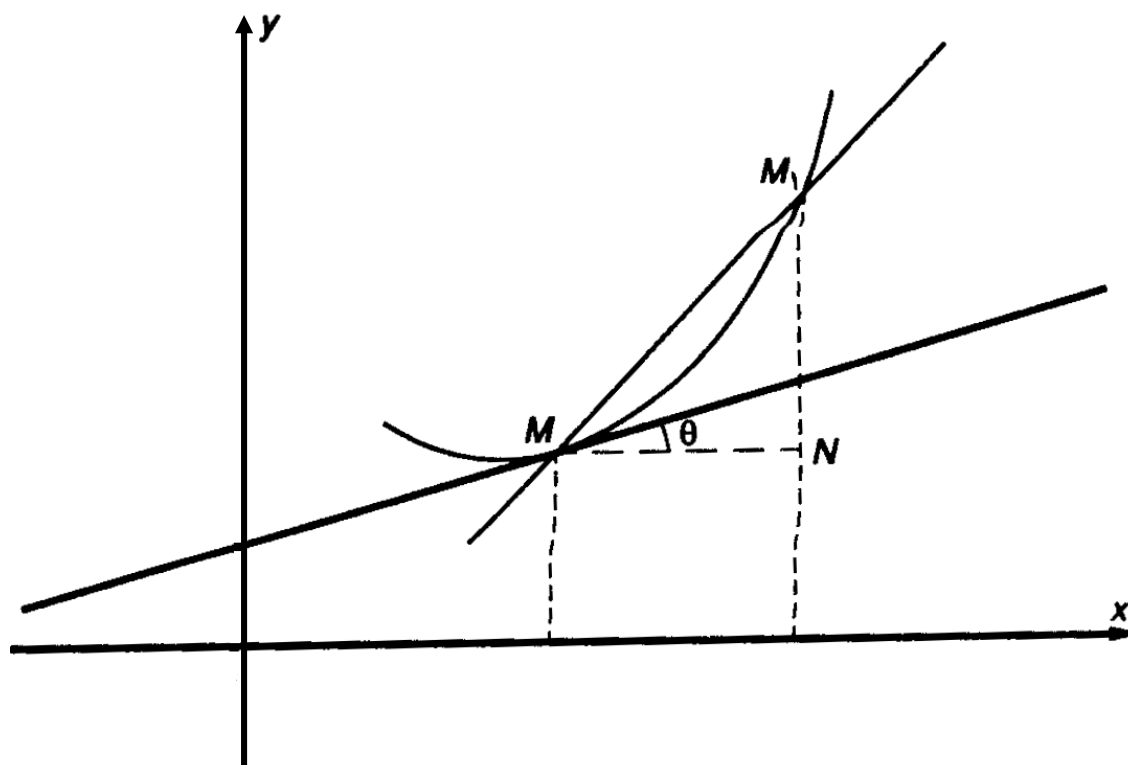
هر اندازه $\Delta x = h$ کوچک شود، نقطه M_1 به نقطه M_2 نزدیک می شود. در

این حالت وتر MM_1 به سمت مماس در نقطه M میل می کند. در نتیجه $\tan M$

(شیب وتر MM_1) به $\tan \theta$ (شیب خط مماس در نقطه M)، میل

می کند .

تحليل هندسي مشتق





$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \tan M = \tan \theta$$

$$y' = f'(x) = \tan \theta = m \quad \text{مماس}$$

پس شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه مساوی است با مشتق تابع در نقطه‌ای به طول x ، **شیب منحنی در هر نقطه** را، شیب خط مماس بر آن تابع در نقطه مذکور می‌دانند.

مثال

شیب تابع $y = x^2 + 1$ را در نقطه $x = -1$ پیدا کنید.

$$y = x^2 + 1$$

$$y' = f'(x) = 2x$$

$$m = f'(-1) = -2$$

قضیه

هرگاه تابع $f(x)$ در نقطه x دارای مشتق باشد، در این نقطه پیوسته است.

خط مماس، خط قائم

تعریف : خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $M(a, f(a))$ عبارت است از:

(۱) خط گذرنده از M با شیب $f'(a)$ ، در صورتی که $f'(a)$ وجود داشته باشد،
یعنی

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

(۲) خط $x = a$ ، اگر $f'(a) = \infty$ باشد.

اگر دو حالت فوق برقرار نباشد، تابع در نقطه M خط مماس ندارد.



بنا به تعریف، **قائم بر منحنی در نقطه M**، قائم بر خط مماس در نقطه است.

معادله خط قائم یا نرمال بر منحنی در نقطه به صورت زیر است :

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

مشتق تابع مرکب

فرض می کنیم که داریم $y = f(u)$ و $u = g(x)$

یعنی داریم :

$$y = (f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

مشتق تابع مرکب فوق برابر است با :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$



از نماد لایب نیتز داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

رابطه فوق به **قانون زنجیری** موسوم است.

مثال

مشتق تابع $y = \sqrt[n]{u}$ را که در آن u تابعی از x است محاسبه کنید.

یک تابع مرکب است داریم :

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

$$y'_u = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} u^{-\frac{(n-1)}{n}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

پس خواهیم داشت :

$$\begin{cases} y = \sqrt[n]{u} \\ y'_x = \frac{u'}{n \sqrt[n]{u^{n-1}}} \end{cases}$$

جبر مشتقات

قضیه: مشتق مجموع چند تابع برابر است با مجموع مشتقات آن توابع.

قضیه: مشتق خارج قسمت دو تابع برابر است با مشتق صورت در مخرج،

منهای مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر مخرج به توان ۲.

مشتق خارج قسمت

قضیه :

مشتق خارج قسمت دو تابع برابر است با مشتق صورت در مخرج، منهای مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر مخرج به توان ۲

مشتقات توابع معکوس

فرض می کنیم $y = f(x)$ در فاصله (a, b) معین و صعودی و پیوسته باشد. X را بر حسب y محاسبه می کنیم، داریم $x = g(y)$. هرگاه $f'(x)$ در نقطه x از (a, b) وجود داشته و مخالف صفر باشد، در این صورت $g'(y)$ نیز در نقطه متناظر y ، وجود داشته و مخالف صفر خواهد بود.

و داریم :

$$f'(x) \times g'(y) = 1$$

مشتقات مراتب بالاتر

اگر تابع $y = f(x)$ در ناحیه‌ای مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن، تابعی مانند $f'(x) = y'$ است که این تابع (یعنی مشتق)، خود تابعی از x می‌باشد. می‌توان مشتق آن را به دست آورد، و آن را **مشتق مرتبه دوم** تابع $y = f(x)$ نامید.

$$y'' = (y')' = f''(x)$$



اگر عمل مشتق گیری را به همین ترتیب ادامه دهیم، به طوری که از مشتق مرتبه $(n-1)$ ام مجدداً مشتق بگیریم، **مشتق مرتبه n ام** تابع $y = f(x)$ به دست می آید.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

مثال

مشتق مرتبه n ام توابع $y = 3x^3$ را تعیین کنید.

$$a) \quad y = 3x^3, \quad y' = 9x^2, \quad y'' = 18x, \quad y''' = 18$$

$$y^{(4)} = 0 \dots y^{(n)} = 0 \quad n \in N \setminus 3$$

مشتق توابع مثلثاتی

تعریف درجه :

$\frac{1}{360}$ محیط دایره یا زاویه مرکزی رو به روی آن را یک **درجه** می‌نامند.

تعریف گراد :

$\frac{1}{400}$ محیط دایره یا زاویه مرکزی روبه روی آن را یک **گراد** نامند.



تعریف رادیان :

کمانی از دایره را که به اندازه شعاع دایره باشد، یا زاویه رو به روی آن را، یک **رادیان** خوانند.

