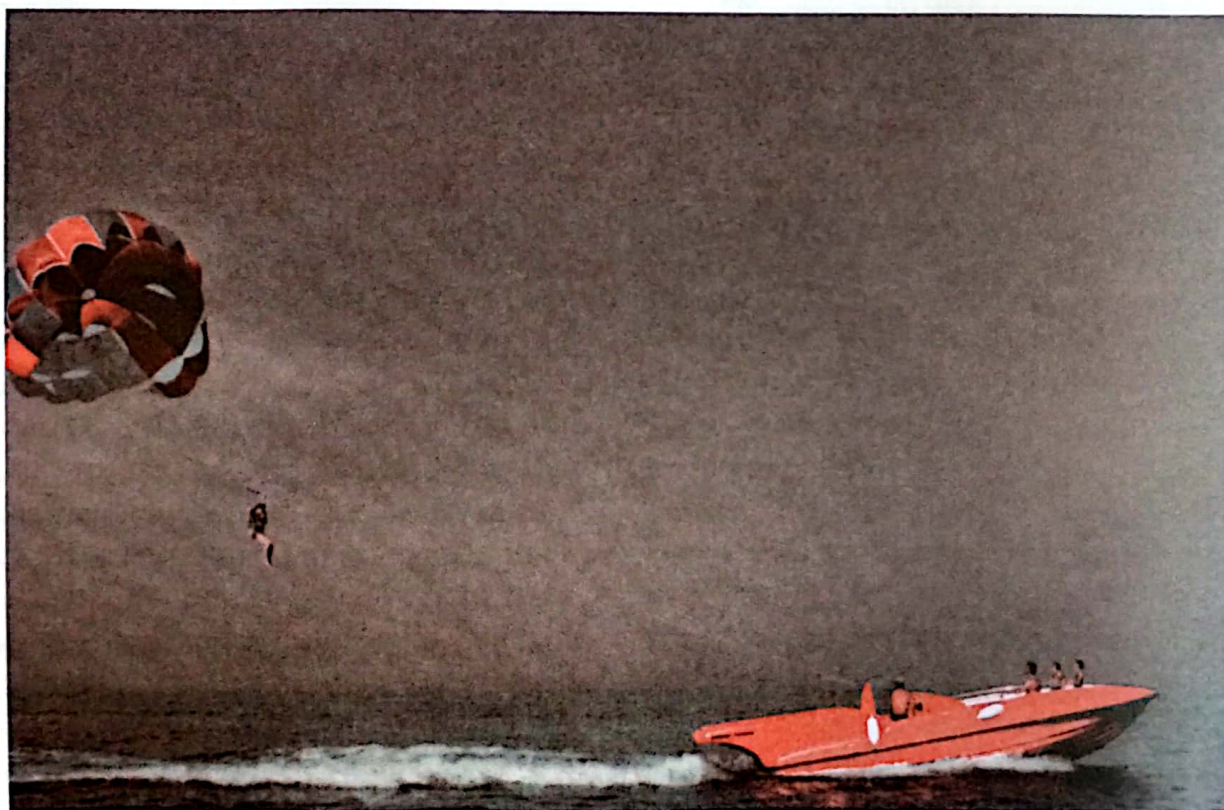
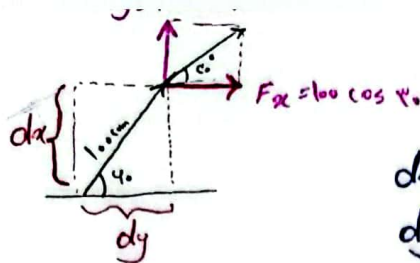


فصل ۳

اجسام صلب: سیستم نیروهای معادل



در این فصل نشان می‌دهیم که نیروهای ناهم‌مرس وارد بر بادبان کشتی را می‌توان با سیستم معادل جایگزین کرد.



$$dx = 100 \sin 40$$

$$dy = 100 \cos 40$$

$$M = M_{Fx} + M_{Fy}$$

$$= -100 \cos 40' + 100 \sin 40 + 100 \sin 40' + 100 \cos 40''$$

اجسام صلب: سیستم نیروهای معادل

گشتاور کوپل	۱۲.۳	مقدمه	۱.۳
کوپلهای معادل	۱۳.۳	نیروهای خارجی و نیروهای داخلی	۲.۳
جمع بستن کوپلها	۱۴.۳	اصل قابلیت انتقال. نیروهای معادل	۳.۳
کوپلها را می توان با بردار نمایش داد	۱۵.۳	ضرب برداری دو بردار	۴.۳
تجزیه یک نیروی معین به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل	۱۶.۳	حاصل ضرب برداری بر حسب مؤلفه های قائم	۵.۳
تبدیل سیستم نیروها به یک نیرو و یک کوپل	۱۷.۳	گشتاور نیروی حول یک نقطه	۶.۳
سیستم نیروهای معادل	۱۸.۳	قضیه واریتون	۷.۳
سیستم بردارهای هم سنگ	۱۹.۳	مؤلفه های قائم گشتاور یک نیرو	۸.۳
بیشتر خلاصه کردن سیستم نیروها	۲۰.۳	ضرب اسکالر دو بردار	۹.۳
خلاصه کردن سیستم نیروها به یک رنج	۲۱.۳	ضرب سه گانه مختلط سه بردار	۱۰.۳
		گشتاور یک نیرو حول محور معین	۱۱.۳

اسکالر دو بردار است، مبانی جبر برداری را در این فصل ارائه می کنیم و آنها را به حل مسئله های مربوط به تأثیر نیرو بر روی جسم صلب به کار می بریم. مفهوم دیگری که در این فصل معرفی خواهیم کرد مفهوم کوپل است که ترکیبی از دو نیرو با بزرگیهای مساوی و خط اثرهای موازی که در خلاف جهت باشند (بخش ۱۲.۳). چنانکه بعداً خواهیم دید، هر سیستم از نیروهای وارد بر یک جسم صلب را می توان به یک سیستم معادل تبدیل کرد که شامل یک نیرو در یک نقطه معین و یک کوپل باشد. این سیستم را سیستم کوپل-نیرو می گویند. در نیروهای هم رس، هم صفحه، یا موازی، سیستم کوپل-نیرو معادل را می شود از هم ساده تر کرد و آن را به یک تک نیرو تبدیل کرد، آن را برابند سیستم نامید، یا به یک تک کوپل تبدیل کرد و آن را کوپل برابند سیستم نامید.

۲.۳ نیروهای خارجی و نیروهای داخلی

نیروهایی که به اجسام صلب وارد می شوند به طور کلی دو دسته اند: (۱) نیروهای خارجی، و (۲) نیروهای داخلی.

۱. نیروهای خارجی، نماینده کش سایر اجسام بر روی جسم صلب مورد نظر. این نیروها رفتار خارجی جسم صلب را کاملاً توجیه می کنند. نیروهای خارجی چه را یا به حرکت در می آورند و یا آن را همچنان ساکن نگه می دارند. در این فصل فصلهای ۴ و ۵ فقط با نیروهای خارجی سروکار داریم.

۲. نیروهای داخلی، نیروهایی هستند که ذرات تشکیل دهنده جسم صلب را کنار هم نگه می دارند. اگر جسم صلب از لحاظ ساختاری از چند جزء مختلف تشکیل شده باشد، آن نیروهایی هم که به ماندن این اجزا در کنار هم کمک می کنند نیروهای داخلی اند. بحث درباره نیروهای داخلی را به فصلهای ۶ و ۷ موکول می کنیم.

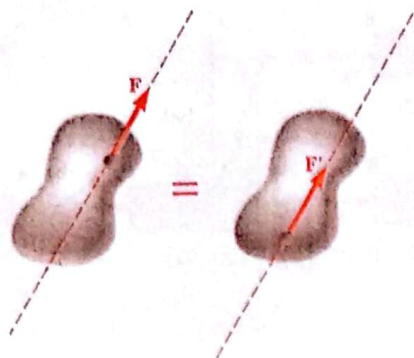
۱.۳ مقدمه

در فصل گذشته فرض کردیم که اجسام مورد نظرمان را می توانیم ذره تلقی کنیم. اما چنین فرضی همیشه امکان پذیر نیست و عموماً باید جسم را به صورت مجموعه ذرات در نظر بگیریم. باید اندازه جسم را به حساب آوریم و این نکته را هم در نظر بگیریم که نیروها به ذره های مختلف وارد می شوند و بنابراین نقطه اثرهای متفاوتی دارند.

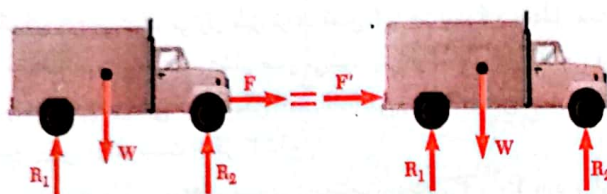
بیشتر اجسامی که در مکانیک مقدماتی با آنها مواجه می شویم صلب فرض می شوند. اگر جسمی تغییر شکل ندهد جسم صلب نامیده می شود. اما سازه ها و ماشینهای واقعی هرگز به طور مطلق صلب نیستند و در اثر بارهایی که به آنها وارد می شود، تغییر شکل می دهند. اما این تغییر شکلها معمولاً کوچک اند و اثر قابل ملاحظه ای روی شرایط تعادل یا حرکت سازه مورد نظر نمی گذارند. با این حال، هر وقت که مقاومت سازه تا حد مورد نظر باشد، این نیروها مهم اند و در مطالعه مکانیک مواد (مقاومت مصالح) به حساب خواهند آمد.

در این فصل می خواهیم تأثیر نیروها بر روی اجسام صلب را مطالعه کنیم و ببینیم که چگونه می شود یک سیستم از نیروهای معین را به یک سیستم معادل ساده تر تبدیل کرد. تحلیل ما با انتقال دادن، بر این فرض اساسی مبتنی خواهد بود که اگر یک نیرو را در امتداد خط اثرش حرکت بدهیم تغییری در تأثیر آن نیرو بر روی یک جسم صلب پیش نمی آید (اصل قابلیت انتقال). بنابراین نتیجه می شود، چنانکه پیش از این در بخش ۳.۲ متذکر شدیم، در مورد اجسام صلب نیروها را می توان با بردارهای لغزان نشان داد.

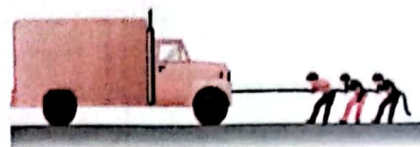
اثر یک نیرو بر روی جسم صلب دو مفهوم را در برمی گیرد که عبارت اند از: گشتاور یک نیرو حول یک نقطه (بخش ۶.۳) و گشتاور یک نیرو حول یک محور (بخش ۱۱.۳). از آنجا که تعیین این کمیتها مستلزم محاسبه حاصل ضربهای برداری و حاصل ضربهای



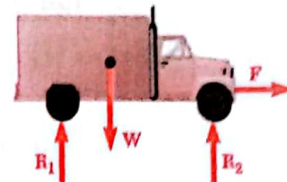
شکل ۳.۳



شکل ۴.۳



شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

تجربی است و نمی‌شود آن را از روی خواصی که تا اینجا ثابت کرده‌ایم به دست آورد و بنابراین باید آن را به منزله یک قانون تجربی پذیرفت. اما، بعداً در قسمت ۵.۱۶ در درس دینامیک خواهیم دید که همین اصل قابلیت انتقال را می‌شود از مطالعه دینامیک اجسام صلب به دست آورد، ولی این مطالعه مستلزم معرفی قوانین دوم و سوم نیوتن و بعضی مفاهیم دیگر است. بنابراین استاتیک اجسام صلب را براساس همان سه اصلی که تا به حال بیان کرده‌ایم، یعنی قانون جمع متوازی‌الاضلاع، قانون اول نیوتن، و اصل قابلیت انتقال، مطالعه می‌کنیم.

در فصل ۲ دیدید که نیروهای وارد بر یک ذره را می‌توان با بردارها نمایش داد. این بردارها نقطه اثر کاملاً معینی داشتند که همان خود ذره بود، و بنابراین بردارهای ثابت یا مقید بودند. اما در مورد نیروهای وارد بر یک جسم صلب، تا وقتی که خط اثر نیرو تغییر نکند، نقطه اثر مهم نیست. پس در مورد اجسام صلب نیروها را باید با نوع دیگری از بردارها نشان داد، که به بردارهای لغزان معروف‌اند، چون مجازند که در امتداد خط اثرشان بلغزند. باید توجه داشته باشید که همه خواصی که در بخشهای آینده برای نیروهای وارد بر یک جسم صلب به دست می‌آیند، عموماً برای هر سیستم بردارهای لغزان معتبرند. با وجود این برای اینکه نمایش مطلب شهودی‌تر باشد، آن را برحسب نیروهای فیزیکی بیان می‌کنیم، نه برحسب بردارهای لغزان که صرفاً جنبه ریاضیاتی دارند.

دوباره برمی‌گردیم به مثال کامیون و می‌بینیم که خط اثر نیروی F یک خط افقی است که هم از سپر جلو می‌گذرد و هم از سپر عقب (شکل ۴.۳). بنابراین طبق اصل قابلیت انتقال، می‌توانیم F را برداریم و به جای آن نیروی معادل F' را بگذاریم که به سپر عقب وارد می‌شود. به عبارت دیگر، اگر به جای کشیدن سپر جلو، سپر عقب را برانیم هیچ تغییری در شرایط حرکت و در سایر نیروهای خارجی وارد بر کامیون (W ، R_1 ، R_2) ایجاد نمی‌شود.

