معادلات دیفرانسیل

گردآورنده: مریم شاداب

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه ای بر معادلات دیفرانسیل

۱.۱ مقدمه

هر رابطه ای بین تابع و متغیر مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل که حداقل شامل یکی از مشتقات باشد را یک **معادله دیفرانسیل** می نامند.
معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، معادله دیفرانسیل را **معمولی** نامیده و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل **با مشتقات جزئی** می نامند.

مثال ۱.۱.۱ (۱) $y''+3(y')^2+\cos x=4$ *معادله دیفرانسیل معمولی*

(۲) $(y'')^3+6(y')^4+2x=3$ *معادله دیفرانسیل معمولی*

(۳) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}$ *معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی*

معادله دیفرانسیل معمولی به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می شود. فرم کلی معادله دیفرانسیل خطی مر تبه ی n، در قسمت دوم مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۲.۱.۱ (۱) $(y')^2+3xy'-3y=0$ *معادله غیر خطی*

(۲) $p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=g(x)$ *معادله خطی مرتبه n*

تعریف ۱.۱.۱ *بالاترین مرتبه ی مشتق موجود در معادله ی دیفرانسیل را* ***مرتبه ی معادله دیفرانسیل*** *می نامند.*

تعریف ۲.۱.۱ *اگر یک معادله دیفرانسیل را بتوان نسبت به مشتقات موجود در معادله به فرم یک چند جمله ای نوشت، آنگاه توان بالاترین مشتق موجود در معادله را* ***درجه ی معادله دیفرانسیل*** *می نامند.*

مثال ۳.۱.۱ *مرتبه و درجه معادلات زیر را مشخص کنید.*

(۱) $y'=3$ *مرتبه اول، درجه اول*

(۲) $x^2y'''(y'')^{\frac{3}{4}}+e^{4x}\sin y'=y^3+x(y')^5$ *مرتبه سوم، بدون درجه*

(۳) $(y'')^3+6(y')^4+2x=3$ مرتبه دوم، درجه سوم

هر تابعی که در معادله ی دیفرانسیل صدق کند، **جواب** معادله دیفرانسیل نامیده می شود.
معادله دیفرانسیل ممکن است بیش از یک جواب داشته باشد (حتی بی نهایت جواب). همگی این جوابها تحت یک فرمول که شامل یک ثابت دلخواه است بیان می شوند، این جواب را جواب **عمومی** می نامیم.
اگر جواب عمومی را تحت شرایط اولیه قرار دهیم و پارامتر ثابت را تعیین کنیم، آنگاه **جواب خصوصی** معادله بدست می آید. جواب خصوصی، جوابی بدون پارامتر است که از جواب عمومی بدست می آید.
اگر معادله دیفرانسیل از مرتبه n باشد، جواب عمومی شامل n ثابت دلخواه خواهد بود.

۲.۱ تشکیل معادله دیفرانسیل

در این بخش برای تشکیل معادله دیفرانسیل، دسته های منحنی را به دو صورت زیر در نظر می گیریم:

(۱) دسته منحنی $y=F(x,c)$ را بررسی می کنیم که در آن c مقدار ثابت است. به عنوان مثال دسته منحنی $y=x^2+c$ به ازای مقادیر مختلف c ، سهمی می باشد و دسته منحنی $y=cx$ ، خطوطی هستند که از مبدا مختصات می گذرند.
هدف ساختن معادله دیفرانسیلی است که پارامتر ثابت c را نداشته باشد و $y=F(x,c)$ جواب آن معادله باشد. این معادله، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خواهد بود. برای این منظور باید پارامتر c را از دستگاه زیر حذف کرد.

$$\begin{cases} y=F(x,c) \\ y'=F'_x(x,c) \end{cases}$$

مثال ۱.۲.۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی* $y=x^2+c$ *را بیابید.*
پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می نماییم،

$$\begin{cases} y=x^2+c \\ y'=2x \end{cases}$$

چون معادله دوم دستگاه به پارامتر c بستگی ندارد، بنابراین معادله دیفرانسیل مورد نظر عبارتست از: $y'=2x$.

مثال ۲.۲.۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی* $y=cx$ *را بیابید.*
پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می نماییم.

$$\begin{cases} y=cx \\ y'=c \end{cases} \Rightarrow y'=\frac{y}{x}$$

بنابراین معادله ی مورد نظر عبارتست از: $y'=\frac{y}{x}$.

مثال ۳.۲.۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی* $y=cx^2+2$ *را بیابید.*
پارامتر c را در دستگاه زیر حذف می نماییم.

$$\begin{cases} y=cx^2+2 \\ y'=2cx \end{cases}$$

از معادله ی دوم دستگاه داریم: $c=\frac{y'}{2x}$. *مقدار c را در معادله ی اول دستگاه جایگذاری می نماییم.*

$$y=\frac{y'}{2x}x^2+2 \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}y'x+2$$

(۲) اگر دسته منحنی به بیش از یک پارامتر بستگی داشته باشد، مانند:
$$y = F(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

برای تشکیل معادله دیفرانسیل آن باید n پارامتر را بین $n+1$ معادله در دستگاه زیر حذف نماییم.
$$\begin{cases} y = F(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y' = F'_x(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ y'' = F''_x(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \\ \vdots \\ y^{(n)} = F^{(n)}_x(x, c_1, c_2, \ldots, c_n) \end{cases}$$

و نتیجه یک معادله دیفرانسیل مرتبه ی n خواهد بود.

مثال ۴.۲.۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = 2x^2 + c_1x + c_2$ را بیابید.*
پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می نماییم.
$$\begin{cases} y = 2x^2 + c_1x + c_2 \\ y' = 4x + c_1 \\ y'' = 4 \end{cases}$$

بنابراین معادله ی مورد نظر عبارتست از: $y'' = 4$.

مثال ۵.۲.۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی $y = (c_1 + c_2x)e^x$ را بیابید.*
پارامترهای c_1 و c_2 را در دستگاه زیر حذف می نماییم.
$$\begin{cases} y = c_1e^x + c_2xe^x \\ y' = c_1e^x + c_2e^x + c_2xe^x \\ y'' = c_1e^x + 2c_2e^x + c_2xe^x \end{cases}$$

از معادلات دوم و سوم دستگاه داریم: $y'' - 2y' = -c_1e^x - c_2xe^x$. *سمت راست این معادله برابر $-y$ است و لذا معادله عبارتست از:*
$$y'' - 2y' + y = 0$$

تمرین ۱ *معادله دیفرانسیل دسته منحنی های زیر را تشکیل دهید.*

(۱) $y = c_1e^x + c_2e^{-3x}$

(۲) $y = (c_1 + c_2x)e^x + c_3$

(۳) $\ln(\frac{x}{y}) = 1 + cy$

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

۱.۲ مقدمه

معادله دیفرانسیل مرتبه اول به فرم کلی $F(x,y,y')=0$ می باشد.این معادلات به دو دسته زیر تقسیم می شوند.

(۱) معادلاتی که نسبت به مشتق حل می شوند.

(۲) معادلاتی که نسبت به مشتق حل نمی شوند.

۲.۲ معادلات تفکیک پذیر

اگر $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ که در آن f_1 تابعی بر حسب x و f_2 تابعی برحسب y باشد در این صورت معادله به صورت زیر در می آید:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)\Rightarrow \quad \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$$

که با انتگرالگیری از طرفین این معادله جواب بدست می آید.

مثال ۱.۲.۲

$$y'=e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{x+y}\Rightarrow \frac{dy}{e^y}=e^x dx\Rightarrow e^{-y}dy=e^x dx$$

$$\int e^{-y}dy=\int e^x dx\Rightarrow -e^{-y}=e^x+c$$

مثال ۲.۲.۲

$$y' = \frac{x(1+y)}{y(x+2)}$$

$$y(x+2)dy = x(1+y)dx \Rightarrow \frac{y}{1+y}dy = \frac{x}{x+2}dx \Rightarrow \frac{1+y-1}{1+y}dy = \frac{x+2-2}{x+2}dx$$

$$\int (1-\frac{1}{1+y})dy = \int (1-\frac{2}{x+2})dx \Rightarrow y - \ln|1+y| = x - 2\ln|x+2| + c$$

مثال ۳.۲.۲

$$y' = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{xy(1+x^2)} \Rightarrow xy(1+x^2)dy = (1+y^2)dx \Rightarrow \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

ابتدا کسر سمت راست در رابطه بالا را به صورت زیر تجزیه نموده و سپس از طرفین انتگرال می گیریم

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)x}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}$$

$$\begin{cases} A=1 \\ A+B=0 \\ C=0 \end{cases} \Rightarrow A=1, B=-1, C=0$$

$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \ln c$$

$$\ln(1+y^2) + \ln(1+x^2) = 2\ln|x| + 2\ln c \Rightarrow \ln(1+y^2) + \ln(1+x^2) = \ln x^2 + \ln c^2$$

$$\ln(1+y^2)(1+x^2) = \ln c^2x^2 \Rightarrow (1+y^2)(1+x^2) = c^2x^2 \Rightarrow 1+y^2 = \frac{c^2x^2}{1+x^2}$$

۳.۲ حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

قضیه ۱.۳.۲ *اگر توابع $p(x), g(x)$ روی فاصله ی $a < x < b$ پیوسته باشند و نقطه ی $x = x_0$ نیز در این فاصله باشد، آنگاه تابع یکتایی مانند $y = \phi(x)$ وجود دارد که در معادله دیفرانسیل $y' + p(x)y = g(x) \qquad (a < x < b)$ با شرط اولیه $y(x_0) = y_0$ صدق می کند.*

برای حل معادله ی مرتبه اول $y' + p(x)y = g(x)$ حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(۱) اگر $p(x) = 0$ آنگاه معادله را به صورت زیر حل می نماییم:

$$y' = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \Rightarrow dy = g(x)dx \Rightarrow y = \int g(x)dx$$

مثال ۱.۳.۲

$$y' = 3 \Rightarrow y = \int 3dx \Rightarrow y = 3x + c$$

(۲) اگر $g(x) = 0$ آنگاه معادله را به صورت زیر حل می نماییم:

$$g(x) = 0 \Rightarrow y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow dy + p(x)ydx = 0$$

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int p(x)dx = 0 \Rightarrow \ln y + \int p(x)dx = 0$$

مثال ۲.۳.۲

$$y' + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} + \int xdx = 0 \Rightarrow \ln y = -\frac{x^2}{2} + c \Rightarrow y = e^{-\frac{x^2}{2}}.e^c$$

(۳) اگر $p(x), g(x) \neq 0$ آنگاه معادله را در $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ ضرب می کنیم و جواب معادله به صورت زیر بدست می آید:

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \int g(x)\mu(x)dx$$

مثال ۳.۳.۲

$$y' + 2y = e^x \Rightarrow \mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$y = \frac{1}{e^{2x}} \int e^{2x}e^x dx = e^{-2x}(\frac{1}{3}e^{3x} + c) \Rightarrow y = \frac{1}{3}e^x + ce^{-2x}$$

مثال ۴.۳.۲

$$y' - xy = x \quad , y(0) = 0$$

$$\mu(x) = e^{-\int xdx} = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x^2}} \int xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx \Rightarrow t = -\frac{1}{2}x^2, dt = -xdx$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{1}{2}x^2} \int -e^t dt = e^{\frac{1}{2}x^2}(-e^t + c) = e^{\frac{1}{2}x^2}(-e^{-\frac{1}{2}x^2} + c)$$

$$y = -1 + ce^{\frac{1}{2}x^2}, \quad y(0) = 0 \quad \Rightarrow c = 1 \quad \Rightarrow \quad y = e^{\frac{1}{2}x^2} - 1$$

مثال ۵.۳.۲

$$\tan x \frac{dy}{dx} + y = 3x \sec x$$

$$y' + y\frac{1}{\tan x} = 3x\frac{\sec x}{\tan x} \Rightarrow y' + y\cot x = 3x\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} \Rightarrow y' + y\cot x = 3x\frac{1}{\sin x}$$

$$y' + y\cot x = \frac{3x}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int \cot x dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

$$y = \frac{1}{\sin x}(\int \frac{3x}{\sin x}\sin x dx) = \frac{1}{\sin x}(\int 3xdx) = \frac{3}{2}x^2 \csc x + c\csc x$$

تبصره ۱ اگر معادله دیفرانسیل مرتبه اول نسبت به x به عنوان تابعی از y باشد به فرم زیر است:

$$\frac{dx}{dy} + xp(y) = g(y)$$

مثال ۶.۳.۲

$$y'(x\sin y + 2\sin 2y) = 1$$

$$x\sin y + 2\sin 2y = \frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{dx}{dy} - x\sin y = 2\sin 2y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int -\sin y dy} = e^{\cos y}$$

$$x = \frac{1}{e^{\cos y}}(\int 2\sin 2y e^{\cos y} dy) = e^{-\cos y}(4\int \sin y \cos y e^{\cos y} dy)$$

این انتگرال از روش جزء به جزء به صورت زیر حل می شود:

$$\begin{cases} u = \cos y \quad , \quad du = -\sin y dy \\ dv = \sin y e^{\cos y} dy \quad , \quad v = -e^{\cos y} \end{cases}$$

$$\int dv = \int \sin y e^{\cos y} dy \Rightarrow t = \cos y \quad , \quad dt = -\sin y \Rightarrow v = \int -e^t dt = -e^t = -e^{\cos y}$$

$$x = e^{-\cos y}(4(uv - \int vdu)) = e^{-\cos y}(-4\cos y e^{\cos y} - 4\int \sin y e^{\cos y} dy)$$
$$= e^{-\cos y}(-4\cos y e^{\cos y} + 4e^{\cos y} + c) = -4\cos y + 4 + ce^{-\cos y}$$

مثال ۷.۳.۲

$$y' = y(e^x - \ln y)$$

معادله را با تغییر متغیر $\ln y = t$ به صورت زیر حل می نماییم:

$$\frac{y'}{y} = t' \Rightarrow y' = t'y \Rightarrow t'y = y(e^x - \ln y) \Rightarrow t' = e^x - t \Rightarrow t' + t = e^x$$

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x \Rightarrow t = \frac{1}{e^x}\int e^x.e^x dx = \frac{1}{e^x}\int e^{2x} dx = \frac{1}{e^x}(\frac{1}{2}e^{2x} + c)$$

$$t = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{2}e^x + ce^{-x}$$

مثال ۸.۳.۲

$$y' = \frac{y}{2y\ln y + y - x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y\ln y + y - x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = 2\ln y + 1 - \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = 2\ln y + 1$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln y} = y, \quad x = \frac{1}{y}\int y(2\ln y + 1) dy = \frac{1}{y}(2\int y\ln y dy + \frac{1}{2}y^2 + c)$$

انتگرال $\int y\ln y dy$ از روش جزء به جزء به صورت زیر حل می شود:

$$\begin{cases} u=\ln y, & du=\frac{1}{y}dy \\ \\ dv=ydy, & v=\frac{y^2}{2} \end{cases}$$

$$\int y\ln y dy = uv-\int vdu = \frac{y^2}{2}\ln y-\int \frac{y^2}{2}.\frac{1}{y}dy = \frac{y^2}{2}\ln y-\frac{y^2}{4}+c_1$$

لذا جواب نهایی عبارتست از:

$$x=\frac{1}{y}(\frac{1}{2}y^2+c+y^2\ln y-\frac{1}{2}y^2+c_1) \Rightarrow x=y\ln y+c_3$$

۴.۲ ضرایب ناپیوسته

گاهی در معادلات دیفرانسیل خطی توابع $p(x)$ و $g(x)$ و یا یکی از آنها دارای ناپیوستگی جهشی است. اگر x_0 نقطه ی ناپیوستگی جهشی باشد، لازم است معادله به ازای $x>x_0$ و $x<x_0$ جداگانه حل شود، سپس دو جواب را طوری به یکدیگر مربوط می نماییم که y در x_0 پیوسته باشد.

مثال ۱.۴.۲ *جواب خصوصی معادله ی $(x+2)y'+y=f(x)$ با شرط $y(0)=4$ را در صورتی بدست آورید که:*

$$f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 2 \\ 4, & x>2 \end{cases}$$

معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$y'+\frac{1}{x+2}y=\frac{f(x)}{x+2}$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x+2}dx}=e^{\ln(x+2)}=(x+2)$$

$$y=\frac{1}{x+2}\int(x+2).\frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{1}{x+2}\int f(x)dx$$

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x^2+c_1 \\ 4x+c_2 \end{cases}$$

چون $y(0)=4$ بنابراین با جایگذاری در جواب داریم: $c_1=c_2=8$ و لذا جواب نهایی عبارتست از:

$$y=\frac{1}{x+2}\begin{cases} x^2+8, & 0\le x\le 2 \\ 4x+8, & x>2 \end{cases}$$

مثال ۲.۴.۲ *معادله ی دیفرانسیل $y'+2y=f(x)$ را در صورتی حل نمایید که $f(x)$ به صورت زیر باشد،*

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$$

دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(۱) اگر $f(x)=1$ آنگاه ، $y'+2y=1$ بنابراین:

$$\mu(x)=e^{\int 2dx}=e^{2x}\Rightarrow y=\frac{1}{e^{2x}}\int e^{2x}.1dx=\frac{1}{e^{2x}}(\frac{1}{2}e^{2x}+c_1)=\frac{1}{2}+c_1e^{-2x}$$

(۲) اگر $f(x)=0$ آنگاه، $y'+2y=0$ بنابراین:

$$\frac{y'}{y}=-2\Rightarrow\int\frac{y'}{y}dy=\int -2dx\Rightarrow\ln y=-2x+c_2\Rightarrow y=e^{c_2}.e^{-2x}=c_3e^{-2x}$$

جواب معادله ی دیفرانسیل مرتبه اول باید دارای یک ثابت باشد. بنابراین:

$$\lim_{x\to 1^+}y=\lim_{x\to 1^-}y\Rightarrow c_3e^{-2}=\frac{1}{2}+c_1e^{-2}\Rightarrow c_3=\frac{1}{2}e^2+c_1$$

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}+c_1e^{-2x}, & 0\le x\le 1\\ \\ (\frac{1}{2}e^2+c_1)e^{-2x}, & x>1\end{cases}$$

۵.۲ معادله ی برنولی

فرم این معادله به صورت زیر می باشد

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=y^ng(x)\quad(n\neq 0,1)$$

برای حل این معادله، طرفین معادله را در y^{-n} ضرب نموده و تغییر متغیر $u=y^{1-n}$ را انجام می دهیم، آنگاه داریم:

$$u=y^{1-n}\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

بنابراین با انجام این مراحل و جایگذاری در معادله داریم:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+y^{1-n}p(x)=g(x)\overset{\times(1-n)}{\Rightarrow}(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{1-n}p(x)=(1-n)g(x)$$

لذا معادله به صورت:

$$\frac{du}{dx}+(1-n)up(x)=(1-n)g(x)$$

در می آید که معادله خطی مرتبه اول است.

مثال ۱.۵.۲

$$(2xy^5-y)dx+2xdy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy^5-y}{2x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{y}{2x}=-y^5\Rightarrow n=5\quad,\quad(1-n)y^{-n}=-4y^{-5}$$

$$\overset{\times(-4y^{-5})}{\Longrightarrow}-4y^{-5}\frac{dy}{dx}+\frac{2y^{-4}}{x}=4\Rightarrow u=y^{-4}\quad,\frac{du}{dx}=-4y^{-5}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{2}{x}u=4\Rightarrow\mu(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^2}=x^2$$

$$u=\frac{1}{x^2}\int 4x^2dx=\frac{1}{x^2}(\frac{4}{3}x^3+c)=\frac{4}{3}x+\frac{c}{x^2}\Rightarrow y^{-4}=\frac{4}{3}x+\frac{c}{x^2}$$

مثال ۲.۵.۲

$$3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$$

$$y' - \frac{2}{3x}y = \frac{x^2}{3}y^{-2} \Rightarrow n = -2, (1-n)y^{-n} = 3y^2 \overset{\times(3y^2)}{\Longrightarrow} 3y^2y' - \frac{2}{x}y^3 = x^2$$

$$u = y^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = x^2$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$u = x^2\int x^{-2}.x^2dx = x^2\int dx = x^2(x+c) = x^3 + cx^2 \Rightarrow y^3 = x^3 + cx^2$$

تبصره ۲ معادله برنولی به فرم $(n \neq 0, 1) \quad \frac{dx}{dy} + xp(y) = x^n g(y)$ نیز می تواند باشد.

مثال ۳.۵.۲

$$y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^3+y+1}{3x^2} = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}(y+1)x^{-2} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dy} - \frac{x}{3} = \frac{1}{3}(y+1)x^{-2}$$

$$n = -2, (1-n)x^{-n} = 3x^2 \overset{\times(3x^2)}{\Longrightarrow} 3x^2\frac{dx}{dy} - x^3 = (y+1)$$

$$u = x^3 \quad , \quad \frac{du}{dy} = 3x^2\frac{dx}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} - u = y + 1$$

$$\mu(y) = e^{\int -dy} = e^{-y} \Rightarrow u = \frac{1}{e^{-y}}\int e^{-y}(y+1)dy = e^y(\int ye^{-y}dy + \int e^{-y}dy)$$

انتگرال $\int ye^{-y}dy$ از روش جزء به جزء به صورت زیر حل می شود:

$$\begin{cases} u = y, & du = dy \\ dv = e^{-y}dy, & v = -e^{-y} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= e^y(uv - \int vdu + \int e^{-y}dy) = e^y(-ye^{-y} + \int e^{-y}dy + \int e^{-y}dy) \\ &= e^y(-ye^{-y} - e^{-y} - e^{-y} + c) = e^y(-ye^{-y} - 2e^{-y} + c) \end{aligned}$$

$$u = -y + ce^y - 2 \Rightarrow x^3 = -y + ce^y - 2$$

مثال ۴.۵.۲

$$xy' + y = 2x^2yy'\ln y$$

$$y'(x - 2x^2y\ln y) = -y \Rightarrow \quad y' = -\frac{y}{x - 2x^2y\ln y} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{x - 2x^2y\ln y}{y}$$

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=2x^2\ln y\Rightarrow n=2,(1-n)x^{-n}=-x^{-2}\overset{\times(-x^{-2})}{\Longrightarrow}-x^{-2}\frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x^{-1}=-2\ln y$$

$$u=x^{-1},\frac{du}{dy}=-x^{-2}\frac{dx}{dy}\quad\Rightarrow\quad\frac{du}{dy}-\frac{u}{y}=-2\ln y$$

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{dy}{y}}=e^{-\ln y}=\frac{1}{y}\Rightarrow u=y\int-2\frac{\ln y}{y}dy\Rightarrow t=\ln y,dt=\frac{dy}{y}$$

$$u=-2y\int tdt=-2y(\frac{t^2}{2}+c)=-y\ln^2 y-2cy\Rightarrow x^{-1}=-y\ln^2 y-2cy$$

۶.۲ معادله ی ریکاتی

این معادله به فرم زیر می باشد:

$$y'+y^2p_1(x)+yp_2(x)+p_3(x)=0\quad,\quad p_1(x)\neq 0$$

برای حل این معادله باید یک جواب خصوصی آن مانند y_1 را داشته باشیم در این صورت جواب عمومی این معادله به صورت $y=y_1+\frac{1}{v}$ است که در آن vتابعی از x است، با جایگذاری $y=y_1+\frac{1}{v}\quad,\quad y'=y_1'-\frac{v'}{v^2}$ در معادله ، یک معادله خطی مرتبه اول بدست می آید.