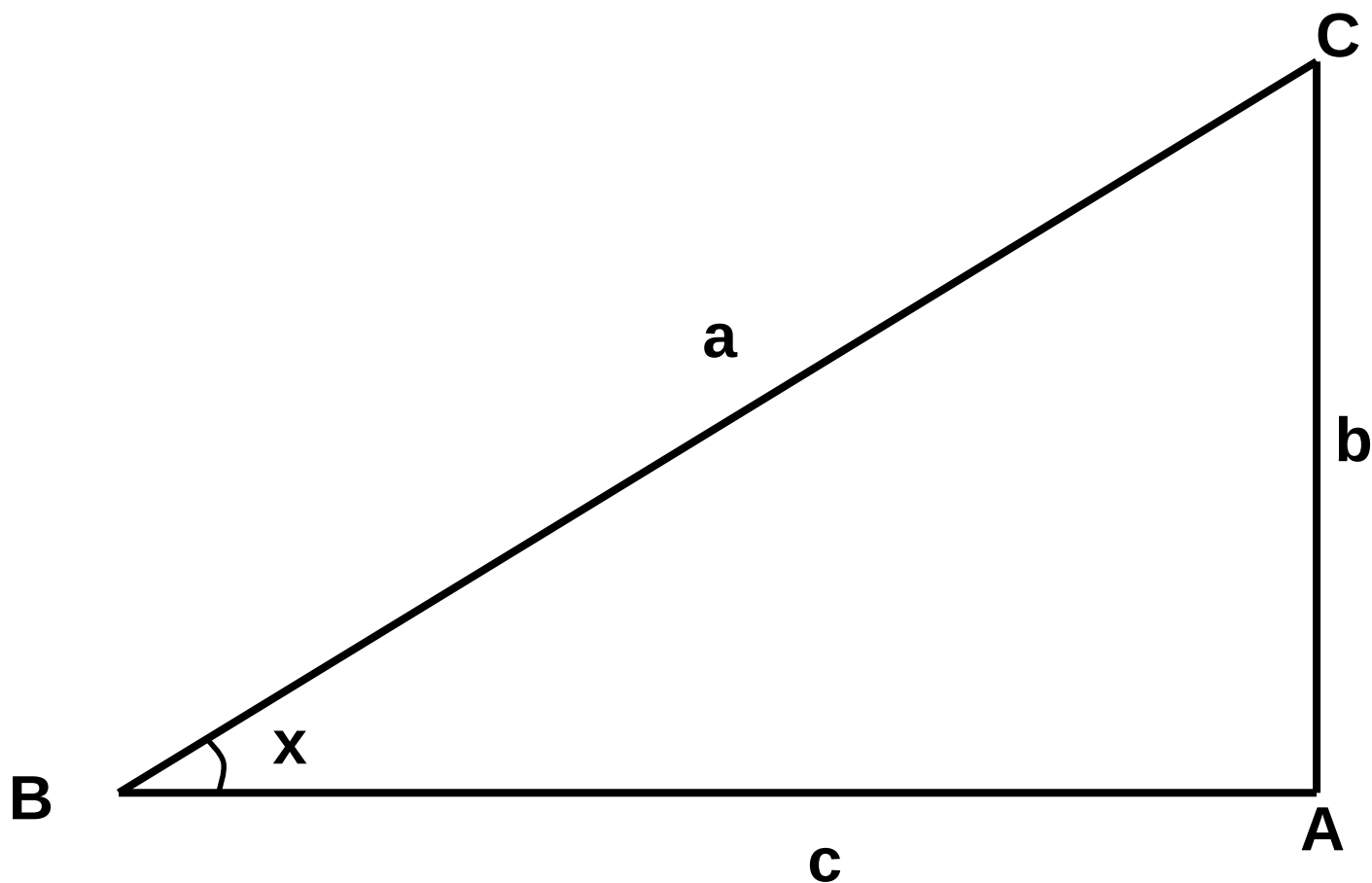
با توجه به تعاریف فوق می توان نتیجه گرفت که در دایره ای به شعاع R همواره داریم :

$$۳۶۰ \text{ درجه} = ۴۰۰ \text{ گراد} = ۲ = \text{رادیان} = \text{محیط دایره}$$

اگر اندازه زاویه ای، d به درجه، g به گراد، r به رادیان باشد.

$$\frac{r}{2\pi} = \frac{g}{400} = \frac{d}{360}$$

تعبیر هندسی نسبت‌های مثلثاتی





فرض می کنیم $A = 90^\circ$ و زاویه B برابر x باشد. نسبت بین اضلاع مثلث فوق را **نسبت های مثلثاتی** گویند، و به ترتیب عبارتند از :

$$\sin x = \frac{b}{a}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sin x} = \frac{a}{b}$$

$$\cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{a}{c}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{c}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{c}{b}$$

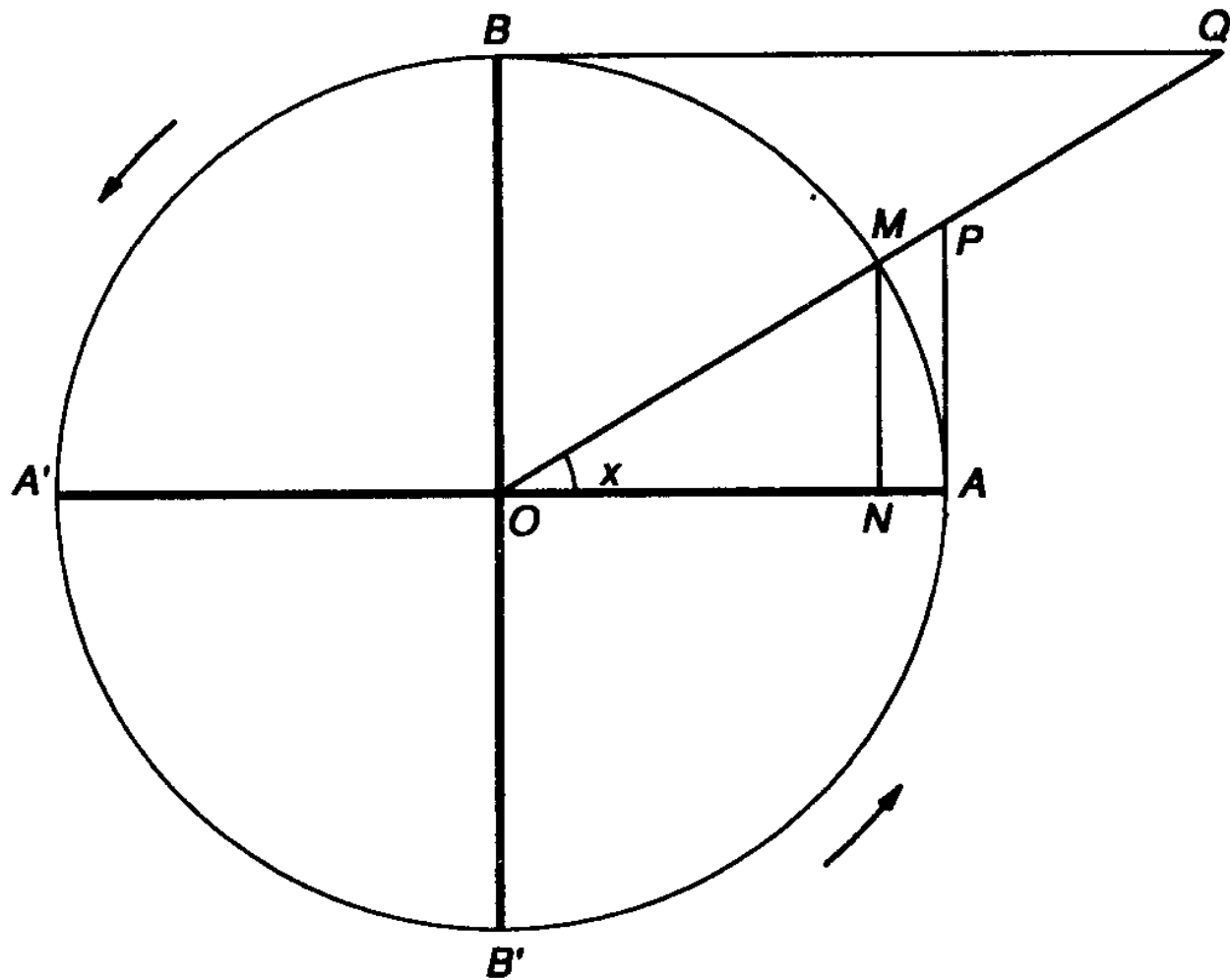


نسبت های مثلثاتی اسلاید قبل را در یک دایره نیز تعریف می کنند.

دایره ای به شعاع واحد رسم می کنیم. بر روی آن دو قطر عمود بر هم و جهت دار، یکی $A' A$ ، افقی و دیگری $B' B$ ، قائم و یک جهت مثبت حرکت (خلاف عقربه های ساعت) اختیار می کنیم.

دایره فوق الذکر را **دایره مثلثاتی** خوانند.