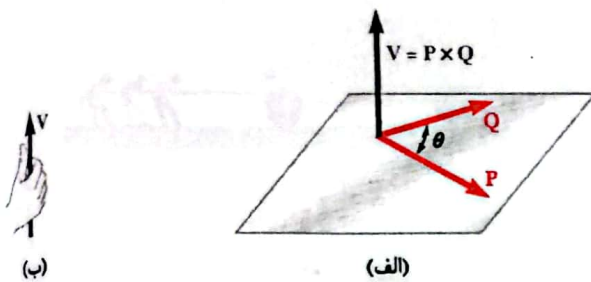
اصل قابلیت انتقال و مفهوم نیروهای معادل محدودیتهایی هم دارند. مثلاً در مورد میله کوتاه AB ، فرض می‌کنیم که به آن نیروهای محوری برابر و مخالف P_1 و P_2 ، مطابق شکل ۵.۳ (الف)، وارد می‌شوند. بنا به اصل قابلیت انتقال، می‌توان نیروی P_2

به عنوان مثال، برای نیروهای خارجی، نیروهایی را در نظر بگیرید که به یک کامیون از کار افتاده وارد می‌شوند و چند نفر آن را توسط طناب متصل به سپر جلوی کامیون می‌کشند (شکل ۱.۳). نیروهای خارجی وارد بر این کامیون را در نمودار جسم آزاد (شکل ۲.۳) می‌بینید. اول از همه وزن کامیون را در نظر می‌گیریم. اگرچه وزن، اثر کشش زمین بر روی همه ذرات تشکیل دهنده کامیون است، اما می‌شود آن را با یک تک نیروی W نمایش داد. نقطه اثر این نیرو، یعنی نقطه‌ای که این نیرو به آن وارد می‌شود، بنا به تعریف مرکز گرانی کامیون است. در فصل ۵ روش پیدا کردن مرکز گرانی را مطرح خواهیم کرد. وزن کامیون (W) می‌خواهد آن را در امتداد قائم و رو به پایین حرکت دهد، یعنی اگر کامیون بر روی زمین نبود سقوط می‌کرد. در واقع، زمین به وسیله عکس‌العملهایش (R_1 و R_2) با حرکت رو به پایین کامیون مخالفت می‌کند. اینها نیروهایی هستند که زمین به کامیون وارد می‌کند و بنابراین باید جزء نیروهای خارجی وارد به کامیون باشند.

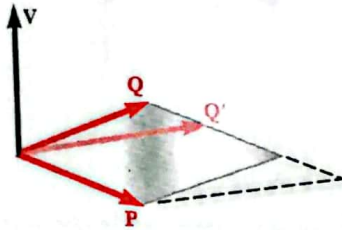
افرادی که کامیون را با طناب می‌کشند نیروی F را به آن وارد می‌کنند. نقطه اثر F روی سپر جلوی کامیون است. نیروی F می‌خواهد کامیون را به جلو، و در امتداد خط راست حرکت دهد و عملاً این کار را هم می‌کند، زیرا هیچ نیروی خارجی‌ای برای مخالفت با این حرکت در کار نیست. (البته به خاطر سهولت از مقاومت غلشی چرخها صرف نظر کرده‌ایم). این حرکت رو به جلوی کامیون را، که در طی آن همه خطوط حرکت موازی هستند (کف کامیون افقی و دیوارهایش در تمام مدت عمودی می‌مانند)، انتقال می‌گویند. نیروهای دیگر ممکن است که حرکتی متفاوت از انتقال ایجاد کنند. مثلاً نیرویی که یک جک واقع در زیر محور چرخهای جلو اعمال می‌کند، باعث می‌شود که کامیون حول محور عقبی‌اش بچرخد. چنین حرکتی را دوران می‌گویند. بنابراین می‌شود نتیجه گرفت که هریک از نیروهای خارجی وارد بر یک جسم صلب، اگر با نیروی مخالفی روبه‌رو نشود، می‌تواند به جسم صلب حرکت انتقالی یا دورانی بدهد، و یا اینکه هر دو را ایجاد کند.

۳.۳ اصل قابلیت انتقال. نیروهای معادل

اصل قابلیت انتقال می‌گوید که شرایط تعادل یا حرکت یک جسم صلب بدون تغییر می‌ماند اگر نیروی F وارد بر نقطه‌ای مفروض از جسم صلب را توسط نیروی F' که مقدار و امتدادی برابر با F دارد، اما در نقطه‌ای دیگر وارد می‌شود جایگزین کنیم، به شرط اینکه دو نیرو دارای یک خط اثر باشند (شکل ۳.۳). دو نیروی F و F' تأثیر یکسانی بر روی جسم صلب می‌گذارند و اصطلاحاً می‌گویند که معادل‌اند. این اصل، که می‌گوید اثر یک نیرو را می‌توان در امتداد خط اثرش منتقل کرد، مبتنی بر شواهد



شکل ۶.۳



شکل ۷.۳

و Q نقطه اثر مشترک نداشته باشند، ابتدا می‌بایست آنها را از یک نقطه رسم کرد، سه بردار P ، Q ، و V اصطلاحاً سه تایی راستگرد می‌گویند.^۱ همان‌طور که در بالا گفتیم، بردار V که این سه شرط را برآورده می‌کند (و تعریف یگانه است) حاصلضرب برداری P و Q است و به بیان ریاضیاتی به این صورت نشان داده می‌شود

$$V = P \times Q \quad (۲.۳)$$

ضرب برداری دو بردار P و Q را به خاطر نمادی که میان آنهاست ضرب چلیبی P و Q هم می‌گویند.

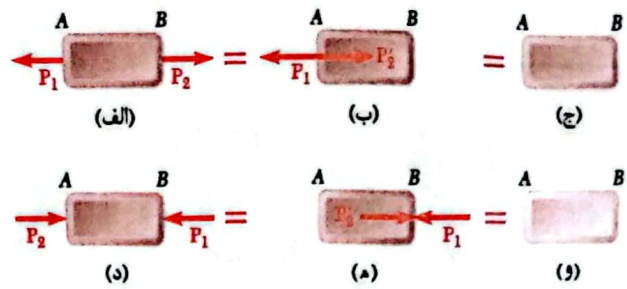
از معادله (۱.۳) نتیجه می‌شود که، وقتی دو بردار P و Q هم‌جهت یا در خلاف جهت هم باشند، حاصلضرب برداری آنها صفر می‌شود. در حالت کلی وقتی زاویه θ متشکل از دو بردار صفر یا ۱۸۰° نباشد، برای معادله (۱.۳) می‌شود یک تعبیر هندسی ارائه کرد: بزرگی (V) حاصلضرب برداری P و Q برابر با مساحت متوازی‌الاضلاع است که از دو ضلع P و Q ساخته می‌شود (شکل ۷.۳). بنابراین حاصلضرب برداری $P \times Q$ ثابت می‌ماند اگر به جای Q ، بردار Q' ، هم صفحه با دو بردار P و Q را جایگزین کنیم، به‌طوری که خط واصل دو سر Q و Q' با P موازی باشد. یعنی

$$V = P \times Q = P \times Q' \quad (۳.۳)$$

از سومین شرطی که برای تعریف ضرب برداری V از P و Q به کار بردیم — یعنی شرطی که می‌گفت P ، Q ، و V باید تشکیل یک سه تایی راستگرد بدهند — نتیجه می‌شود که در ضرب برداری، جای دو بردار را نمی‌توان عوض کرد، یا به عبارت دیگر ضرب برداری تعویض‌ناپذیر است، یعنی $Q \times P$ مساوی با $P \times Q$ نیست. در واقع به سهولت معلوم می‌شود که حاصلضرب $Q \times P$ نماینده $-V$ است که برابر با V و در خلاف جهت آن است. بنابراین می‌نویسیم

$$Q \times P = -(P \times Q) \quad (۴.۳)$$

۱. یادآوری می‌کنیم که محورهای x ، y ، و z در فصل ۲، یک سیستم راستگرد از محورهای قائم را تشکیل می‌دهند و بردارهای یک i ، j ، و k در بخش ۱۲.۲ معرفی کردیم نیز یک سوجهی قائم راستگرد به وجود می‌آورند که از قانون دست راست تبعیت می‌کند.



شکل ۵.۳

را برداشت و به جای آن نیروی P_1' را گذاشت که از هر لحاظ شبیه به P است، منتها به جای B به A وارد می‌شود [شکل ۵.۳ (ب)]. نیروهای P_1 و P_1' را که به یک ذره وارد می‌شوند، می‌توان طبق قواعد فصل ۲ با هم جمع کرد. به دلیل مساوی و مختلف‌الجهت بودن مجموعشان صفر می‌شود. پس از لحاظ رفتار خارجی میله، سیستم اصلی نیروهایی که در شکل ۵.۳ (الف) می‌بینید معادل این است که انگار هیچ نیرویی در کار نیست [شکل ۵.۳ (ج)].

حال میله AB و نیروهای مساوی و مختلف‌الجهت، P_1 و P_2 وارد بر آن را در وضعیت شکل ۵.۳ (د) در نظر بگیرید. به جای نیروی P_2 می‌توانیم نیروی P_1' را بگذاریم که بزرگی، راستا، و خط اثرش با P یکی است و به جای A به B وارد می‌شود [شکل ۵.۳ (ه)]. اینجا هم اگر نیروهای P_1 و P_1' را با هم جمع کنیم، مجموعشان صفر می‌شود [شکل ۵.۳ (و)]. بنابراین، از دیدگاه مکانیک اجسام صلب، سیستمهای نشان داده شده در شکلهای ۵.۳ (الف) و (د) با هم معادل‌اند. اما واضح است که نیروهای داخلی و تغییر شکلهای حاصل از این دو سیستم متفاوت‌اند. میله شکل ۵.۳ (الف) تحت کشش است و اگر کاملاً صلب نباشد، کمی افزایش طول پیدا خواهد کرد؛ برعکس میله شکل ۵.۳ (د) تحت فشار است و اگر کاملاً صلب نباشد طولش کمی کوتاه خواهد شد. پس، هرچند که اصل قابلیت انتقال را می‌توانیم آزادانه برای تعیین شرایط حرکت یا تعادل اجسام صلب و محاسبه نیروهای خارجی وارد بر این اجسام به کار ببریم، اما باید از کاربرد آن برای تعیین نیروهای داخلی و تغییر شکلهای اجتناب کنیم، یا دست‌کم آن را با احتیاط به کار ببریم.

۴.۳ ضرب برداری دو بردار

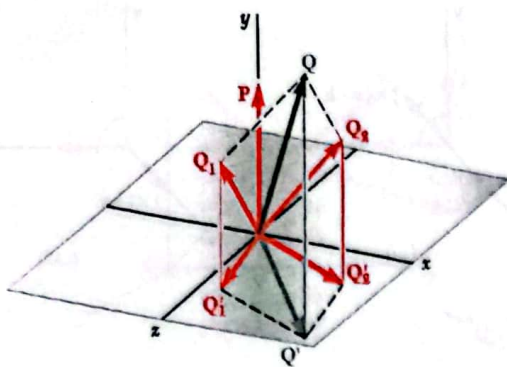
حال به منظور درک بهتر اثر نیرو بر روی جسم صلب، می‌خواهیم مفهوم جدیدی را معرفی کنیم که به آن گشتاور نیرو حول یک نقطه می‌گویند. اما اول به ابزارهای ریاضی در اختیارمان، ضرب برداری دو بردار را هم می‌افزاییم تا درک این مفهوم راحت‌تر و در عمل بهتر به کار گرفته شود.

حاصلضرب برداری دو بردار P و Q بنا به تعریف یک بردار V است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

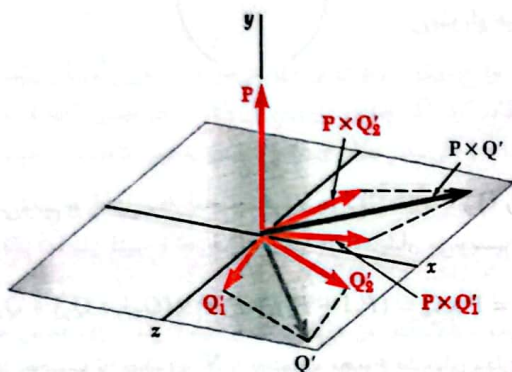
۱. خط اثر بردار V بر صفحه شامل P و Q عمود است [شکل ۶.۳ (الف)].
۲. بزرگی V برابر با حاصلضرب بزرگیهای P و Q و سینوس زاویه بین آنها، یعنی θ ، است (که همیشه اندازه‌اش کوچکتر یا مساوی ۱۸۰° خواهد بود)؛ پس داریم

$$V = PQ \sin \theta \quad (۱.۳)$$

۳. جهت V از روی قاعده دست راست تعیین می‌شود. دست راست خود را طوری نگه دارید که جهت حرکت انگشتان در جهت حرکت بردار P باشد که به اندازه زاویه θ بچرخد تا بر روی بردار Q منطبق شود. در این حالت انگشت شست جهت بردار V حاصلضرب را نشان می‌دهد [شکل ۶.۳ (ب)]. توجه داشته باشید که اگر P



(الف)



(ب)

شکل ۹.۳

خاصیت سوم، یعنی خاصیت شرکت‌پذیری را در مورد ضربهای برداری نمی‌توان به کار برد و در حالت کلی داریم

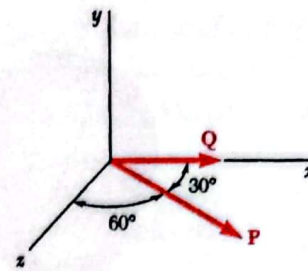
$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S) \quad (۶.۳)$$

۵.۳ حاصلضرب برداری برحسب مؤلفه‌های قائم

حالا بیایید حاصلضرب برداری هر دو بردار یک‌ه‌، ج‌، و ک را که در فصل ۲ تعریف کردیم تعیین کنیم. اول از همه حاصلضرب $\vec{i} \times \vec{j}$ [شکل ۱۰.۳ (الف)] را در نظر بگیرید. از آنجا که بزرگی این بردارها هر دو برابر با یک است و برهم عمودند، حاصلضرب برداری آنها هم یک بردار یک‌ه می‌شود. این بردار یک‌ه باید ک باشد، چون بردارهای $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ دو به دو برهم عمودند و تشکیل یک سه‌تایی راست‌گرد را می‌دهند. از طرف دیگر، بنا به قاعده‌ انگشتی دست راست نتیجه می‌شود که حاصلضرب $\vec{i} \times \vec{j}$ برابر با $\vec{k}$ خواهد بود [شکل ۱۰.۳ (ب)]. سرانجام معلوم می‌شود که حاصلضرب برداری یک بردار یک‌ه در خودش، مثل $\vec{i} \times \vec{i}$ ، برابر با صفر است، زیرا هر دو بردار در یک امتدادند. حاصلضربهای برداری جفت بردارهای یک‌ه عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} &= 0 & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} & \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \\ \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} & \vec{j} \times \vec{j} &= 0 & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} & \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} & \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

راه ساده تعیین علامت حاصلضرب برداری هر دو بردار یک‌ه این است که حرفهای نماینده آنها را به ترتیب پادساعتگرد روی یک دایره قرار دهیم (شکل ۱۱.۳): اگر ترتیب ضرب بردارها در جهت پاد ساعتگرد باشد علامت حاصلضرب آنها مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود.