مثال ۱.۶.۲

$$y'=x^3+\frac{2}{x}y-\frac{1}{x}y^2\quad,\quad y_1(x)=-x^2$$

$$y=-x^2+\frac{1}{v}\Rightarrow y'=-2x-\frac{v'}{v^2}\Rightarrow -2x-\frac{v'}{v^2}=x^3+\frac{2}{x}(-x^2+\frac{1}{v})-\frac{1}{x}(-x^2+\frac{1}{v})^2$$

$$-2x-\frac{v'}{v^2}=x^3-2x+\frac{2}{xv}-\frac{1}{x}(x^4-\frac{2x^2}{v}+\frac{1}{v^2})\Rightarrow -\frac{v'}{v^2}=x^3+\frac{2}{xv}-x^3+\frac{2x}{v}-\frac{1}{xv^2}$$

$$-\frac{v'}{v^2}=\frac{2}{xv}+\frac{2x}{v}-\frac{1}{xv^2}\overset{\times(-v^2)}{\Longrightarrow}v'=-\frac{2}{x}v-2xv+\frac{1}{x}$$

$$v'+v(\frac{2}{x}+2x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\mu(x)=e^{\int(2x+\frac{2}{x})dx}=e^{x^2+2\ln x}=e^{x^2+\ln x^2}=e^{x^2}.e^{\ln x^2}=x^2e^{x^2}$$

$$v=\frac{1}{x^2e^{x^2}}\int\frac{1}{x}.x^2e^{x^2}dx=\frac{1}{x^2e^{x^2}}\int xe^{x^2}dx\Rightarrow t=x^2,dt=2xdx$$

$$v=\frac{1}{x^2e^{x^2}}\int\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{x^2e^{x^2}}(\frac{1}{2}e^t+c)=\frac{1}{x^2e^{x^2}}(\frac{1}{2}e^{x^2}+c)=\frac{1}{2x^2}+\frac{c}{x^2e^{x^2}}$$

$$v=\frac{2c+e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}}\Rightarrow y=-x^2+\frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+2c}$$

مثال ۲.۶.۲

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2} \quad , \quad y_1(x) = x$$

$$y = x + \frac{1}{v} \Rightarrow y' = 1 - \frac{v'}{v^2} \Rightarrow 1 - \frac{v'}{v^2} = 1 + \frac{1}{x}(x + \frac{1}{v}) - \frac{1}{x^2}(x + \frac{1}{v})^2$$

$$1 - \frac{v'}{v^2} = 1 + 1 + \frac{1}{xv} - \frac{1}{x^2}(x^2 + \frac{2x}{v} + \frac{1}{v^2})$$

$$-\frac{v'}{v^2} = 1 + \frac{1}{xv} - 1 - \frac{2}{xv} - \frac{1}{x^2v^2} \Rightarrow -\frac{v'}{v^2} = -\frac{1}{xv} - \frac{1}{x^2v^2}$$

$$\xRightarrow{\times(-v^2)} v' = \frac{v}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow v' - \frac{1}{x}v = \frac{1}{x^2}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = \frac{1}{x}$$

$$v = x\int \frac{1}{x}.\frac{1}{x^2}dx = x\int \frac{1}{x^3}dx = x\int x^{-3}dx = x(\frac{x^{-2}}{-2}+c) = x(-\frac{1}{2x^2}+c) = -\frac{1}{2x}+cx$$

$$\Rightarrow v = \frac{-1 + 2cx^2}{2x} \Rightarrow y = x + \frac{2x}{2cx^2 - 1}$$

مثال ۳.۶.۲

$$y' = -\frac{2}{x^2} + y^2 \quad , \quad y_1 = \frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v} \Rightarrow \quad y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} \Rightarrow \quad -\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} = -\frac{2}{x^2} + (\frac{1}{x} + \frac{1}{v})^2$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{v'}{v^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2} \Rightarrow -\frac{v'}{v^2} = \frac{2}{xv} + \frac{1}{v^2}$$

$$\xRightarrow{\times(-v^2)} v' = -\frac{2v}{x} - 1 \Rightarrow v' + \frac{2}{x}v = -1 \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$v = \frac{1}{x^2}\int -x^2dx = \frac{1}{x^2}(-\frac{x^3}{3} + c) = -\frac{x}{3} + \frac{c}{x^2}$$

$$v = \frac{3c - x^3}{3x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x} + \frac{1}{v} = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{3c - x^3}$$

قضیه ۱.۶.۲ فرض کنید توابع $f(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}$ در ناحیه ی مستطیل $\begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ y_1 < y < y_2 \end{cases}$ شامل فاصله ی (x_0, y_0) پیوسته و کراندار باشند، آنگاه یک فاصله ی $(x_0 - h, y_0 - h)$ وجود دارد به طوریکه روی این فاصله جواب منحصر به فردی برای معادله ی $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ وجود دارد.

مثال ۴.۶.۲ جواب های معادله ی $y' = y^{\frac{1}{3}}, y(0) = 0$ را مشخص کنید.
$f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$ روی $\mathbb{R}^2$ پیوسته و $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$ روی ناحیه ای از $\mathbb{R}^2$ که شامل مبدا مختصات نمی باشد پیوسته است و جواب معادله به صورت زیر بدست می آید:

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx \Rightarrow \quad \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = x + c$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}c \quad , \quad c = 0 \Rightarrow \quad y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x$$

از طرفی $y = 0$ نیز جواب دیگری برای این معادله می باشد و لذا چون شرایط قضیه فوق برقرار نمی باشد دارای جواب منحصر به فرد نمی باشد.

تمرین ۲ معادلات زیر را حل نمایید.

(۱) $yx^2dy - 2x^2dy = y^3dx$

(۲) $y' = \frac{4xy}{x^2+1}$

(۳) $xy' - 2y = x^3 \cos x$

(۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

(۵) $y' \ln x - \frac{y}{x} = 0 \quad x > 0$

(۶) $y' = xy + x + y + 1$

(۷) $(xy^3 + y^3)dx + (y + xy)dy = 0$

معادلات برنولی زیر را حل نمایید.

(۱) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$

(۲) $(xy + x^2y^3)y' = 1$

(۳) $2\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} + x^3 \cos y = 0$

(۴) $xy' + y = \frac{x^5 e^x}{4y^3}$

معادلات ریکاتی زیر را حل نمایید.

(۱) $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x \quad , \quad y_1(x) = \sec x$

(۲) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \quad , \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$

(۳) $y' = y^2 - \frac{2}{x^2} \quad , \quad y_1(x) = \frac{1}{x}$

۷.۲ معادلات همگن

تعریف ۱.۷.۲ تابع $f(x,y)$ را همگن از درجه n گوییم هرگاه $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$.

مثال ۱.۷.۲ همگن یا غیر همگن بودن توابع زیر را مشخص کنید.

(۱)

$$f(x,y)=x^3+5xy^2+3y^3$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3x^3+5\lambda x\lambda^2y^2+3\lambda^3y^3=\lambda^3(x^3+5xy^2+3y^3)=\lambda^3f(x,y)$$

بنابراین تابع همگن از درجه ی ۳ است.

(۲)

$$f(x,y)=x\sin\frac{y}{x}$$

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda x\sin\tfrac{\lambda y}{\lambda x}=\lambda x\sin\tfrac{y}{x}=\lambda f(x,y)$$ همگن از درجه ی ۱

(۳) توابع $xe^x, x^x+y, xy+3, (x^2+y^2)\cos y$ همگی ناهمگن هستند.

تعریف ۲.۷.۲ هر معادله دیفرانسیل به فرم $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ که در آن $M(x,y), N(x,y)$ هر دو همگن از درجه ی n باشند، را یک معادله دیفرانسیل همگن می نامند.
برای حل این معادلات از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$y=vx\Rightarrow dy=vdx+xdv$$

با استفاده از این تغییر متغیر معادله تبدیل به معادله ی تفکیک پذیر می شود.

مثال ۲.۷.۲

$$2xydy+(x^2-y^2)dx=0$$

$$y=vx\Rightarrow dy=vdx+xdv\Rightarrow 2xvx(vdx+xdv)+(x^2-v^2x^2)dx=0$$

$$x^2(2v(vdx+xdv)+(1-v^2)dx)=0\overset{x^2\neq0}{\Longrightarrow}2v(vdx+xdv)+(1-v^2)dx=0$$

$$(v^2+1)dx+2vxdv=0\Rightarrow\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2v}{1+v^2}dv=0\Rightarrow\ln|x|+\ln(1+v^2)=\ln c$$

$$\ln|x|(1+v^2)=\ln c\Rightarrow|x|(1+v^2)=c\Rightarrow|x|(1+\frac{y^2}{x^2})=c\Rightarrow y^2+x^2=c|x|$$

مثال ۳.۷.۲

$$y'=\frac{y}{x+\sqrt{xy}}$$

$$(x+\sqrt{xy})dy-ydx=0\Rightarrow\quad(x+\sqrt{vx^2})(vdx+xdv)-vxdx=0$$

$$x((1+\sqrt{v})(vdx+xdv)-vdx)=0\overset{x\neq0}{\Longrightarrow}(1+\sqrt{v})(vdx+xdv)-vdx=0$$

$$v\sqrt{v}dx+x(1+\sqrt{v})dv=0\Rightarrow\quad\frac{dx}{x}+\frac{1+\sqrt{v}}{v\sqrt{v}}dv=0\Rightarrow\int\frac{dx}{x}+\int v^{-\frac{3}{2}}dv+\int\frac{dv}{v}=0$$

$$\ln x-2v^{-\frac{1}{2}}+\ln v=c\Rightarrow\quad\ln vx=c+2v^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\ln y=c+2\sqrt{\frac{x}{y}}$$

مثال ۴.۷.۲

$$y' = \frac{y-x}{y+x}$$

$$(y+x)dy = (y-x)dx \Rightarrow \quad (vx+x)(vdx+xdv) = (vx-x)dx$$

$$x(v+1)(vdx+xdv) = x(v-1)dx \Rightarrow (v+1)(vdx+xdv) = (v-1)dx$$

$$v^2dx + xvdv + xdv = -dx \Rightarrow \quad (v^2+1)dx + x(v+1)dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{v+1}{v^2+1}dv = 0 \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} + \int \frac{v}{v^2+1}dv + \int \frac{dv}{v^2+1} = 0$$

$$\ln x + \frac{1}{2}\ln(v^2+1) + \arctan v = c_1 \Rightarrow \quad \ln x^2(1+v^2) + 2\arctan v = 2c_1$$

$$\ln(x^2+y^2) + 2\arctan\frac{y}{x} = c \quad , \quad c = 2c_1$$

تبصره ۳ اگر معادله به صورت $y' = f(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'})$ باشد آنگاه همگن نیست ولی قابل تبدیل به معادله همگن است. اختلاف این معادله با معادله ی $y' = f(\frac{ax+by}{a'x+b'y})$ در این است که هر دو خط صورت و مخرج آن از مبدا مختصات نمی گذرد. اگر دو خط موازی نباشند باید مبدا مختصات را به محل تلاقی دو خط انتقال دهیم. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

(۱) اگر $ab' - ba' \neq 0$ آنگاه دو خط یکدیگر را قطع می کنند و مختصات نقطه تلاقی را از حل دستگاه

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

پیدا می کنیم. اگر محل تلاقی نقطه ی (x_0, y_0) باشد با تغییر متغیر

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

معادله به صورت $\frac{dY}{dX} = f(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y})$ در می آید که همگن است.

مثال ۵.۷.۲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+2}{x-y-4}$$

$$ab' - ba' = -1 - 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) = (1, -3)$$

$$\begin{cases} x = X+1 & , dx = dX \\ y = Y-3 & , dy = dY \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dY}{dX} = \frac{X+1+Y-3+2}{X+1-Y+3-4} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$$

$$Y = vX \Rightarrow dY = vdX + Xdv \Rightarrow (X-Y)dY = (X+Y)dX$$

$$X(1-v)(vdX+Xdv) = X(1+v)dX \Rightarrow (1-v)(vdX+Xdv) = (1+v)dX$$

$$vdX - v^2dX + Xdv - vXdv = dX + vdX \Rightarrow (1+v^2)dX + X(v-1)dv = 0$$

$$\frac{dX}{X}+\frac{v-1}{1+v^2}dv=0 \Rightarrow \int\frac{dX}{X}+\int\frac{v}{1+v^2}dv-\int\frac{1}{1+v^2}dv=0$$

$$\ln X+\frac{1}{2}\ln(1+v^2)-\arctan v=c \Rightarrow \ln X+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{Y^2}{X^2})-\arctan\frac{Y}{X}=c$$

$$\ln(x-1)+\frac{1}{2}\ln(1+\frac{(y+3)^2}{(x-1)^2})-\arctan\frac{y+3}{x-1}=c$$

(۲) اگر $ab'-ba'=0$ آنگاه دو خط موازی هستند و با تغییر متغیر $ax+by=u$ تبدیل به معادله تفکیک پذیر می شود.

مثال ۲ .۷ .۶

$$y'=\frac{x+y}{1-x-y}$$

$$u=x+y \Rightarrow u'=1+y' \Rightarrow y'=u'-1$$

$$u'-1=\frac{u}{1-u} \Rightarrow u'=\frac{u}{1-u}+1=\frac{1}{1-u}$$

$$u'=\frac{1}{1-u} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{1-u} \Rightarrow \int(1-u)du=\int dx$$

$$u-\frac{1}{2}u^2=x+c \Rightarrow x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2=x+c \Rightarrow y=\frac{1}{2}(x+y)^2+c$$

مثال ۲ .۷ .۷

$$(x-2\sin y+3)dx+(2x-4\sin y-3)\cos y dy=0$$

تغییر متغیر $\cos ydy=dz$, $\sin y=z$ را در نظر می گیریم، لذا داریم:

$$(x-2z+3)dx+(2x-4z-3)dz \Rightarrow \frac{dz}{dx}=-\frac{x-2z+3}{2x-4z-3} \quad (1)$$

حال با تغییر متغیر $u=x-2z$ داریم:

$$\frac{du}{dx}=1-2\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})=\frac{dz}{dx}$$

با جایگذاری در معادله (۱) داریم:

$$\frac{1}{2}(1-\frac{du}{dx})=-\frac{u+3}{2u-3} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{4u+3}{2u-3} \Rightarrow \frac{2u-3}{4u+3}du=dx$$

صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم نموده و انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int(\frac{1}{2}-\frac{9}{2(4u+3)})du=\int dx \Rightarrow \frac{u}{2}-\frac{9}{8}\ln|4u+3|+c=x$$

$$x=\frac{1}{2}(x-2z)-\frac{9}{8}\ln|4x-8z+3|+c$$

$$8\sin y-4x+\ln|4x-8\sin y+3|=c$$

تبصره ۴ برخی از معادلات با تغییر متغیر $y=t^\alpha, dy=\alpha t^{\alpha-1}dt$ تبدیل به معادله همگن می شوند.

مثال ۸.۷.۲

$$(y^4-3x^2)dy+xydx=0 \quad (1)$$

$$y=t^\alpha \Rightarrow (t^{4\alpha}-3x^2)(\alpha t^{\alpha-1})dt+xt^\alpha dx=0 \Rightarrow \alpha(t^{5\alpha-1}-3x^2t^{\alpha-1})dt+xt^\alpha dx=0 \quad (2)$$

برای آنکه معادله (۲) همگن شود باید ضرایب dt, dx هر دو همگن با درجه ی همگنی یکسان باشند، بنابراین :

$$5\alpha-1=2+\alpha-1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

بنابراین معادله (۲) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{2}(t^{\frac{3}{2}}-3x^2t^{-\frac{1}{2}})dt+xt^{\frac{1}{2}}dx=0 \overset{\times(2t^{\frac{1}{2}})}{\Rightarrow} (t^2-3x^2)dt+2xtdx=0 \quad (3)$$

معادله (۳) همگن است، بنابراین تغییر متغیر $t=vx \Rightarrow dt=vdx+xdv$ را در معادله (۳) قرار می دهیم و لذا داریم:

$$x^2(v^2-3)(vdx+xdv)+2x^2vdx=0 \Rightarrow x^2((v^2-3)(vdx+xdv)+2vdx)=0$$

$$\overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} (v^2-3)(vdx+xdv)+2vdx=0 \Rightarrow v^3dx-3vdx+v^2xdv-3xdv+2vdx=0$$

$$(v^3-v)dx+x(v^2-3)dv=0 \Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{v^2-3}{v^3-v}dv=0$$

برای انتگرالگیری از این رابطه ابتدا کسر دوم را به صورت زیر تجزیه می کنیم:

$$\frac{v^2-3}{v(v^2-1)}=\frac{v^2-3}{v(v-1)(v+1)}=\frac{A}{v}+\frac{B}{v-1}+\frac{C}{v+1}=\frac{A(v^2-1)+Bv(v+1)+Cv(v-1)}{v(v^2-1)}$$

$$\frac{v^2-3}{v(v^2-1)}=\frac{(A+B+C)v^2+(B-C)v-A}{v(v^2-1)}$$

$$\begin{cases} A=3 \\ B-C=0 \\ A+B+C=1 \end{cases} \Rightarrow A=3, B=-1, C=-1$$

$$\int\frac{dx}{x}+3\int\frac{dv}{v}-\int\frac{dv}{v-1}-\int\frac{dv}{v+1}=0 \Rightarrow \ln|x|+3\ln|v|-\ln|v-1|-\ln|v+1|=\ln c$$

$$\ln|x|+\ln|v|^3-(\ln|v-1|+\ln|v+1|)=0 \Rightarrow \ln|xv^3|-\ln|v^2-1|=0$$

$$\ln\left|\frac{xv^3}{v^2-1}\right|=\ln c \Rightarrow \frac{xv^3}{v^2-1}=c \Rightarrow \frac{x\frac{t^3}{x^3}}{\frac{t^2}{x^2}-1} \Rightarrow \frac{t^3}{t^2-x^2}=c, y^2=t \Rightarrow \frac{y^6}{y^4-x^2}=c$$

۸.۲ معادلات کامل

تعریف ۱.۸.۲ معادله ی دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ را کامل گوییم هر گاه تابعی مانند $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوریکه:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y) \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$$

قضیه ۱.۸.۲ *فرض کنید توابع $M(x,y), N(x,y)$ و مشتقات جزیی $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ در ناحیه ی D پیوسته باشند ، آنگاه شرط لازم و کافی برای آنکه معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل باشد آن است که*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

برای حل معادله ی کامل $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ابتدا $f(x,y) = c$ (c ثابت) در نظر می گیریم، سپس برای پیدا نمودن $f(x,y)$ قرار می دهیم:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = M(x,y) & (1) \\ \\ f_y(x,y) = N(x,y) & (2) \end{cases}$$

در این حالت ابتدا از معادله ی (۱) انتگرال نسبت به دیفرانسیل dx می گیرم و برای بدست آوردن ثابت انتگرالگیری از جواب بدست آمده نسبت به y مشتق می گیریم و با مساوی قرار دادن با معادله ی (۲) جواب نهایی را بدست می آوریم. همین مراحل را می توان با معادله ی (۲) نیز انجام داد و جواب را بدست آورد.

مثال ۱.۸.۲

$$(2xy+3)dx + (x^2+8y)dy = 0$$

ابتدا شرط قضیه را بررسی می نماییم: $M_y = 2x, N_x = 2x$ لذا معادله کامل است بنابراین

$$f(x,y) = \int (2xy+3)dx = x^2y + 3x + c(y) \quad (1)$$

$$f_y = x^2 + \frac{dc(y)}{dy} = x^2 + 8y \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy} = 8y \Rightarrow c(y) = 4y^2 + c_1$$

به جای $c(y)$ در (۱) جایگذاری می نماییم و لذا داریم:

$$x^2y + 3x + 4y^2 + c_1 = c \Rightarrow x^2y + 3x + 4y^2 = c_2$$

مثال ۲.۸.۲

$$(2xy^2+2y)dx + (2x^2y+2x)dy = 0$$

$$M_y = 4xy + 2 \quad , \quad N_x = 4xy + 2 \Rightarrow M_y = N_x$$ *لذا معادله کامل است، بنابراین:*

$$f(x,y) = \int (2x^2y+2x)dy = x^2y^2 + 2xy + c(x) \quad (1)$$

$$f_x = 2xy^2 + 2y + \frac{dc(x)}{dx} = 2xy^2 + 2y \Rightarrow \frac{dc(x)}{dx} = 0 \Rightarrow c(x) = c_1$$

به جای $c(x)$ در (۱) جایگذاری می نماییم و لذا داریم:

$$f(x,y) = x^2y^2 + 2xy + c_1 = c \Rightarrow \quad x^2y^2 + 2xy = c_2$$

مثال ۳.۸.۲

$$(\frac{y}{x} + 6x)dx + (\ln x - 2)dy = 0$$

$M_y = \frac{1}{x} \quad , \quad N_x = \frac{1}{x} \Rightarrow M_y = N_x$ لذا معادله کامل است، بنابراین:

$$f(x,y) = \int (\frac{y}{x} + 6x)dx = y\ln x + 3x^2 + c(y) \quad (1)$$

$$f_y = \ln x + \frac{dc(y)}{dy} = \ln x - 2 \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy} = -2 \Rightarrow c(y) = -2y + c_1$$

با جایگذاری $c(y)$ در (۱) داریم:

$$f(x,y) = y\ln x + 3x^2 - 2y + c_1 = c \Rightarrow \quad y\ln x + 3x^2 - 2y = c_2$$

۹.۲ فاکتورهای انتگرالگیری

اگر معادله دیفرانسیل $(1) \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد، یعنی $M_y \neq N_x$ ممکن است بتوان تابع مناسبی مانند $\mu(x,y) \neq 0$ را پیدا کرد به طوری که اگر طرفین (۱) را در $\mu(x,y)$ ضرب نماییم، معادله دیفرانسیل کامل شود.چنین تابعی را فاکتور انتگرال می نامند.
قضیه ای برای پیدا کردن فاکتور انتگرال در حالت کلی وجود ندارد اما بعضی از آنها را می توان به صورت زیر تقسیم نمود:

(۱) اگر $\frac{M_y - N_x}{N}$ فقط تابعی از x باشد، آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال $\mu(x)$ است که به صورت زیر بدست می آید:

$$f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} \Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

مثال ۱.۹.۲

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (1)$$

$M_y = 3x + 2y, N_x = 2x + y \Rightarrow M_y \neq Nx$ لذا معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - 2x - y}{x^2 + xy} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

معادله ی (۱) را در فاکتور انتگرال $\mu(x)$ ضرب می نماییم و معادله ی (۲) حاصل می شود که کامل است.