دایره مثلثاتی





بر اساس شکل داریم:

$$\sin x = \overline{NM}$$

$$\csc x = \overline{OQ}$$

$$\cos x = \overline{ON}$$

$$\sec x = \overline{OP}$$

$$\tan x = \overline{AP}$$

$$\cot x = \overline{BQ}$$



در مثلث قائم الزاویه ، داریم :

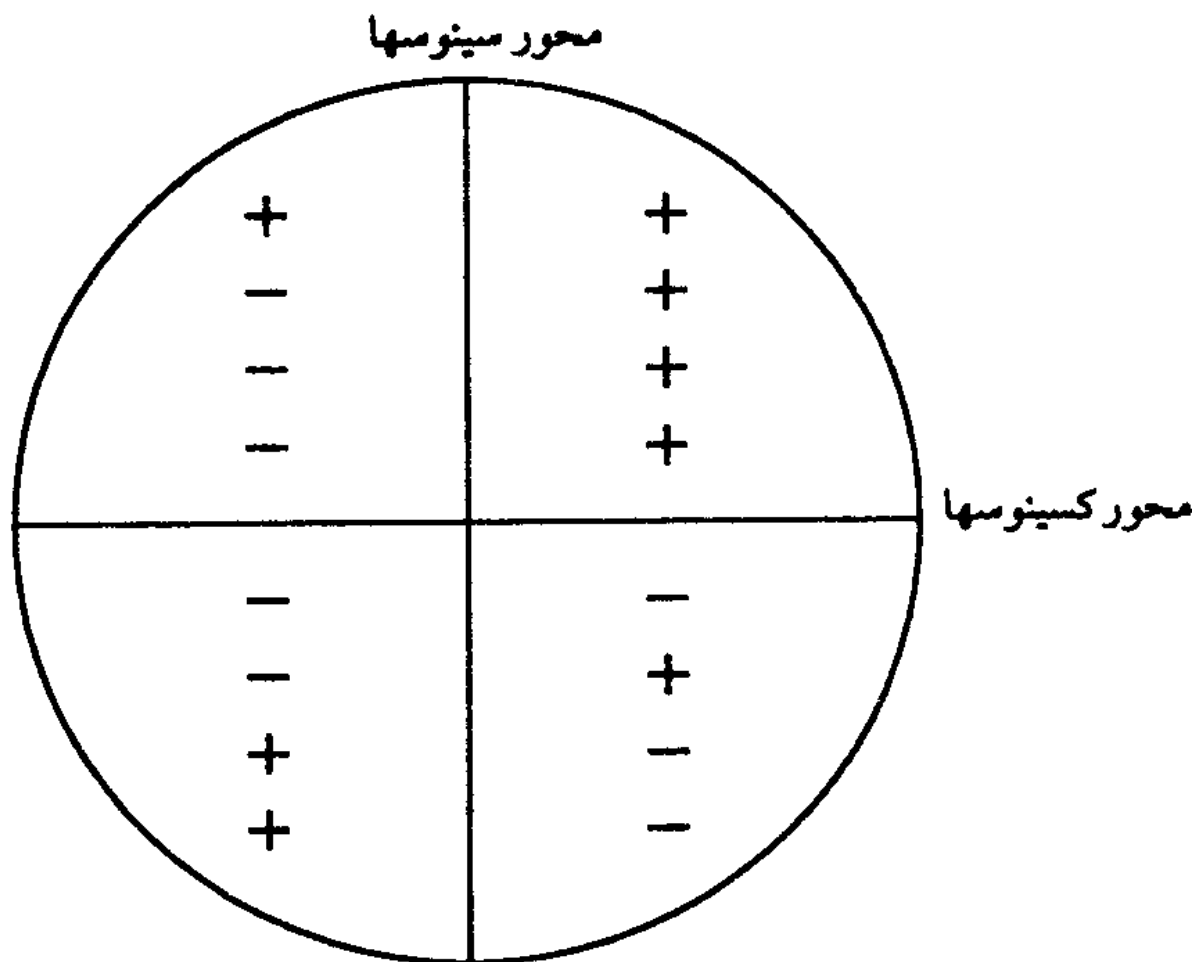
$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \\ 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \\ \tan x \cdot \cot x = 1 \end{array} \right.$$



محور x ها را محور کسینوس ها و محور y ها را محور سینوس ها در نظر می گیریم.

دایره مثلثاتی به وسیله محورها به چهارمربع تقسیم می شود که علامت سینوس و کسینوس، تانژانت و کوتانژانت به ترتیب در هر ربع به قرار اسلاید بعد است :

علامت توابع مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف





به طور کلی می توان نتیجه گرفت که داریم :

$$\begin{cases} \sin (2K\pi + x) = \sin x \\ \cos (2K\pi + x) = \cos x \\ \tan (2K\pi + x) = \tan x \\ \cot (2K\pi + x) = \cot x \end{cases}$$

قضيه

اگر a , b دو زاويه باشند، داريم :

$$\cos (a + b) = \cos a . \cos b - \sin a . \sin b$$

$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$



$$\sin (a-b)=\sin a \cos b-\cos a \sin b$$

$$\tan (a \pm b)=\frac{\tan a \pm \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$$

توابع مثلثاتی و معکوس آنها

تعریف : تابع را تابع متناوب با دوره تناوب $p \neq 0$ خوانند، اگر وقتی که x

در دامنه f قرار دارد، $x+p$ نیز متعلق به D_f باشد و p کوچکترین عدد مثبتی

باشد که داشته باشیم :

$$f(x+p) = f(x)$$

برای مثال اگر $y = \sin(x)$ را در نظر بگیریم، داریم :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

یعنی تابع یک تابع متناوب با دوره متناوب است

تابع سینوس و معکوس آن

تعریف : تابع معکوس سینوس را، که به $\sin^{-1}$ (یا $\text{Arcsin } x$) نشان می دهیم، به صورت زیر تعریف می شود.

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = [-1, 1] \quad R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

تابع کسینوس و معکوس آن

تعریف: تابع معکوس کسینوس را که به $(\cos^{-1} x)$ نشان می‌دهیم به صورت زیر است:

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y \quad 0 \leq y \leq \pi$$

$$D_{f^{-1}} = [-1, 1] \quad , \quad R_{f^{-1}} = [0, \pi]$$

تابع تانژانت و معکوس آن

تعریف : تابع معکوس تانژانت را به $\tan^{-1}$ (یا Arctan) نشان می دهیم و داریم

:

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad R_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

تابع کوتانژانت و معکوس آن

تعریف : معکوس تابع کوتانژانت، که به صورت $\cot^{-1}$ (یا Arccot) نشان داده می‌شود، عبارت است از :

$$y = \cot^{-1} x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad 0 \leq y < \pi$$

$$R_f^{-1} = (0, \pi), D_{f^{-1}} = R$$

مشتق توابع مثلثاتی

به طور کلی مشتق تابع $y = \sin(u)$ ، که در آن u تابعی از x می باشد، به صورت زیر است:

$$y' = u'_x \cdot \cos u$$

:

مشتق تابع $y = \cos(u)$ ، که در آن u تابعی از x می باشد به صورت زیر

$$y' = -u'_x \sin u$$

است :



اگر $u = \tan(u)$ باشد، که در آن u تابعی از x است، در این صورت داریم:

$$y' = u' (1 + \tan^2 u)$$

و در مورد $y = \cot(u)$ داریم:

$$y' = -u' (1 + \cot^2 u)$$

مشتق توابع معکوس مثلثاتی

تابع معکوس سینوس، یعنی $y = \sin^{-1}(u)$ را که در آن u تابعی از x

می باشد در نظر گرفته، فرض می کنیم u تابعی مشتق پذیر نسبت به x است.

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \cos^{-1} u$$

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$



مشتق تابع معکوس کسینوس، یعنی $y = \cos^{-1}(u)$ که در آن نیز u تابعی از

x می باشد، عبارتند از:

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$



به همین ترتیب می توان ثابت کرد.

$$\begin{cases} y = \tan^{-1} u \\ y' = \frac{u'}{1+u^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \cot^{-1} u \\ y' = \frac{-u'}{1+u^2} \end{cases}$$

توابع نمایی، لگاریتمی و مشتق آنها

تعریف: اگر $a > 0$, x عدد حقیقی دلخواهی باشد، در این صورت **عدد نمایی** با پایه **a** را به صورت a^x نشان می دهیم که برابر است با :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n} = a^x$$

که در آن $\{u_n\}$ یک دنباله اعداد گویا است که به سمت x میل می کند.

تابع نمایی

تابع $y = a^x$ را که در آن a عددی مثبت و مخالف ۱ می باشد، **تابع نمایی**

خوانند. این تابع به ازای جميع مقادیر x (مثبت منفی و صفر، گویا و اصم)

تعریف شده است یعنی داریم $D_f = R$.