شکل ۸.۳

مثال. حاصلضرب برداری $V = P \times Q$ را برای بردار P با بزرگی ۶ واحد که در صفحه zx واقع است و با محور x زاویه 30° می‌سازد، و بردار Q با بزرگی ۴ واحد که در امتداد محور x قرار گرفته است تعیین کنید (شکل ۸.۳). از تعریف ضرب برداری مستقیماً نتیجه می‌شود که V باید در امتداد محور y و بزرگیش برابر با

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ = 12$$

باشد و رو به بالا قرار بگیرد.

دیدید که خاصیت تعویض‌پذیری برای ضربهای برداری صادق نیست. لابد می‌پرسید که خاصیت توزیع‌پذیری چطور؛ یعنی آیا رابطه

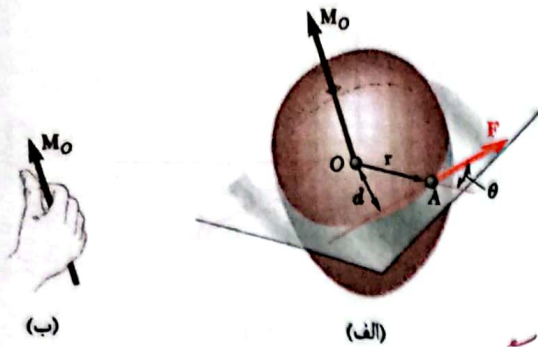
$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2 \quad (۵.۳)$$

برقرار است یا نه؟ پاسخ مثبت است. احتمالاً بسیاری از خوانندگان می‌خواهند بدون اثبات، پاسخی را که به شیوه شهودی درست می‌پندارند، بپذیرند. با وجود این، چون ساختار کلی جبر برداری و استاتیک وابسته به رابطه (۵.۳) است، لحظه‌ای از موضوع بحث خارج می‌شویم، و به اثبات آن می‌پردازیم.

می‌توانیم، بی‌آنکه کلیت مسئله از بین برود، فرض کنیم که P در امتداد محور y قرار گرفته است [شکل ۹.۳ (الف)]. مجموع Q_1 و Q_2 را با Q نشان می‌دهیم و عمودهایی از نوک بردارهای Q ، Q_1 ، و Q_2 به صفحه zx فرود می‌آوریم و از این طریق بردارهای Q' و Q'_1 را تعریف می‌کنیم. این بردارها در واقع به ترتیب تصویرهای Q ، Q_1 ، و Q_2 بر روی صفحه zx ‌اند. با یادآوری خاصیتی که آن را با رابطه (۳.۳) بیان کردیم می‌بینیم که به جای عضو سمت چپ معادله (۵.۳) می‌توانیم بگذاریم $P \times Q$ و به همین ترتیب، به جای ضربهای برداری $P \times Q_1$ و $P \times Q_2$ بگذاریم $P \times Q'_1$ و $P \times Q'_2$. پس، رابطه‌ای را که می‌خواهیم اثبات کنیم می‌توان به این صورت نوشت:

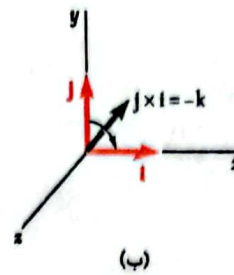
$$P \times Q = P \times Q'_1 + P \times Q'_2 \quad (۵.۳)$$

حالا مشاهده می‌کنیم که $P \times Q'$ را می‌شود از ضرب بردار Q' در اسکالر P و دوران پاد ساعتگرد آن به اندازه 90° در صفحه zx به دست آورد [شکل ۹.۳ (ب)]: دو ضرب برداری دیگر معادله (۵.۳) را هم می‌شود عیناً به همین طریق از Q'_1 و Q'_2 به دست آورد. حالا، چون تصویر هر متوازی‌الاضلاع بر روی یک صفحه دلخواه، باز هم متوازی‌الاضلاع است، تصویر Q (مجموع Q_1 و Q_2) یعنی Q' هم باید برابر با مجموع تصویرهای Q'_1 و Q'_2 (مربوط به بردارهای Q_1 و Q_2) بر روی همان صفحه باشد [شکل ۹.۳ (الف)]. این رابطه میان بردارهای Q' ، Q'_1 ، و Q'_2 حتی بعد از ضرب آنها در اسکالر P و چرخش 90° باز هم برقرار است [شکل ۹.۳ (ب)]. پس رابطه (۵.۳) را ثابت کردیم و حالا می‌توانیم مطمئن باشیم که خاصیت توزیع‌پذیری برای ضربهای برداری صادق است.

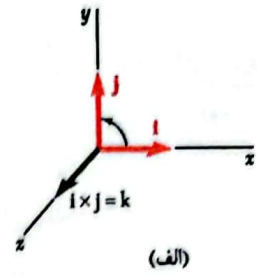


شکل ۱۲.۳

کشتاور دور می‌شود : بارهای صلب
منفی : ساعتگرد

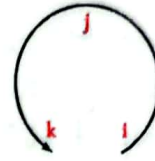


(ب)



(الف)

شکل ۱۰.۳



شکل ۱۱.۳

۶.۳ گشتاور نیروی حول یک نقطه:

حالا بیایید یک نیروی F را در نظر بگیریم که به یک جسم صلب اثر می‌کند [نکته ۱۲.۳ (الف)]. چنانکه می‌دانیم، نیروی F با یک بردار نشان داده می‌شود که بزرگی راستای آن را معین می‌کند. اما تأثیر این نیرو بر روی جسم صلب علاوه بر بزرگی و راستای آن به نقطه اثر A هم بستگی دارد. مکان A را می‌توان با بردار r ، که نقطه ثابت مرجع O را به A متصل می‌کند، مشخص کرد؛ این بردار را بردار مکان A می‌گویند. بردار مکان r و نیروی F صفحه نشان داده شده در شکل ۱۲.۳ (الف) را تعریف می‌کند. حالا می‌خواهیم گشتاور نیروی F را حول O ، به صورت ضرب برداری r و F تعریف کنیم:

$$M_O = r \times F \quad \checkmark$$

(۱۱.۳)

طبق تعریفی که از ضرب برداری در بخش ۴.۳ کردیم، گشتاور M_O باید بر صفحه شامل O و F عمود باشد. جهت M_O را جهت دورانی تعیین می‌کند که بردار r را به امتداد بردار F بیاورد؛ این دوران را ناظر واقع در نوک بردار M_O پادساعتگرد می‌بیند. راه دیگر تعیین جهت M_O این است که قاعده دست راست را به کار ببریم. دست راستان را مشت کنید و آن را طوری نگه دارید که انگشت‌های خم شده‌تان همان جهتی باشند که F می‌خواهد جسم را حول یک محور ثابت در امتداد M_O بچرخاند؛ آن وقت شستتان جهت گشتاور M_O را نشان خواهد داد [نکته ۱۲.۳ (ب)].

سرنجام، اگر زاویه میان خط اثرهای بردار مکان r و نیروی F را با θ نشان دهیم بزرگی گشتاور نیروی F حول نقطه O از رابطه زیر به دست می‌آید

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad \checkmark$$

(۱۲.۳)

که d نماینده فاصله عمودی O تا خط اثر F است. از آنجا که تمایل نیروی F به دور جسم صلب حول یک محور ثابت عمود بر نیرو بستگی به فاصله F از آن محور، همچنین بستگی به بزرگی F دارد، بی‌می‌توانیم که بزرگی M_O ، میزان تمایل نیروی F برای دوران جسم صلب حول یک محور ثابت در امتداد M_O است.

در سیستم یکاهای SI، که نیرو برحسب نیوتون (N) و فاصله برحسب متر (m) بیان می‌شود، گشتاور نیرو برحسب نیوتون-متر (N · m) بیان خواهد شد. در سیستم یکاهای U. S.، نیرو برحسب پوند و فاصله برحسب فوت یا اینچ است، گشتاور نیرو برحسب lb. ft یا lb. in به دست می‌آید.

۱. می‌توان به سهولت تحقیق کرد که بردارهای مکان از قانون جمع برداری تبعیت می‌کنند. بنابراین واقعاً دارند. برای مثال، بردارهای مکان نقطه A ، یعنی r و r' را نسبت به دو نقطه مرجع O و O' و بردار وضعیت نقطه O ، یعنی s را نسبت به O' در نظر بگیرید [شکل ۴۰.۳ (الف)، بخش ۱۶.۳]. معلوم می‌شود که بردار مکان $O'A = \overrightarrow{O'A}$ را می‌توان از بردار مکان $O'O = \overrightarrow{O'O}$ و $r = \overrightarrow{OA}$ با استفاده از قاعده جمع مثلث به دست آورد.

$$M = F \times (F \text{ فاصله عمودی } O \text{ تا راستای } F)$$

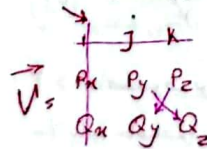
حال می‌توانیم به راحتی بردار حاصلضرب V دو بردار معین P و Q را برحسب مؤلفه‌های قائم آنها بیان کنیم. با تجزیه P و Q به مؤلفه‌هایشان می‌نویسیم

$$V = P \times Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \times (Q_x i + Q_y j + Q_z k) \quad \checkmark$$

با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری، V را به صورت مجموع ضربهای برداری ای مثل $Q_y P_z i \times j$ می‌نویسیم. به این ترتیب می‌بینیم که هریک از عبارتهای به دست آمده برابر با حاصلضرب برداری دو بردار یک‌ه است، مانند $j \times i$ ، که در حاصلضرب دو تا اسکالر، مانند $P_x Q_y$ ، ضرب شده است. حال اگر با توجه به اتحادهای (۷.۳)، از i ، j ، و k فاکتور بگیریم نتیجه می‌شود که

$$V = (P_y Q_z - P_z Q_y) i + (P_z Q_x - P_x Q_z) j + (P_x Q_y - P_y Q_x) k \quad (۸.۳) \quad \checkmark$$

بنابراین معلوم می‌شود که مؤلفه‌های قائم بردار حاصلضرب V عبارت‌اند از



$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad \checkmark$$

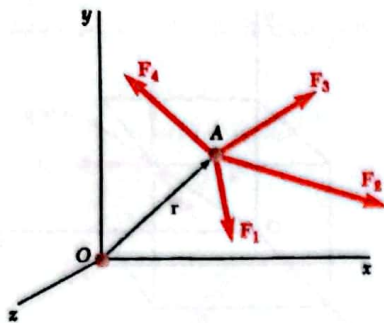
(۹.۳)

اگر دوباره به معادله (۸.۳) برگردیم می‌بینیم که جمله‌های طرف راست آن نماینده بسط یک دترمینان هستند، پس بردار حاصلضرب V را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم که راحت‌تر به خاطر سپرده می‌شود:

$$V = \begin{vmatrix} i & j & k \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (۱۰.۳)$$

۱. هر دترمینان متشکل از سه سطر و سه ستون را می‌توان با تکرار ستونهای اول و دوم و تشکیل حاصلضربها در امتداد هر قطر حساب کرد. مجموع حاصلضربهای به دست آمده در امتداد خطوط کمرنگ را از مجموع حاصلضربهای به دست آمده در امتداد خطوط پررنگ کم می‌کنیم.





شکل ۱۴.۳

۷.۳ قضیه وارینون

از خاصیت توزیع‌پذیری ضربهای برداری می‌شود برای تعیین گشتاور برآیند نیروهای هم‌رس استفاده کرد. اگر چندین نیروی $F_1, F_2, \dots$ در همان نقطه A وارد شوند (شکل ۱۴.۳)، و اگر بردار مکان r را با A نشان بدهیم، بلافاصله از فرمول (۵.۳) بخش ۴.۳، نتیجه می‌شود که

$$\vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \dots \quad (14.3)$$

حالا این نتیجه را با کلمات بیان می‌کنیم. گشتاور برآیند چند نیروی هم‌رس حول نقطه O برابر با مجموع گشتاورهای تک‌تک نیروها حول آن نقطه است. این خاصیت، که آن را اولین بار ریاضیدان فرانسوی پییر وارینون (۱۶۵۴-۱۷۲۲) مدتها پیش از معرفی جبر برداری، مطرح کرد به قضیه وارینون معروف است.

رابطه (۱۴.۳) این امر را امکان‌پذیر می‌کند که برای به‌دست آوردن گشتاور یک نیرو (F) به‌جای استفاده مستقیم از خود نیرو (F) مؤلفه‌های آن را به‌کار ببریم. چنانکه در بخش بعد خواهیم دید F را عموماً به مؤلفه‌های موازی با محورهای مختصات تجزیه می‌کنند. اما گاهی وقتها بهتر است که به‌خاطر تسریع در کار، F را به مؤلفه‌هایی تجزیه کنیم که موازی با محورهای مختصات نباشند (نگاه کنید به مسئله نمونه ۳.۳).

۸.۳ مؤلفه‌های قائم گشتاور یک نیرو

به‌طور کلی اگر نیرو و بردار مکان نقطه اثر آن را به مؤلفه‌های قائم x, y, z تجزیه کنیم، تعیین گشتاور یک نیرو در فضا به‌طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. مثلاً گشتاور M_O یک نیروی F به مؤلفه‌های F_x, F_y, F_z را که به نقطه A به مختصات x, y, z وارد می‌شود (شکل ۱۵.۲) حول نقطه O در نظر بگیرید. نظر به اینکه مؤلفه‌های بردار مکان r به‌ترتیب برابر با مختصات x, y, z نقطه A هستند، می‌نویسیم

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (15.3)$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \quad (16.3)$$

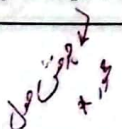
اگر به‌جای r و F از معادله‌های (۱۵.۳) و (۱۶.۳) مساوی‌شان را در رابطه

$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} \quad (11.3)$$

بگذاریم و از نتیجه بخش ۵.۳ استفاده کنیم، گشتاور M_O نیروی F حول نقطه O به این صورت درمی‌آید

$$M_O = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} \quad (17.3)$$

1. Pierre Varignon



می‌توان مشاهده کرد که اگرچه گشتاور M_O نیروی F حول یک نقطه، به بزرگی، خط اثر، و جهت نیرو بستگی دارد، اما به مکان واقعی نقطه اثر نیرو در امتداد خط اثرش وابسته نیست. برعکس، گشتاور M_O نیروی F جای نقطه اثر F را مشخص نمی‌کند.

اما، چنانکه خواهیم دید، گشتاور M_O نیروی F با بزرگی و راستای معین، خط اثر F را کاملاً مشخص می‌کند. در واقع، خط اثر F باید واقع در صفحه‌ای باشد که از O بگذرد و بر M_O عمود باشد؛ فاصله آن d ، از نقطه O باید برابر با خارج قسمت M_O/F ، یعنی خارج قسمت بزرگیهای M_O و F باشد؛ و جهت M_O تعیین می‌کند که خط اثر F را باید از کدام طرف نقطه O رسم کرد.