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0 \quad (2)$$

$$f(x,y) = \int (3x^2y + xy^2)dx = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c(y) \quad (3)$$

$$f_y = x^3 + x^2y + \frac{dc(y)}{dy} = x^3 + x^2y \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy} = 0 \Rightarrow c(y) = c_1$$

با جایگذاری $c(y)$ در (۳) داریم:

$$f(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + c_1 = c \Rightarrow \quad x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c_2$$

(۲) اگر $\frac{M_y-N_x}{M}$ فقط تابعی بر حسب y باشد، آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال $\mu(y)$ است که به صورت زیر بدست می آید:

$$g(y)=\frac{M_y-N_x}{M} \Rightarrow \quad \mu(y)=e^{-\int g(y)dy}$$

مثال ۲.۹.۲

$$ydx+(2x-ye^y)dy=0 \quad (1)$$

$M_y=1, N_x=2 \Rightarrow \quad M_y\neq N_x$ معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y-N_x}{M}=\frac{1-2}{y}=-\frac{1}{y} \Rightarrow \mu(y)=e^{-\int -\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

معادله ی (۱) را در فاکتور انتگرال $\mu(y)$ ضرب می نماییم و معادله ی (۲) حاصل می شود که کامل است.

$$y^2dx+(2xy-y^2e^y)dy=0 \quad (2)$$

$$f(x,y)=\int y^2dx=xy^2+c(y) \quad (3)$$

$$f_y=2xy+\frac{dc(y)}{dy}=2xy-y^2e^y \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy}=-y^2e^y \Rightarrow c(y)=-\int y^2e^ydy$$

این انتگرال را با انتخاب $u=y^2, dv=e^ydy$ از روش جزء به جزء حل می نماییم و لذا داریم:

$+y^2$	e^ydy
$-2y$	e^y
$+2$	e^y
0	e^y

$$\int y^2e^ydy=y^2e^y-2ye^y+2e^y$$

$$c(y)=-y^2e^y+2(ye^y-e^y)$$

$$f(x,y)=xy^2-y^2e^y+2(ye^y-e^y)$$

(۳) اگر $\frac{M_y-N_x}{yN-xM}$ فقط تابعی بر حسب xy باشد، آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال $F(z)$ است که به صورت زیر بدست می آید:

$$z=xy \quad , \quad f(z)=\frac{M_y-N_x}{yN-xM} \Rightarrow \quad F(z)=e^{\int f(z)dz}$$

مثال ۳.۹.۲

$$(y+x^4y^2)dx+xdy=0 \quad (1)$$

$M_y=1+2x^4y, N_x=1 \Rightarrow \quad M_y\neq N_x$ لذا معادله کامل نیست.

$$\frac{M_y-N_x}{yN-xM}=\frac{1+2x^4y-1}{xy-xy-x^5y^2}=-\frac{2}{xy}$$

$$F(z)=e^{-2\int\frac{dz}{z}}=e^{-2\ln z}=e^{\ln z^{-2}}=z^{-2}=\frac{1}{z^2} \Rightarrow \quad F(z)=\frac{1}{x^2y^2}$$

معادله ی (۱) را در فاکتور انتگرال $F(z)$ ضرب می نماییم و معادله ی (۲) حاصل می شود که کامل است.

$$(\frac{1}{x^2y}+x^2)dx+\frac{1}{xy^2}dy=0 \quad (2)$$

$$f(x,y)=\int(\frac{1}{x^2y}+x^2)dx=\frac{1}{y}\int x^{-2}dx+\int x^3dx=-\frac{1}{xy}+\frac{1}{3}x^3+c(y)$$

$$f_y=\frac{1}{xy^2}+\frac{dc(y)}{dy}=\frac{1}{xy^2}\Rightarrow \quad \frac{dc(y)}{dy}=0\Rightarrow \quad c(y)=c_1$$

$$f(x,y)=-\frac{1}{xy}+\frac{1}{3}x^3+c_1=c \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{xy}+\frac{1}{3}x^3=c_2$$

(۴) اگر معادله دیفرانسیل به صورت زیر باشد:

$$y(Kx^ay^b+Lx^cy^d)dx+x(Mx^ay^b+Nx^cy^d)dy=0 \quad (1)$$

و $KN-ML\neq 0$ آنگاه معادله دارای فاکتور انتگرال به صورت $F=x^\alpha y^\beta$ است. با ضرب معادله ی (۱) در F و بررسی شرط کامل بودن α,β را بدست می آوریم.

مثال ۴.۹.۲

$$y(4x+3y^3)dx+x(2x+5y^3)dy=0 \quad (1)$$

$KN-ML=20-6\neq 0$ *لذا معادله ی (۱) را در $F=x^\alpha y^\beta$ ضرب می نماییم.*

$$(4x^{\alpha+1}y^{\beta+1}+3x^\alpha y^{4+\beta})dx+(2x^{\alpha+2}y^\beta+5x^{\alpha+1}y^{\beta+3})dy=0 \quad (2)$$

شرط کامل بودن را برای معادله (۲) بررسی نموده و α,β را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} M_y=4(\beta+1)x^{\alpha+1}y^\beta+3(4+\beta)x^\alpha y^{3+\beta} \\ \\ N_x=2(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^\beta+5(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+3} \end{cases}$$

$$M_y=N_x\Rightarrow \begin{cases} 4(\beta+1)=2(\alpha+2) \\ 3(4+\beta)=5(\alpha+1) \end{cases} \Rightarrow \alpha=2,\beta=1\Rightarrow F=x^2y$$

معادله ی (۱) را در F ضرب می نماییم، لذا معادله ی (۲) حاصل می شود که کامل است.

$$(4x^3y^2+3x^2y^5)dx+(2x^4y+5x^3y^4)dy=0 \quad (2)$$

$$f(x,y)=\int(4x^3y^2+3x^2y^5)dx=x^4y^2+x^3y^5+c(y)$$

$$f_y=2x^4y+5x^3y^4+\frac{dc(y)}{dy}=2x^4y+5x^3y^4\Rightarrow \frac{dc(y)}{dy}=0\Rightarrow c(y)=c_1$$

تبصره ۵ *گاهی ممکن است ظاهر معادله به گونه ای باشد که نیازی به محاسبه ی مستقیم فاکتور انتگرال نباشد. در این صورت می توان از فرمولهای زیر استفاده نمود.*

$$d(\tfrac{x}{y}) = \tfrac{ydx-xdy}{y^2} \qquad (۱)$$

$$d(xy) = xdy + ydx \qquad (۲)$$

$$d(x^2+y^2) = 2(xdx+ydy) \qquad (۳)$$

$$d(\arctan(\tfrac{x}{y})) = \tfrac{ydx-xdy}{x^2+y^2} \qquad (۴)$$

$$d(\ln(\tfrac{x}{y})) = \tfrac{ydx-xdy}{xy} \qquad (۵)$$

مثال ۵.۹.۲

$$ydx + (x^2y - x)dy = 0$$

$M_y = 1, N_x = 2xy - 1$ بنابراین معادله کامل نیست.

$$x^2ydy = xdy - ydx \Rightarrow ydy = \frac{xdy - ydx}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$ydy = d(\frac{y}{x}) \Rightarrow \int ydy = \int d(\frac{y}{x})$$

$$\frac{y^2}{2} + c = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{xy^2}{2} + cx$$

مثال ۶.۹.۲

$$2x(x^2+y^2)dx - xdy + ydx = 0$$

$$2xdx + \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow 2xdx + d(\arctan(\frac{x}{y})) = 0$$

$$\int 2xdx + \int d(\arctan(\frac{x}{y})) = 0 \Rightarrow x^2 + \arctan(\frac{x}{y}) = c$$

مثال ۷.۹.۲

$$(x+y^2+1)dy = ydx$$

$$y^2dy + dy = ydx - xdy \Rightarrow dy + \frac{dy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

$$\int dy + \int y^{-2}dy = \int d(\frac{x}{y}) \Rightarrow y + \frac{y^{-1}}{-1} + c = \frac{x}{y}$$

$$y - \frac{1}{y} + c = \frac{x}{y}$$

۱۰.۲ مسیرهای قائم

اگر هر منحنی از یک دسته منحنی، بر کلیه ی منحنی های دسته ی دیگر عمود باشد، در این صورت یک دسته را مسیر های قائم دسته ی دیگر می نامند.
روش بدست آوردن مسیرهای قائم یک دسته منحنی به صورت زیر است:
ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را پیدا می کنیم، سپس در این معادله به جای y'، $-\frac{1}{y'}$ ، قرار می دهیم، زیرا در هر نقطه روی مسیر اصلی، ضریب زاویه ی منحنی مسیر قائم، عکس و قرینه ی ضریب زاویه ی مسیر اصلی است، لذا معادله دیفرانسیل مسیر قائم بدست می آید و سپس معادله دیفرانسیل مسیر قائم را حل می نماییم تا دسته منحنی مسیر قائم بدست آید.

مثال ۱.۱۰.۲ *مسیرهای قائم دسته منحنی های $x^2+y^2=c$ را بیابید.*
ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل می دهیم،

$$\begin{cases} x^2+y^2=c \\ 2x+2yy'=0 \end{cases} \Rightarrow \quad y'=-\frac{x}{y}$$

به جای y'، $-\frac{1}{y'}$ قرار می دهیم و لذا معادله مسیر قائم عبارتست از: $-\frac{1}{y'}=-\frac{x}{y}$. حال این معادله را حل می نماییم،

$$y'=\frac{y}{x}\Rightarrow \quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln y=\ln x+c\Rightarrow \ln y=\ln x+\ln c_1 \Rightarrow y=c_1x$$

بنابراین $y=c_1x$ دسته منحنی های مسیرهای قائم می باشند.

مثال ۲.۱۰.۲ *مسیرهای قائم دسته منحنی های $x^3y-y^3x=c$ را بیابید.*
ابتدا معادله دیفرانسیل مسیر اصلی را تشکیل می دهیم،

$$\begin{cases} x^3y-y^3x=c \\ 3x^2y+x^3y'-y^3-3y'y^2x=0 \end{cases}$$

از معادله ی دوم دستگاه داریم:

$$y'(x^3-3xy^2)=y^3-3x^2y\Rightarrow y'=\frac{y^3-3x^2y}{x^3-3xy^2}$$

به جای y'، $-\frac{1}{y'}$ قرار می دهیم و لذا معادله ی مسیر قائم عبارتست از:

$$-\frac{1}{y'}=\frac{y-3x^2y}{x^3-3xy^2}\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3xy^2-x^3}{y^3-3x^2y}$$

این معادله همگن است، بنابراین با تغییر متغیر $y=vx$ معادله را به صورت زیر حل می نماییم:

$$dy=vdx+xdv\Rightarrow \frac{vdx+xdv}{dx}=\frac{3x^3v^2-x^3}{v^3x^3-3x^3v}\Rightarrow v+\frac{xdv}{dx}=\frac{3v^2-1}{v^3-3v}$$

$$\frac{xdv}{dx}=\frac{3v^2-1}{v^3-v}-v=\frac{-v^4+6v^2-1}{v^3-3v}\Rightarrow -\frac{dx}{x}=\frac{(v^3-3v)dv}{v^4-6v^2+1}$$

$$-\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\int\frac{4v^3-12v}{v^4-6v^2+1}dv\Rightarrow -\ln x=\frac{1}{4}\ln(v^4-6v^2+1)-\frac{1}{4}c$$

$$-4\ln x = \ln(v^4 - 6v^2 + 1) + c \Rightarrow \ln x^4(v^4 - 6v^2 + 1) = c$$

$$e^c = x^4(\frac{y^4}{x^4} - 6\frac{y^2}{x^2} + 1) \Rightarrow y^4 - 6x^2y^2 + x^4 = c_1$$

بنابراین $y^4 - 6x^2y^2 + x^4 = c_1$ دسته منحنی های مسیرهای قائم هستند.

تمرین ۳ معادلات زیر را حل نمایید.

(۱) $y' = \frac{2x^2+y^2}{-2xy+3y^2}$

(۲) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

(۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x+4y+2}$

(۴) $e^x \ln y dx + e^x y^{-1} dy = 0$

(۵) $(3x^2\ln x + x^2 - y)dx - xdy = 0$

(۶) $3x^2dx - 2x^2ydy = 2xy^2dx$

(۷) $(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0$

(۸) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

(۹) $(x^2 + y^2)dx + 3xydy = 0$

(۱۰) $y(2 - 3xy)dx - xdy = 0$

(۱۱) $x\sin(\frac{y}{x})y' = y\sin(\frac{y}{x}) + x$

(۱۲) $x(y' + e^{\frac{y}{x}}) = y$

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل مرتبه ی دوم و بالاتر

۱.۳ مقدمه

در این فصل طریقه ی حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان نموده و روش حل را به مراتب بالاتر تعمیم می دهیم. فرم کلی معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n ام به صورت زیر می باشد:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

معادله ی دیفرانسیل (۱) را به دو دسته ی خطی و غیر خطی تقسیم می نماییم. معادلات دیفرانسیل خطی نیز به دو دسته ی زیر تقسیم می شوند:

(۱) معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

(۲) معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب متغیر

۲.۳ معادلات خطی مرتبه دوم

تعریف ۱.۲.۳ *معادله ی دیفرانسیل مرتبه دوم خطی به فرم زیر می باشد:*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (1)$$

اگر در معادله ی (۱) ، $r(x) = 0$ آنگاه معادله را همگن و در غیر این صورت آنرا غیر همگن می نامند.

قضیه ۱.۲.۳ *اگر توابع $p(x), q(x), r(x)$ روی فاصله ی باز (a, b) پیوسته باشند ، آنگاه تنها یک تابع مانند $y = G(x)$ وجود دارد که در معادله ی*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0$$

در نقطه ی x_0 در فاصله (a, b) صدق می کند.

قضیه ۲.۲.۳ *اگر $y_1 = G(x)$ یک جواب معادله ی دیفرانسیل خطی همگن*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

باشد، آنگاه $y = cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله خواهد بود.

قضیه ۳.۲.۳ *اگر y_1, y_2 دو جواب معادله ی دیفرانسیل همگن*
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$
باشند، آنگاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب معادله ی (۱) است.

تبصره ۶ *با توجه به قضیه های ۲.۲.۳ و۳.۲.۳ می توان نتیجه گرفت که اگر y_1, y_2 دو جواب برای معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن باشند، در این صورت $c_1y_1 + c_2y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.*

تعریف ۲.۲.۳ *توابع $y_1(x), y_2(x)$ را روی فاصله ی (a, b) مستقل خطی گویند هر گاه رابطه ی زیر برقرار باشد:*

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = c_2 = 0$$

و وابستگی خطی دارند اگر داشته باشیم:

$$y_1(x) = ky_2(x) \vee y_2(x) = ly_1(x) \quad \forall x \in (a, b) \quad (\text{ثابتند اعداد } k, l)$$

اگر در فاصله ی (a, b) ، $y_1(x) = 0$ یا $y_2(x) = 0$ آنگاه y_1, y_2 وابستگی خطی دارند و در غیر این صورت y_1, y_2 وابستگی خطی دارند اگر وتنها اگر $\frac{y_1}{y_2}$ برابر با یک مقدار ثابت باشد. لذا در صورتیکه $\frac{y_1}{y_2}$ تابعی از x باشد، آنگاه y_1, y_2 مستقل خطی هستند.

مثال ۱.۲.۳ (۱) *توابع $y_1 = 6x, y_2 = 5x$ وابستگی خطی دارند زیرا:* $\frac{y_1}{y_2} = \frac{6}{5}$.

(۲) *توابع $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^x$ مستقل خطی اند زیرا:* $\frac{y_1}{y_2} = e^x$.

تبصره ۷ *اگر y_1, y_2 دو جواب مستقل خطی معادله ی $y''+p(x)y'+q(x)y = 0$ باشند، آنگاه $y = c_1y_1+c_2y_2$ جواب عمومی این معادله است.*

۳.۳ معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر می باشد:
$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

برای حل این معادله ابتدا معادله ی مفسر را به صورت $t^2 + at + b = 0$ تشکیل می دهیم. سپس حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(۱) اگر معادله ی مفسر دارای دو ریشه ی متمایز باشد و این دو ریشه را با t_1, t_2 نشان دهیم آنگاه $y_1 = e^{t_1x}, y_2 = e^{t_2x}$ جوابهای (۱) می باشند، لذا جواب عمومی آن عبارتست از $y = c_1e^{t_1x} + c_2e^{t_2x}$.

مثال ۱.۳.۳ *جواب عمومی معادله ی $y'' - 2y' - 15y = 0$ را مشخص نمایید.*
ابتدا معادله ی مفسر را تشکیل می دهیم، لذا داریم:
$$t^2 - 2t - 15 = 0 \Rightarrow (t - 5)(t + 3) = 0 \Rightarrow t_1 = 5, t_2 = -3 \Rightarrow y = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}$$

مثال ۲.۳.۳ جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل زیر را مشخص نمایید.

$$y'' - y' - 6y = 0 \quad , \quad y(0) = 3 \quad , \quad y'(0) = -4$$

معادله ی مفسر به صورت $t^2 - t - 6 = 0$ می باشد که ریشه های آن عبارتست از: $t_1 = -2, t_2 = 3$
لذا جواب عمومی به صورت زیر می باشد:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} \quad (1)$$

از معادله ی (۱) مشتق می گیریم: $y' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x} \quad (2)$
شرایط اولیه را در معادله های (۱)و (۲) قرار می دهیم:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ -2c_1 + 3c_2 = -4 \end{cases}$$

از حل دستگاه داریم: $c_1 = \frac{13}{5}, c_2 = \frac{2}{5}$ بنابراین: $y = \frac{13}{5}e^{-2x} + \frac{2}{5}e^{3x}$.

(۲) اگر معادله ی مفسر دارای ریشه ی مضاعف باشد در این صورت $t = t_1 = t_2$، بنابراین $y_1 = e^{t_1 x}, y_2 = xe^{t_1 x}$ جوابهای (۱) می باشند، لذا جواب عمومی عبارتست از:

$$y = c_1 e^{t_1 x} + c_2 x e^{t_1 x}$$

مثال ۳.۳.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' - 6y' + 9y = 0$ را مشخص کنید.

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Rightarrow (t-3)^2 = 0 \Rightarrow t = 3$$

لذا جواب عمومی عبارتست از: $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$.

(۳) اگر معادله ی مفسر دارای دو ریشه ی متمایز مختلط باشد و این دو ریشه را به صورت زیرنشان دهیم:

$$t_1 = p + iq, \quad t_2 = p - iq \quad q \neq 0$$

آنگاه چون y_1, y_2 مستقل خطی اند بنابراین جواب عمومی معادله ی (۱) عبارتست از:

$$y = c_1 e^{(p+iq)x} + c_2 e^{(p-iq)x}$$

از از طرفی بنا به فرمول اویلر داریم: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. چون $e^{px}\cos qx, e^{px}\sin qx$ مستقل خطی اند با قرار دادن: $c_1 = \frac{1}{2}(A - iB), c_2 = \frac{1}{2}(A + iB)$ جواب عمومی به صورت زیر بدست می آید:

$$y = e^{px}(A\cos qx + B\sin qx)$$

مثال ۴.۳.۳ جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل $y'' + 9y = 0$ را مشخص کنید.

$$t^2 + 9 = 0 \Rightarrow t_1 = 3i, t_2 = -3i \Rightarrow y = A\cos 3x + B\sin 3x$$

مثال ۵.۳.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' + 2y' + 10y = 0$ را مشخص کنید.

$$t^2 + 2t + 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 \pm 6i}{2}$$

$$\Rightarrow t_1 = -1 + 3i, t_2 = -1 - 3i \Rightarrow y = e^{-x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

تمرین ۴ جواب عمومی معادله ها ی زیر را بدست آورید.

(۱) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(۲) $y'' + y' + 2y = 0$

(۳) $y'' - 3y' = 0$

معادلات با شرایط اولیه زیر را حل نمایید.

(۱) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2$

(۲) $y'' + 9y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = 9$

(۳) $y'' - 4y' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = -6$

۴.۳ معادلات خطی همگن از مرتبه ی دلخواه n با ضرایب ثابت

یک معادله ی همگن مرتبه ی n با ضرایب ثابت به صورت زیر می باشد:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad (2)$$

تعریف ۱.۴.۳ *توابع $y_1, y_2, ..., y_n$ را روی فاصله ی I مستقل خطی می نامند هرگاه:*

$$c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = ... = c_n = 0$$

تعریف ۲.۴.۳ *فرض کنید توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ روی فاصله ی $[a, b]$ تعریف شده باشند. رونسکین $y_1, y_2, \ldots, y_n$ که با علامت $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ نشان داده می شود ، عبارتست از دترمینان ماتریس زیر:*

$$W[y_1, y_2 \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

قضیه ۱.۴.۳ *اگر توابع $y_1, y_2 \ldots, y_n$ جوابهای مستقل خطی معادله ی دیفرانسیل (۲) روی فاصله ی $[a, b]$ باشند آنگاه $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ در تمام نقاط $[a, b]$ نمی تواند صفر باشد.*

قضیه ۲.۴.۳ *اگر $y_1, y_2, ..., y_n$ جوابهای مستقل خطی معادله ی (۲) باشند آنگاه جواب عمومی آن عبارتست از:*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

برای معادله ی (۲) ابتدا معادله ی مفسر را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$t^n + a_1t^{n-1} + ... + a_{n-1}t + a_n = 0$$

سپس با استفاده از ریشه های معادله ی مفسر جوابهای مستقل خطی $y_1, y_2, \ldots, y_n$ را مشخص می نماییم. چون معادله ی مفسر یک کثیرالجمله از درجه ی n با ضرایب حقیقی است حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(۱) معادله ی مفسر دارای n ریشه ی متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_n$ باشد در این صورت جوابهای

$$y_1 = e^{t_1x} \quad , \quad y_2 = e^{t_2x} \quad , \ldots, y_n = e^{t_nx}$$

مستقل خطی هستند. لذا جواب عمومی معادله ی (۲) به صورت زیر می باشد:

$$y = c_1e^{t_1x} + c_2e^{t_2x} + \ldots + c_ne^{t_nx}$$

مثال ۱.۴.۳ *جواب عمومی معادله ی $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ را مشخص کنید.*

$$t^3 - 2t^2 - 3t = 0 \Rightarrow \quad t(t^2 - 2t - 3) = 0$$

$$t_1 = 0, t_2 = 3, t_3 = -1 \Rightarrow \quad y = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^{-x}$$

(۲) معادله ی مفسر دارای n ریشه ی حقیقی باشد و m تای آنها با هم مساوی باشند. در این صورت $t_1 = t_2 = \ldots = t_m$ بنابراین

$$y_1 = e^{t_1 x} \quad , \quad y_2 = xe^{t_1 x} \quad , \quad y_3 = x^2 e^{t_1 x}, \quad \ldots, y_m = x^{m-1} e^{t_1 x}$$

و $y_{m+1}, \ldots, y_n$ مانند حالت اول هستند.