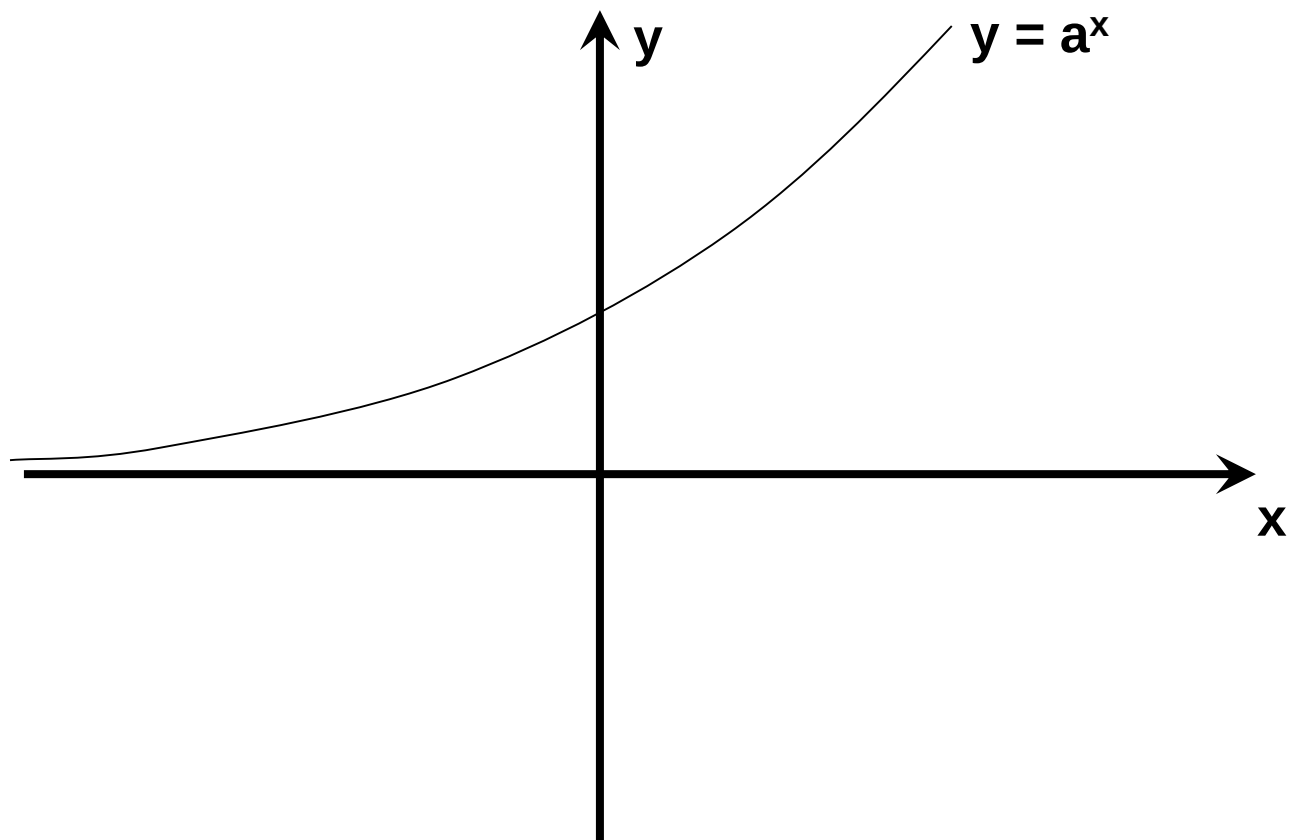


اگر $a > 1$ باشد این تابع همواره پیوسته است، ضمناً در این حالت همواره صعودی است.

اگر $0 < a < 1$ باشد تابع همواره نزولی است.

در هر دو حالت، حوزه تابع برابر است با $R_f = R^+$

تابع نمایی $a > 1$



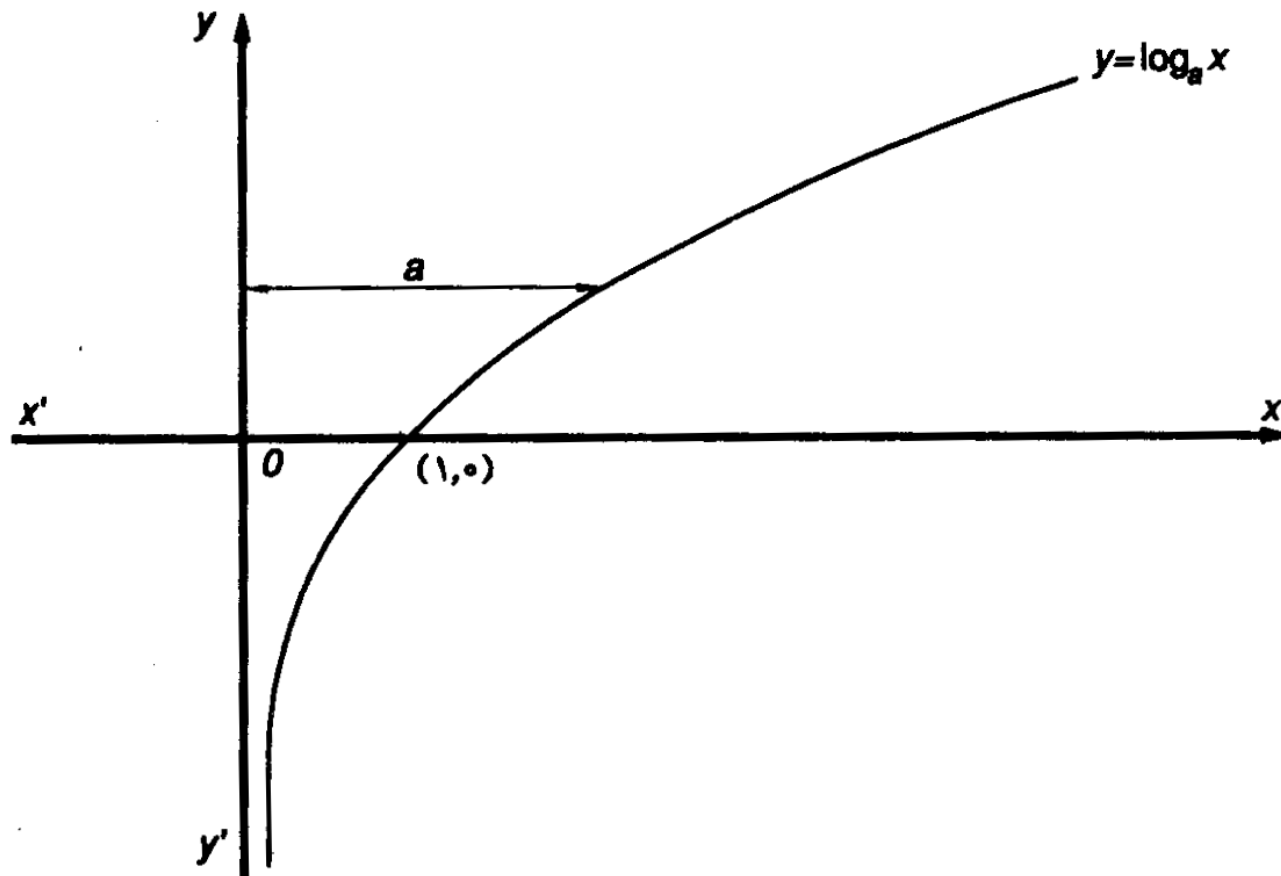
تابع لگاریتمی

تعریف :