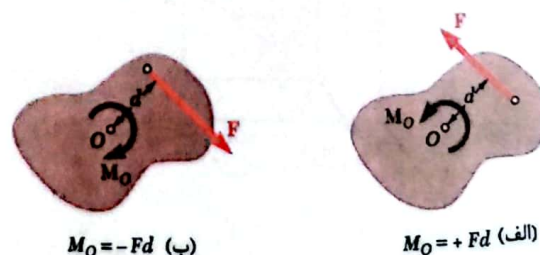
از بخش ۳.۳ به یاد داریم که اصل قابلیت انتقال می‌گوید که دو نیروی F و F' معادل‌اند (یعنی بر جسم صلب تأثیر یکسانی می‌گذارند) به شرطی که بزرگی، راستا و خط اثرشان یکی باشد. حال این اصل را می‌توان به این صورت بازگو کنیم: دو نیروی F و F' معادل‌اند اگر، و تنها اگر، مساوی باشند (یعنی، بزرگی و راستاهایشان یکی باشند) و حول نقطه معین O گشتاورهای برابر داشته باشند. پس، شرط لازم و کافی برای معادل بودن دو بردار F و F' این است که

$$F = F' \quad \text{و} \quad M_O = M'_O \quad (13.3)$$

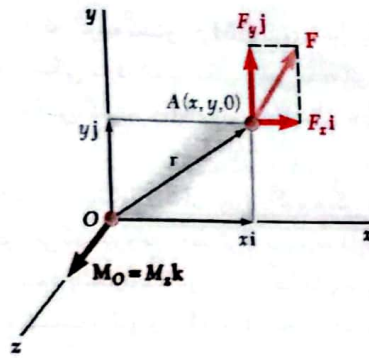
به این ترتیب نتیجه بیان بالا این است که اگر رابطه‌های (۱۳.۳) برای یک نقطه معین O صادق باشند، برای هر نقطه دیگری هم صادق خواهند بود.

مسئله‌هایی که فقط شامل دو بعد هستند. در بسیاری از موارد عملاً با سازه‌هایی سروکار داریم که دوبعدی‌اند، یعنی سازه‌هایی که طول و عرض دارند ولی ضخامتشان ناچیز است و تحت تأثیر نیروهای واقع در صفحه خودشان قرار دارند. سازه‌های دوبعدی و نیروهای وارد بر آنها را می‌شود به آسانی بر روی یک ورق کاغذ یا بر روی تخته سیاه نشان داد. بنابراین تحلیل آنها از تحلیل سازه‌ها و نیروهای سه‌بعدی خیلی راحت‌تر است. مثلاً جسم صلب نازکی را در نظر بگیرید که به آن نیروی F وارد می‌شود (شکل ۱۳.۳). گشتاور F حول نقطه O واقع در صفحه شکل، با بردار M_O نشان داده می‌شود که عمود بر صفحه شکل و بزرگی‌اش برابر با Fd است. در مورد شکل ۱۳.۳ (الف)، بردار M_O به طرف خارج صفحه کتاب، و در شکل ۱۳.۳ (ب) به طرف داخل صفحه کتاب است. وقتی به شکل نگاه می‌کنیم، می‌بینیم که F می‌خواهد جسم را در مورد اول پادساعتگرد و در مورد دوم ساعتگرد بچرخاند. بنابراین طبیعی است که جهت گشتاور نیروی F را حول O در شکل ۱۳.۳ (الف) پاد ساعتگرد، و در شکل ۱۳.۳ (ب) ساعتگرد بدانیم.

چون گشتاور یک نیروی F که در صفحه شکل اعمال می‌شود باید عمود بر آن صفحه باشد، فقط کافی است که بزرگی و جهت گشتاور F را حول O مشخص کنیم. این کار را هم می‌شود با تخصیص یک علامت مثبت یا منفی به بزرگی M_O ، بسته به اینکه M_O به طرف خارج صفحه باشد یا به طرف داخل، انجام داد.



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۷.۳

یا، به صورت دترمینان،

$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (۲۱.۳)$$

که $x_{A/B}$ ، $y_{A/B}$ و $z_{A/B}$ مؤلفه‌های بردار $r_{A/B}$ را نشان می‌دهند:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

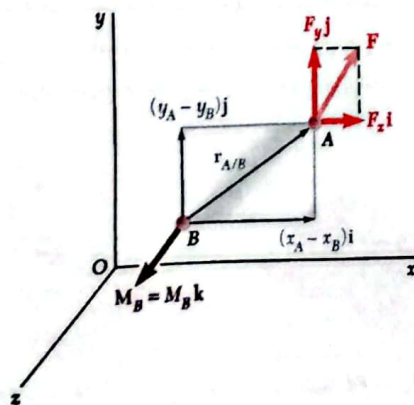
در مورد مسئله‌هایی که صرفاً دو بعد را شامل می‌شوند، می‌توانیم فرض کنیم نیروی F در صفحه xy است (شکل ۱۷.۳). پس F_z و z را در رابطه (۱۹.۳) صفر بگیریم، که نتیجه می‌شود

$$M_O = (x_F y - y_F x)k$$

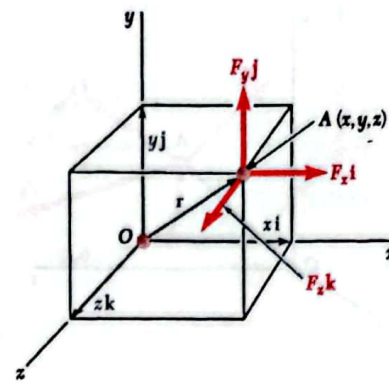
می‌بینیم که گشتاور F حول O به صفحه شکل عمود است و کاملاً با اسکالر مشخص می‌شود

$$M_O = M_z = x_F y - y_F x \quad (۲۲.۳)$$

چنانکه قبلاً هم گفتیم، مثبت بودن M_O حاکی از این است که بردار M_O به خارج از صفحه کتاب است (نیروی F تمایل به چرخاندن جسم حول O در جهت پادساعتگرد را دارد)، و منفی بودنش نشان می‌دهد که بردار M_O به طرف داخل صفحه کتاب است (نیروی F تمایل به چرخاندن جسم حول O در جهت ساعتگرد را دارد).



شکل ۱۸.۳



شکل ۱۵.۳

که مؤلفه‌های M_x ، M_y و M_z از رابطه‌های زیر به دست می‌آیند

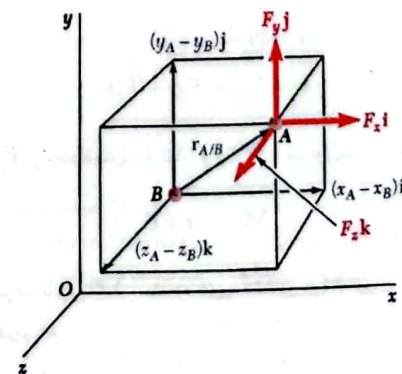
$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (۱۸.۳)$$

چنانکه در بخش ۱۱.۳ خواهیم دید، مؤلفه‌های اسکالر M_x ، M_y و M_z گشتاور M_O میزان تمایل نیروی F برای دوران جسم صلب به ترتیب حول محورهای x ، y و z هستند. اگر معادله‌های M_x ، M_y و M_z را از رابطه (۱۸.۳) در رابطه (۱۷.۳) بگذاریم عبارتی برای M_O به دست می‌آید که می‌توان آن را به شکل یک دترمینان نوشت

$$M_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (۱۹.۳)$$

برای محاسبه گشتاور M_B می‌توانیم یک نیروی F وارد بر نقطه A ، حول نقطه دلخواه B (شکل ۱۶.۳)، باید بردار مکان r در معادله (۱۱.۳) را با برداری که از B به A رسم می‌شود عوض کنیم. این بردار بردار مکان A نسبت به B است و آن را با $r_{A/B}$ نشان می‌دهند. با توجه به اینکه $r_{A/B}$ را می‌شود از تفریق r_B از r_A به دست آورد، می‌نویسیم

$$M_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F \quad (۲۰.۳)$$



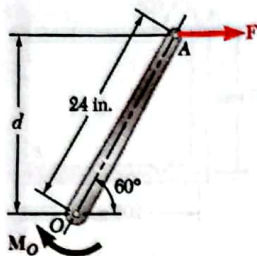
شکل ۱۶.۳

چون گشتاور حول O می‌بایست $1200 \text{ lb} \cdot \text{in}$ باشد، می‌نویسیم

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in} = F(20.8 \text{ in.})$$

$$F = 57.7 \text{ lb} \quad \leftarrow F = 57.7 \text{ lb} \rightarrow$$

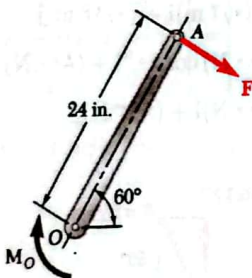


(ج) کوچکترین نیرو. چون $M_O = Fd$ است، وقتی کوچکترین مقدار را خواهد داشت که d ماکزیمم باشد. پس نیرو را عمود بر OA می‌گیریم و می‌بینیم که $d = 24 \text{ in}$ به دست می‌آید؛ بنابراین

$$M_O = Fd$$

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in} = F(24 \text{ in.})$$

$$F = 50 \text{ lb} \quad \leftarrow F = 50 \text{ lb} \nearrow 30^\circ$$



(د) نیروی عمودی 240 lb یوندى. در این مورد از رابطه $M_O = Fd$ نتیجه می‌شود که

$$1200 \text{ lb} \cdot \text{in} = (240 \text{ lb})d \quad d = 5 \text{ in.}$$

ولی $OB \cos 60^\circ = d \quad \leftarrow OB = 10 \text{ in.}$



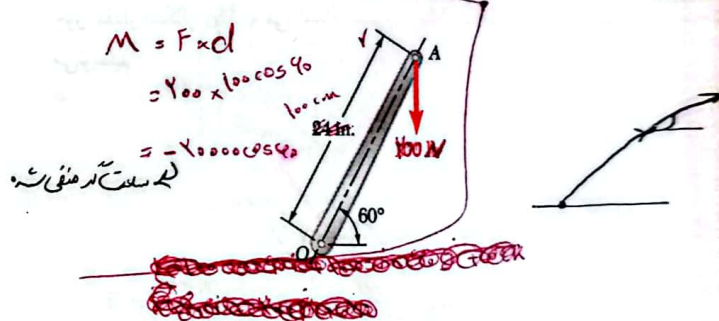
(ه) هیچ‌یک از نیروهایی که در بندهای (ب)، (ج) و (د) در نظر گرفته شده معادل با نیروی 100 lb یوندى اولیه نیستند. اگرچه این نیروها حول O گشتاورهای یکسان دارند، ولی مؤلفه‌های x و y نشان متفاوت است. به عبارت دیگر هرچند همه این نیروها می‌خواهند محور را یک‌جور بچرخانند اما موجب می‌شوند که اهرم به محور نیروهای متفاوتی وارد کند.

اگر بخواهیم گشتاور یک نیروی واقع در صفحه xy را حول نقطه $B(x_B, y_B)$ که به نقطه $A(x_A, y_A)$ وارد می‌شود (شکل ۱۸.۳)، تعیین کنیم F_x و F_y را در رابطه‌های (۲۱.۳) صفر می‌گیریم و توجه می‌کنیم که بردار M_B بر صفحه xy عمود است و بزرگی و جهت آن با اسکالر زیر مشخص می‌شود

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (23.3)$$

مسئله نمونه ۱۸.۳

یک نیروی عمودی 100 lb یوندى به سر اهرمی که به محوری در نقطه O متصل شده است وارد می‌شود. (الف) گشتاور این نیروی 100 lb یوندى حول O چقدر است؟ (ب) به A چقدر نیروی افقی باید وارد بشود تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟ (ج) کوچکترین نیروی وارد به نقطه A باید چقدر باشد تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟ (د) به چه فاصله از محور، نیروی عمودی 240 lb یوندى باید وارد بشود تا همان گشتاور را حول نقطه O ایجاد کند؟ (ه) کدامیک از نیروهایی که در بندهای (ب)، (ج)، و (د) در نظر گرفته شده معادل با نیروی اولیه است؟



حل:

(الف) گشتاور حول نقطه O . فاصله عمودی O تا خط اثر نیروی 100 lb یوندى برابر

است با

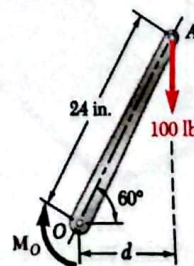
$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

پس بزرگی گشتاور نیروی 100 lb یوندى حول نقطه O برابر است با

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

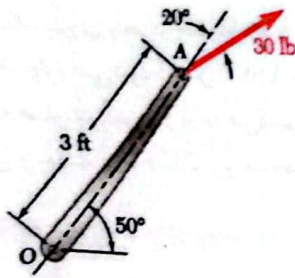
چون این نیرو تمایل به چرخاندن اهرم حول نقطه O در جهت ساعتگرد را دارد، گشتاور را با بردار M_O نشان می‌دهیم که عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل صفحه باشد. این موضوع را چنین بیان می‌کنیم

$$M_O = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad \leftarrow$$



(ب) نیروی افقی. در این مورد، داریم

$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$



حل:

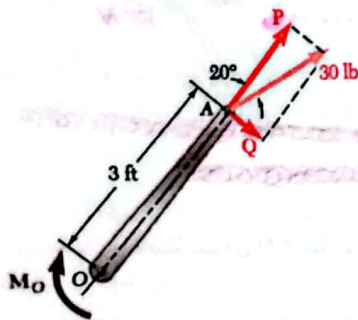
نیروی F را به دو مؤلفه P و Q در راستاهای OA و عمود بر آن تجزیه می‌کنیم. O بر روی خط اثر P قرار دارد، گشتاور P حول O صفر است و گشتاور Q یوندی به گشتاور Q ، که ساعتگرد است، خلاصه می‌شود، و بنابراین می‌شود یک اسکالر منفی نشان داد

$$Q = (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb}$$

$$M_O = -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.78 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

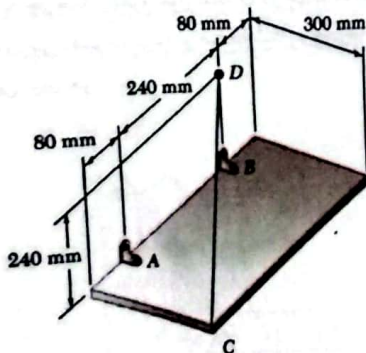
چون مقدار اسکالر M_O منفی است، گشتاور M_O به طرف داخل صفحه را می‌نویسیم

$$M_O = 30.78 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad \blacktriangleleft$$



مسئله نمونه ۴.۳

یک صفحه مستطیلی با دو بست در A و B و سیم CD نگه داشته شده است. کشش در سیم 200 N است. گشتاور نیرویی که سیم به نقطه C وارد می‌کند چقدر است؟ A چقدر است؟



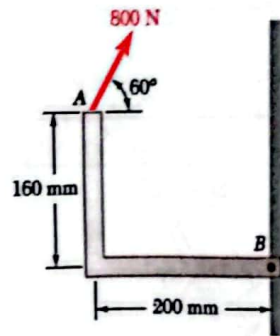
حل:

گشتاور M_A حول A از نیروی F که سیم به نقطه C وارد می‌کند، با تشکیل ضرب برداری به دست می‌آید

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

مسئله نمونه ۲.۳

یک نیروی 800 N نیوتونی مطابق شکل به قطعه‌ای وارد می‌شود. گشتاور نیرو را حول B محاسبه کنید.