مثال ۲.۴.۳ *جواب عمومی معادله ی $y''' - y'' - y' + y = 0$ را مشخص کنید.*

$$t^3 - t^2 - t + 1 = 0 \Rightarrow (t^3 - t^2) - (t-1) = 0 \Rightarrow t^2(t-1) - (t-1) = 0$$
$$(t-1)(t^2-1) = 0 \quad \Rightarrow t_1 = t_2 = 1, t_3 = -1$$
$$y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_3 = e^{-x} \Rightarrow \quad y = (c_1 + c_2 x)e^x + c_3 e^{-x}$$

(۳) اگر معادله ی مفسر دارای ریشه های مختلط $t_1 = p + iq, t_2 = p - iq$ باشد و بقیه ریشه ها ی آن حقیقی باشند در این صورت در جواب عمومی به جای $c_1 y_1 + c_1 y_2$ عبارت $e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \sin qx)$ را قرار می دهیم.

مثال ۳.۴.۳ *جواب عمومی معادله ی $y^{(4)} - y = 0$ را مشخص کنید.*

$$t^4 - 1 = 0 \Rightarrow (t^2+1)(t-1)(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = i, t_2 = -i, t_3 = 1, t_4 = -1$$
$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x + c_4 e^{-x}$$

(۴) اگر معادله ی مفسر دارای m ریشه مختلط تکراری باشد در این صورت $2m$ جواب مربوط به این قسمت عبارتند از:

$$e^{px} \cos qx, e^{px} \sin qx, \ldots, x^{m-1} e^{px} \cos qx, x^{m-1} e^{px} \sin qx$$

بنابراین در جواب عمومی به جای m جواب عبارت زیر را داریم:

$$e^{px}(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) \cos qx + e^{px}(c_{m+1} + c_{m+2} x + \ldots + c_{2m} x^{m-1}) \sin qx$$

مثال ۴.۴.۳ *جواب عمومی معادله ی $y^{(6)} + y^{(4)} - y'' - y = 0$ را مشخص کنید.*

$$t^6 + t^4 - t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t^4(t^2+1) - (t^2+1) = 0 \Rightarrow (t^2+1)(t^4-1) = 0$$
$$(t^2+1)(t^2+1)(t^2-1) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = -1, t_3 = t_4 = i, t_5 = t_6 = -i$$
$$\Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + (c_3 + c_4 x) \cos x + (c_5 + c_6 x) \sin x$$

۵.۳ معادلات خطی غیر همگن مرتبه ی دوم و بالاتر

فرم کلی معادلات خطی غیر همگن مرتبه ی دوم به صورت زیر می باشد:

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x) \quad (1)$$

قضیه ۱.۵.۳ *جواب عمومی معادله ی (۱) به صورت مجموع $y_p(x), y_c(x)$ است که $y_p(x)$ یک جواب ساده بدون پارامتر معادله ی (۱) است و $y_c(x)$ جواب عمومی معادله ی همگن زیر می باشد:*

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0 \quad (2)$$

یعنی جواب عمومی معادله ی (۱) به صورت $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ می باشد.

قضیه ۲.۵.۳ *فرض کنید در معادله ی (۱)، $g(x)$ به صورت مجموع چند تابع به صورت زیر باشد:*

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \ldots + g_m(x) \quad (3)$$

و $y_1(x)$ یک جواب معادله ی $y'' + f_1(x)y' + f_2(x) = g_1(x)$
و $y_2(x)$ یک جواب معادله ی $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g_2(x)$
و به همین ترتیب $y_m(x)$ یک جواب معادله ی $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g_m(x)$ باشد آنگاه یک جواب خصوصی معادله ی (۳) به صورت زیر می باشد:

$$y_p(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_m(x)$$

برای بدست آوردن جواب خصوصی $y_p(x)$ دو روش به صورت زیر داریم:

(۱) **روش ضرایب نامعین**

این روش را فقط برای معادلات با ضرایب ثابت می توان به کار برد. برای بدست آوردن جواب خصوصی معادله ی

$$y'' + a_1y' + a_2y = g(x) \quad (3)$$

حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(الف) اگر $g(x)$ در معادله ی (۳) یک چند جمله ای از درجه ی n باشد، آنگاه فرم جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_p = x^s(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n)$$

که در آن s تعداد ریشه های مساوی صفر در معادله ی مفسر می باشد.برای مشخص نمودن ضرایب $A_0, A_1, \ldots, A_n$ عبارتهای y_p'', y_p', y_p را در معادله ی (۳) قرار داده و با برابر قرار دادن ضرایب از دو طرف تساوی ضرایب را بدست می آوریم.

مثال ۱.۵.۳ *معادله ی دیفرانسیل $y'' + 3y' = x^2$ را حل نمایید.*
ابتدا معادله ی همگن $y'' + 3y' = 0$ را حل می نماییم.

$$t^2 + 3t = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -3 \Rightarrow y_c = c_1 + c_2e^{-3x}$$

سپس جواب خصوصی y_p را به صورت $y_p = x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2)$ در نظر می گیریم که در آن $s = 1$ بنابراین:

$$y_p = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 \Rightarrow y_p' = A_0 + 2A_1x + 3A_2x^2 \Rightarrow y_p'' = 2A_1 + 6A_2x$$

y_p, y_p', y_p'' را در معادله ی $y'' + 3y' = x^2$ قرار می دهیم و لذا داریم:

$$2A_1 + 6A_2x + 3A_0 + 6A_1x + 9A_2x^2 = x^2$$

$$\begin{cases} 9A_2 = 1 \\ 6A_2 + 6A_1 = 0 \\ 2A_1 + 3A_0 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = -\frac{1}{9}, A_2 = \frac{1}{9}, A_0 = \frac{2}{27} \Rightarrow y_p = \frac{2}{27}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{9}x^3, y = y_p + y_c$$

(ب) اگر $g(x)$ در معادله ی (۳) به صورت $p(x)e^{\alpha x}$ باشد که در آن $p(x)$ چند جمله ای از درجه ی n است، آنگاه فرم جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_p = x^s(A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n)e^{\alpha x}$$

که در آن s تعداد ریشه های مساوی α در معادله ی مفسر می باشد.

مثال ۲.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y''+3y'+2y=e^{-2x}$ را مشخص کنید.
ابتدا معادله ی همگن $y''+3y'+2y=0$ را حل می نماییم.

$$t^2+3t+2=0 \Rightarrow t_1=-1, t_2=-2 \Rightarrow \quad y_c=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$$

بنابراین جواب خصوصی y_p عبارتست از: $y_p=x^sA_0e^{-2x}$ که در آن $s=1$ بنابراین:

$$y_p=A_0xe^{-2x}, y_p'=A_0e^{-2x}-2A_0xe^{-2x}, y_p''=-4A_0e^{-2x}+4A_0xe^{-2x}$$

y_p, y_p', y_p'' را در معادله ی $y''+3y'+2y=e^{-2x}$ قرار می دهیم و لذا داریم:

$$-4A_0e^{-2x}+4A_0xe^{-2x}+3A_0e^{-2x}-6A_0xe^{-2x}+2A_0xe^{-2x}=e^{-2x} \Rightarrow -A_0e^{-2x}=e^{-2x}$$

$$A_0=-1 \Rightarrow \quad y=y_c+y_p \Rightarrow \quad y=c_1e^{-x}+(c_2-x)e^{-2x}$$

تبصره ۸ روش ضرایب نامعین را در تمام حالتها می توان برای معادلات با ضرایب ثابت از مر تبه ی دلخواه n به کار برد.

مثال ۳.۵.۳ فرم جواب خصوصی معادله ی زیر را مشخص نمایید.

$$y^{(4)}+2y^{(3)}+y''=(x^2+3)e^{-x}+4x$$

ابتدا ریشه های معادله ی مفسر همگن را مشخص می نماییم.

$$t^4+2t^3+t^2=0 \Rightarrow t^2(t+1)^2=0 \Rightarrow t_1=t_2=0, t_3=t_4=-1$$

در این معادله $g(x)$ مجموع $g_1(x)=(x^2+3)e^{-x}, g_2(x)=4x$ است و لذا:
$y_{p_1}=x^se^{-x}(Ax^2+Bx+C)$ که در آن s تعداد ریشه های مساوی -1 در معادله ی مفسر یعنی $s=2$ و $y_{p_2}=x^s(Dx+F)$ که در آن s تعداد ریشه های مساوی صفر در معادله ی مفسر یعنی $s=2$ می باشد،بنابراین:

$$y_p=x^2e^{-x}(Ax^2+Bx+C)+x^2(Dx+F)$$

(ج) اگر $g(x)$ در معادله ی (۳) به صورت $p(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ یا $p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ باشد که در آن $p(x)$ چند جمله ای از درجه ی n است آنگاه فرم جواب خصوصی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_p=x^se^{\alpha x}((A_0+A_1x+\ldots+A_nx^n)\cos\beta x+(B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n)\sin\beta x))$$

که در آن s تعداد ریشه های مساوی $\alpha+i\beta$ در معادله ی مفسر می باشد.

مثال ۴.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y''+4y=3\cos 5x$ را مشخص کنید.
ابتدا جواب معادله ی همگن $y''+4y=0$ را مشخص می نماییم.

$$t^2+4=0 \Rightarrow \quad t=\pm 2i \Rightarrow \quad y_c=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$$

سپس جواب خصوصی y_p را به صورت $y_p=x^s(A\cos 5x+B\sin 5x)$ در نظر می گیریم. چون معادله ی مفسر ریشه ی $5i$ ندارد، بنابراین $s=0$ و لذا داریم:

$$y_p=A\cos 5x+B\sin 5x \Rightarrow y_p''=-25A\cos 5x-25B\sin 5x$$

y_p, y_p'' را در معادله ی $y''+4y=3\cos 5x$ قرار می دهیم، بنابراین:

$$A=-\frac{1}{7}, B=0 \Rightarrow y_p=-\frac{1}{7}\cos 5x \Rightarrow y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x-\frac{1}{7}\cos 5x$$

مثال ۵.۵.۳ فرم جواب خصوصی معادله ی زیر را مشخص نمایید.

$$y'' + 4y = x^2 \sin 2x$$

با توجه به مثال قبل ریشه های معادله ی مفسر معادله ی همگن $y'' + 4y = 0$ برابر $\pm 2i$ است و چون $2i+$ یک بار ریشه ی معادله ی مفسر است بنابراین:

$$y_p = x((Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x)$$

مثال ۶.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y''' + y'' = e^x \cos x$ را مشخص نمایید.
ابتدا معادله ی همگن $y''' + y'' = 0$ را حل می نماییم.

$$t^3 + t^2 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 0, t_3 = -1 \Rightarrow y_c = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

جواب خصوصی y_p را به صورت $y_p = x^s e^x (A\cos x + B\sin x)$ در نظر می گیریم که در آن s تعداد ریشه های مساوی $1 + i$ در معادله ی مفسر می باشد و $s = 0$ ، بنابراین جواب خصوصی y_p عبارتست از : $y_p = e^x (A\cos x + B\sin x)$.

$$y_p' = e^x((A+B)\cos x + (A-B)\sin x) \Rightarrow y_p'' = e^x(2B\cos x - 2A\sin x)$$

$$y_p''' = e^x((2B-2A)\cos x - (2A+2B)\sin x)$$

y_p'', y_p''' را درمعادله ی $y''' + y'' = e^x \cos x$ قرار می دهیم و لذا داریم:

$$A = -\frac{1}{10}, B = \frac{1}{5} \Rightarrow y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + e^x(-\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{5}\sin x)$$

(ب) **روش تغییر پارامتر**

این روش برای حل معادلات خطی غیر همگن در حالت کلی به کار می رود.
فرض کنید در معادله ی دیفرانسیل

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = g(x)$$

توابع $f_1(x), f_1(x), g(x)$ در یک فاصله ی باز پیوسته باشند. برای پیدا کردن جواب خصوصی y_p از روش زیر که روش تغییر پارامتر نام دارد استفاده می کنیم.
فرض کنید جواب عمومی معادله ی همگن متناظر به صورت $y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2$ موجود باشد. سپس جواب y_p را به صورت $y_p = v_1(x)y_1 + v_2(x)y_2$ در نظر می گیریم که $v_1(x), v_2(x)$ توابعی بر حسب x هستند. برای مشخص نمودن ضرایب $v_1(x), v_2(x)$ از دستگاه زیر

$$\begin{cases} v_1'(x)y_1 + v_2'(x)y_2 = 0 \\ \\ v_1'(x)y_1' + v_2'(x)y_2' = g(x) \end{cases}$$

$v_1'(x), v_2'(x)$ را مشخص نموده و سپس با انتگرالگیری $v_1(x), v_2(x)$ را بدست می آوریم.
چون جوابهای y_1, y_2 مستقل خطی اند بنابراین $W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0$ و لذا از دو فرمول زیر نیز می توان $v_1(x), v_2(x)$ را بدست آورد.

$$v_1(x) = -\int \frac{y_2 g(x)}{W} dx \quad , \quad v_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W} dx$$

مثال ۷.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\cos^3 x}$ را مشخص کنید.
ابتدا معادله ی همگن $y'' + 2y' + 2y = 0$ را حل می نماییم.

$$t^2 + 2t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -1 - i, t_2 = -1 + i \Rightarrow y_c = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

فرض کنید: $y_1 = e^{-x}\cos x, y_2 = e^{-x}\sin x$ بنابراین:

$$y_1' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x, y_2' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$$

$$\begin{aligned} W[y_1,y_2] &= y_1y_2' - y_1'y_2 \\ &= -e^{-2x}\cos x\sin x + e^{-2x}\cos^2 x + e^{-2x}\sin x\cos x + e^{-2x}\sin^2 x = e^{-2x} \end{aligned}$$

$$v_1(x) = -\int \frac{y_2 g(x)}{W}dx = -\int \frac{e^{-2x}\sin x}{e^{-2x}\cos^3 x}dx = -\int \cos^{-3} x\sin x dx$$

$$u = \cos x, du = -\sin x dx \Rightarrow v_1(x) = \int u^{-3}du = \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{\cos^{-2} x}{-2} = -\frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$v_2(x) = \int \frac{y_1 g(x)}{W}dx = \int \frac{e^{-2x}\cos x}{e^{-2x}\cos^3 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int \sec^2 x dx = \tan x$$

$$\begin{aligned} y_p &= y_1v_1 + y_2v_2 = e^{-x}\cos x.(-\frac{1}{2\cos^2 x} + e^{-x}\sin x.\tan x) \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x}\frac{1}{\cos x} + e^{-x}\sin x\frac{\sin x}{\cos x} = e^{-x}(\frac{-1+2\sin^2 x}{2\cos x}) \end{aligned}$$

$$y = e^{-x}(c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{-1+2\sin^2 x}{2\cos x})$$

مثال ۸.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' + y = \sec^3 x$ را مشخص نمایید.
ابتدا معادله ی همگن $y'' + y = 0$ را حل می نماییم.

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i \Rightarrow y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$$

فرض کنید: $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x, y_p = v_1\cos x + v_2\sin x$ بنابراین:

$$\begin{cases} v_1'\cos x + v_2'\sin x = 0 \\ -v_1'\sin x + v_2'\cos x = \sec^3 x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1'\cos x\sin x + v_2'\sin^2 x = 0 \\ -v_1'\sin x\cos x + v_2'\cos^2 x = \sec^3 x\cos x \end{cases}$$

$$v_2'(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{1}{\cos^3 x}\cos x \Rightarrow v_2' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow v_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x$$

$$v_1' = -v_2'\frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\sin x}{\cos^3 x} \Rightarrow v_1 = -\int \cos^{-3} x\sin x dx = -\frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$y_p = v_1\cos x + v_2\sin x = -\frac{1}{2\cos x} + \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

مثال ۹.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}\ln x$ را مشخص نمایید.
ابتدا معادله ی همگن $y'' + 2y' + y = 0$ را حل می نماییم.

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = -1 \Rightarrow y_c = (c_1 + c_2x)e^{-x}$$

فرض کنید: $y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}$ و $y_p = v_1e^{-x} + v_2xe^{-x}$ بنابراین:

$$y_1' = -e^{-x}, y_2' = e^{-x} - xe^{-x} \Rightarrow \quad W[y_1,y_2] = y_1y_2' - y_1'y_2 = e^{-2x}$$

$$v_1=-\int\frac{y_2g(x)}{W}dx=-\int\frac{4e^{-2x}x\ln x}{e^{-2x}}dx=-4\int x\ln x dx\Rightarrow\begin{cases}u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx\\ \\ dv=xdx, & v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1=uv-\int vdu=-4(\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x}{2}dx)=-2x^2\ln x+x^2$$

$$v_2=\int\frac{y_1g(x)}{W}dx=\int\frac{4e^{-2x}\ln x}{e^{-2x}}dx=4\int\ln x dx\Rightarrow\begin{cases}u=\ln x, & du=\frac{1}{x}dx\\ \\ dv=dx, & v=x\end{cases}$$

$$v_2=4(uv-\int vdu)=4(x\ln x-\int dx)=4(x\ln x-x)$$

$$\Rightarrow y=e^{-x}(c_1+c_2x)+x^2e^{-x}(2\ln x-3)$$

تبصره ۹ روش تغییر پارامتر برای معادلات خطی غیر همگن از مرتبه ی دلخواه نیز برقرار است.
در حالت کلی برای حل یک معادله ی خطی غیر همگن از مرتبه ی n، ابتدا جواب عمومی معادله ی همگن متناظر را بدست می آوریم،

$$y_c=c_1y_1+c_2y_2+\ldots+c_ny_n$$

سپس y_p را به صورت $y_p=v_1y_1+v_2y_2+\ldots+v_ny_n$ در نظر می گیریم که در آن v_iها $(1\le i\le n)$ توابعی از x هستند. برای محاسبه ی v_iها، ابتدا v_i'ها را از حل دستگاه زیر بدست می آوریم و سپس انتگرال می گیریم.

$$\begin{cases}v_1'y_1+v_2'y_2+\ldots+v_n'y_n=0\\ \\ v_1'y_1'+v_2'y_2'+\ldots+v_n'y_n'=0\\ \vdots\\ v_1'y_1^{(n-1)}+v_2'y_2^{(n-1)}+\ldots+v_n'y_n^{(n-1)}=g(x)\end{cases}$$

همچنین برای محاسبه ی v_iها می توان ابتدا دترمینانهای زیر را محاسبه نمود،

$$W=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & y_n\\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n'\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix},\quad W_i=\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & \ldots & \overbrace{0}^{\text{ستون } i \text{ ام}} & \ldots & y_n\\ y_1' & y_2' & \ldots & 0 & \ldots & \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \ldots & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & 1 & \ldots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$$

سپس با استفاده از فرمول $v_i=\int\frac{W_ig(x)}{W}dx$ آنها را محاسبه نمود.

مثال ۱۰.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $y'''+4y''-5y'=e^{3x}$ را مشخص نمایید.
ابتدا معادله ی همگن $y'''+4y''-5y'=0$ را حل می نماییم.

$$t^3+4t^2-5t=0\Rightarrow t_1=0,t_2=1,t_3=-5\Rightarrow y_c=c_1+c_2e^x+c_3e^{-5x}$$

فرض کنید: $y_1=1, y_2=e^x, y_3=e^{-5x}$ و $y_p=v_1+v_2e^x+v_3e^{-5x}$ بنابراین:

$$\begin{cases} v_1'+v_2'e^x+v_3'e^{-5x}=0 \\ 0+v_2'e^x-5v_3'e^{-5x}=0 \\ 0+v_2'e^x+25v_3'e^{-5x}=e^{3x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1'=-\frac{1}{5}e^{3x} \\ v_2'=\frac{1}{6}e^{2x} \\ v_3'=\frac{1}{30}e^{8x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1=-\frac{1}{15}e^{3x} \\ v_2=\frac{1}{12}e^{2x} \\ v_3=\frac{1}{240}e^{8x} \end{cases}$$

$$y_p=-\frac{1}{15}e^{3x}+\frac{1}{12}e^{3x}+\frac{1}{240}e^{3x}=\frac{1}{48}e^{3x}\Rightarrow y=c_1+c_2e^x+c_3e^{-5x}+\frac{1}{48}e^{3x}$$

مثال ۱۱.۵.۳ جواب عمومی معادله ی $(0<x<\frac{\pi}{2})$ $\quad y'''+y'=\tan x$ را مشخص نمایید.

ابتدا معادله ی همگن $y'''+y'=0$ را حل می نماییم.

$$t^3+t=0\Rightarrow t_1=0, t_2=i, t_3=-i\Rightarrow y_c=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x$$

فرض کنید: $y_1=1, y_2=\cos x, y_3=\sin x$ و $y_p=v_1+v_2\cos x+v_3\sin x$ بنابراین:

$$\begin{cases} v_1'+v_2'\cos x+v_3'\sin x=0 \quad (1) \\ 0-v_2'\sin x+v_3'\cos x=0 \quad (2) \\ 0-v_2'\cos x-v_3'\sin x=\tan x \quad (3) \end{cases} \Rightarrow (1)+(3)\Rightarrow v_1'=\tan x\Rightarrow v_1=-\ln|\cos x|$$

از معادله ی (۲) نتیجه می شود: $v_2'=v_3'\cot x$ و با جایگذاری در (۳) داریم:

$$-v_3'\cot x\cos x-v_3'\sin x=\tan x\Rightarrow -v_3'(\frac{\cos^2 x}{\sin x}+\sin x)=\tan x$$

$$-v_3'(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x})=\tan x\Rightarrow -\frac{v_3'}{\sin x}=\tan x\Rightarrow v_3'=-\frac{\sin^2 x}{\cos x}=\frac{-1+\cos^2 x}{\cos x}$$

$$v_3'=-\sec x+\cos x\Rightarrow v_3=-\int\sec x dx+\int\cos x dx=-\ln|\sec x+\tan x|+\sin x$$

v_3' را در معادله ی $v_2'=v_3'\cot x$ قرار می دهیم و لذا داریم:

$$v_2'=(-\sec x+\cos x)\cot x=-\sin x\Rightarrow v_2=\cos x$$

$$y=c_1+c_2\cos x+c_3\sin x-\ln|\cos x|+\cos^2 x+(\sin x-\ln|\sec x+\tan x|)\sin x$$

تمرین ۵ معادلات غیر همگن زیر را حل نمایید.