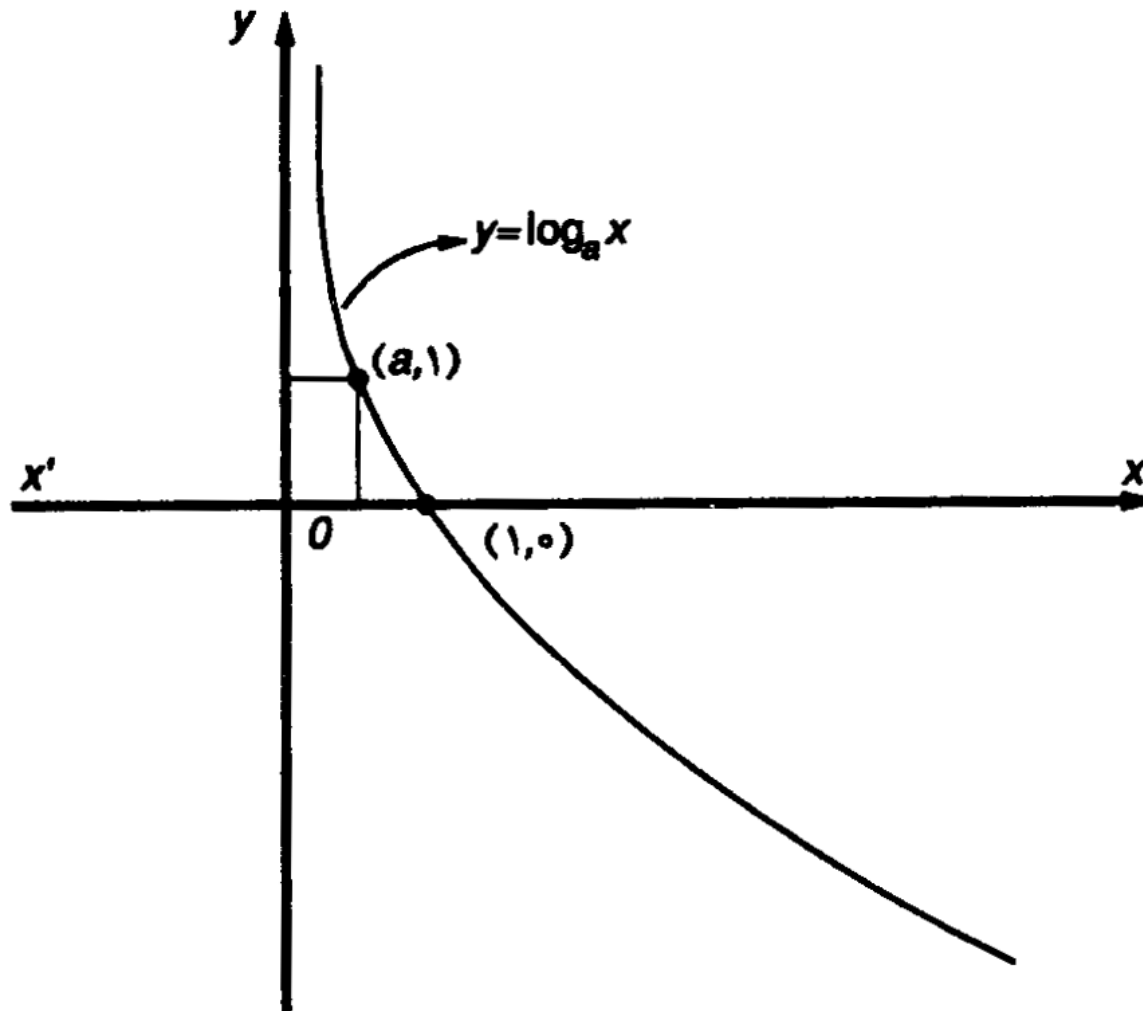
تابع لگاریتمی عبارت است از معکوس تابع نمایی $y = a^x$:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

تابع لگاریتمی



تابع لگاریتمی





اگر پایه لگاریتم $a = e$ باشد، لگاریتم طبیعی یا لگاریتم نپرین می نامند و به صورت زیر نشان می دهند.

$$\log_e x = \text{Log } x = Lx = \ln x$$

اگر مبنای لگاریتم $a = 10$ باشد، لگاریتم را لگاریتم اعشاری می خوانند.

اهم فرمول‌های لگاریتم

$$\left\{ \begin{array}{l} a^{\log_a x} = x \\ \log_a A + \log_a B = \log_a AB \\ \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B \\ \log_a A^n = n \log_a A \\ \log_a a = 1, \log_a 1 = 0 \\ \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \\ \log_b a \cdot \log_a b = 1 \end{array} \right.$$

مشتق تابع لگاریتمی

اگر $y = \log_a x$ باشد داریم:

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

اگر u تابعی از x باشد، داریم:

$$\begin{cases} y = \log_a u \\ y' = \frac{u'}{u \ln a} \end{cases}$$



اگر $a = e$ باشد.

$$\begin{cases} y = \ln x \\ y' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \ln u \\ y' = \frac{u'}{u} \end{cases}$$

مشتق تابع نمایی

فرض می کنیم $y = a^u$ است که در آن u تابعی پیوسته و نسبت به x مشتق

پذیر باشد. آنگاه

$$y' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$$

مثال

مشتق مرتبه اول و دوم تابع $y = e^{x^2+1}$ را محاسبه کنید.

$$y = e^{x^2+1}$$

$$y' = 2x \cdot e^{x^2+1}$$

$$y'' = 2e^{x^2+1} + 4x^2 e^{x^2+1}$$

کاربرد توابع نمایی در اقتصاد و بازرگانی

مرابحه مرکب

فرض می کنیم مبلغ a ریال به **مرابحه ساده** گذاشته باشیم. اگر سود یک ریال در سال i ریال باشد، پس از n سال سود متعلق به a ریال برابر است با :

$$P = a . i . n$$



حال فرض می کنیم سود سرمایه هر t سال، محاسبه و بر سرمایه افزوده می شود و برای t سال بعدی سرمایه جدید مبنای محاسبه قرار می گیرد. در این حالت، این مسئله را **مراحه مرکب** گویند و سود سال های متوالی و همچنین سرمایه جدید به قرار زیر است :

$$P_1 = ait$$

سود پس از t سال

$$A_1 = ait + a = a(1 + it)$$

سرمایه جدید پس از t سال



$$P_2 = a(1+it)it$$

سود پس از t سال دوم

$$A_2 = a(1+it)^2$$

سرمایه جدید پس از t سال دوم

$$P_3 = a(1+it)^2 it$$

سود پس از t سال سوم

$$A_3 = a(1+it)^3$$

سرمایه جدید پس از t سال سوم

$$P_k = a(1+it)^{k-1} it$$

سود پس از t سال k ام

$$A_k = a(1+it)^k$$

سرمایه جدید پس از t سال k ام



به طور کلی سرمایه حاصل پس از n سال با فرض اینکه هر t سال سود بر سرمایه افزوده شود برابر است با :

$$A = a(1 + it)^{\frac{n}{t}}$$

$$A = \lim_{t \rightarrow \infty} a(1 + it)^{\frac{n}{t}}$$

$$A = ae^{in}$$

این رابطه برای محاسبه مقدار عواملی که به طور پیوسته رشد و افزایش و یا کاهش می یابند به کار می رود.

مثال

اگر نرخ افزایش جمعیت یک شهر سالیانه ۵ در هزار باشد، با این فرض که جمعیت به طور پیوسته افزایش یابد، پس از ۱۰ سال جمعیت شهر دو میلیون نفری به چه تعداد خواهد رسید ؟

$$A = ae^{tn}$$

$$A = 2,000,000e^{0/005 \times 10} = 2,000,000e^{0/05} = 2,102,542$$

$$A = 2,102,542$$

جمعیت پس از ۱۰ سال



می دانیم اگر نرخ بهره برای یک ریال i باشد و سود، هر t سال بر سرمایه افزوده شود پس از n سال، سرمایه حاصل برابر است با :

$$A = a(1 + it)^{\frac{n}{t}}$$

بنا به تعریف، a را ارزش فعلی A ریال با شرایط فوق گویند و برابر است با :

$$a = A(1 + it)^{-\frac{n}{t}}$$

مسئله تشکیل سرمایه

فرض می کنیم می خواهیم سرمایه A ریال با اقساط سالیانه a ریال را پس از n سال تشکیل دهیم. سود حاصل از یک ریال در سال i می باشد، سرمایه تشکیل شده برابر است با :

$$A = a(1+i)^n + a(1+i)^{n-1} + \dots + a(1+i)$$

مجموع عبارت که یک تصاعد هندسی است، برابر است با :

$$A = a(1+i) \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

مسئله پرداخت وام

فرض می کنیم شخصی مبلغ D ریال وام گرفته است و می خواهد وام خود را طی n سال با اقساط مساوی a ریال بپردازد. اگر سود یک ریال i باشد، داریم:

$$D(1+i)^n$$

اصل و فرغ D ریال پس از n سال

سرمایه تشکیل شده از اقساط

$$A = a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^{n-2} + \dots + a(1+i) + a$$



اصل و فرع **D** ریال و سرمایه تشکیل شده برابر است با :

$$D(1+i)^n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$D = \frac{a}{i} \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

توابع رشد

راههای محاسبه رشد

فرض کنیم تابعی دارای معادله $y = f(t)$ باشد. بنا به تعریف نرخ رشد این تابع برابر است با :

$$G = \frac{y'}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

یا :

$$G = (\ln y)' = [\ln f(t)]' = \frac{f'(t)}{f(t)}$$

توابع هذلولی و مشتق آنها

تابع نمایی که به صورت $X = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ و

$Y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ نشان داده، می شود را به ترتیب، **کسینوس**

هذلولی و سینوس هذلولی می خوانیم، و آنها را **خطوط مثلثاتی هذلولی**

می نامیم.