حل:

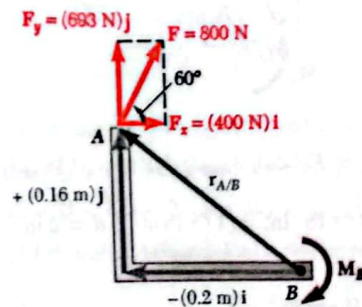
گشتاور M_B نیروی F حول B با تشکیل ضرب برداری به دست می‌آید

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

که $r_{A/B}$ برداری است که B را به A وصل می‌کند. با تجزیه $r_{A/B}$ و F به مؤلفه‌های قائم، داریم

$$r_{A/B} = -(0.16 \text{ m})\mathbf{i} + (0.2 \text{ m})\mathbf{j}$$

$$F = (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ = (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}$$



با توجه به رابطه‌های (۷.۳) برای ضربهای خارجی بردارهای یکه (بخش ۵.۳)، خواهیم داشت

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

$$= [-(0.16 \text{ m})\mathbf{i} + (0.2 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}]$$

$$= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

$$= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad M_B = 202.6 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

گشتاور M_B برداری است که عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل است.

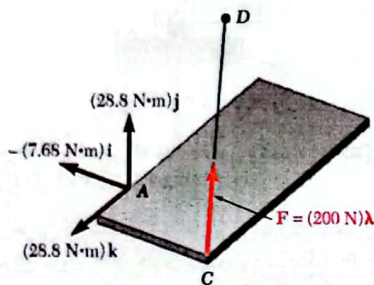
مسئله نمونه ۳.۳

یک نیروی 30 یوندی مطابق شکل به سر یک اهرم 3 فوتی وارد می‌شود. گشتاور این نیرو را حول O پیدا کنید.

با نشان دادن عبارتهای $r_{C/A}$ و F از (۲) و (۴) در (۱)، و به یاد آوردن رابطه‌های (۷.۳) از بخش ۵.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} M_A &= r_{C/A} \times F = (0.3i + 0.8k) \times (-120i + 96j - 128k) \\ &= (0.3)(96)k + (0.3)(-128)(-j) + (0.8)(-120)j \\ &\quad + (0.8)(96)(-i) \\ M_A &= -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})i + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})j + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})k \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

راه حل دیگر. چنانکه در بخش ۸.۳ نشان دادیم، گشتاور M_A را می‌توان به صورت دترمینان بیان کرد:



$$M_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0.3 & 0 & 0.8 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$M_A = -(7.68 \text{ N}\cdot\text{m})i + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})j + (28.8 \text{ N}\cdot\text{m})k \quad \blacktriangleleft$$

که برداری است که از A به C رسم می‌شود،

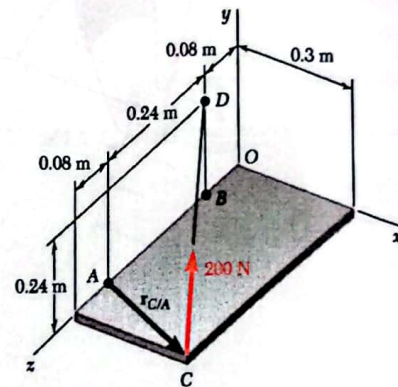
$$r_{C/A} = \vec{AC} = (0.3 \text{ m})i + (0.8 \text{ m})k \quad (2)$$

و F همان نیروی ۲۰۰ نیوتنی واقع در امتداد CD است. با معرفی یکه می‌نویسیم $\lambda = \frac{\vec{CD}}{CD}$

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\vec{CD}}{CD} \quad (3)$$

با تجزیه بردار $\vec{CD}$ به مؤلفه‌های قائم، داریم

$$\vec{CD} = -(0.3 \text{ m})i + (0.24 \text{ m})j - (0.32 \text{ m})k \quad CD = 0.50 \text{ m}$$



اگر اینها را در رابطه (۳) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} F &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})i + (0.24 \text{ m})j - (0.32 \text{ m})k] \\ &= -(120 \text{ N})i + (96 \text{ N})j - (128 \text{ N})k \quad (4) \end{aligned}$$

چگونه مسئله حل کنیم

فقط مؤلفه عمودی در گشتاور F سهم دارد [مسئله نمونه ۲.۳].

(د) معادله (۲.۲)، $M_O = M_z = xF_y - yF_x$ ، را به کار ببرید. در این روش، ساده‌ترین راه رسیدن به M_O این است که مؤلفه‌های اسکالر r و F را مثبت بگیرید و بعد از طریق مشاهده علامت مناسبی به گشتاور مربوط به هریک از مؤلفه‌ها بدهید. مثلاً با به کار بردن این روش برای حل مسئله نمونه ۲.۳ مشاهده می‌کنیم که هر دو مؤلفه نیرو تمایل به ایجاد چرخش ساعتگرد حول نقطه B را دارند. بنابراین گشتاور هر نیرو حول B را می‌بایست با یک اسکالر منفی نشان داد. به این ترتیب گشتاور کل به این صورت درمی‌آید

$$M_B = -(0.16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0.20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$

۲. محاسبه گشتاور M_O یک نیرو در سه بعد. طبق روش مسئله نمونه ۲.۳ اول مناسب‌ترین (ساده‌ترین) بردار مکان r را انتخاب کنید. بعد F را برحسب مؤلفه‌های قائم بیان کنید. در مرحله آخر حاصلضرب برداری $r \times F$ را بنویسید و گشتاور را تعیین کنید. در بیشتر مسئله‌های سه بعدی، ساده‌ترین راه برای محاسبه حاصلضرب برداری این است که از دترمینان استفاده کنید.

۳. تعیین فاصله عمودی (d) از یک نقطه A تا یک خط معین. اول فرض کنید که یک نیرو F با بزرگی معلوم F واقع در امتداد خط مورد نظر است. بعد ضرب برداری $M_A = r \times F$ را تشکیل دهید و آن را طبق روش بالا محاسبه کنید و گشتاور F را حول A به دست آورید. سپس بزرگی M_A را حساب کنید. سرانجام، مقادیر F و M_A را در معادله $M_A = Fd$ بگذارید و d را پیدا کنید.

در این درس ضرب برداری یا ضرب جلیلی دو بردار را معرفی کردیم. در مسئله‌های زیر، ممکن است لازم باشد که برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک نقطه و یا پیدا کردن فاصله عمودی یک نقطه تا یک خط از این ضرب استفاده کنید.

گشتاور نیروی F حول نقطه O از یک جسم صلب را به صورت

$$M_O = r \times F \quad (۱۱.۳)$$

تعریف کردیم، که در آن r بردار مکان از نقطه O تا هر نقطه‌ای از خط اثر F است. از آنجا که ضرب برداری تعویض‌پذیر نیست، قطعاً باید موقع محاسبه چنین ضربی ترتیب صحیح جای بردارها را رعایت کنید و به جهت آنها کاملاً توجه داشته باشید. گشتاور M_O از آن جهت مهم است، که بزرگیش برابر با میزان تمایل نیروی F برای چرخاندن جسم صلب حول یک محور واقع در امتداد M_O است.

۱. محاسبه گشتاور M_O یک نیرو در دو بعد. می‌توانید از یکی از روشهای زیر استفاده کنید:

(الف) معادله (۱۲.۳)، $M_O = Fd$ ، را به کار ببرید که می‌گوید بزرگی گشتاور برابر با حاصلضرب بزرگی F و فاصله عمودی d از O تا خط اثر F است [مسئله نمونه ۱.۳].

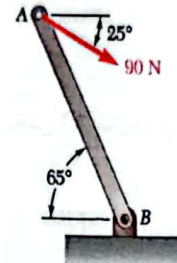
(ب) بردارهای r و F را برحسب مؤلفه‌ها بنویسید و حاصلضرب برداری $M_O = r \times F$ را محاسبه کنید [مسئله نمونه ۲.۳].

(ج) F را به مؤلفه‌های موازی و عمود بر بردار مکان r تجزیه کنید و در این صورت

مسئله‌ها

۱.۳ نیروی 90 N مطابق شکل بر میله کنترل AB وارد می‌شود. می‌دانیم که طول میله 225 mm است. معین کنید گشتاور نیروی حول B به وسیله تجزیه نیرو به مؤلفه پایین در امتداد AB و در جهت عمود بر AB .

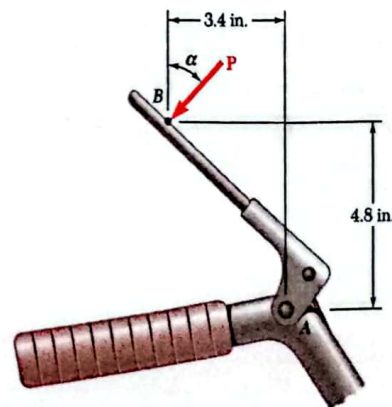
۲.۳ نیروی 90 N مطابق شکل بر میله کنترل AB وارد می‌شود. می‌دانیم که طول میله 225 mm است. مطلوب است گشتاور نیرو حول نقطه B به وسیله تجزیه نیرو به نیروی افقی و عمود بر آن.



شکل م ۱.۳ و م ۲.۳

۳.۳ نیروی P برابر 3 lb بر اهرمی که متعادل حلقه‌ای برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. گشتاور P حول A را اگر $\alpha = 30^\circ$ باشد، به دست آورید.

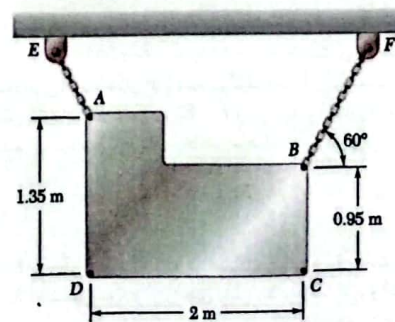
۴.۳ نیروی P بر اهرمی که متعادل حلقه‌ای ماشین برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. بزرگی و راستای کمترین نیروی P که دارای گشتاور پاد ساعتگرد $19/5\text{ lb}$ حول A است را به دست آورید.



شکل م ۳.۳ و م ۴.۳ و م ۵.۳

۵.۳ نیروی P برابر $2/9\text{ lb}$ بر اهرمی که متعادل حلقه‌ای ماشین برف‌روبی را کنترل می‌کند، وارد می‌شود. زاویه α را طوری تعیین کنید که گشتاور P حول A در جهت پاد ساعتگرد و بزرگی آن $1\text{ lb} \cdot \text{in}$ باشد.

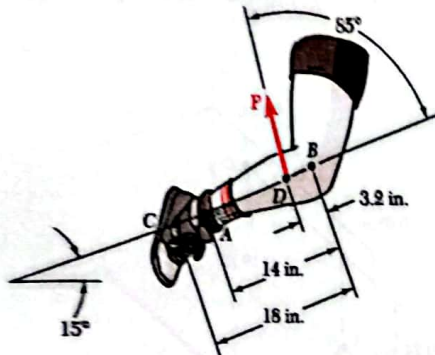
۶.۳ تابلویی با دو زنجیر AE و BF آویزان شده است. اگر کشش در BF برابر 200 N باشد، مطلوب است (الف) گشتاور حول A ی نیروی وارد از زنجیر بر B ، (ب) کمترین نیروی وارد بر نقطه C تا همان گشتاور را حول نقطه A ایجاد کند.



شکل م ۶.۳ و م ۷.۳

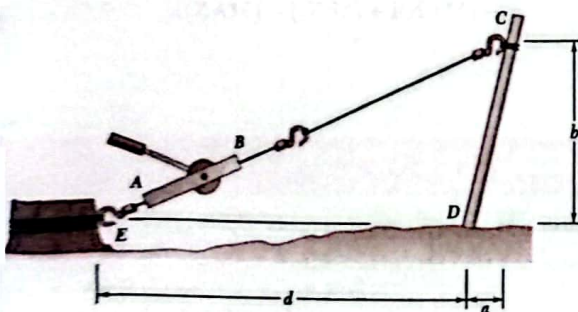
۷.۳ تابلویی با دو زنجیر AE و BF آویزان شده است. اگر کشش در BF باشد، مطلوب است (الف) گشتاور حول A ی نیروی وارد توسط زنجیر در B ، (ب) جهت نیروی قائم وارد بر C که بتواند همان گشتاور حول A را ایجاد کند (ج) کمترین نیروی وارد بر B که همان گشتاور حول A را ایجاد کند.

۸.۳ ورزشکاری با قوزکی به وزن 51 lb ، مطابق شکل در حال تمرین است. مطمئن شوید (الف) گشتاور وزن حول اتصال زانوئی در B ، (ب) بزرگی نیروی P عضله که گشتاور بزرگی حول B ایجاد می‌کند، (ج) کمترین نیروی F که در C وارد می‌شود و از مرکز گشتاور B ایجاد می‌شود.



شکل م ۸.۳

۹.۳ از ویژگی AB برای راست کردن یک تیر کج استفاده می‌شود. کشش در کابل C 260 lb ، $a = 8\text{ in}$ ، $b = 25\text{ in}$ و $d = 76\text{ in}$ است. گشتاور حول D ی نیروی وارد بر نقطه C را تعیین کنید و آن نیرو را به مؤلفه‌های افقی و قائم وارد بر (الف) نقطه E تجزیه کنید.