(۱) $y''+y=\sin 2x$

(۲) $y''-9y=e^{3x}+\sin 3x$

(۳) $y''+4y=12\cos^2 x$

(۴) $y''+y=\tan x$

(۵) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{(1-x)^2}$

۶.۳ حل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به روش اپراتور ها

برای حل معادله ی دیفرانسیل از روش اپراتور ابتدا نمادهای زیر را در نظر می گیریم:

$$D = \frac{d}{dx} \quad , \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \quad , \ldots , D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

سپس دو حالت زیر را در نظر می گیریم:

(۱) اگر معادله ی دیفرانسیل همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر:
$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$
باشد، آنگاه معادله ی دیفرانسیل را به صورت زیر می نویسیم.
$$(D^n + a_1 D^{n-1} \ldots + a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

اگر عبارت داخل پرانتز در معادله ی فوق را با $F(D)$ نشان دهیم، معادله به صورت $F(D)y = 0$ در می آید که آن را **اپراتور** دیفرانسیل خطی مرتبه n ام می نامیم. ریشه های معادله مفسر را می توان از معادله ی $F(D)$ بدست آورد.

مثال ۱.۶.۳ *معادله ی دیفرانسیل* $y^{(4)} - y''' - 4y'' + 4y' = 0$ *را حل نمایید.*
معادله را به صورت $(D^4 - D^3 - 4D^2 + 4D)y = 0$ *می نویسیم. ریشه های آن که همان ریشه های معادله مفسر است را بدست می آوریم.*
$$D(D-1)(D-2)(D+2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 1, t_3 = 2, t_4 = -2$$
بنابراین جواب عمومی عبارتست از: $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}$.

(۲) اگر معادله ی دیفرانسیل غیر همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر باشد:

$$y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_n y = g(x) \quad (1)$$

ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم،
$$(D^n + b_1 D^{n-1} + \ldots + b_{n-1} D + b_n) y = g(x) \quad (2)$$

معادله ی (۲) را به صورت $F(D)y = g(x)$ می نویسیم که در آن $F(D)$ چند جمله ای اپراتور می باشد.
ابتدا $F(D)$ را به صورت حاصلضرب عوامل اول تجزیه می کنیم،
$$F(D) = (D - a_1)(D - a_2) \ldots (D - a_n)$$

در این معادله a_i مقادیر ثابت حقیقی یا مختلط می باشند.
جواب عمومی معادله ی (۲) به صورت $y = y_c + y_p$ است . برای بدست آوردن y_p، پس از تجزیه ی $F(D)$ ، معادله به صورت زیر در می آید
$$(D - a_1)(D - a_2) \ldots (D - a_n) y = g(x) \quad (3)$$

سپس فرض می کنیم: $V_1 = (D - a_2)(D - a_3) \ldots (D - a_n) y \quad (4)$. بنابراین معادله ی (۳) به صورت زیر در می آید:

$$(D - a_1) V_1 = g(x) \Rightarrow DV_1 - a_1 V_1 = g(x) \Rightarrow V_1' - a_1 V_1 = g(x)$$

این معادله خطی مرتبه اول است، بنابراین:

$$V_1 = e^{a_1 x} \int g(x) e^{-a_1 x} dx$$

حال مقدارمحاسبه شده V_1 را در (۴) جایگذاری می نماییم و فرض می کنیم :
$V_2 = (D - a_3)(D - a_4) \dots (D - a_n) y$

بنابراین:
$$(D - a_2) V_2 = V_1 \Rightarrow D V_2 - a_2 V_2 = V_1 \Rightarrow V_2' - a_2 V_2 = V_1$$
این معادله نیز خطی مرتبه اول است، بنابراین:

$$V_2 = e^{a_2 x} \int V_1 e^{-a_2 x} dz$$

بعد از $n - 1$ مرحله که این کار را انجام دهیم، داریم:

$$(D - a_n) y = V_{n-1} \Rightarrow y_p = e^{a_n x} \int V_{n-1} e^{-a_n x} dx$$

مثال ۲.۶.۳ *معادله ی دیفرانسیل* $y'' - 4y' + 3y = 1$ *را حل نمایید.*
ابتدا معادله را به فرم اپراتور ی می نویسیم،

$$(D^2 - 4D + 3) y = 1 \quad (1)$$

سپس جواب عمومی معادله ی همگن متناظر را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$(D - 1)(D - 3) y = 0 \Rightarrow (D - 1)(D - 3) = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 3 \Rightarrow y_c = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$
برای محاسبه ی y_p*، فرض می کنیم:* $(D - 3) y = V_1$ *. با جایگذاری* V_1 *در (۱) داریم:*

$$(D - 1) V_1 = 1 \Rightarrow V_1 = e^x \int e^{-x} dx = e^x (-e^{-x}) = -1$$

با جایگذاری مقدار V_1 *داریم:*

$$(D - 3) y = -1 \Rightarrow y_p = e^{3x} \int -e^{-3x} dx = e^{3x} (\frac{1}{3} e^{-3x}) = \frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow y = y_c + y_p = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{3}$$

مثال ۳.۶.۳ *معادله دیفرانسیل* $y'' + 4y = e^x$ *را حل نمایید.*
ابتدا معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$(D^2 + 4) y = e^x \Rightarrow (D + 2i)(D - 2i) y = e^x \quad (1)$$
$$(D + 2i)(D - 2i) = 0 \Rightarrow t_1 = 2i, t_2 = -2i \Rightarrow y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

برای محاسبه ی y_p فرض می کنیم: $(D-2i)y = V_1$. با جایگذاری V_1 در معادله ی (۱) داریم:

$$(D+2i)V_1 = e^x \Rightarrow V_1 = e^{-2ix}\int e^{2ix}.e^x dx = e^{-2ix}\int e^{(1+2i)x}dx = \frac{1}{1+2i}e^{-2ix}.e^{(1-2i)x} = \frac{e^x}{1+2i}$$

مقدار V_1 را جایگذاری می کنیم و لذا داریم:

$$(D-2i)y = \frac{e^x}{1+2i} \Rightarrow y_p = e^{2ix}\int \frac{e^x}{1+2i}e^{-2ix}dx = \frac{e^{2ix}}{1+2i}\int e^{(1-2i)x}dx$$

$$y_p = \frac{e^{2ix}}{1+2i}\frac{e^{(1-2i)x}}{1-2i} = \frac{1}{1+2i}.\frac{1}{1-2i}e^{2ix}.e^x.e^{-2ix} = \frac{1}{5}e^x$$

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{5}e^x$$

تمرین ۶ جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

(۱) $(D^3+D^2-2D)y=0$

(۲) $(D^4-6D^3+12D^2-8D)y=0$

(۳) $(D^4+4D^2)y=0$

معادلات غیر همگن زیر را از روش اپراتور D حل نمایید.

(۱) $y''-y'-2y=e^x$

(۲) $y''+3y'+2y=\sin x$

(۳) $y^{(4)}-2y''+y=x-\sin x$

(۴) $y'''-y'=e^{2x}\sin^2 x$

۷.۳ معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم در حالت خاص

در این بخش معادلات مرتبه ی دوم که به فرم خطی با ضرایب ثابت نمی باشند را بررسی می کنیم. در حالت کلی روشی کلی برای حل این معادلات نمی توان بیان نمود و در این بخش فقط برخی از حالتهای خاص را بررسی می کنیم.

(الف) اگر معادله به فرم $F(x,y'')=0$ باشد و y'' بر حسب x باشد، یعنی $y''=f(x)$ آنگاه با دو بار انتگرالگیری جواب عمومی بدست می آید.این روش برای مراتب بالاتر نیز صدق می کند.

مثال ۱.۷.۳ جواب عمومی معادله ی $y''=2x$ را مشخص نمایید.

$$y' = x^2 + c_1 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x^3 + c_1x + c_2$$

مثال ۲.۷.۳ جواب عمومی معادله ی $y^{(4)}=\sin x$ را مشخص نمایید.

$$y''' = -\cos x + c_1 \Rightarrow y'' = -\sin x + c_1x + c_2 \Rightarrow y' = \cos x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$y = \sin x + c_1\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_3x + c_4$$

(ب) **معادله ی دیفرانسیل فاقد تابع**

اگر معادله به فرم $(1)\quad F(x,y',y'')=0$ باشد. فرض می کنیم: $y'=p$ بنابراین $y''=\frac{dp}{dx}=p'$ و لذا با جایگذاری در معادله ی (۱) ، معادله به فرم $F(x,p,p')=0$ در می آید که یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه اول می باشد.

مثال ۳.۷.۳ *جواب عمومی معادله ی $xy''+y'=1,\quad (x>0)$ را مشخص نمایید.*
معادله فاقد تابع است بنابراین فرض می کنیم: $y'=p, y''=p'$ لذا با جایگذاری در معادله داریم:

$$xp'+p=1\Rightarrow\quad p'+\frac{1}{x}p=\frac{1}{x}$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln x}=x\Rightarrow p=\frac{1}{x}\int x.\frac{1}{x}dx=\frac{1}{x}(x+c_1)=1+\frac{c_1}{x}$$

$$p=1+\frac{c_1}{x}\Rightarrow\quad y'=1+\frac{c_1}{x}\Rightarrow\quad y=x+c_1\ln x+c_2$$

مثال ۴.۷.۳ *جواب عمومی معادله ی $y''+x(y')^2=0$ را مشخص نمایید.*
معادله فاقد تابع است بنابراین فرض می کنیم: $y'=p, y''=p'$ لذا با جایگذاری در معادله داریم:

$$p'+xp^2=0\Rightarrow\frac{dp}{dx}+xp^2=0\Rightarrow\frac{dp}{p^2}+xdx=0\Rightarrow\int\frac{dp}{p^2}+\int xdx=0$$

$$-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}x^2=c\Rightarrow\quad p=\frac{2}{x^2-2c},\quad 2c=c_1^2\Rightarrow\quad p=\frac{2}{x^2-c_1^2}$$

$$y'=\frac{2}{x^2-c_1^2}\Rightarrow\quad y=\frac{1}{c_1}\ln\frac{x-c_1}{x+c_1}+c_2,\quad c_1\neq 0$$

تبصره ۱۰ *اگر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n فاقد تابع باشد، یعنی $F(x,y',y'',\ldots,y^{(n)})=0$ آنگاه با انتخاب*

$$y'=p,\quad y''=p',\ldots,y^{(n)}=p^{(n-1)}$$

معادله تبدیل به یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی $(n-1)$ می شود و اگر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n فاقد تابع و مشتق تا مرتبه ی m باشد، یعنی $F(x,y^{(m)},y^{(m+1)},\ldots,y^{(n)})=0$ آنگاه با انتخاب

$$y^{(m)}=p,\quad y^{(m+1)}=p',\ldots,y^{(n)}=p^{(n-m)}$$

معادله تبدیل به معادله ی مرتبه ی $n-m$ می شود.

مثال ۵.۷.۳ *جواب عمومی معادله ی $xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ را مشخص نمایید.*
معادله فاقد تابع است بنابراین فرض می کنیم: $y^{(4)}=p, y^{(5)}=p'$ لذا با جایگذاری در معادله داریم:

$$xp'-p=0\Rightarrow x\frac{dp}{dx}-p=0\Rightarrow\frac{dp}{dx}=\frac{1}{x}p\Rightarrow\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dp}{p}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln p=\ln x+c\Rightarrow\ln p=\ln x+\ln c_0\Rightarrow p=c_0x\Rightarrow\quad y^{(4)}=c_0x$$

سپس با چهار بار انتگرالگیری جواب عبارتست از: $y=c_1x^5+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5$

مثال ۶.۷.۳ جواب عمومی معادله ی $xy''' + y'' = x + 1$ را مشخص نمایید.
معادله فاقد تابع است بنابراین فرض می کنیم: $y'' = p, y''' = p'$ لذا با جایگذاری در معادله داریم:

$$xp' + p = x + 1 \Rightarrow p' + \frac{1}{x}p = \frac{x+1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$p = \frac{1}{x}\int x.\frac{x+1}{x}dx = \frac{1}{x}\int (x+1)dx = \frac{1}{x}(\frac{x^2}{2} + x + c_1) \Rightarrow p = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x}$$

$$y'' = \frac{x}{2} + 1 + \frac{c_1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x^2}{4} + x + c_1 \ln x + c_2$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1(x\ln x - x) + c_2 x + c_3$$

(پ) معادله دیفرانسیل فاقد متغیر مستقل

اگر معادله به فرم $F(y, y', y'') = 0$ باشد. فرض می کنیم: $y' = p$ و p را به عنوان تابعی از y در نظر می گیریم و لذا داریم:

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$$

با جایگذاری در معادله ، تبدیل به معادله ی مرتبه اول می شود. این روش برای مراتب بالاتر نیز صدق می کند.

مثال ۷.۷.۳ جواب عمومی معادله ی $yy'' + (y+1)(y')^2 = 0$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم: $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$ و با جایگذاری در معادله داریم:

$$yp\frac{dp}{dy} + (y+1)p^2 = 0 \Rightarrow yp^2(\frac{1}{p}\frac{dp}{dy} + \frac{y+1}{y}) = 0 \stackrel{y\neq 0}{\Longrightarrow} p^2(\frac{dp}{p} + (1 + \frac{1}{y})dy) = 0$$

$$p^2 = 0 \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \quad y' = 0 \Rightarrow \quad y = c$$

$$\frac{dp}{p} + (1 + \frac{1}{y})dy = 0 \Rightarrow \int \frac{dp}{p} + \int (1 + \frac{1}{y})dy = 0 \Rightarrow \ln p + \ln y = c - y$$

$$\ln(py) = c - y \Rightarrow py = e^{c-y} \Rightarrow y'y = e^c.e^{-y} \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = c_1 e^{-y} \Rightarrow ye^y dy = c_1 dx$$

$$\int ye^y dy = \int c_1 dx \Rightarrow \quad e^y(y-1) = c_1 x + c_2$$

مثال ۸.۷.۳ جواب عمومی معادله ی $y'' - (y')^2 + y(y')^3 = 0$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم: $y' = p, y'' = p\frac{dp}{dy}$ و با جایگذاری در معادله داریم:

$$p\frac{dp}{dy} - p^2 + yp^3 = 0 \Rightarrow \quad p(\frac{dp}{dy} - p + yp^2) = 0$$

$$p = 0 \Rightarrow \quad y' = 0 \Rightarrow \quad y = c$$

معادله ی $\frac{dp}{dy} - p = -yp^2$ یک معادله ی برنولی است. برای حل طرفین معادله را بر p^2 تقسیم می نماییم و تغییر متغیر $u = p^{-1}, \frac{du}{dy} = -p^{-2}\frac{dp}{dy}$ را در نظر می گیریم، بنابراین:

$$p^{-2}\frac{dp}{dy} - p^{-1} = -y \Rightarrow \frac{du}{dy} + u = y \Rightarrow \mu(y) = e^{\int 1dy} = e^y$$

$$u = \frac{1}{e^y}\int ye^y dy \Rightarrow u = \frac{1}{e^y}(e^y(y-1)+c_1) \Rightarrow u = y-1+c_1e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y-1+c_1e^{-y}} \Rightarrow \int (y-1+c_1e^{-y})dy = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 - y - c_1e^{-y} = x+c_2$$

مثال ۹.۷.۳ *جواب عمومی معادله ی $2y''-(y')^2+4=0$ را مشخص نمایید.*
معادله فاقد تابع و فاقد متغیر است. در چنین حالتی بهتر است از روش فاقد تابع استفاده شود. بنابراین فرض می کنیم: $y'=p, y''=p'$ و با جایگذاری در معادله داریم،

$$2p'-p^2+4=0 \Rightarrow 2\frac{dp}{dx} = p^2-4 \Rightarrow \int \frac{2dp}{p^2-4} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{p-2}{p+2} = x+c$$

$$\ln\frac{p-2}{p+2} = 2(x+c) \Rightarrow \frac{p-2}{p+2} = e^{2x}.e^{2c} \overset{c_1=e^{2c}}{\Longrightarrow} p = 2(1+\frac{2c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}})$$

$$\overset{y'=p}{\Longrightarrow} \int dy = \int 2(1+\frac{2c_1e^{2x}}{1-c_1e^{2x}})dx \Rightarrow y = 2x - 2\ln(1-c_1e^{2x})+c_2$$

(ت) روش کاهش مرتبه

اگر معادله ی دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر به صورت زیر باشد:

$$y''+f_1(x)y'+f_2(x)y = f_3(x) \quad (1)$$

که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ توابعی پیوسته هستند و یک جواب خصوصی معادله ی همگن متناظر موجود باشد، آنگاه با استفاده از روش تغییر پارامتر، جواب عمومی را به صورت $y=v(x)y_1$ در نظر می گیریم و برای تعیین $v(x)$، عبارتهای y، y' و y'' را در (۱) قرار می دهیم.

$$y = vy_1 \quad , \quad y' = v'y_1+vy_1' \quad , \quad y'' = v''y_1+2v'y_1'+vy_1''$$

$$v(y_1''+y_1'f_1+y_1f_2)+v'(2y_1'+y_1f_1)+v''y_1 = f_3$$

پرانتز اول سمت چپ در عبارت بالا صفر است، زیرا y_1 یک جواب معادله ی همگن متناظر است. بنابراین با تقسیم طرفین رابطه بر y_1 داریم:

$$v''+v'(\frac{2y_1'}{y_1}+f_1) = \frac{f_3}{y_1}$$

فرض می کنیم: $v'=p, v''=p'$. بنابراین یک معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه اول به صورت زیر بدست می آید:

$$p'+p(\frac{2y_1'}{y_1}+f_1) = \frac{f_3}{y_1}$$

با حل این معادله p و با انتگرال گرفتن از p، $v(x)$ بدست می آید.
اگر در معادله $f_3(x)=0$ باشد، آنگاه $v(x)$ از رابطه ی زیر بدست می آید،

$$v(x) = \int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int f_1(x)dx}dx$$

مثال ۱۰.۷.۳ معادله ی دیفرانسیل $x^2y''-x(x+2)y'+(x+2)y=0$ را حل نمایید.
ابتدا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم می نماییم، بنابراین:

$$y''-\frac{x+2}{x}y'+\frac{x+2}{x^2}y=0 \quad (1)$$

$y_1=x$ یک جواب معادله ی (۱) است. چون معادله همگن است، بنابراین:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int \frac{1}{x^2}e^{\int(\frac{x+2}{x})dx}dx=\int \frac{1}{x^2}e^{\int(1+\frac{2}{x})dx}dx=\int \frac{1}{x^2}e^{(x+2\ln x)}dx \\ &= \int \frac{1}{x^2}e^x.e^{\ln x^2}dx=\int \frac{1}{x^2}e^xx^2dx=\int e^xdx=e^x \end{aligned}$$

لذا $y_2=xe^x$. بنابراین جواب عمو می عبارتست از: $y=c_1x+c_2xe^x$.

مثال ۱۱.۷.۳ معادله ی دیفرانسیل $(1+x^2)y''-2xy'+2y=2$ را حل نمایید.
ابتدا طرفین معادله را بر $(1+x^2)$ تقسیم می نماییم.

$$y''-\frac{2x}{1+x^2}y'+\frac{1}{1+x^2}y=\frac{1}{1+x^2}$$

$y_1=x$ یک جواب معادله همگن متناظر است و جواب عمومی به فرم $y=xv(x)$ است. بنابراین:

$$v''+v'(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2})=\frac{2}{x(1+x^2)}$$

فرض می کنیم: $v'=p, v''=p'$، بنابراین داریم :

$$p'+p(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2})=\frac{2}{x(1+x^2)}\Rightarrow \mu(x)=e^{\int(\frac{2}{x}-\frac{2x}{1+x^2})dx}=e^{2\ln x-\ln(1+x^2)}=\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1+x^2}{x^2}(\int \frac{x^2}{1+x^2}.\frac{2}{x(1+x^2)}dx)=\frac{1+x^2}{x^2}\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= \frac{1+x^2}{x^2}(-\frac{1}{1+x^2}+c_1)=-\frac{1}{x^2}+c_1\frac{1+x^2}{x^2} \\ v &= -\int \frac{dx}{x^2}+c_1\int \frac{1+x^2}{x^2}dx=\frac{1}{x}-\frac{c_1}{x}+c_1x+c_2 \end{aligned}$$

چون $y=xv(x)$ ، بنابراین: $y=1-c_1+c_1x^2+c_2x$.

۸.۳ معادله ی کشی یا اویلر

در این بخش ابتدا معادله ی کشی مرتبه ی دوم و سپس مرتبه ی $n-$ام را بررسی می نماییم.
معادله ی کشی مرتبه دوم به یکی از دو فرم زیر می باشد:

$$\begin{cases} x^2y''+a_1xy'+a_2y=g(x) \quad (1) \\ \\ (ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_2(ax+b)y=g(x) \quad (2) \end{cases}$$

معادله ی (۱) با تغییر متغیر $x=e^z$ و معادله ی (۲) با تغییر متغیر $ax+b=e^z$ تبدیل به معادله ی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت می شود.
برای معادله ی (۱) درستی مطلب را بررسی می نماییم.

$$x=e^z \Rightarrow z=\ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{1}{x} \Rightarrow y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}=\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz})$$

با جایگذاری در (۱) داریم:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(a_1-1)\frac{dy}{dz}+a_2y=g(e^z) \quad (3)$$

معادله ی (۳) یک معادله با ضرایب ثابت است و معادله ی مفسر آن به صورت زیر است:

$$t^2+(a_1-1)t+a_2=0$$

(الف) اگر معادله ی مفسر دارای دو ریشه ی متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2$ باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} y_1=e^{t_1z}=e^{t_1\ln x}=e^{\ln x^{t_1}}=x^{t_1} \\ y_2=e^{t_2z}=e^{t_2\ln x}=e^{\ln x^{t_2}}=x^{t_2} \end{cases} \Rightarrow y_c=c_1x^{t_1}+c_2x^{t_2}$$

y_c جواب عمومی معادله ی همگن $t^2+(a_1-1)t+a_2=0$ است.

(ب) اگر معادله ی مفسر دارای ریشه ی مضاعف حقیقی t باشد، آنگاه:

$$\begin{cases} y_1=e^{tz}=e^{t\ln x}=x^t \\ y_2=ze^{tz}=\ln xe^{t\ln x}=x^t\ln x \end{cases} \Rightarrow y_c=(c_1+c_2\ln x)x^t$$

(ج) اگر معادله ی مفسر دارای ریشه مختلط $p\pm iq$ باشد، آنگاه جواب عمومی معادله ی همگن متناظر به صورت زیر می باشد:

$$y_c=e^{pz}(c_1\cos qz+c_2\sin qz) \Rightarrow y_c=x^p(c_1\cos(q\ln x)+c_2\sin(q\ln x))$$

مثال ۱.۸.۳ *جواب عمومی معادله ی* $x^2y''+xy'-y=0$ *را مشخص نمایید.*

$$t^2+0t-1=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=-1 \Rightarrow \quad y=c_1x+c_2x^{-1}$$

مثال ۲.۸.۳ *جواب عمومی معادله ی* $x^2y''-xy'+y=0$ *را مشخص نمایید.*

$$t^2-2t+1=0 \Rightarrow t_1=t_2=1 \Rightarrow \quad y=(c_1+c_2\ln x)x$$

مثال ۳.۸.۳ *جواب عمومی معادله ی* $x^2y''+3xy'+5y=0$ *را مشخص نمایید.*

$$t^2+2t+5=0 \Rightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{-2\pm 4i}{2}$$

$$t=-1\pm 2i \Rightarrow y=x^{-1}(c_1\cos(2\ln x)+c_2\sin(2\ln x))$$

مثال ۴.۸.۳ جواب عمومی معادله ی $x^2y''-2xy'+2y=x^3\cos x(x>0)$ را مشخص نمایید.