سایر توابع هذلولی

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(تانژانت هذلولی)

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

(کوتانژانت هذلولی)

روابط بین توابع مثلثاتی هذلولی

$$\begin{cases} \cosh x - \sinh x = e^{-x} \\ \cosh x + \sinh x = e^x \end{cases}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \\ \sinh 2x = 2 \cosh x \cdot \sinh x \\ \tanh 2x = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x} \end{array} \right.$$

مشتق توابع هذلولی

اگر u تابعی از x باشد و نسبت به x مشتق پذیر فرض شود، داریم :

$$y = \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$y' = u' \cdot \cosh u$$

$$y = \cosh u \Rightarrow y' = u' \cdot \sinh u$$

$$y = \tanh u \Rightarrow y' = (1 - \tanh^2 u) \cdot u'$$

$$y = \coth u \Rightarrow y' = (1 - \coth^2 u) \cdot u'$$

توابع معکوس هذلولی و مشتق آنها

همانند توابع مثلثاتی داریم :

$$y = \sinh x \Rightarrow x = \sinh^{-1} y \Rightarrow y = \sinh^{-1} x \quad -\infty < x < +\infty$$

$$y = \cosh x \Leftrightarrow x = \cosh^{-1} y \Rightarrow y = \cosh^{-1} x \quad 1 \leq x < +\infty$$

$$y = \tanh x \Leftrightarrow x = \tanh^{-1} y \Rightarrow y = \tanh^{-1} x \quad -1 \leq x < 1$$

$$y = \coth x \Leftrightarrow x = \coth^{-1} y \Rightarrow y = \coth^{-1} x \quad |x| > 1$$

مشتق توابع معکوس هذلولی

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sinh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ y = \cosh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{\pm u'}{\sqrt{u^2 - 1}} \\ y = \tanh^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2} \quad |u| < 1 \\ y = \coth^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1 - u^2} \quad |u| > 1 \end{array} \right.$$

دیفرانسیل

فرض می کنیم تابع F در فاصله $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته و دارای مشتق باشد.

دیفرانسیل x را به dx نشان می هیم، dx می تواند هر مقداری را اختیار کند.
 $dx = \Delta x$



دیفرانسیل y را به dy نشان می دهیم و برابر است با :

$$dy = f'(x).dx$$

اگر $dx \neq 0$ باشد در این صورت داریم :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x).dx}{dx} = f'(x)$$

مثال

$$y = \sin x$$

$$dy = \cos x \cdot dx$$



تعریف: فرض می کنیم تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد.

اگر x به اندازه Δx نمو پیدا کند، y نیز به اندازه Δy نمو پیدا

می کند. هنگامی که Δx به سمت صفر میل کند Δy نیز به سمت صفر میل

می کند. قسمت اصلی این بینهایت کوچک برابر Δx . y' است. بنا به تعریف،

این قسمت اصلی را **دیفرانسیل** تابع y نامیده و به dy نشان می دهند. یعنی

داریم :

$$dy = y' \cdot \Delta x$$

دیفرانسیل تابع مرکب

فرض می کنیم $y = f(u)$ و u تابعی از x باشد.

$$dy = y'_x \cdot dx$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

پس :

$$dy = y'_u \cdot u'_x \cdot dx$$

اما $u'_x \cdot dx = du$ پس :

$$dy = y'_u \cdot du$$

جبر دیفرانسیل ها

دیفرانسیل های متوالی

دیفرانسیل y را به dy نشان می دهیم و آن را **دیفرانسیل مرتبه اول** تابع y گوئیم. حال تابع dy را در نظر گرفته، دیفرانسیل آن را به d^2y نشان می دهیم و آن را **دیفرانسیل مرتبه دوم** تابع $y = f(x)$ می گوئیم.

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

$$d^2y = f''(x).dx^2$$

یا

دifferansiyel مرتبه n ام

به طور کلی **دifferansiyel مرتبه n ام** برابر است با :

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n \quad n \in N$$

محاسبات تقریبی به کمک دیفرانسیل

برای محاسبه تقریبی $f(x+h)$ از روی $f(x)$ و $f'(x)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

مثال

سینوس ۴۶ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

حل : فرض می کنیم $f(x) = \sin x$ ، داریم: $f'(x) = \cos x$

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \cdot \Delta x$$

(برحسب رادیان) و ۴۵ درجه $x =$ پس :

$$\Delta x = \frac{\pi}{180} = \frac{3/14}{180} = 0/017$$

$$\sin 46^\circ \approx \sin 45^\circ + \cos 45^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180}$$

فصل پنجم

کاربردهای مشتق

اهداف کلی

هدف کلی از ارائه ی این فصل ارائه ی کاربرد مشتق از فصل ۴ می باشد که ما را در بررسی رفتار یک تابع کمک می کند. سپس کاربرد مشتق را در اقتصاد و بازرگانی در مورد توابع متوسط و نهایی، هزینه، کشش، درآمد و سود نشان می دهیم.

اهداف رفتاری

در انتهای این فصل از دانشجو انتظار می رود به اهداف زیر نائل گردد:

(۱) ماکزیمم و می نیمم نسبی یک تابع را به دست آورد.

(۲) قضایای رل و میانگین را به طور مناسب به کار گیرد.

(۳) تقعر و تحدب یک منحنی را به دست آورد.

(۴) نقطه ی عطف یک منحنی را به دست آورد.

(۵) مقدار تقریبی ریشه ها را به کمک روش نیوتن به دست آورد.

(۶) کشش تقاضا را محاسبه کند.

(۷) توابع درآمد، درآمد نهایی و درآمد مالیاتی را بنویسد.

(۸) با قاعده ی هوپیتال رفع ابهام کند.

(۹) در مورد صور مبهم دیگر بتواند آن ها را به فرمی در آورد که قاعده ی

هوپیتال قابل اعمال باشد.

کاربردهای مشتق

جهت تغییرات تابع

تابع f را در فاصله $[a, b]$ معین فرض می کنیم، یعنی داریم $[a, b] \subset D_f$. بنا به تعریف، f در این فاصله **صعودی** خوانده می شود اگر :

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

تابع f را در فاصله $[a, b]$ **نزولی** گویند، اگر :

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], \quad x_2 \geq x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



اگر تابع f در فاصله $[a, b]$ صعودی و یا فقط نزولی باشد، تابع را در این فاصله **یکنوا** خوانند.

قضیه :

اگر f اگر در فاصله D پیوسته باشد، (در این فاصله) موکداً صعودی است، اگر باشد؛ و موکداً نزولی است، اگر $f'(x) < 0$ باشد.

ماکزیمم و مینیمم یک تابع

اگر f تابعی با دامنه D_f در این صورت عدد k در حوزه تابع $(k \in R_f)$ را **ماکزیمم مطلق تابع f** نامند ، در صورتی که برای هر مقدار x در D_f داشته باشیم .

$$f(x) \leq k$$

و بر عکس اگر داشته باشیم :

$$f(x) \geq k$$

در این صورت k را **مینیمم مطلق** خوانند .



تابع $y=f(x)$ را در نظر می گیریم . فرض می کنیم ایت تابع در نقطه x_0 و همسایگی آن پیوسته باشد بنا به تعریف، این تابع در نقطه x_0 **ماکزیمم نسبی** است اگر به ازای جمیع نقاط $x_0+\Delta x$ واقع در همسایگی x_0 همواره داشته باشیم :

$$f(x_0+\Delta x) \leq f(x_0)$$



به همین ترتیب تابع در نقطه x_0 مینیمم نسبی است ، اگر :

$$(f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0))$$

ماکزیمم یا مینیمم تابع را ، **نقاط اکسترمم تابع** نیز گویند . هر نقطه که مینیمم یا ماکزیمم مطلق باشد مینیمم یا ماکزیمم نسبی نیز هست.