شکل م ۹.۳ و م ۱۰.۳ و م ۱۱.۳

۱۰.۳ می‌دانیم که نیرویی به گشتاور $7840\text{ lb} \cdot \text{in}$ حول D برای راست کردن تیر CD لازم است. اگر $a = 8\text{ in}$ ، $b = 25\text{ in}$ و $d = 112\text{ in}$ باشد، مطلوب است کشش در کابل کشنده و بیج AB برای ایجاد گشتاوری حول نقطه D لازم است.

۱۱.۳ می‌دانیم که نیرویی با گشتاور $1152\text{ N} \cdot \text{m}$ حول نقطه D برای راست کردن تیر CD لازم است. اگر ظرفیت و بیج AB برابر 2880 N نیوتن باشد، مطلوب است فاصله d تا همان گشتاور را حول نقطه D ایجاد کند. اگر $a = 0.724\text{ m}$ و $b = 1.05\text{ m}$ باشد.

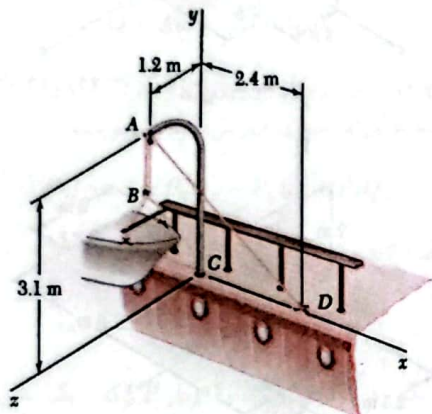
۱۲.۳ و ۱۳.۳ می‌دانیم که اتصال میله AB روی چرخ BC ، نیروی 2.5 kN باین و به طرف چپ در امتداد مرکز خط AB وارد می‌کند. مطلوب است گشتاور نیرو حول D .

۱۴.۳ دایره‌ای به قطر 64 mm دنبال‌رونده B را در برابر بیج ماسوره در نقطه A مطابق شکل حفظ می‌کند. می‌دانیم که بیج ماسوره روی دنبال‌کننده نیرویی به بزرگی 80 N در عمود مشترک BC وارد می‌کند. مطلوب است گشتاور نیروی حول D .

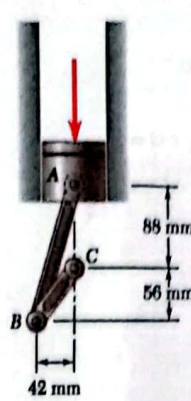
۱۹.۳ گشتاور حول مبدأ O نیروی $F = (7.5\text{ N})\mathbf{i} + (3\text{ N})\mathbf{j} - (4.5\text{ N})\mathbf{k}$ را که بر نقطه A وارد می‌شود، تعیین کنید. با فرض اینکه بردار مکان A بردار (الف) $\mathbf{r} = (2\text{ m})\mathbf{i} - (0.75\text{ m})\mathbf{j} - (1\text{ m})\mathbf{k}$ (ب) $\mathbf{r} = -(6\text{ m})\mathbf{i} + (3\text{ m})\mathbf{j} + (1.5\text{ m})\mathbf{k}$ (ج) $\mathbf{r} = -(2.5\text{ m})\mathbf{i} - (1\text{ m})\mathbf{j} + (1.5\text{ m})\mathbf{k}$

۲۰.۳ مطلوب است گشتاور حول مبدأ O نیروی $F = (3\text{ lb})\mathbf{i} - (6\text{ lb})\mathbf{j} + (4\text{ lb})\mathbf{k}$ را که بر نقطه A وارد می‌شود. با فرض اینکه اینک مکان A (الف) $\mathbf{r} = -(0.75\text{ ft})\mathbf{i} + (1.5\text{ ft})\mathbf{j} - (1\text{ ft})\mathbf{k}$ (ب) $\mathbf{r} = -(7.5\text{ ft})\mathbf{i} + (3\text{ ft})\mathbf{j} - (6\text{ ft})\mathbf{k}$ (ج) $\mathbf{r} = -(8\text{ ft})\mathbf{i} + (2\text{ ft})\mathbf{j} - (12\text{ ft})\mathbf{k}$ باشد.

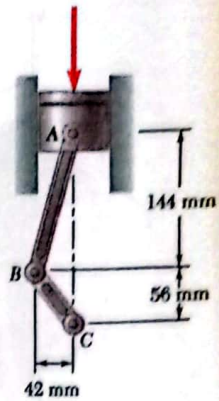
۲۱.۳ فایق کوچکی با دو لنگرکش که یکی از آنها در شکل نشان داده شده آویزان شده است. کشش در صفحه $ABAD$ برابر 36 N است. مطلوب است گشتاور حول نقطه C از نیروی برآیند R_A وارد بر لنگر در A .



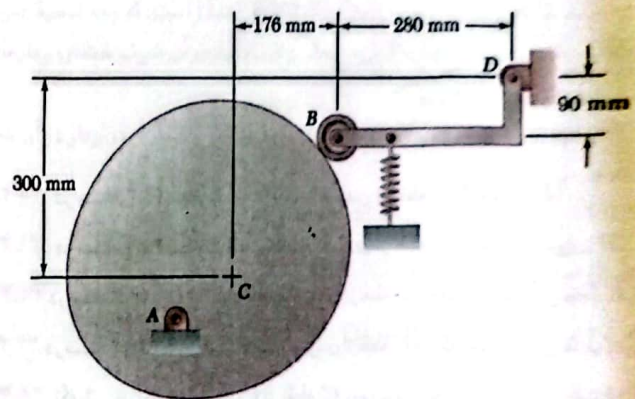
شکل م ۲۱.۳



شکل م ۱۹.۳

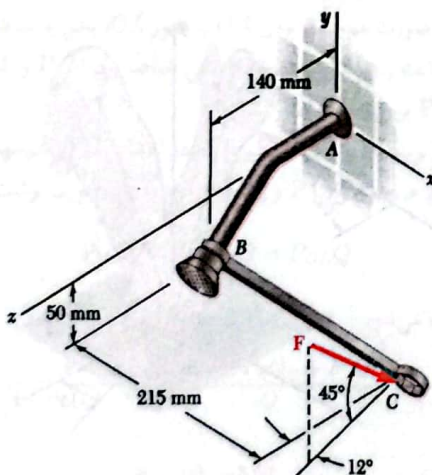


شکل م ۲۰.۳



شکل م ۱۴.۳

۲۲.۳ نیروی $N = 36$ بر آچاری که برای محکم کردن یک تیر دوش حمام به کار می‌رود وارد می‌شود. می‌دانیم که خط مرکزی آچار موازی با محور x است. مطلوب است گشتاور نیروی حول A .



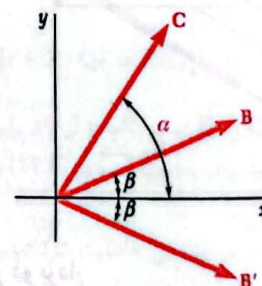
شکل م ۲۲.۳

۲۳.۳ پیش از اینکه کابل تلفن کشیده و محکم شود، طناب BAC را در نقطه B به میخ چوبی که به زمین کوبیده‌ایم، می‌بندیم و سپس آن را در نقطه A روی قرقره عبور می‌دهیم. اگر قسمت AC طناب در صفحه‌ای موازی با صفحه xy قرار داشته باشد و کشش T در طناب 62 lb باشد، گشتاور حول O نیروی برآیند بر قرقره توسط طناب را پیدا کنید.

۲۴.۳ مقطع دیوار بتنی موقتاً با دو کابل نشان داده شده نگهداری می‌شود. می‌دانیم که کششها در کابلهای BD و EF برابر 900 N و 675 N است. مطلوب است گشتاور حول نقطه O مربوط به نیروی وارد شده توسط (الف) کابل BD ، (ب) کابل FE .

۱۵.۳ از شکل حاصلضرب برداری $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ و $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$ که در آن $B = B'$ است و با استفاده از نتایج به دست آمده اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$



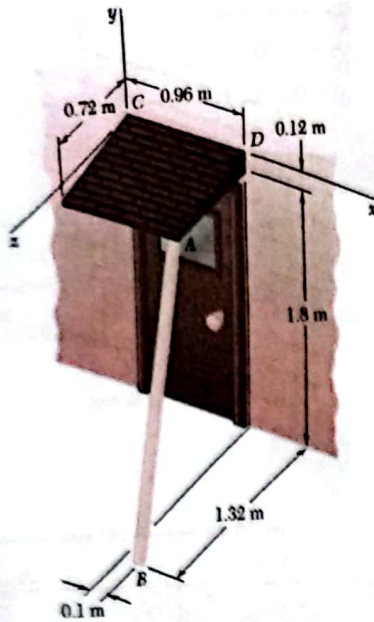
شکل م ۱۵.۳

۱۶.۳ خطی از نقاط $(630\text{ mm}, -225\text{ mm})$ و $(-210\text{ mm}, 270\text{ mm})$ می‌گذرد. فاصله قائم d این خط را از مبدأ مختصات O تعیین کنید.

۱۷.۳ صفحه‌ای شامل بردارهای A و B است. بردار یک عمود این صفحه را وقتی A و B به ترتیب برابر (الف) $12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 7.5\mathbf{k}$ (ب) $-12\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ و $3\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ باشد را تعیین کنید.

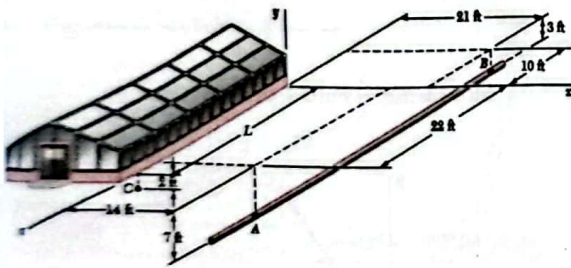
۱۸.۳ بردارهای P و Q دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع اند. مساحت این متوازی‌الاضلاع را تعیین کنید اگر

(الف) $Q = -(5\text{ in})\mathbf{i} + (1\text{ in})\mathbf{j} + (3\text{ in})\mathbf{k}$ و $P = (3\text{ in})\mathbf{i} + (7\text{ in})\mathbf{j} - (2\text{ in})\mathbf{k}$
(ب) $Q = (6\text{ in})\mathbf{i} - (1\text{ in})\mathbf{j} + (5\text{ in})\mathbf{k}$ و $P = (2\text{ in})\mathbf{i} - (4\text{ in})\mathbf{j} - (3\text{ in})\mathbf{k}$ باشد.



شکل م ۲۶.۳

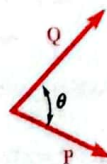
- ۳۰.۳ در مسئله ۲۴.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا کابل BD .
- ۳۱.۳ در مسئله ۲۵.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا خط اثر نیروی F .
- ۳۲.۳ در مسئله ۲۶.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه D تا خط رسم شده بین نقاط A و B .
- ۳۳.۳ در مسئله ۲۶.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا خط رسم شده بین نقاط A و B .
- ۳۴.۳ نگهبانی می‌خواهد لوله آب را از نقطه C روی پایبای به طول 30 ft در امتداد سبزه به آب اصلی که از نقاط A و B می‌گذرد وصل کند. مطلوب است (الف) مقدار طول ذخیره لوله مورد نیاز را حداقل می‌کند. (ب) طول لوله مورد نیاز.



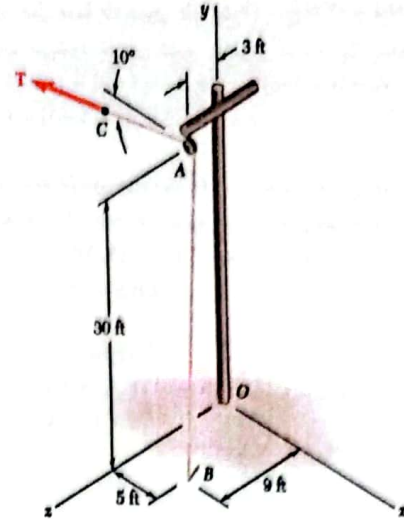
شکل م ۳۴.۳

- ۹.۳ ضرب اسکالر دو بردار
- ضرب اسکالر دو بردار P و Q بنا به تعریف عبارت است از ضرب بزرگیهای P و Q و کسینوس زاویه θ ، که از P و Q تشکیل شده است (شکل ۱۹.۳). ضرب اسکالر P و Q را با $P \cdot Q$ نشان می‌دهند. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

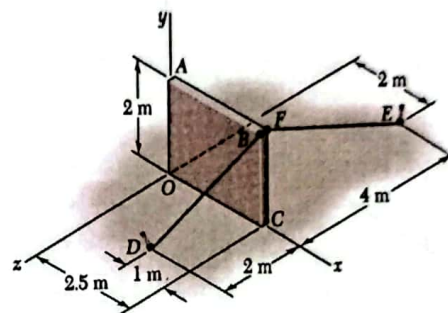
$$P \cdot Q = PQ \cos \theta \quad (۲۴.۳)$$



شکل ۱۹.۳

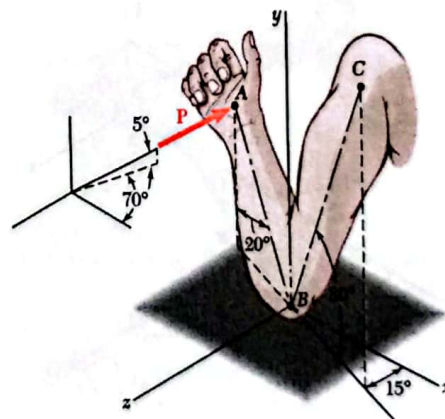


شکل م ۲۳.۳



شکل م ۲۴.۳

- ۲۵.۳ در یک مسابقه رقابت بازو، نیروی P بر دست یک حریف توسط حریف دیگر وارد می‌شود. می‌دانیم که $AB = 15.2\text{ in}$ و $BC = 16\text{ in}$ است. مطلوب است گشتاور نیرو حول E .



شکل م ۲۵.۳

- ۲۶.۳ تخته چوبی AB را به عنوان محافظ موقت تکیه‌گاه سقف کوچکی به کار می‌برند. نیروی 228 N در راستای BA بر نقطه A وارد می‌شود. مطلوب است گشتاور حول C این نیرو.
- ۲۷.۳ در مسئله ۲۱.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه C تا قسمت AD از خط $ABAD$.
- ۲۸.۳ در مسئله ۲۳.۳ مطلوب است فاصله عمودی از نقطه O تا قسمت AC از طناب BAC .
- ۲۹.۳ در مسئله ۲۳.۳، مطلوب است فاصله عمودی از نقطه O تا قسمت AB از طناب BAC .