معادله را به فرم $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=x\cos x$ در نظر می گیریم. سپس معادله ی همگن $y''-\frac{2}{x}y'+\frac{2}{x^2}y=0$ را حل می نماییم. این معادله را به فرم $x^2y''-2xy'+2y=0$ در نظر می گیریم که معادله ی کشی است.

$$t^2-3t+2=0\Rightarrow t_1=1,t_2=2\Rightarrow \quad y_c=c_1x+c_2x^2$$

فرض می کنیم: $y_1=x,y_2=x^2$ بنابراین

$$W=\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}=2x^2-x^2=x^2$$

لذا داریم:

$$v_1=-\int\frac{y_2g(x)}{W}dx=-\int\frac{x^2(x\cos x)}{x^2}dx=-\int x\cos xdx$$

$$\begin{cases} u=x, & du=dx \\ \\ dv=\cos xdx, & v=\sin x \end{cases}$$

$$v_1=uv-\int vdu=-x\sin x+\int sinxdx=-x\sin x-\cos x$$

$$v_2=\int\frac{y_1g(x)}{W}dx=\int\frac{x(x\cos x)}{x^2}dx=\int\cos xdx=\sin x$$

$$y_p=v_1y_1+v_2y_2=x(-x\sin x-\cos x)+x^2\sin x=-x\cos x$$

$$y=y_c+y_p=c_1x+c_2x^2-x\cos x$$

مثال ۵.۸.۳ جواب عمومی معادله ی زیر را مشخص نمایید.

$$(3x+1)^2y''+9(3x+1)y'+9y=\frac{9}{3x+1}\quad(1)$$

معادله ی کشی است لذا تغییر متغیر $3x+1=e^z$ را در نظر می گیریم،

$$3\frac{dx}{dz}=e^z\Rightarrow\frac{dz}{dx}=3e^{-z},y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx}=3e^{-z}\frac{dy}{dz}$$

$$y''=\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dz}(3e^{-z}\frac{dy}{dz})\frac{dz}{dx}=(-3e^{-z}\frac{dy}{dz}+3e^{-z}\frac{d^2y}{dz^2})3e^{-z}$$

$$y'=3e^{-z}\frac{dy}{dz}\quad,\quad y''=9e^{-2z}(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz})$$

در معادله ی (۱) جایگذاری می نماییم و لذا داریم:

$$9y''+18y'+9y=9e^{-z}\Rightarrow\quad y''+2y'+y=e^{-z}$$

ابتدا معادله ی همگن $y''+2y'+y=0$ را حل می نماییم.

$$t^2+2t+1=0\Rightarrow t_1=t_2=-1\Rightarrow y_c=(c_1+c_2t)e^{-t}$$

در این صورت $y_p=At^2e^{-t}$ که با جایگذاری در معادله ی $y''+2y'+y=e^{-t}$ داریم: $A=\frac{1}{2}$ و لذا جواب عمومی عبارتست از: $y=y_c+y_p=(c_1+c_2t)e^{-t}+\frac{1}{2}t^2e^{-t}$

تبصره ۱۱ فرم کلی معادله ی کشی مرتبه $n-$ام به دو صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_n y = g(x) \quad (1) \\ \\ (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = g(x) \quad (2) \end{cases}$$

برای حل این معادلات می توان از تغییر متغیرهای بیان شده برای حالت مرتبه دوم استفاده نمود. علاوه بر این می توان یک جواب را به فرم $y = x^t$ در نظر گرفت و مشتقاتش را به صورت زیر محاسبه نمود،

$$y' = tx^{t-1}, y'' = t(t-1)x^{t-2}, \ldots, y^{(n)} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-(n-1))x^{t-n}$$

با جایگذاری در معادله ی (۱) داریم:

$$x^t((t(t-1)\ldots(t-n+1)) + a_1(t(t-1)\ldots(t-(n-2)) + \ldots + a_n) = 0$$

فرض می کنیم t ریشه ی معادله کمکی

$$t(t-1)\ldots(t-n+1) + a_1 t(t-1)\ldots(t-n+2) + \ldots + a_n = 0$$

باشد، بنابراین حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(۱) معادله ی کمکی دارای n ریشه ی متمایز حقیقی $t_1 \neq t_2 \neq \ldots \neq t_n$ باشد در این صورت جوابها عبارتند از:

$$y_1 = x^{t_1}, y_2 = x^{t_2}, \ldots, y_n = x^{t_n}$$

بنابراین: $y = c_1 x^{t_1} + c_2 x^{t_2} + \ldots + c_n x^{t_n}$.

(۲) اگر معادله ی کمکی دارای n ریشه ی حقیقی باشد که m تای آنها مساوی باشند، یعنی $t_1 = t_2 = \ldots = t_m$، آنگاه

$$y_1 = x^{t_1}, y_2 = x^{t_1} \ln x, y_3 = x^{t_1} (\ln x)^2, \ldots, y_m = x^{t_1} (\ln x)^{m-1}$$

و $y_{m+1}, \ldots, y_n$ مانند حالت اول هستند.

(۳) اگر معادله ی کمکی دارای ریشه های مختلط $t_1 = p + iq, t_2 = p - iq$ باشد و بقیه ی ریشه های آن حقیقی باشند در این صورت در جواب عمومی به جای $c_1 y_1 + c_2 y_2$ عبارت $x^p(c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x))$ را قرار می دهیم.

(۴) اگر معادله ی کمکی دارای m ریشه ی مختلط تکراری باشد در جواب نهایی به جای m جواب عبارت زیر را داریم:

$$\begin{aligned} y &= x^p(c_1 \cos(q \ln x) + c_2 \sin(q \ln x)) + x^p \ln x (c_3 \cos(q \ln x + c_4 \sin(q \ln x)) + \ldots \\ &+ x^p (\ln x)^{m-1} (c_{2m-1} \cos(q \ln x) + c_{2m} \sin(q \ln x)) \end{aligned}$$

مثال ۶.۸.۳ معادله ی $(x > 0) \quad x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$ را حل نمایید.

ابتدا معادله ی همگن $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$ را حل می نماییم. این معادله کشی مرتبه سوم است. فرض می کنیم $y = x^t$ و در معادله ی کشی قرار می دهیم، بنابراین:

$$t(t-1)(t-2) + t(t-1) - 2t + 2 = 0 \Rightarrow t(t-1)(t-2) + t(t-1) - 2(t-1) = 0$$

$$(t-1)[t(t-2) + t - 2] = 0 \Rightarrow (t-1)[t^2 - t - 2] = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = -1$$

$$y_c = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1}$$

فرض می کنیم : $y_p = v_1x + v_2x^2 + v_3x^{-1}$ بنابراین:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 6x^{-1}, W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^{-1} \\ 0 & 2x & -x^{-2} \\ 1 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = -3, W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^{-1} \\ 1 & 0 & -x^{-2} \\ 0 & 1 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = 2x^{-1}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2 \Rightarrow v_1 = \int \frac{W_1 g(x)}{W} dx = \int \frac{-3(2x^4)}{6x^{-1}} dx = -\int x^5 dx = -\frac{x^6}{6}$$

$$v_2 = \int \frac{W_2 g(x)}{W} dx = \int \frac{(2x^{-1})(2x^4)}{6x^{-1}} dx = \frac{2}{3}\int x^4 dx = \frac{2}{15}x^5$$

$$v_3 = \int \frac{W_3 g(x)}{W} dx = \int \frac{x^2(2x^4)}{6x^{-1}} dx = \frac{1}{3}\int x^7 dx = \frac{1}{24}x^8$$

$$y_p = -\frac{1}{6}x^7 + \frac{2}{15}x^7 + \frac{1}{24}x^7 = \frac{1}{120}x^7 \Rightarrow \quad y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^{-1} + \frac{1}{120}x^7$$

مثال ۷.۸.۳ معادله ی $(x > 0)$ $\quad x^2y'' - 2xy' + 2y = x\ln x$ را حل نمایید.
ابتدا معادله ی همگن $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ که معادله ی کشی مرتبه دوم است را حل می نماییم.
فرض می کنیم: $y = x^t$ و در معادله ی کشی قرار می دهیم، بنابراین:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 2 \Rightarrow \quad y_c = c_1x + c_2x^2$$

فرض می کنیم: $y_p = v_1x + v_2x^2$ بنابراین:

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = -x^2, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x$$

$$v_1 = \int \frac{W_1 g(x)}{W} dx = \int \frac{-x^3 \ln x}{x^2} dx = -\int x \ln x dx$$

$$\begin{cases} u = \ln x, & du = \frac{dx}{x} \\ dv = xdx, & v = \frac{x^2}{2} \end{cases} \Rightarrow v_1 = uv - \int vdu = -\frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2$$

$$v_2 = \int \frac{W_2 g(x)}{W} dx = \int \frac{x^2 \ln x}{x^2} dx = \int \ln x dx$$

$$\begin{cases} u = \ln x, & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx, & v = x \end{cases} \Rightarrow v_2 = uv - \int vdu = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$$

$$y = y_c + y_p = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3 \ln x - \frac{3}{4}x^3$$

تمرین ۷ معادلات زیر را حل نمایید.

(۱) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(۲) $y'' = x + \sin x$

(۳) $y^{(4)} = \frac{1}{x^4}$

(۴) $xy'' + y' = (y')^2$

(۵) $x^2y'' + xy' - y = 4$

(۶) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2$

(۷) $2x^2y'' - 5xy' + 3y = 0$

فصل ۴

تبدیل لاپلاس

۱.۴ مقدمه

در این فصل برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط اولیه، روش تبدیل لاپلاس را معرفی می کنیم.
در فصل سوم روش حل این معادلات بیان شد. به این ترتیب که ابتدا معادله ی همگن متناظر را حل نموده، سپس یک جواب خصوصی معادله را پیدا می نمودیم، آنگاه مجموع دو جواب، جواب عمومی معادله ی اصلی است که با قرار دادن شرایط اولیه جواب خصوصی معادله را بدست می آوردیم. در روش تبدیل لاپلاس به طور مستقیم به جواب خصوصی معادله می رسیم.

۲.۴ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۲.۴ *تبدیل لاپلاس تابع $(t > 0)$ $f(t)$ ، با نماد $F(s)$ یا $\pounds(f(t))$ نشان داده می شود و در صورت وجود انتگرال زیر عبارتست از:*

$$\pounds(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می نامیم، و تابع $f(t)$ را تبدیل معکوس $F(s)$ می گوییم و آن را با نماد $\pounds^{-1}(F)$ نشان می دهیم، $f(t) = \pounds^{-1}(F)$.

قضیه ۱.۲.۴ *فرض کنید $f_1(t), f_2(t)$ دارای تبدیل لاپلاس باشند، آنگاه به ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ داریم:*

$$\pounds(c_1f_1(t) + c_2f_2(t)) = c_1\pounds f_1(t) + c_2\pounds f_2(t)$$

بنابراین **تبدیل لاپلاس دارای خاصیت خطی است.**

قضیه ۲.۲.۴ *فرض کنید $\pounds(f_1(t)) = F_1(s), \pounds(f_2(t)) = F_2(s)$ ، آنگاه به ازای هر $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ داریم:*

$$\pounds^{-1}(c_1F_1(s) + c_2F_2(s)) = c_1\pounds^{-1}(F_1(s)) + c_2\pounds^{-1}(F_2(s))$$

بنابراین **تبدیل معکوس لاپلاس دارای خاصیت خطی است.**

تعریف ۲.۲.۴ تابع $f(t)$ را روی فاصله ی $a \le t \le b$ پیوسته ی قطعه ای می نامند هر گاه بتوان این فاصله را با تعدادی متناهی از نقاط $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ تقسیم نمود به طوریکه:

(۱) $f(t)$ روی هر زیر فاصله ی $t_{i-1} < t < t_i$ پیوسته باشد.

(۲) هنگامیکه نقطه ای از درون هر زیر فاصله به نقاط انتهایی آن میل کند، $f(t)$ دارای حد متناهی باشد.

به عبارت دیگر، $f(t)$ روی $a \le t \le b$ پیوسته ی قطعه ای است اگر به جز تعدادی متناهی نقاط ناپیوستگی جهشی، در بقیه ی نقاط پیوسته باشد.

مثال ۱.۲.۴ تابع $f(t)$ روی فاصله ی $(0,4)$ پیوسته ی قطعه ای است،

$$f(t) = \begin{cases} 3t, & 0 < t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t < 4 \end{cases}$$

قضیه ۳.۲.۴ اگر تابع $f(t)$ دارای شرایط زیر باشد:

(۱) در هر فاصله ی $0 \le t \le T$ پیوسته ی قطعه ای باشد،

(۲) برای هر $t > T$ عدد مثبت M وجود داشته باشد به طوریکه: $|f(t)| \le Me^{at}$،

آنگاه تبدیل لاپلاس $f(t)$ برای هر $s > a$ وجود دارد.

مثال ۲.۲.۴ تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

(۱)

$$f(t) = 1, \quad t \ge 0$$

$$\pounds(1) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{s}e^{-st})\Big|_0^A = -\frac{1}{s}\lim_{A\to\infty}(\frac{1}{e^{sA}}-1) = \frac{1}{s}, (s>0)$$

(۲)

$$f(t) = e^{at}, \quad t \ge 0$$

$$\pounds(e^{at}) = \int_0^\infty e^{-st}.e^{at}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-(s-a)t}dt = \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t})\Big|_0^A = \frac{1}{s-a}, (s>0)$$

(۳) تبدیل لاپلاس توابع $\sin at, \cos at$ را بدست آورید.
با توجه به فرمول اویلر داریم:

$$e^{iat} = \cos at + i\sin at \Rightarrow \quad \pounds(e^{iat}) = \pounds(\cos at) + i\pounds(\sin at)$$

$$\pounds(e^{iat}) = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} = \frac{s}{s^2+a^2} + i\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\pounds(\cos at) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \quad \pounds(\sin at) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

(۴) تبدیل لاپلاس توابع $\sinh at, \cosh at$ را بدست آورید.
با توجه به فرمولهای $\cosh at = \frac{1}{2}(e^{at}+e^{-at}), \sinh at = \frac{1}{2}(e^{at}-e^{-at})$ داریم:

$$\pounds(\cosh at) = \frac{1}{2}(\pounds(e^{at}) + \pounds(e^{-at})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s+a}) = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\pounds(\sinh at) = \frac{1}{2}(\pounds(e^{at}) - \pounds(e^{-at})) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s+a}) = \frac{a}{s^2-a^2}$$

مثال ۳.۲.۴ *تبدیل لاپلاس* $f(t) = 4t^2 - 2\cos 3t + 5e^{-t} - 3\sinh 2t + 1$ *را بدست آورید.*

$$\begin{aligned}\pounds(f(t)) &= 4\pounds(t^2) - 2\pounds(\cos 3t) + 5\pounds(e^{-t}) - 3\pounds(\sinh 2t) + \pounds(1)\\ &= \frac{8}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{5}{s+1} - \frac{6}{s^2-4} + \frac{1}{s}\end{aligned}$$

مثال ۴.۲.۴ *تبدیل معکوس لاپلاس* $F(s) = \frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)}$ *را بدست آورید.*
ابتدا $F(s)$ *را به صورت زیر تفکیک می کنیم:*

$$\frac{5s-1}{s(s^2+1)(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{s^2+1} \Rightarrow \begin{cases} A=1, & B=2\\ C=-3, & D=-2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\pounds^{-1}(F(s)) &= \pounds^{-1}(\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{3s+2}{s^2+1})\\ &= \pounds^{-1}(\frac{1}{s}) + 2\pounds^{-1}(\frac{1}{s-1}) - 3\pounds^{-1}(\frac{s}{s^2+1}) - 2\pounds^{-1}(\frac{1}{s^2+1})\\ &= 1 + 2e^t - 3\cos t - 2\sin t\end{aligned}$$

مثال ۵.۲.۴ *تبدیل معکوس* $F(s) = \frac{s+3}{s^2-2}$ *را بدست آورید.*

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2-2} = \frac{s}{s^2-2} + \frac{3}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}$$

$$\pounds^{-1}(F(s)) = \pounds^{-1}(\frac{s}{s^2-2}) + \frac{3}{\sqrt{2}}\pounds^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{s^2-2}) = \cosh\sqrt{2}t + \frac{3}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t$$

در ادامه تبدیل لاپلاس برخی از توابع که کاربرد بیشتری دارند، ارائه شده است.

تبدیل لاپلاس برخی از توابع			
$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
a	$\frac{a}{s}$, $(s>a)$	$k\cos at$	$k\frac{s}{s^2+a^2}$, $(s>0)$
at^n	$a\frac{n!}{s^{n+1}}$, $(s>0)$	$k\sin at$	$k\frac{a}{s^2+a^2}$, $(s>a)$
$kt^a, a>-1$	$k\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $(s>0)$	$k\cosh at$	$k\frac{s}{s^2-a^2}$, $(s>\|a\|)$
ke^{at}	$\frac{k}{s-a}$, $(s>a)$	$k\sinh at$	$k\frac{a}{s^2-a^2}$, $(s>\|a\|)$

تبصره ۱۲ *تابع گامای* α *که با نماد* $\Gamma(\alpha)$ *نشان داده می شود به صورت زیر تعریف می شود:*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

این تابع دارای خواص زیر است:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad , \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha!$$

۳.۴ تبدیل لاپلاس مشتق

قضیه ۱.۳.۴ فرض کنیم $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ به ازای $t \geq 0$ توابعی پیوسته باشند که در شرایط قضیه ی وجود تبدیل لاپلاس صدق کنند و $f^{(n)}(t)$ به ازای $t \geq 0$ پیوسته ی قطعه ای باشد، آنگاه

$$\pounds(f^{(n)}(t)) = s^n \pounds(f(t)) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

و به ازای $n = 1$ و $n = 2$ و $n = 3$ داریم:

$$\pounds(f'(t)) = s\pounds(f(t)) - f(0^+), \quad \pounds(f(''t)) = s^2 \pounds(f(t)) - sf(0^+) - f'(0^+)$$

$$\pounds(f'''(t)) = s^3 \pounds(f(t)) - s^2 f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+)$$

مثال ۱.۳.۴ با استفاده از قضیه، تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

(۱)

$$f(t) = t$$

$$f'(t) = 1, f(0) = 0 \Rightarrow \pounds(1) = \frac{1}{s} = s\pounds(t) - 0 \Rightarrow \pounds(t) = \frac{1}{s^2}$$

(۲)

$$f(t) = \sin t$$

$$f'(t) = \cos t \quad , f''(t) = -\sin t, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$\pounds(-\sin t) = -\pounds(\sin t) = s^2 \pounds(\sin t) - 0 - 1 \Rightarrow \pounds(\sin t) = \frac{1}{1+s^2}$$

(۳)

$$f(t) = t\cos 2t$$

$$f'(t) = \cos 2t - 2t \sin 2t, \quad f''(t) = -4\sin 2t - 4t\cos 2t, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1$$

$$\pounds(f''(t)) = -4\pounds(\sin 2t) - 4\pounds(t\cos 2t) = s^2 \pounds(t\cos 2t) - 1 \Rightarrow -4\pounds(\sin 2t) = (s^2+4)\pounds(t\cos 2t) - 1$$

$$1 - \frac{8}{s^2+4} = (s^2+4)\pounds(t\cos 2t) \Rightarrow \pounds(t\cos 2t) = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

(۴)

$$f(t) = \cos^2 t$$

$$f'(t) = -2\cos t \sin t = -\sin 2t, \quad f(0) = 1 \Rightarrow \pounds(-\sin 2t) = s\pounds(\cos^2 t) - 1$$

$$s\pounds(\cos^2 t) = 1 - \frac{2}{s^2+4} = \frac{s^2+2}{s^2+4} \Rightarrow \pounds(\cos^2 t) = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

تبصره ۱۳ برای حل یک معادله ی دیفرانسیل از روش تبدیل لاپلاس مراحل زیر را انجام می دهیم:

(۱) معادله ی دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس به یک معادله ی جبری درجه ی اول تبدیل می کنیم.

(۲) جواب معادله ی جبری را بدست می آوریم.

(۳) با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس از جواب مرحله ی دوم، جواب معادله ی اصلی را بدست می آوریم.

مثال ۲.۳.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y''-2y'-3y=0 \quad , \quad y(0)=1 \quad , \quad y'(0)=7$$

فرض می کنیم جواب معادله $y(t)$ و تبدیل لاپلاس آن $Y(s)$ باشد، یعنی $\pounds(y(t))=Y(s)$. بنابراین:

$$\pounds(y''-2y'-3y)=\pounds(y'')-2\pounds(y')-3\pounds(y)=0$$

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-2sY+2y(0)-3Y=0 \Rightarrow Y(s^2-2s-3)=s+5$$

$$Y=\frac{s+5}{(s-3)(s+1)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1}=\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1} \Rightarrow y(t)=\pounds^{-1}(\frac{2}{s-3}-\frac{1}{s+1})$$

$$y(t)=2\pounds^{-1}(\frac{1}{s-3})-\pounds^{-1}(\frac{1}{s+1}) \Rightarrow y(t)=2e^{3t}-e^{-t}$$

مثال ۳.۳.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y''-3y'+2y=2e^{-t} \quad , \quad y(0)=2 \quad , \quad y'(0)=-1$$

$$\pounds(y'')-3\pounds(y')+2\pounds(y)=2\pounds(e^{-t}) \Rightarrow s^2Y-sy(0)-y'(0)-3(sY-y(0))+2Y=\frac{2}{s+1}$$

$$s^2Y-2s+1-3sY+6+2Y=\frac{2}{s+1} \Rightarrow Y(s^2-3s+2)=\frac{2}{s+1}+2s-7$$

$$Y=\frac{2s^2-5s-5}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-2}=\frac{1}{3}.\frac{1}{s+1}+\frac{4}{s-1}-\frac{7}{3}.\frac{1}{s-2}$$

$$y(t)=\pounds^{-1}(Y)=\frac{1}{3}\pounds^{-1}(\frac{1}{s+1})+4\pounds^{-1}(\frac{1}{s-1})-\frac{7}{3}\pounds^{-1}(\frac{1}{s-2})$$

$$y(t)=\frac{1}{3}e^{-t}+4e^{t}-\frac{7}{3}e^{2t}$$

۴.۴ تبدیل لاپلاس انتگرال

قضیه ۱.۴.۴ فرض کنید تابع $f(t)$ پیوسته ی قطعه ای و در شرایط قضیه ی وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و $\pounds(f(t))=F(s)$ آنگاه:

$$\pounds(\int_0^t f(r)dr)=\frac{1}{s}F(s) \quad , \quad \pounds^{-1}(\frac{1}{s}F(s))=\int_0^t f(r)dr$$

مثال ۱.۴.۴ تبدیل لاپلاس $h(t) = \int_0^t \sin r dr$ را بدست آورید.

$$f(t) = \sin t, \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1}, \Rightarrow \pounds(\int_0^t \sin r dr) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

مثال ۲.۴.۴ تبدیل معکوس $\frac{1}{s(s+2)}$ را بدست آورید.