شرط لازم ماکزیمم و مینیمم نسبی

قضیه :

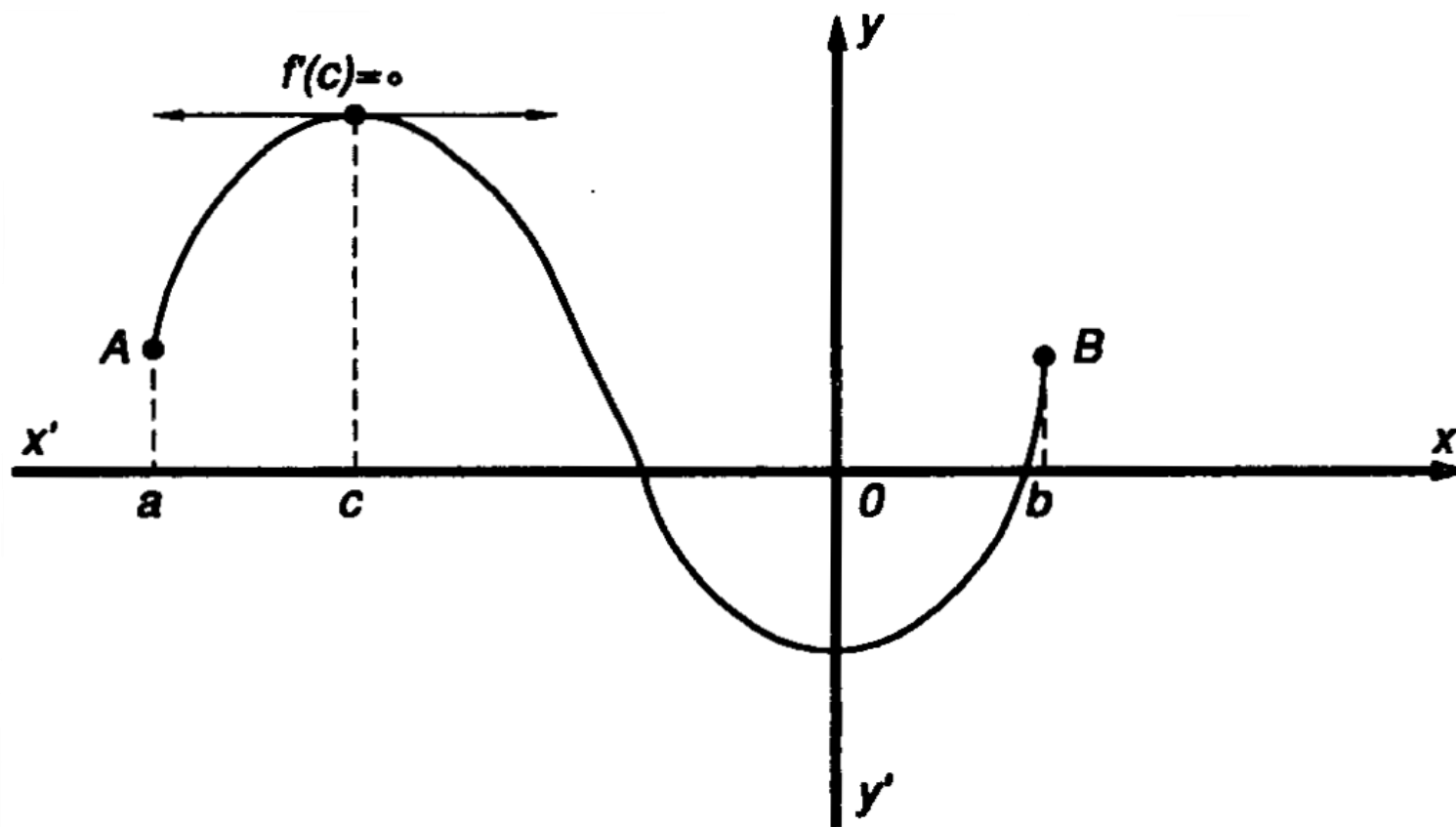
فرض کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه x_0 و همسایگی آن پیوسته بوده و در x_0 ماکزیمم یا مینیمم نسبی (اکسترمم) باشد . در ضمن این تابع در این نقطه دارای مشتق نیز می باشد، در این صورت $f'(x_0)=0$ است .

اگر مشتق تابعی در یک نقطه مانند x_0 باشد این نقطه را **نقطه بحرانی** تابع نامند.

قضیه رول

فرض می کنیم f تابعی باشد که در فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از فاصله (a,b) مشتق دارد ضمناً فرض می کنیم $f(a) = f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک نقطه مانند c در فاصله (a,b) وجود دارد که $f'(c)=0$ است.

تعبیر هندسی قضیه رول

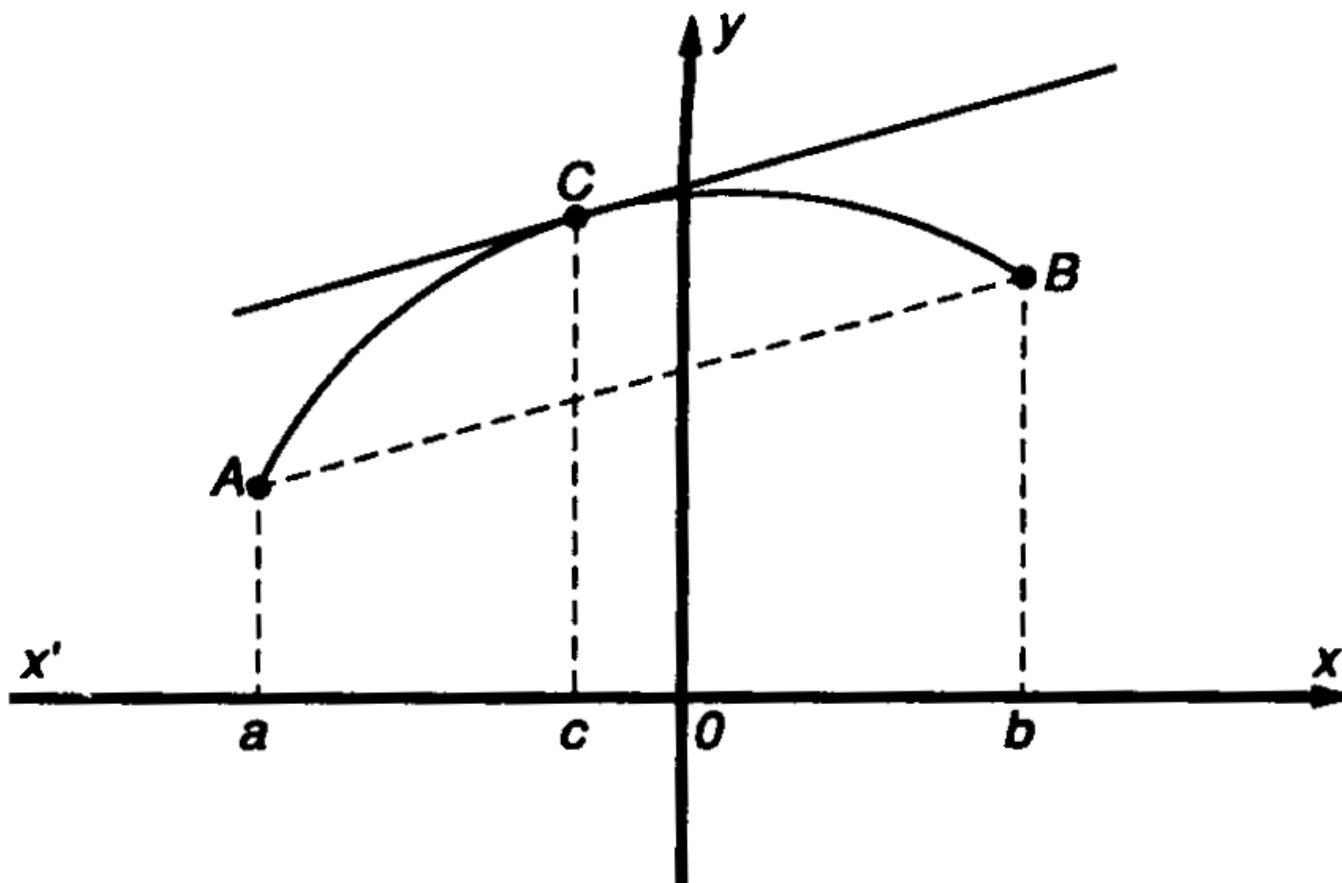


قضیه میانگین (مقدار میانگین برای مشتق)

فرض می کنیم تابع $f(x)$ در همه نقاط فاصله $[a,b]$ پیوسته بوده و در هر نقطه از فاصله باز (a,b) دارای مشتق باشد. در این صورت لاقلاً یک نقطه مانند c در فاصله (a,b) وجود دارد که به ازای آن داریم

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$$

تعبیر هندسی قضیه میانگین



تحدب و تقعر یک منحنی و نقطه عطف

تحدب و تقعر یک منحنی

تعریف منحنی تابع f را داری **تقعر به طرف بالا** (تحدب به طرف پایین) خوانند، اگر در نقطه $(c, f(c))$ اولاً مشتق، یعنی $f'(c)$ ، وجود داشته باشد؛ ثانیاً یک همسایگی در نقطه c موجود باشد به طوری که نمودار f در این همسایگی بالای (پایین) خط مماس واقع گردد.