پس، عبارت به دست آمده برای $P \cdot Q$ به این صورت درمی آید:

$$P \cdot Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (۳۰.۳)$$

در حالت خاص وقتی P و Q برابر باشند، معلوم می شود که

$$P \cdot P = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (۳۱.۳)$$

کاربردها

۱. زاویه ای که با دو بردار معین تشکیل می شود. دو بردار در نظر بگیرید که برحسب مؤلفه هایشان داده شده اند:

$$P = P_x i + P_y j + P_z k$$

$$Q = Q_x i + Q_y j + Q_z k$$

برای تعیین زاویه میان این دو بردار عبارتهایی را که در (۲۴.۳) و (۳۰.۳) برای ضرب اسکالر آنها به دست آوردیم مساوی قرار می دهیم و می نویسیم

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

معادله را برحسب $\cos \theta$ که حل کنیم نتیجه می شود

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (۳۲.۳)$$

۲. تصویر یک بردار بر روی یک محور. بردار P را که با یک محور، یا خط OL ، زاویه θ تشکیل می دهد در نظر بگیرید (شکل ۲۱.۳). تصویر P بر روی محور OL بنا به تعریف عبارت است از اسکالر

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (۳۳.۳)$$

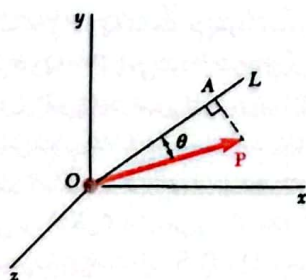
ملاحظه می کنیم که تصویر P_{OL} از لحاظ قدر مطلق برابر با طول پاره خط OA است؛ این تصویر در صورت هم جهت بودن OA با محور OL ، یعنی به شرط زاویه حاده یا تند بودن θ ، مثبت و در غیر این صورت منفی خواهد بود. اگر P و OL برهم عمود باشند تصویر P بر روی OL صفر است.

حالا یک بردار Q را در نظر بگیرید که در امتداد OL و هم جهت با آن باشد (شکل ۲۲.۳). ضرب اسکالر P و Q را می شود به این صورت نوشت

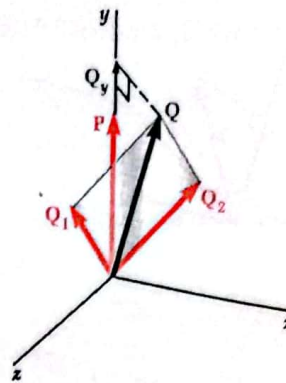
$$P \cdot Q = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (۳۴.۳)$$

که از آن نتیجه می شود

$$P_{OL} = \frac{P \cdot Q}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (۳۵.۳)$$



شکل ۲۱.۳



شکل ۲۰.۳

توجه کنید که عبارت بالا بردار نیست، بلکه اسکالر (عدد) است، که وجه تسمیه ضرب اسکالر را نشان می دهد؛ $P \cdot Q$ را به خاطر نوع نمادگذاری آن ضرب نقطه ای بردارهای P و Q هم می گویند.

از خود تعریف ضرب نقطه ای نتیجه می شود که ضرب اسکالر دو بردار در آن باهم جابه جا می شوند، یعنی

$$P \cdot Q = Q \cdot P \quad (۲۵.۳)$$

برای اثبات توزیع پذیری بودن ضرب اسکالر، باید رابطه زیر را ثابت کنیم:

$$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 \quad (۲۶.۳)$$

بی آنکه کلیت مطلب از بین برود، می توان فرض کرد در امتداد محور y است (شکل ۲۰.۳). اگر مجموع Q_1 و Q_2 را با Q ، و زاویه Q با محور y را با θ_y نشان بدهیم، سمت چپ رابطه (۲۶.۳) را می شود چنین نوشت:

$$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (۲۷.۳)$$

که PQ_y مؤلفه y بردار Q است. می توانیم به همین طریق، معادل سمت راست رابطه (۲۶.۳) را هم پیدا کنیم

$$P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (۲۸.۳)$$

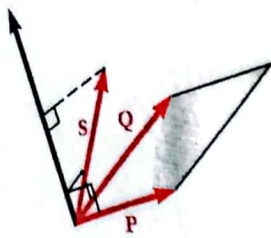
چون Q برابر با مجموع Q_1 و Q_2 است مؤلفه y آن باید برابر با مجموع مؤلفه های y ، Q_1 و Q_2 باشد. پس، عبارتهای به دست آمده در (۲۷.۳) و (۲۸.۳) برابرند و رابطه (۲۶.۳) ثابت شده است.

همچنین اگر خاصیت سوم یعنی خاصیت شرکت پذیری را در نظر بگیریم، می می بینیم که این خاصیت را نمی شود برای ضربهای اسکالر به کار برد. درواقع $(P \cdot Q) \cdot S$ معنی ندارد، زیرا $P \cdot Q$ بردار نیست بلکه اسکالر است. حالا ضرب اسکالر دو بردار P و Q را برحسب مؤلفه های قائمشان بیان می کنیم. با تجزیه P و Q به مؤلفه هایشان، ابتدا می نویسیم

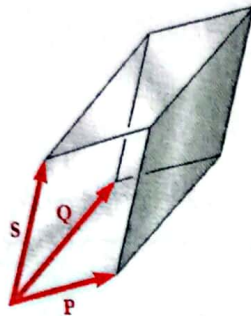
$$P \cdot Q = (P_x i + P_y j + P_z k) \cdot (Q_x i + Q_y j + Q_z k)$$

با استفاده از خاصیت توزیع پذیری، $P \cdot Q$ را به صورت مجموع ضربهای اسکالر از قبیل $P_x i \cdot Q_x i$ و $P_x i \cdot Q_y j$ بیان می کنیم. اما با توجه به تعریف ضرب اسکالر نتیجه می شود که حاصلضربهای اسکالر بردارهای یک، صفر یا یک است.

$$\begin{aligned} i \cdot i &= 1 & j \cdot j &= 1 & k \cdot k &= 1 \\ i \cdot j &= 0 & j \cdot k &= 0 & k \cdot i &= 0 \end{aligned} \quad (۲۹.۳)$$



شکل ۲۴.۳



شکل ۲۵.۳

این سه تایی، منفی است [یعنی $S \cdot (P \times Q)$ منفی است به شرطی که از نوک S که اگر کنیم، جهت دوران P را برای منطبق شدنش بر روی Q ساعتگرد ببینیم]. حاصلضرب مختلط بردارهای S، P، و Q در صورتی که هم صفحه باشند صفر خواهد بود چون متوازی السطوحی که (در بالا) تعریف کردیم مستقل از ترتیب آنها بردارهاست، می توان شش نوع ضرب برداری مختلط با سه بردار S، P، و Q تشکیل داد که قدر مطلق همه آنها برابر است ولی علامتهایشان با هم فرق می کند. به این می شود نشان داد که

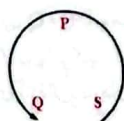
$$S \cdot (P \times Q) = P \cdot (Q \times S) = Q \cdot (S \times P) \quad (24.3)$$

$$= -S \cdot (Q \times P) = -P \cdot (S \times Q) = -Q \cdot (P \times S)$$

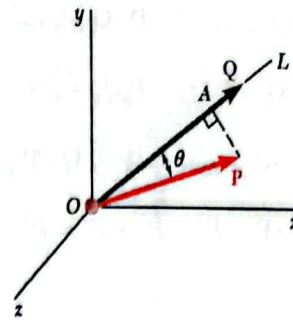
اگر حرفهای نماینده سه بردار را به ترتیب پاد ساعتگرد بر روی یک دایره بچینیم (شکل ۲۶.۳) بی می بریم که علامت حاصلضرب مختلط سه بردار به شرطی که نظمشان به از جابه جایی بازهم پاد ساعتگرد باشد تغییر نمی کند. چنین جایگشتی را جایگشت دایره ای می گویند. همچنین از (۲۹.۳) و خاصیت تعویض پذیری نتیجه می شود که ضرب مختلط سه گانه S، P، و Q را می شود به صورت $S \cdot (P \times Q)$ یا $Q \cdot (P \times S)$ تعریف کرد.

حالا ضرب سه گانه مختلط بردارهای S، P، و Q را برحسب مؤلفه های قائم آنها بیان می کنیم. اگر $P \times Q$ را V بگیریم بنا به فرمول (۳۰.۲) می توانیم ضرب اسکالر S و V را به این صورت بنویسیم

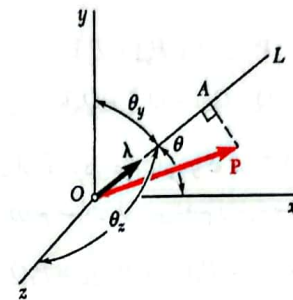
$$S \cdot (P \times Q) = S \cdot V = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$



شکل ۲۶.۳



شکل ۲۲.۳



شکل ۲۳.۳

در حالت خاص، وقتی بردار انتخاب شده در امتداد OL بردار یک λ باشد (شکل ۲۳.۳)، می نویسیم

$$P_{OL} = P \cdot \lambda \quad (23.3)$$

با تجزیه P و λ به مؤلفه های قائم و یادآوری این نکته (از بخش ۱۲.۲) که مؤلفه های λ در امتداد محورهای مختصات به ترتیب برابر با کسینوس هادیهای OL هستند، تصویر P بر روی OL را چنین بیان می کنیم

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (27.2)$$

که θ_x ، θ_y ، و θ_z زوایایی هستند که محور OL با محورهای مختصات تشکیل می دهد.

۱۰.۳ ضرب سه گانه مختلط سه بردار

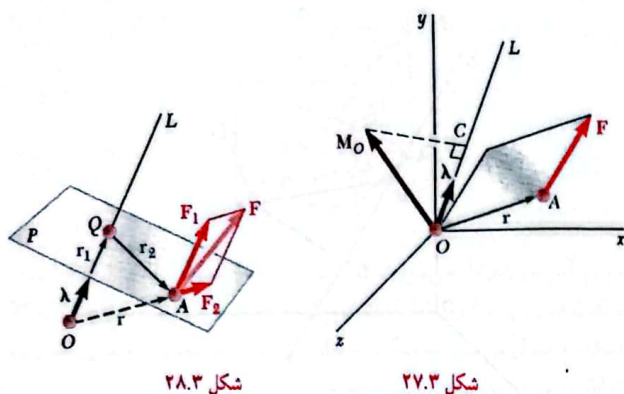
ضرب سه گانه مختلط سه بردار S، P، و Q بنا به تعریف عبارت است از

$$S \cdot (P \times Q) \quad (28.2)$$

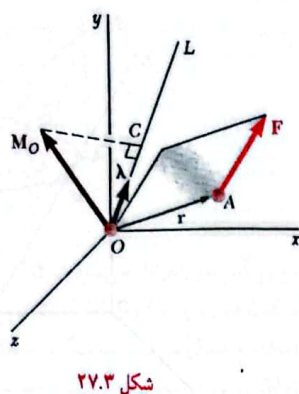
که از ضرب اسکالر S در ضرب برداری P و Q به دست می آید و بنابراین یک اسکالر است.^۱

ضرب سه گانه S، P، و Q تعبیر هندسی ساده ای دارد (شکل ۲۴.۳). اولاً از بخش ۴.۳ به یاد دارید که بردار $P \times Q$ بر صفحه شامل P و Q عمود است، و مقدارش برابر با مساحت متوازی الاضلاعی است که از P و Q ساخته می شود. ثانیاً، از معادله (۳۴.۳) پیداست که حاصلضرب اسکالر $P \times Q$ را می شود از ضرب بزرگی $P \times Q$ (یعنی مساحت متوازی الاضلاع حاصل از P و Q) در تصویر S بر روی بردار $P \times Q$ (یعنی تصویر S بر روی عمود بر صفحه شامل متوازی الاضلاع) به دست آورد. بنابراین قدر مطلق حاصلضرب سه گانه مختلط بردارهای S، P، و Q در واقع برابر با حجم متوازی السطوحی است که از S، P، و Q ساخته می شود (شکل ۲۵.۳). می بینیم که علامت حاصلضرب مختلط سه بردار به شرط راستگرد بودن سه تایی متشکل از S، P، و Q مثبت، و در صورت چپگرد بودن

۱. نوع دیگر از ضرب سه گانه، یعنی ضرب سه گانه برداری $S \times (P \times Q)$ را در فصل ۱۵، جلد دوم مکانیک برداری (دینامیک) نشان خواهیم داد.



شکل ۲۸.۳



شکل ۲۷.۳

می‌شوند (بخش ۱۰.۳)، بنابراین داریم

$$M_{OL} = \lambda \cdot (r_2 \times F_2) \quad (44.3)$$

بردار $r_2 \times F_2$ بر صفحه P عمود است و گشتاور مؤلفه F_2 نیروی F را حول نقطه Q نشان می‌دهد؛ Q فصل مشترک OL است با صفحه P . بنابراین اسکالر M_{OL} ، که به شرط هم‌جهت بودن $r_2 \times F_2$ و OL مثبت و در غیر این صورت منفی است، میزان تمایل F_2 به چرخاندن جسم صلب حول محور ثابت OL را نشان می‌دهد. از آنجا که مؤلفه F_1 نیروی F تمایلی به چرخاندن جسم حول OL ندارد، نتیجه می‌گیریم که گشتاور M_{OL} نیروی F حول OL ، میزان تمایل نیروی F به دادن حرکت دورانی به جسم صلب حول محور ثابت OL را نشان می‌دهد.

از تعریف گشتاور نیرو حول یک محور نتیجه می‌شود که گشتاور نیروی F حول هریک از محوره‌های مختصات برابر با مؤلفه M_O است در امتداد همان محور. حالا اگر بردارهای i ، j و k را یکی یکی به جای λ در (۴۲.۳) قرار بدهیم پی می‌بریم که عبارتهایی که به این ترتیب برای گشتاورهای نیروی F حول محوره‌های مختصات به دست می‌آیند به ترتیب همان عبارتهایی هستند که در بخش ۸.۳ برای مؤلفه‌های گشتاور M_O نیروی F حول O به دست آوردیم:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (18.3)$$

مشاهده می‌کنیم که درست همان‌طور که مؤلفه‌های F_x ، F_y و F_z نیروی F که به ترتیب میزان تمایل F برای حرکت دادن جسم صلب در راستاهای x ، y و z را نشان می‌دهند، گشتاورهای M_x ، M_y و M_z نیروی F حول محوره‌های مختصات هم حاکی از میزان تمایل F به چرخاندن جسم صلب به ترتیب حول محوره‌های x ، y و z است.