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s+2}) = e^{-2t} \Rightarrow \pounds^{-1}(\frac{1}{s}(\frac{1}{s+2})) = \int_0^t e^{-2r} dr = -\frac{1}{2}e^{-2r}\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1-e^{-2t})$$

مثال ۳.۴.۴ تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{1}{s^2(s^2-1)}$ را بدست آورید.

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s^2-1}) = \sinh t, \pounds^{-1}(\frac{1}{s}(\frac{1}{s^2-1})) = \int_0^t \sinh r dr = \cosh r\Big|_0^t = \cosh t - 1$$

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s}(\frac{1}{s(s^2-1)})) = \int_0^t (\cosh r - 1) dr = (\sinh r - r)\Big|_0^t = \sinh t - t$$

مثال ۴.۴.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y'' - 4y' = 1 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

$$\pounds(y'') - 4\pounds(y') = \pounds(1) \Rightarrow s^2Y - sy(0) - y'(0) - 4(sY - y(0)) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y - 4sY = \frac{1}{s} \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2}(\frac{1}{s-4}) \Rightarrow y(t) = \pounds^{-1}(Y) = \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2}(\frac{1}{s-4}))$$

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s-4}) = e^{4t}, \quad \pounds^{-1}(\frac{1}{s}(\frac{1}{s-4})) = \int_0^t e^{4r} dr = \frac{1}{4}e^{4r}\Big|_0^t = \frac{1}{4}(e^{4t}-1)$$

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{s}(\frac{1}{s(s-4)})) = \frac{1}{4}\int_0^t (e^{4r}-1) dr = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4r} - r)\Big|_0^t = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} - t)$$

$$y(t) = \frac{1}{4}(\frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4} - t)$$

۵.۴ انتقال بر محور s ها

قضیه ۱.۵.۴ فرض کنید $(s > a)$ $\pounds(f(t)) = F(s)$ آنگاه:

$$\pounds(e^{bt}f(t)) = F(s-b) \quad (s \geq a+b)$$

b ثابت دلخواه می باشد.

مثال ۱.۵.۴ تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

(۱)

$$g(t) = te^{2t}$$

$$f(t) = t, F(s) = \frac{1}{s^2}, b = 2 \Rightarrow \pounds(te^{2t}) = F(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

(۲)

$$g(t) = e^{-3t}\cos 2t$$
$$f(t) = \cos 2t \quad , \quad F(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad , \quad b = -3$$
$$\pounds(e^{-3t}\cos 2t) = F(s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4}$$

(۳)

$$g(t) = e^{-2t}(\sin t + 4t^2 - 1)$$
$$f(t) = \sin t + 4t^2 - 1 \quad , \quad b = -2 \quad , \quad F(s) = \frac{1}{s^2+1} + \frac{8}{s^3} - \frac{1}{s}$$
$$\pounds(e^{-2t}(\sin t + 4t^2 - 1)) = F(s+2) = \frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{8}{(s+2)^3} - \frac{1}{s+2}$$

مثال ۲.۵.۴ تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{2s+1}{s^2+4s+13}$ را بدست آورید.
ابتدا کسر را به صورت زیر تجزیه می نماییم:

$$\frac{2s+1}{s^2+4s+13} = \frac{2(s+2)-3}{(s+2)^2+9} = 2\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$\begin{aligned}\pounds^{-1}\Big(\frac{2s+1}{s^2+4s+13}\Big) &= 2\pounds^{-1}\Big(\frac{s+2}{(s+2)^2+9}\Big) - \pounds^{-1}\Big(\frac{3}{(s+2)^2+9}\Big)\\ &= 2e^{-2t}\pounds^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+9}\Big) - e^{-2t}\pounds^{-1}\Big(\frac{3}{s^2+9}\Big)\\ &= e^{-2t}(2\cos 3t - \sin 3t)\end{aligned}$$

مثال ۳.۵.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \quad , \quad y(0) = 2 \quad , \quad y'(0) = -4$$
$$\pounds(y'') + 2\pounds(y') + 5\pounds(y) = 0 \Rightarrow s^2Y - sy(0) - y'(0) + 2(sY - y(0)) + 5Y = 0$$
$$s^2Y - 2s + 4 + 2sY - 4 + 5Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{2s}{s^2+2s+5}$$
$$Y = \frac{2s}{(s+1)^2+4} = 2\frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$\begin{aligned}y(t) = \pounds^{-1}(Y) &= 2\pounds^{-1}\Big(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\Big) - \pounds^{-1}\Big(\frac{2}{(s+1)^2+4}\Big)\\ &= 2e^{-t}\pounds^{-1}\Big(\frac{s}{s^2+4}\Big) - e^{-t}\pounds^{-1}\Big(\frac{2}{s^2+4}\Big)\\ &= e^{-t}(2\cos 2t - \sin 2t)\end{aligned}$$

مثال ۴.۵.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y''-4y'+4y=0 \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=2$$
$$\pounds(y'')-4\pounds(y')+4\pounds(y)=0 \Rightarrow s^2Y-sy(0)-y'(0)-4(sY-y(0))+4Y=0$$
$$s^2Y-2-4sY+4Y=0 \Rightarrow Y=\frac{2}{s^2-4s+4}=\frac{2}{(s-2)^2}$$
$$y(t)=\pounds^{-1}(Y)=\pounds^{-1}(\frac{2}{(s-2)^2})=e^{2t}\pounds^{-1}(\frac{2}{s^2})=2te^{2t}$$

۶.۴ مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۱.۶.۴ اگر تابع $f(t)$ روی $t\geq 0$ پیوسته ی قطعه ای و برای $a>0$ دارای تبدیل لاپلاس باشد، آنگاه برای $n=1,2,3,\ldots$

$$F^{(n)}(s)=\frac{d^nF(s)}{ds^n}=\pounds((-t)^nf(t)) \quad , \quad s>a$$

مثال ۱.۶.۴ تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=t\cos at$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم $f(t)=\cos at$ ، آنگاه $F(s)=\pounds(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2}$.
از طرفی بنا به قضیه داریم: $\pounds(tf(t))=-F'(s)$ بنابراین:

$$\pounds(t\cos at)=-(\frac{s}{s^2+a^2})'=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$$

مثال ۲.۶.۴ تبدیل لاپلاس تابع $g(t)=t^2\sin at$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم $f(t)=\sin at$ ، آنگاه $F(s)=\pounds(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$.
از طرفی بنا به قضیه داریم: $\pounds(t^2f(t))=F''(s)$ بنابراین:

$$\pounds(t^2\sin at)=(\frac{a}{s^2+a^2})''=\frac{6as-2a^3}{(s^2+a^2)^3}$$

مثال ۳.۶.۴ تبدیل معکوس لاپلاس $\ln(\frac{s}{s-1})$ را بدست آورید.
فرض می کنیم $F(s)=\ln(\frac{s}{s-1})$ بنابراین:

$$F'(s)=\frac{(\frac{s}{s-1})'}{(\frac{s}{s-1})}=-\frac{1}{s(s-1)} \Rightarrow F'(s)=-\frac{1}{s(s-1)}$$

با توجه به قضیه داریم:

$$F'(s)=\pounds(-tf(t)) \Rightarrow \pounds^{-1}(F'(s))=-tf(t) \Rightarrow f(t)=\frac{1}{t}\pounds^{-1}(\frac{1}{s(s-1)})$$

از طرفی $\pounds^{-1}(\frac{1}{s-1})=e^t$ و با توجه به قضیه ی انتگرال داریم: $\pounds^{-1}(\frac{1}{s(s-1)})=\int_0^t e^r dr$ ، بنابراین:

$$f(t)=\frac{1}{t}\pounds^{-1}(\frac{1}{s(s-1)})=\frac{1}{t}\int_0^t e^r dr=\frac{e^t-1}{t} \Rightarrow \pounds^{-1}(\ln(\frac{s}{s-1}))=\frac{e^t-1}{t}$$

مثال ۴.۶.۴ تبدیل معکوس لاپلاس $\ln(\frac{s-3}{s+2})$ را بدست آورید.
فرض می کنیم $F(s)=\ln(\frac{s-3}{s+2})$ ، بنابراین:

$$F'(s)=\frac{(\frac{s-3}{s+2})'}{(\frac{s-3}{s+2})}=\frac{\frac{s+2-s+3}{(s+2)^2}}{\frac{s-3}{s+2}}=\frac{5}{(s-3)(s+2)}$$

$$F'(s)=\frac{5}{(s-3)(s+2)}=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}\Rightarrow F'(s)=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+2}$$

با توجه به قضیه داریم:

$$F'(s)=\pounds(-tf(t))\Rightarrow f(t)=-\frac{1}{t}\pounds^{-1}(F'(s))=-\frac{1}{t}\pounds-1(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+2})$$

$$f(t)=-\frac{1}{t}(\pounds^{-1}(\frac{1}{s-3})-\pounds^{-1}(\frac{1}{s+2}))=-\frac{1}{t}(e^{3t}-e^{-2t})$$

$$\Rightarrow\pounds^{-1}(\ln(\frac{s-3}{s+2}))=\frac{e^{-2t}-e^{3t}}{t}$$

۷.۴ انتگرالگیری از تبدیل لاپلاس

قضیه ۱.۷.۴ اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه ی وجود تبدیل لاپلاس صدق کند و $\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}$ وجود داشته باشد و $\pounds(f(t))=F(s)$ ، آنگاه

$$\pounds(\frac{f(t)}{t})=\int_s^\infty F(u)du$$

در این صورت با استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس داریم:

$$f(t)=t\pounds^{-1}(\int_s^\infty F(u)du)$$

مثال ۱.۷.۴ تبدیل لاپلاس تابع $\frac{\sin 3t}{t}$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم $f(t)=\sin 3t$ ، بنابراین $\pounds(\sin 3t)=\frac{3}{s^2+9}$ ، از طرفی داریم:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin 3t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{3t}{t}=3$$

شرایط قضیه برقرار است، لذا داریم:

$$\pounds(\frac{\sin 3t}{t})=\int_s^\infty\frac{3}{u^2+9}du=\arctan(\frac{u}{3})\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\arctan(\frac{s}{3})$$

مثال ۲.۷.۴ تبدیل لاپلاس تابع $\frac{1-\cos t}{t}$ را مشخص نمایید.
فرض می کنیم $f(t)=1-\cos t$ بنابراین: $\pounds(1-\cos t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+1}$ ، همچنین:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos t}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2\sin^2\frac{t}{2}}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{2.\frac{t^2}{2}}{t}=0$$

لذا بنا به قضیه داریم:

$$\pounds(\frac{1-\cos t}{t}) = \int_s^\infty (\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1})du = (\ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1))\Big|_s^\infty$$
$$= (\ln u - \ln(\sqrt{u^2+1}))\Big|_s^\infty = \ln(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}})\Big|_s^\infty = \ln(\frac{\sqrt{s^2+1}}{s})$$

مثال ۳.۷.۴ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)^2}$ را مشخص نمایید.
با توجه به قضیه داریم:

$$f(t) = t\pounds^{-1}(\int_s^\infty \frac{u}{(u^2+4)^2}du) \quad \Rightarrow u^2+4 = z \quad , \quad dz = 2udu$$

$$\Rightarrow f(t) = t\pounds^{-1}(\int_{s^2+4}^\infty \frac{1}{z^2}.\frac{1}{2}dz) = \frac{t}{2}\pounds^{-1}(\frac{z^{-1}}{-1}\Big|_{s^2+4}^\infty)$$
$$= \frac{t}{2}\pounds^{-1}(-\frac{1}{u^2+4}\Big|_s^\infty) = \frac{t}{2}\pounds^{-1}(\frac{1}{s^2+4}) = \frac{t}{4}\sin 2t$$

۸.۴ کانولوشن

تعریف ۱.۸.۴ کانولوشن [۱] دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ که با نماد $(f*g)(t)$ نشان داده می‌شود، عبارتست از:

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\lambda)g(t-\lambda)d\lambda$$

کانولوشن دارای خواص زیر می‌باشد:

(۱) خاصیت جابجایی $f*g = g*f$.

(۲) خاصیت توزیع پذیری $f*(g+h) = f*g + f*h$.

(۳) خاصیت شرکت پذیری $f*(g*h) = (f*g)*h$.

(۴) $f*0 = 0*f = 0$.

(۵) $f*(cg) = (cf)*g = c(f*g)$.

در حالت کلی $1*f = f$ و $f*f \geq 0$ برقرار نیست.

مثال ۱.۸.۴ اگر $f(t) = \cos t$ باشد، $(f*f)(t)$ را بدست آورید.

$$(f*f)(t) = \int_0^t \cos\lambda\cos(t-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^t (\cos t + \cos(2\lambda - t)d\lambda = \frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

عبارت فوق به ازای $t = \pi$ برابر $-\frac{\pi}{2}$ است، لذا $(f*f)(t) \ngeq 0$.

[۱] convolution

قضیه ۱.۸.۴ فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ دو تابع باشند که در دارای تبدیل لاپلاس می باشند، آنگاه تبدیل لاپلاس $(f*g)(t)$ به ازای $s>a$ وجود دارد و برابر $F(s)G(s)$ است، به عبارت دیگر:

$$\pounds^{-1}(F(s)G(s)) = (f*g)(t)$$

مثال ۲.۸.۴ تبدیل معکوس لاپلاس تابع $\frac{1}{(s-2)(s+3)}$ را مشخص نمایید.

فرض می کنیم: $F(s)=\frac{1}{s-2}, G(s)=\frac{1}{s+3}$ ، لذا: $f(t)=e^{2t}, g(t)=e^{-3t}$. بنابراین:

$$\pounds^{-1}(\frac{1}{(s-2)(s+3)}) = \int_0^t e^{2\lambda}e^{-3(t-\lambda)}d\lambda = e^{-3t}\int_0^t e^{5\lambda}d\lambda = \frac{1}{5}e^{-3t}(e^{5t}-1)$$

مثال ۳.۸.۴ تبدیل معکوس لاپلاس $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}$ را مشخص نمایید.
ابتدا کسر را به صورت : $\frac{s^2}{(s^2+1)^2}=\frac{s}{(s^2+1)}.\frac{s}{(s^2+1)}$ می نویسیم.
از طرفی $\pounds^{-1}(\frac{s}{s^2+1})=\cos t$ بنابراین داریم:

$$\pounds^{-1}(\frac{s^2}{(s^2+1)^2}) = \int_0^t \cos\lambda\cos(t-\lambda)d\lambda = \int_0^t \frac{1}{2}(\cos t+\cos(t-2\lambda))d\lambda$$
$$= \frac{1}{2}(t\cos t - \frac{1}{2}\sin(t-2\lambda))\Big|_0^t = \frac{1}{2}(t\cos t+\sin t)$$

مثال ۴.۸.۴ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y''+4y=2\sin 3t \quad , \quad y(0)=0 \quad , \quad y'(0)=0$$
$$\pounds(y'')+4\pounds(y)=2\pounds(\sin 3t) \Rightarrow s^2Y+4Y=\frac{6}{s^2+9}$$
$$Y=\frac{6}{(s^2+9)(s^2+4)} \Rightarrow \pounds^{-1}(Y)=\pounds^{-1}(\frac{3}{s^2+9}.\frac{2}{s^2+4})$$

از طرفی $\pounds^{-1}(\frac{3}{s^2+9})=\sin 3t, \pounds^{-1}(\frac{2}{s^2+4})=\sin 2t$ ، بنابراین:

$$y(t)=\int_0^t \sin 3\lambda\sin 2(t-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^t(\cos(5\lambda-2t)-\cos(2t+\lambda))d\lambda$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}\sin(5\lambda-2t)-\sin(2t+\lambda))\Big|_0^t = \frac{3}{5}\sin 2t-\frac{2}{5}\sin 3t$$

تعریف ۲.۸.۴ معادلات انتگرالی، معادلاتی هستند که تابع مجهول زیر علامت انتگرال می باشد.

تعریف ۳.۸.۴ معادلات دیفرانسیل انتگرالی، معادلات انتگرالی هستند که شامل مشتقات تابع مجهول نیز می باشند.

مثال ۵.۸.۴ معادله ی $y(t)=\sin 2t+\int_0^t y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda$ را حل نمایید.
از طرفین معادله لاپلاس می گیریم:

$$\pounds(y(t))=\pounds(\sin 2t)+\pounds(\int_0^t y(\lambda)\sin 2(t-\lambda)d\lambda)$$

$$Y=\frac{2}{s^2+4}+\pounds(y*\sin 2t)\Rightarrow Y=\frac{2}{s^2+4}+Y.\frac{2}{s^2+4}\Rightarrow Y=\frac{2}{s^2+2}$$

$$\pounds^{-1}(Y)=\pounds^{-1}(\frac{2}{s^2+2})\Rightarrow y(t)=\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t$$

مثال ۶.۸.۴ معادله ی $y(t)=e^{-t}-2\int_0^t\cos(t-\lambda)y(\lambda)d\lambda$ را حل نمایید.

از طرفین لاپلاس می گیریم:

$$\pounds(y(t))=\pounds(e^{-t})-2\pounds(y*\cos t)\Rightarrow Y=\frac{1}{s+1}-2\frac{s}{s^2+1}.Y\Rightarrow Y=\frac{s^2+1}{(s+1)^3}$$

$$Y=\frac{1}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{2}{(s+1)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s+1)^2}+\frac{C}{(s+1)^3}$$

$$\Rightarrow\pounds^{-1}(Y)=\pounds^{-1}(\frac{1}{s+1})-\pounds^{-1}(\frac{2}{(s+1)^2})+\pounds^{-1}(\frac{2}{(s+1)^3})$$

$$y(t)=e^{-t}-2te^{-t}+t^2e^{-t}\Rightarrow y(t)=(1-t)^2e^{-t}$$

مثال ۷.۸.۴ معادله ی $y(0)=2$ $\quad y'(t)+5\int_0^t\cos(2t-\lambda)y(\lambda)d\lambda=10,$ را حل نمایید.

از طرفین لاپلاس می گیریم:

$$\pounds(y'(t))+5\pounds(\int_0^t\cos(2t-\lambda)y(\lambda)d\lambda)=\pounds(10)\Rightarrow sY-y(0)+5\pounds(\cos 2t*y(t))=10\frac{1}{s}$$

$$sY-2+5\frac{s}{s^2+4}Y=\frac{10}{s}\Rightarrow Y=\frac{(2s+10)(s^2+4)}{s^2(s^2+9)}$$

پس از تجزیه ی کسر داریم:

$$Y=\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{Cs+D}{s^2+9}=\frac{\frac{40}{9}}{s^2}+\frac{\frac{8}{9}}{s}+\frac{\frac{10}{9}s+\frac{50}{9}}{s^2+9}$$

$$\pounds^{-1}(y(t))=\frac{40}{9}\pounds^{-1}(\frac{1}{s^2})+\frac{8}{9}\pounds^{-1}(\frac{1}{s})+\frac{10}{9}\pounds^{-1}(\frac{s}{s^2+9})+\frac{50}{27}\pounds^{-1}(\frac{3}{s^2+9})$$

$$y(t)=\frac{40}{9}t+\frac{8}{9}+\frac{10}{9}\cos 3t+\frac{50}{27}\sin 3t\Rightarrow y(t)=\frac{1}{27}(24+120t+30\cos 3t+50\sin 3t)$$

تمرین ۸ تبدیل لاپلاس را بدست آورید.

(۱) $f(t) = 4e^{3t} + 2\cos t - 1$

(۲) $f(t) = \cos(at+b)$

(۳) $\sinh(at+b)$

(۴) $f(t) = \frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$

(۵) $\int_0^t \frac{1-\cos x}{x} dx$

(۶)

$$f(t) = \begin{cases} \sin 3t & 0 \leq t < \pi \\ 3 & t \geq \pi \end{cases}$$

تبدیل معکوس لاپلاس را بدست آورید.

(۱) $F(s) = \frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}$

(۲) $F(s) = \frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}$

(۳) $F(s) = \frac{1}{s^3(s-5)}$

(۴) $F(s) = \ln(\frac{2s}{(s^2+1)^2})$

(۵) $F(s) = \ln(\frac{s^2+4}{s^2})$

معادلات زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل نمایید.

(۱) $y'' + 4y = 0 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$

(۲) $y'' + 9y = \sin 2t \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1$

(۳) $y'' + y' - 12y = t \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$

(۴) $y'' + y = 2 \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 1$

(۵) $y(t) + \int_0^t (t-x)y(x)dx = \sin 2t$

فصل ۵

حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سریها

۱.۵ مقدمه

در فصل ۳ حالات خاصی از معادلات خطی با ضرایب متغیر را بررسی نمودیم. در این فصل به بررسی حل این معادلات یعنی معادلات به فرم

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

که در آن f_1 ، f_2 و f_3 چند جمله ای بر حسب x هستند، می پردازیم. روشی که ارائه می شود را برای حل معادلات با ضرایب ثابت نیز می توان به کار برد، ولی این روش خیلی مشکل تر از روشی که در فصل ۳ بیان شده، است، اما روش مناسبی برای حل معادلات خطی با ضرایب متغیر است. در این روش، جواب را به فرم سری توانی در نظر می گیریم و به همین علت آن را روش سری توانی می نامند.

۲.۵ سری توانی

سری توانی یکی از انواع سریهای تابع می باشد که بر حسب توانهای صعودی، صحیح و مثبت x و $x-a$ به دو صورت زیر می باشد:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \quad (2)$$

برای تعیین همگرایی این سریها ، همگرایی مطلق آنها را بررسی می کنیم. برای فرمول (۱) داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}x\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

این سری در صورتی همگراست که: $|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| < 1$. اگر فرض کنیم: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{1}{R}$ آنگاه: $|x|\frac{1}{R} < 1 \Rightarrow |x| < R$ بنابراین فاصله ی همگرایی سری عبارتست از: $(-R, R)$، یعنی به ازای x های درون این فاصله همگرا و به ازای x های خارج این فاصله واگراست. البته همگرایی و واگرایی سری برای نقاط $x = R, x = -R$ باید به طور مستقیم بررسی شود. همین مراحل را به طور مشابه برای سری فرمول (۲)

می توان بیان نمود.
عدد مثبت R را **شعاع همگرایی** سری می نامند.