معادله خط مماس D بر منحنی در نقطه $(c, f(c))$ با فرض وجود مشتق در این نقطه برابر است با:

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$

اگر اختلاف عرض های خط نقطه از خط مماس و منحنی را که دارای طول x است به $g(x)$ نشان دهیم ، داریم:

$$g(x) = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$



اگر $g(x) > 0$ باشد نقطه $(x, f(x))$ بالای خط مماس D بوده، و اگر $g(x) < 0$

باشد، نقطه مذکور، پایین خط مماس D است. ضمناً روشن است که $g(c) = 0$

است، پس می توان تعقر و تحدب منحنی را برحسب علامت $g(x)$ بیان کرد.

قضیه

اگر تابع f مفروض باشد و در c و همسایگی آن تعریف شده باشد، در این صورت در نقطه $(c, f(c))$:

(۱) تعقر منحنی f به طرف بالا است، اگر در $(c, f(c)), f''(c) > 0$ باشد.

(۲) تعقر منحنی f به طرف پایین است، اگر در $(c, f(c)), f''(c) < 0$ باشد.

تعیین ماکزیمم و مینیمم به کمک مشتق دوم

فرض می کنیم f تابعی است که $x = c$ ، نقطه بحرانی آن باشد. در ضمن

فرض می کنیم در یک همسایگی c تعریف شده باشد، در این صورت داریم :

(۱) ماکزیمم نسبی است اگر $f''(c) < 0$ باشد.

(۲) مینیمم نسبی است اگر $f''(c) > 0$ باشد.

اگر در این نقطه $f''(c) = 0$ باشد و یا تعریف نشده باشد، آزمون مشتق دوم برای تعیین نوع نقطه بحرانی به کار نمی رود.

نقطه عطف

تعریف : نقطه $M(c, f(c))$ **نقطه عطف** نمودار تابع f است، اگر یک همسایگی c مانند (a, b) وجود داشته باشد به طوری که برای هر x در فاصله $f''(x) > 0, (a, c)$ و برای هر x در فاصله $f''(x) < 0, (c, b)$ باشد و یا برعکس.

اگر $M(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار f باشد و $f''(x)$ وجود داشته باشد، در این صورت لازم است که $f''(x) = 0$ باشد.

قضیه

اگر f تابعی باشد که برای آن نقطه ای مانند $x = c$ وجود داشته، به طوری که $f''(c) = 0$ باشد، در صورتی نقطه $M(c, f(c))$ نقطه عطف نمودار f است که همسایگی از c مانند (a, b) وجود داشته باشد به طوری که :

(۱) $f''(x)$ در همسایگی مذکور وجود داشته و برای هر x متعلق به این فاصله (به جز $x \neq c$)، $f''(x) \neq 0$ باشد.

(۲) $f''(a)$ ، $f''(b)$ مختلف علامت باشند.

نتیجه

به طور کلی برای تعیین ماکزیمم و مینیمم و نقاط عطف یک منحنی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱) ابتدا از تابع مشتق گرفته را مساوی صفر قرار می‌دهیم. معادله‌ای به دست می‌آید که ریشه‌های حقیقی آن را تعیین می‌کنیم. فرض می‌کنیم که داریم :

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x) = 0 \Rightarrow x = a$$

طول نقطه را در تابع قرار داده، عرض آن را تعیین می‌کنیم، یعنی $M(a, f(a))$. نقطه **M** را نقطه بحرانی **f** خوانند. این نقطه ممکن است ماکزیمم یا مینیمم یا هیچ کدام باشد.



۲) برای تعیین نوع نقطه بحرانی، می توان از تغییر علامت مشتق در $x = a$ استفاده کرد. اگر $\langle \circ, x \rangle a, f'(x) \rangle \circ, x \langle \circ$ باشد، نقطه M ماکزیمم نسبی است. اگر $x \langle \circ$ $f'(x) \langle \circ, f'(x) \rangle \circ, x \rangle \circ$ باشد، نقطه M مینمم نسبی است.



۳) برای تعیین نوع نقطه بحرانی می توان از علامت مشتق دوم، $y'' = f''(x)$ یعنی استفاده کرد.

الف) اگر $f''(a) < 0$ باشد نقطه بحرانی M ماکزیمم نسبی است.

ب) اگر $f''(a) > 0$ باشد نقطه M مینم نسبی است.

ج) اگر $f''(a) = 0$ باشد، اگر در همسایگی a همواره $f''(x) < 0$ باشد، نقطه M

ماکزیمم است. اگر در همسایگی $x = a$ ، همواره $f''(x) > 0$ باشد، نقطه مینم نسبی

است. اگر در همسایگی نقطه $x = a$ علامت $f''(x)$ در دو طرف a متقارن باشد، نقطه

M ماکزیمم و مینم نیست بلکه نقطه، نقطه عطف خواهد بود.



برای تعیین نقطه عطف، ابتدا $y'' = f''(x)$ را تشکیل می دهیم، و آن را مساوی صفر قرار می دهیم : داریم :

$$y'' = f''(x) = 0 \Rightarrow x = c \quad A(c, f(c))$$

برای تعیین اینکه نقطه **A** نقطه عطف است، کافیست نشان دهیم $y'' = f''(x)$ در نقطه $x = a$ تغییر علامت می دهد.

روش های تعیین مقدار تقریبی ریشه های حقیقی یک معادله

روش نیوتن

فرض می کنیم تابع f در فاصله $[a, b]$ پیوسته و مشتق پذیر باشد و همچنین فرض می کنیم فاصله ای مانند $[x_1, x_2]$ زیرمجموعه از فاصله $[a, b]$ وجود داشته باشد، به طوری که تابع در این فاصله یکنوا (یعنی یا صعودی و یا نزولی باشد) و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ دارای علامت های مختلف باشند. بنا به فرض، $f(x_1) < 0$ ، $f(x_2) > 0$ است. با توجه به اینکه تابع در این فاصله صعودی یا نزولی است، لذا در این فاصله تنها یک جواب وجود دارد که $f(x) = 0$ گردد.



فرض می کنیم مشتق دوم تابع در فاصله $[x_1, x_2]$ ثابت بماند. اگر چنین نباشد با کاهش فاصله، فاصله ای را پیدا می کنیم که مشتق دوم در فاصله مورد نظر دارای این خاصیت باشد. می دانیم اگر در فاصله ای $y'' > 0$ باشد تعقر به طرف بالا و اگر $y'' < 0$ باشد تعقر به سمت پایین است. از نقطه **B** مماسی بر منحنی رسم می کنیم تا محور **x** ها را در نقطه ای واقع بین x_1 و x_2

قطع کند؛ یعنی در نقطه **B** معادله مماس به صورت زیر است :

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$$



آن را با محور x ها قطع می کنیم، نقطه a_1 به دست می آید، یعنی $y=0$ ،

پس داریم :

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

نقطه B_1 را به طول a_1 بر منحنی در نظر می گیریم و ریشه نزدیکتر a_2 را به روش مشابه فوق به دست می آوریم و با ادامه این روش می توان ریشه معادله را با هر تقریب موردنظری به دست آورد.

کاربردهای مشتق در اقتصاد و بازرگانی

توابع متوسط و نهایی

فرض می کنیم تابع $y = f(x)$ تابع هزینه کل، یا درآمد کل و یا ... باشد. بنا به تعریف، **تابع متوسط** برابر است با مقدار تابع برای یک واحد. می دانیم مقدار تابع به ازای واحد است، بنابراین مقدار برای یک واحد برابر است با :

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} = \bar{y} \quad \text{یا} \quad AV_y$$



می دانیم که داریم :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

بنا به تعریف، این مشتق را **تابع نهایی** **y** گوئیم، یعنی داریم :

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = My$$

My تابع نهایی **y** است.

تابع هزینه

فرض می کنیم هزینه کل تولید و بازاریابی x واحد از یک کالا برابر y بوده که به معادله $TC = y = f(x)$ نشان داده شده است. در این صورت، **هزینه متوسط** که آن را به **AVC** نشان می دهیم طبق رابطه (۵-۱۰) برابر است با :

$$AVC = \bar{y} = \frac{f(x)}{x}$$

هزینه نهایی که آن را به **MC** نشان می دهیم برابر است با :

$$MC = y' = f'(x)$$

ثابت می کنیم تابع هزینه نهایی از مینم هزینه متوسط می گذرد.