به‌طور کلی، گشتاور یک نیروی F وارد بر A ، حول محوری که از مبدأ نمی‌گذرد با انتخاب یک نقطه دلخواه B بر روی این محور (شکل ۲۹.۳) و تعیین تصویر گشتاور M_B آن نیرو حول نقطه B ، بر روی محور BL به دست می‌آید. می‌نویسیم

$$M_{BL} = \lambda \cdot M_B = \lambda \cdot (r_{A/B} \times F) \quad (45.3)$$

که $r_{A/B} = r_A - r_B$ نماینده برداری است که از B به A رسم می‌شود. اگر M_{BL}

که اگر به جای مؤلفه‌های V معادله‌های آنها را از روابط (۹.۳) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} S \cdot (P \times Q) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \end{aligned} \quad (40.3)$$

با توجه به اینکه این عبارت بسط یک دترمینان را نشان می‌دهد، می‌شود آن را به صورت جمع‌وجورتری نوشت:

$$S \cdot (P \times Q) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (41.3)$$

اگر قواعد تعویض جای سطرها یا ستون‌ها را به کار ببریم، می‌توانیم درستی رابطه‌های (۳۹.۳) را که قبلاً بنا به ملاحظات هندسی به دست آوردیم به سهولت تحقیق کنیم.

۱۱.۳ گشتاور یک نیرو حول محور معین

حالا که درباره جبر برداری قدری بیشتر می‌دانیم، می‌خواهیم مفهوم جدیدی را معرفی کنیم که به آن گشتاور یک نیرو حول یک محور می‌گویند. دوباره یک نیروی F را در نظر بگیرید که به یک جسم صلب وارد می‌شود و گشتاورش حول O ، M_O است (شکل ۲۷.۳). OL را محوری بگیرید که از O می‌گذرد؛ گشتاور M_{OL} نیروی F حول OL را به صورت تصویر گشتاور M_O بر روی محور OL تعریف می‌کنیم. اگر بردار λ در امتداد OL را با λ نشان بدهیم و عبارتهای (۳۶.۳) و (۱۱.۳) را که به ترتیب در بخشهای ۹.۳ و ۶.۳ برای تصویر یک بردار بر روی یک محور و برای گشتاور M_O یک نیرو (F) به دست آوردیم به یاد بیاوریم، می‌توانیم بنویسیم

$$M_{OL} = \lambda \cdot M_O = \lambda \cdot (r \times F) \quad (42.3)$$

که نشان می‌دهد گشتاور نیروی F حول محور OL ، اسکالری است که از ضرب سه‌گانه λ ، r و F به دست می‌آید. حالا M_{OL} را به شکل یک دترمینان، می‌نویسیم

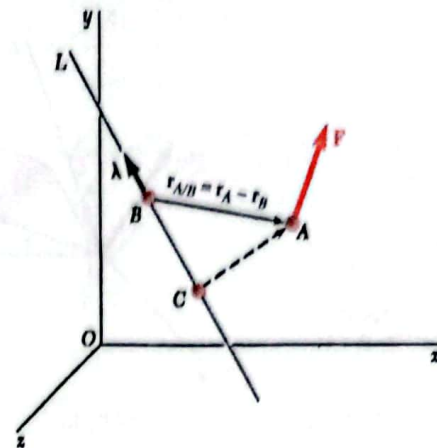
$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (43.3)$$

که در آن λ_x ، λ_y و λ_z کسینوس هادیهای محور OL ؛ x ، y و z ، مختصات نقطه اثر نیروی F ؛ F_x ، F_y و F_z مؤلفه‌های نیروی F اند.

برای روشن‌تر شدن معنای فیزیکی گشتاور M_{OL} یک نیروی F حول یک محور ثابت OL اول F را به مؤلفه‌های قائم F_1 و F_2 (به ترتیب به موازات OL و واقع در صفحه P عمود بر OL) تجزیه می‌کنیم (شکل ۲۸.۳). بعد r را به دو مؤلفه r_1 و r_2 تجزیه می‌کنیم و آنها را به جای F و r در رابطه (۴۲.۳) می‌گذاریم

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot [(r_1 + r_2) \times (F_1 + F_2)] \\ &= \lambda \cdot (r_1 \times F_1) + \lambda \cdot (r_1 \times F_2) + \lambda \cdot (r_2 \times F_1) + \lambda \cdot (r_2 \times F_2) \end{aligned}$$

توجه می‌کنیم که همه ضربه‌های مختلط سه‌گانه بالا، بجز آخری برابر با صفرند، چون شامل بردارهایی هستند که در صورت رسم از یک مبدأ مشترک در یک صفحه واقع



شکل ۴۹.۳

را به شکل یک درمیان بنویسیم؛ خواهیم داشت

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (46.3)$$

که در آن $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ کسینوس هادیهای محور BL ،

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

و F_x, F_y, F_z مؤلفه‌های نیروی F اند.

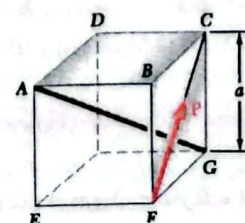
باید توجه داشته باشید که نتیجه بالا بستگی به جای نقطه B روی محور مورد نظر ندارد. درواقع، اگر نتیجه بالا را برای نقطه دیگری مثل C ، با M_{CL} نشان بدهیم؛ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} M_{CL} &= \lambda \cdot [(r_A - r_C) \times F] \\ &= \lambda \cdot [(r_A - r_B) \times F] + \lambda \cdot [(r_B - r_C) \times F] \end{aligned}$$

ولی چون بردارهای λ و $r_B - r_C$ بر روی یک خط قرار دارند، حجم متوازی‌السطوح به اضلاع $\lambda, r_B - r_C$ و F صفر است، چون همان حاصلضرب سه‌گانه مختلط آنهاست (بخش ۱۰.۳). پس عبارت معادل M_{CL} ، به اولین جمله خلاصه می‌شود که همان عبارتی است که قبلاً برای تعریف M_{BL} به کار بردیم. به علاوه از بخش ۶.۳ نتیجه می‌شود که در محاسبه گشتاور F حول یک محور، A می‌تواند هر نقطه‌ای بر روی خط اثر F باشد.

مسئله نمونه ۵.۳

به مکعبی به ضلع a نیروی P مطابق شکل وارد می‌شود. گشتاور P را (الف) حول AC ، (ب) حول یال AB ، و (ج) حول قطر AG پیدا کنید. (د) با استفاده از نتیجه بند ج فاصله عمودی AG تا FC را حساب کنید.



حل:

(الف) گشتاور حول AC . محورهای مختصات x, y, z را مطابق شکل می‌گیریم، و نیروی P و بردار $r_{F/A} = \vec{AF}$ را که از A به نقطه اثر نیروی P کشیده‌ایم به مؤلفه‌های قائم تجزیه می‌کنیم

$$r_{F/A} = ai - aj = a(i - j)$$

$$P = (P/\sqrt{2})j - (P/\sqrt{2})k = (P/\sqrt{2})(j - k)$$

گشتاور P حول AC برابر است با

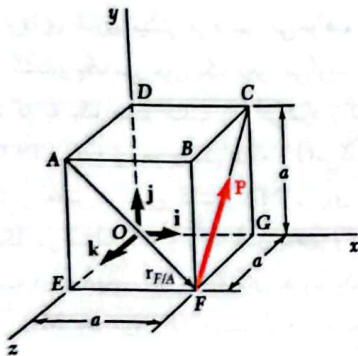
$$M_A = r_{F/A} \times P = a(i - j) \times (P/\sqrt{2})(j - k)$$

$$M_A = (aP/\sqrt{2})(i + j + k) \quad \blacktriangleleft$$

(ب) گشتاور حول AB . M_A را بر روی AB تصویر می‌کنیم، داریم

$$M_{AB} = i \cdot M_A = i \cdot (aP/\sqrt{2})(i + j + k)$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$



تحقیق می‌کنیم که چون AB موازی محور x است، M_{AB} مؤلفه x گشتاور M_A هست.

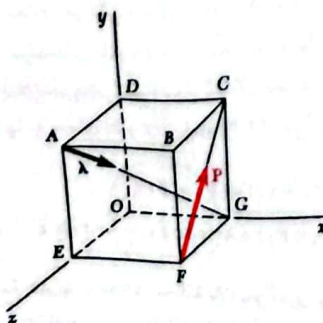
(ج) گشتاور حول قطر AG . گشتاور P حول AG از تصویرکردن M_A بر روی AG به دست می‌آید. بردار یکه در امتداد AG را با λ نشان می‌دهیم، داریم

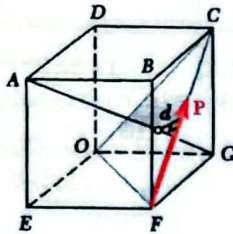
$$\lambda = \frac{\vec{AG}}{AG} = \frac{ai - aj - ak}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(i - j - k)$$

$$M_{AG} = \lambda \cdot M_A = (1/\sqrt{3})(i - j - k) \cdot (aP/\sqrt{2})(i + j + k)$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1)$$

$$M_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$





بنابراین گشتاور M_{AG} می‌شود $-Pd$ ، که d فاصله عمودی AG تا FC است. علامت منفی را، به این خاطر گذاشته‌ایم که از دید ناظر واقع در G ، دورانی که P بر مکعب اعمال می‌کند، ساعتگرد به نظر می‌رسد. با استفاده از مقداری که برای M_{AG} در بند ج، به‌دست آوردیم نتیجه می‌شود که

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

روش دیگر. گشتاور P حول AG را می‌توان به صورت دترمینان هم بیان کرد

$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

(د) فاصله عمودی AG تا FC . ابتدا مشاهده می‌کنیم که P بر قطر AG عمود است. در این صورت حاصلضرب اسکالر $P \cdot \lambda$ باید صفر باشد — که هست.

$$P \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(j-k) \cdot (1/\sqrt{3})(i-j-k) = (P\sqrt{6})(0-1+1) = 0$$

چگونه مسئله حل کنیم

در مسئله‌های این درس می‌توانید ضرب اسکالر یا ضرب نقطه‌ای را برای پیدا کردن زاویه میان دو بردار و تعیین تصویر یک نیرو بر روی یک محور به کار ببرید. همچنین می‌توانید از ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار برای به‌دست آوردن گشتاور یک نیرو حول یک محور معین و تعیین فاصله عمودی بین دو خط استفاده کنید.

۴. تعیین فاصله عمودی بین دو خط. باید به خاطر داشته باشید که مؤلفه عمودی F_2 نیروی F است که تمایل به واداشتن جسم به دوران حول یک محور OL را دارد (شکل ۲۸.۳). بنابراین نتیجه می‌شود

$$M_{OL} = F_2 d$$

که در آن M_{OL} گشتاور F حول محور OL و d فاصله عمودی بین OL و خط اثر F است. این معادله آخری راه ساده‌ای را برای تعیین d به‌دست می‌دهد. ابتدا فرض کنید که نیرویی مانند F با مقدار معلوم F در امتداد یکی از خطوط و بردار یکه λ در امتداد خط دیگر قرار دارد. بعد با استفاده از روش بالا گشتاور M_{OL} نیروی F حول خط دیگر را حساب کنید. بزرگی مؤلفه موازی، F_1 ، نیروی F با استفاده از ضرب اسکالر به‌دست می‌آید:

$$F_1 = F \cdot \lambda$$

بعد مقدار F_2 از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

حالا مقادیر M_{OL} و F_2 را در معادله $M_{OL} = F_2 d$ قرار دهید و مقدار d را پیدا کنید.

حالا باید پی برده باشید که فاصله عمودی در بند د مسئله نمونه ۵.۳ به‌خاطر عمود بودن P بر قطر AG راحت به‌دست آمد. در حالت کلی، دو خط مورد نظر بر هم عمود نخواهند بود، و بنابراین برای تعیین فاصله عمودی میان آنها باید از روش بالا استفاده کنیم.

در مسئله‌های این درس می‌توانید ضرب اسکالر یا ضرب نقطه‌ای را برای پیدا کردن زاویه میان دو بردار و تعیین تصویر یک نیرو بر روی یک محور به کار ببرید. همچنین می‌توانید از ضرب سه‌گانه مختلط سه بردار برای به‌دست آوردن گشتاور یک نیرو حول یک محور معین و تعیین فاصله عمودی بین دو خط استفاده کنید.

۱. محاسبه زاویه‌ای که میان دو بردار تشکیل می‌شود. ابتدا بردارها را برحسب مؤلفه‌هایشان بنویسید و بزرگی آنها را تعیین کنید. در این صورت کسینوس زاویه مورد نظر از تقسیم حاصلضرب نقطه‌ای دو بردار به حاصلضرب بزرگیهای آنها به‌دست می‌آید [معادله (۲۲.۳)].

۲. محاسبه تصویر یک بردار P بر روی یک محور معین OL . اول P و بردار یکه λ را که مشخصه راستای محور مورد نظر است، به صورت مجموع مؤلفه‌هایشان بنویسید. دقت کنید که جهت λ درست انتخاب شود (یعنی، λ از O به طرف L باشد). حالا تصویر مورد نظر از حاصلضرب اسکالر $P \cdot \lambda$ به‌دست می‌آید. ولی اگر زاویه θ میان P و λ را بدانید، تصویر P را از رابطه $P \cos \theta$ هم می‌توانید پیدا کنید.

۳. تعیین گشتاور M_{OL} یک نیرو حول یک محور معین M_{OL} را این‌طور تعریف کردیم

$$M_{OL} = \lambda \cdot M_O = \lambda \cdot (r \times F) \quad (42.3)$$

که در آن λ بردار یکه در امتداد OL و r بردار مکان از هر نقطه‌ای واقع بر خط OL تا هر نقطه‌ای بر خط اثر F است. اینجا هم مثل مورد گشتاور یک نیرو حول یک نقطه، انتخاب مناسب‌ترین بردار مکان محاسبات شما را آسان خواهد کرد. البته، باز هم یادآوری می‌کنیم که بردارهای r و F باید در جهت صحیح باشند، و ترتیبشان در ضرب باید رعایت شود. روشی را که باید برای محاسبه گشتاور یک نیرو حول یک محور به کار ببرید در قسمت ج مسئله نمونه ۵.۳ نشان داده‌ایم. به این ترتیب عمل کنید: اول λ ، r ، و F را برحسب مؤلفه‌های قائم آنها بنویسید و بعد ضرب سه‌گانه