مثال ۱.۲.۵ *شعاع همگرایی سری* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ *را مشخص نمایید.*

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1\Rightarrow \quad R=1$$

قضیه ۱.۲.۵ *اگر شعاع همگرا یی سری* $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ *برابر* R *باشد، آنگاه سریهای* $\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}$ *و* $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$ *نیز همگرا و دارای شعاع همگرایی* R *هستند.*

قضیه ۲.۲.۵ *فرض کنید* $f(x)$ *تابعی باشد به طوری که* $f(x)$ *و تمام مشتقاتش در فاصله ی* (x_0-R,x_0+R) *موجود باشند، آنگاه بسط تیلور تابع* $f(x)$ *برای تمام* x *هایی که* $|x-x_0|<R$ *وجود دارد و به فرم زیر است:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad (1)$$

اگر و تنها اگر

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0 \quad (x_0<\xi_n<x)$$

اگر در سری تیلور (۱)، $x_0=0$ *انتخاب شود به آن* ***سری مک لورن*** *می گویند.*

تعریف ۱.۲.۵ *تابع* $f(x)$ *در نقطه ی* $x=a$ ***تحلیلی*** *نامیده می شود، هرگاه در* $x=a$ *بسط تیلور داشته باشد.*

مثال ۲.۲.۵ (۱) *چند جمله ایها از درجه ی دلخواه* n *تحلیلی اند.*

(۲) *توابع* $e^x,\sin x,\cos x,\sinh x,\cosh x$ *تحلیلی اند و بسط تیلور آنها به صورت زیر است،*

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$$

۳.۵ حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری توانی

در این بخش حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه ی دوم با ضرایب متغیر توسط سریهای توانی را بررسی می کنیم. برای اینکه جواب چنین معادلاتی به صورت سری توانی باشد، شرایطی نیاز است که برخی از این شرایط را در ادامه بیان می کنیم.

قضیه ۱.۳.۵ *اگر در معادله ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم*

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = p_3(x)$$

توابع $p_1(x)$، $p_2(x)$ و $p_3(x)$ همگی در نقطه ی $x = a$ تحلیلی باشند، آنگاه هر جواب این معادله در نقطه ی $x = a$ تحلیلی است.

تعریف ۱.۳.۵ *در معادله ی دیفرانسیل*

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

*که در آن f_1، f_2 و f_3 همگی چند جمله ای بر حسب x هستند، نقطه ی $x = a$ را یک نقطه ی **معمولی** می گوییم هر گاه $f_1(a) \neq 0$ ، در غیر این صورت نقطه ی $x = a$ را یک نقطه ی **منفرد** می گوییم.*

قضیه ۲.۳.۵ *اگر $x = a$ یک نقطه ی معمولی معادله ی دیفرانسیل*

$$f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$$

باشد، آنگاه معادله دارای جوابی به فرم سری توانی بر حسب توانهای $x - a$ خواهد بود و جواب عمومی به صورت زیر می باشد:

$y = c($ یک سری توانی بر حسب توانهای $x - a) + c^*($ یک سری توانی بر حسب توانهای $x - a)$

در این جواب هر دو سری مستقل خطی بوده و در یک ناحیه اطراف $x = a$ همگرا هستند.

تبصره ۱۴ *اگر شرایط اولیه به صورت $y(0) = 0$ باشد، جواب را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ، و اگر شرایط اولیه به صورت $y(a) = y_0$ باشد، جواب را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ در نظر می گیریم.*

برای حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از سریها اگر معادله دارای جواب به صورت سری توانی باشد، ابتدا تمام توابع موجود در معادله ی دیفرانسیل را به صورت سری توانی می نویسیم و سپس y و تمام مشتقاتش را در معادله ی دیفرانسیل قرار می دهیم، آنگاه با مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان، ضرایب سری توانی را بدست می آوریم.

مثال ۱.۳.۵ *معادله ی دیفرانسیل $y(0) = 1 \quad , \quad y' - 3xy = x$ را حل نمایید.*
چون $f_1(x) = 1$ بنابراین معادله دارای جواب به صورت سری توانی $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ است. بنابراین $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$. برای حل y, y' را در معادله قرار می دهیم، بنابراین داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 3\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = x \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = x$$

$$c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^n = x \Rightarrow c_1 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)c_{n+1} - 3c_{n-1})x^n = x$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان رابطه ی زیر بدست می آید:

$$c_1 = 0 \quad , \quad (n+1)c_{n+1} - 3c_{n-1} = 0 \Rightarrow c_{n+1} = \frac{3}{n+1}c_{n-1} \quad (n > 1)$$

در این رابطه ضرایب c_n را به ازای برخی از مقادیر n محاسبه می نماییم،

$$n=1, \quad 2c_2-3c_0=1 \Rightarrow c_2=\frac{1}{2}(3c_0+1)$$

$$n=2: \quad 3c_3-3c_1=0 \Rightarrow c_3=c_5=\ldots=c_{2n+1}=0$$

بنابراین سری توانی به صورت زیر می باشد:

$$y=c_0+(3c_0+1)(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times 4}x^4+\ldots) \quad , \quad y(0)=0$$

شرط اولیه ی $y(0)=0$ را در سری قرار می دهیم و $c_0=1$ بدست می آید و لذا جواب معادله عبارتست از:

$$y=1+4(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2\times 4}x^4+\ldots)$$

مثال ۲.۳.۵ معادله ی دیفرانسیل $y''-xy'+y=0$ حل نمایید.
ضرایب y ، y' و y'' چند جمله ای هستند و $f_1(0)=1\neq 0$. بنابراین $x=0$ یک نقطه ی معمولی می باشد و لذ معادله دارای جواب به صورت سری توانی به فرم $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ می باشد.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \quad , \quad y'=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} \quad , \quad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}$$

y,y',y'' را در معادله قرار می دهیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)c_nx^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$2c_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n+c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n=0$$

$$(2c_2+c_0)+(\sum_{n=1}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2}-nc_n))x^n=0$$

$$2c_2+c_0=0 \Rightarrow \quad c_2=-\frac{c_0}{2}$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2}+(1-n)c_n=0 \Rightarrow c_{n+2}=\frac{n-1}{(n+2)(n+1)}c_n, \quad n\geq 1$$

با جایگذاری $n=1$ در رابطه ی بازگشتی ، $c_3=0$ حاصل می شود و رابطه ی بازگشتی به ازای جمیع مقادیر c_1 برقرار است، بنابراین c_1 را به عنوان پارامتر در نظر می گیریم.

$$c_3=c_5=c_7=\ldots=c_{2n+1}=0$$

$$n=2: \quad c_4=\frac{1}{4\times 3}c_2=-\frac{1}{4!}c_0, \quad n=4: \quad c_6=\frac{3}{6\times 5}=-\frac{3}{6!}c_0$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از:

$$y=c_0(1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{3}{6!}x^6-\ldots)+c_1x$$

مثال ۳.۳.۵ معادله ی دیفرانسیل $y'' + 2x^2y = 0$ را حل نمایید.
ضریب y چند جمله ای و $f_1(0) = 1 \neq 0$. بنابراین $x = 0$ یک نقطه ی معمولی است و معادله دارای جواب به صورت سری توانی می باشد.

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

y, y'' را در معادله قرار می دهیم.

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

$$2c_2 + 6c_3x + \sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + 2\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0$$

$$2c_2 + 6c_3x + (\sum_{n=2}^{\infty}((n+2)(n+1)c_{n+2} + 2c_{n-2}))x^n = 0$$

$$2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \quad , \quad 6c_3 = 0 \Rightarrow c_3 = 0$$

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} + 2c_{n-2} = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{-2}{(n+2)(n+1)}c_{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$n = 2: \quad c_4 = \frac{-2}{4\times 3}c_0 = -\frac{1}{6}c_0 \quad , \quad n = 3: \quad c_5 = \frac{-2}{5\times 4}c_1 = -\frac{1}{10}c_1$$

$$n = 4: \quad c_6 = \frac{-2}{6\times 5}c_2 = 0 \quad , \quad n = 5: \quad c_7 = \frac{-2}{7\times 6}c_3 = 0$$

بنابراین جواب معادله عبارتست از:

$$y = c_0(1 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{168}x^6 - \ldots) + c_1(x - \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{360} - \ldots)$$

۴.۵ روش مشتقات متوالی

برای مشخص نمودن جواب معادله ی دیفرانسیل به فرم سری توانی، می توان از روش زیر که آن را روش **مشتقات متوالی** می نامند استفاده نمود. این روش در حالتی که معادله با شرایط اولیه داده شده باشد، روش مناسبی است.
در این روش جواب را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y = y(a) + \frac{(x-a)}{1!}y'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}y''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}y^{(n)}(a) + \ldots$$

مثال ۱.۴.۵ معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$y'' = yy' - x^2 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 1 \quad (1)$$

در معادله $x = 0$ را قرار می دهیم، بنابرین: $y''(0) = y(0)y'(0) - 0 \Rightarrow y''(0) = 1$.
از معادله ی (۱) مشتق می گیریم:

$$y''' = (y')^2 + yy'' - 2x \quad (2) \Rightarrow y'''(0) = 1 + 1 = 2$$

با مشتق گیری از (۲) داریم:

$$y^{(4)} = 3y'y'' + yy''' - 2 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 3 + 2 - 2 = 3$$

بنابراین بسط مک لورن جواب تا جمله ی پنجم عبارتست از:

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 + \dots$$

مثال ۲.۴.۵ *معادله ی دیفرانسیل زیر را حل نمایید.*

$$y'' + y' \sin x + e^x y = 0 \quad (1)$$

ابتدا $x = 0$ را در معادله قرار می دهیم: $y''(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) = -y(0)$.

با مشتق گیری از (۱) داریم:

$$y''' + y'' \sin x + y' \cos x + e^x y + e^x y' = 0 \quad (2)$$

$$y'''(0) + 2y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2y'(0) - y(0)$$

و با مشتق گیری از (۲) داریم:

$$y^{(4)} + y''' \sin x + 2y'' \cos x - y' \sin x + e^x y + 2e^x y' + e^x y'' = 0$$

$$y^{(4)}(0) + 3y''(0) + y(0) + 2y'(0) = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 2y(0) - 2y'(0)$$

بنابراین جواب عمومی عبارتست از:

$$y = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \frac{x^3}{3!}y'''(0) + \frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0) + \dots$$

$$y = y(0)(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \dots) + y'(0)(x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \dots)$$

تمرین ۹ *جواب های معادلات دیفرانسیل زیر را به فرم سری توانی حول نقطه ی $a = 0$ تا جمله ی k ام بنویسید.*

(۱) $y'' - xy' + 2y = 0 \quad , \quad k = 7$

(۲) $y'' - xy' - y = \sin x \quad , \quad k = 5$

(۳) $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad , \quad k = 4$

۵.۵ معادله ی لژاندر

معادله ی دیفرانسیل لژاندر به صورت زیر می باشد:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + v(v + 1)y = 0 \quad (1)$$

در این معادله v عددی حقیقی است. این معادله در شرایط قضیه ی ۲.۳.۵ صدق می کند و نقطه ی $x = 0$ یک نقطه ی معمولی است و معادله دارای جوابی به فرم سری توانی به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ می باشد. مشتق اول و دوم y را مشخص نموده و در معادله ی (۱) قرار می دهیم. با مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان از دو طرف تساوی رابطه ی بازگشتی زیر بدست می آید.

$$c_{n+2} = -\frac{(v - n)(v + n + 1)}{(n + 2)(n + 1)} c_n \quad , \quad (n \geq 0)$$

با توجه به رابطه ی بازگشتی، تمام ضرایب فرد بر حسب c_1 و تمام ضرایب زوج بر حسب c_0 مشخص می شوند ، c_0 و c_1 ثابت های دلخواه هستند. بنابراین جواب عمومی معادله ی (۱) به فرم زیر می باشد:

$$y(x) = c_0 R_v(x) + c_1 S_v(x)$$

$R_v(x)$ و $S_v(x)$ دو جواب مستقل خطی هستند.
در اغلب مسائل کاربردی، پارامتر v یک عدد صحیح نامنفی است. اگر $v = n$ (n عدد صحیح نامنفی) باشد، آنگاه با توجه به رابطه ی بازگشتی داریم: $c_{n+2} = c_{n+4} = \ldots = 0$. در نتیجه هنگامی که n زوج باشد، سری $R_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی n خواهد بود و $S_n(x)$ به صورت یک سری می باشد و هنگامی که n فرد باشد، سری $S_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه ی n و $R_n(x)$ به صورت سری خواهد بود. بنابراین برای هر عدد صحیح نامنفی n، $R_n(x)$ یا $S_n(x)$ (نه هر دو) یک چند جمله ای از درجه ی n می باشد. این چند جمله ایها را که در مقادیر ثابتی ضرب شده اند، **چند جمله ای های لژاندر** می نامند.

مثال ۱.۵.۵ *معادله ی لژاندر* $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ *را حل نمایید.*
نقطه ی $x = 0$ *یک نقطه ی عادی است، بنابراین معادله دارای جواب به فرم* $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *است لذا:*

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad , \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

y، y' و y'' را در معادله ی لژاندر قرار می دهیم، بنابراین:

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n c_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-n(n-1) - 2n + 2)c_n x^{n} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n-1)c_n x^n = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)((n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n)x^n = 0$$

$$(n+1)c_{n+2} - (n-1)c_n = 0 \Rightarrow c_{n+2} = \frac{n-1}{n+1}c_n \quad : \text{رابطه بازگشتی}$$

با توجه به رابطه ی بازگشتی بدست آمده به استثنای c_1 بقیه ی ضرایب فرد صفر است، یعنی:

$$c_3 = c_5 = \ldots = c_{2n+1} = 0$$

و $c_2 = -c_0 \quad , \quad c_4 = -\frac{1}{3}c_0 \quad , \quad c_6 = -\frac{1}{5}c_0 \quad , \ldots \quad , c_{2n} = -\frac{1}{2n-1}c_0$.
بنابراین:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1}x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n} = c_1 x + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{x^{2n}} = c_1 x + c_0 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}c_0 x^{2n}$$

$$y = c_1x + c_0(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}x^{2n}) \quad , \quad y_1 = x \quad , \quad y_2 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}x^{2n}$$

y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله می باشند.

۶.۵ روش فروبینوس

تعریف ۱.۶.۵ در معادله ی دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$
نقطه ی $x = a$ را یک نقطه ی **منفرد** گوییم اگر $f_1(a) = 0$ و اگر حدهای زیر موجود باشند، نقطه ی $x = a$ را نقطه ی **منفرد منظم** و در غیر این صورت نقطه ی **منفرد نا منظم** نامیده می شود.

$$\lim_{x\to a}(x-a)\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \quad , \quad \lim_{x\to a}(x-a)^2\frac{f_3(x)}{f_1(x)}$$

مثال ۱.۶.۵ در معادله ی $y''\ln x + \frac{1}{2}y' + y = 0$ نشان دهید نقطه ی $x = 1$ یک نقطه ی منفرد منظم است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{2\ln x} = \frac{0}{0} \overset{hop}{\Rightarrow} \lim_{x\to}\frac{1}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{\ln x} = \frac{0}{0} \overset{hop}{\Rightarrow} \lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}2x(x-1) = 0$$

تعریف ۲.۶.۵ در معادله ی دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0 \quad (1)$
که در آن f_1 ، f_2 و f_3 چند جمله ای می باشند، نقطه ی $x = a$ را منفرد گوییم اگر $f_1(a) = 0$ و چنانچه طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم نماییم و آن را به صورت زیر بنویسیم،

$$y'' + \frac{g(x)}{x-a}y' + \frac{h(x)}{x-a}y = 0$$

و $g(x)$ و $h(x)$ هر دو در نقطه ی $x = a$ تحلیلی باشند در این صورت نقطه ی $x = a$ را منفرد منظم و در غیر این صورت آن را منفرد نامنظم می گوییم.

قضیه ۱.۶.۵ اگر در معادله ی دیفرانسیل $f_1(x)y'' + f_2(x)y' + f_3(x)y = 0$ نقطه ی $x = 0$ یک نقطه ی منفرد منظم باشد، آنگاه معادله دارای حداقل یک جواب به صورت زیر می باشد

$$y = x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \quad , \quad c_0 \neq 0$$

قضیه ۲.۶.۵ هر معادله ی دیفرانسیل به فرم

$$y'' + \frac{g(x)}{x}y' + \frac{h(x)}{x^2}y = 0 \quad (2)$$

که در آن توابع $g(x), h(x)$ در نقطه ی $x = 0$ تحلیلی هستند، حداقل دارای یک جواب به صورت

$$y = x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \quad , \quad c_0 \neq 0$$

خواهد بود و r می تواند حقیقی یا موهومی باشد و طوری انتخاب می شود که $c_0 \neq 0$ است.

در قضیه فوق می توان به جای x ، $x-a$ قرار داد.
روشی که برای حل معادله ی (۲) به کار می رود به روش **فروبینوس** معروف است. برای حل (۲) ابتدا آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^2y'' + xg(x)y' + h(x)y = 0$$

از طرفی $g(x)$ و $h(x)$ در $x = 0$ تحلیلی هستند، بنابراین:

$$g(x) = g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \frac{x^2}{2!}g''(0) + \ldots \quad , \quad h(x) = h(0) + \frac{x}{1!}h'(0) + \frac{x^2}{2!}h''(0) + \ldots$$

جواب را به صورت $y = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r}$ در نظر می گیریم. بنابراین:

$$y' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} \quad , \quad y'' = \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-2}$$

با جایگذاری این روابط در معادله ی (۲) داریم:

$$x^r\Big(\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^m + (\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^m)(g(0) + \frac{x}{1!}g'(0) + \ldots) + (\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m)(h(0) + \frac{x}{1!}h'(0) + \ldots)\Big) = 0 \quad (3)$$

حال ضریب x های همتوان را مساوی قرار می دهیم تا r و c_i ها بدست آید.
چون کمترین توان x در (۳)، r است، بنابراین در (۳) قر ار می دهیم $m = 0$. لذا ضریب x^r عبارتست از:

$$(r(r-1) + rg(0) + h(0))c_0 = 0$$

چون $c_0 \neq 0$ بنابراین معادله ی زیر حاصل می شود که معادله ی **شاخصی** نامیده می شود،

$$r^2 + (g(0)-1)r + h(0) = 0$$

با حل معادله ی شاخصی r را بدست آورده و با جایگذاری در معادله ی (۳) و مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان c_i ها بدست می آیند.
یکی از جواب های معادله ی (۲) همیشه به فرم $c_0 \neq 0$ $\quad y = x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$ است و برای بدست آوردن جواب دیگر که با جواب اول مستقل خطی باشد، با توجه به ریشه های معادله ی شاخصی حالتهای زیر را در نظر می گیریم:

(۱) معادله ی شاخصی دارای دو ریشه ی متمایز باشد که تفاضل آنها عدد صحیح نباشد. در این صورت اگر ریشه ها را به صورت r_1 و r_2 در نظر گیریم، آنگاه با جایگذاری در معادله ی (۳) و مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان، c_i ها را بدست می آوریم، بنابراین جواب ها عبارتند از:

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m \quad , \quad y_2 = x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}c_m x^m$$

y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی هستند و جواب عمومی به صورت زیر است:

$$y = Ay_1 + By_2$$

.

مثال ۲.۶.۵ معادله ی دیفرانسیل $4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0 \quad (1)$ را حل نمایید.
چون $f_1(0) = 0$ بنابراین $x = 0$ یک نقطه ی منفرد می باشد. لذا طرفین معادله را بر ضریب y'' تقسیم نموده و معادله را به صورت زیر می نویسیم،

$$y'' + \frac{(1-x)}{2x}y' - \frac{1}{4x}y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}.\frac{1-x}{2}y' - \frac{x}{4}.\frac{1}{x^2}y = 0$$

توابع $\frac{1-x}{2}$ و $-\frac{x}{4}$ هر دو در $x = 0$ تحلیلی هستند، لذا $x = 0$ یک نقطه ی منفرد منظم است و معادله دارای جوابی به فرم $c_0 \neq 0 \quad , \quad y = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$. با جایگذاری y، y' و y'' در معادله ی (۱) داریم:

$$4\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} + 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1}$$
$$-2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r} - \sum_{m=0}^{\infty}c_m x^{m+r} = 0$$

بنابراین

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(4m+4r-2)c_m x^{m+r-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(2m+2r+1)c_m x^{m+r} = 0 \quad (2)$$

در معادله ی (۲) قرار می دهیم $m = 0$، بنابراین معادله ی شاخصی عبارتست از:

$$r(4r-2) = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad r_2 = 0$$

حال در (۲) قرار می دهیم $r = \frac{1}{2}$. بنابراین

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+\frac{1}{2})(4m)c_m x^{(m-\frac{1}{2})} - \sum_{m=0}^{\infty}(2m+2)c_m x^{(m+\frac{1}{2})} = 0$$

ضریب x های همتوان را مساوی قرار می دهیم.

$$x^{\frac{1}{2}} \text{ضریب} : \qquad 4(1+\frac{1}{2})c_1 - 2c_0 = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{c_0}{3}$$

$$x^{1+\frac{1}{2}} \text{ضریب} : \qquad 8(2+\frac{1}{2})c_2 - (2+2)c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_1}{5} = \frac{c_0}{3 \times 5}$$

$$x^{n+\frac{1}{2}} \text{ضریب} : \qquad (n+1+\frac{1}{2})(4(n+1))c_{n+1} - 2(n+1)c_n = 0 \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{2n+3}$$

بنابراین جواب اول معادله به صورت زیر است:

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}}c_0(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{3 \times 5} + \ldots)$$

برای بدست آوردن جواب دوم، در (۲) به جای r مقدار $r = 0$ قرار می دهیم:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m(4m-2)c_m x^{m-1} - \sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)c_m x^m = 0$$

$$x^0 \text{ضریب} : \qquad 1 \times 2c_1 - c_0 \Rightarrow c_1 = \frac{c_0}{1 \times 2}$$

xضریب : $\quad 2(8-2)c_2-(2+1)c_1=0 \Rightarrow c_2=\frac{c_1}{2^2}=\frac{c_0}{2^2\times 2!}$

x^nضریب : $\quad (n+1)(4(n+1)-2)c_{n+1}-(2n+1)c_n=0 \Rightarrow c_{n+1}=\frac{c_n}{2(n+1)}$

و جواب دوم به صورت زیر است:

$$y_2=x^0c_0(1+\frac{x}{2\times 1!}+\frac{x^2}{2^2\times 2!}+\dots)$$

لذا جواب عمومی به صورت زیر است که به ازای جمیع مقادیر x همگراست.

$$y=Ay_1+By_2$$

(۲) اگر معادله ی شاخصی دارای ریشه ی مضاعف باشد، یعنی $r_1=r_2$. در این حالت جواب اول معادله مانند حالت قبل بدست می آید و برای محاسبه ی جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده نموده و جواب دوم را به فرم $y_2=uy_1$ در نظر می گیریم و با جایگذاری y_2 در معادله u را بدست می آوریم و جواب دوم به صورت زیر است:

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+x^{r_1}\sum_{m=1}^{\infty}a_mx^m \quad (x>0)$$

جواب عمومی نیز عبارتست از: $y=Ay_1+By_2$.

مثال ۳.۶.۵ *معادله ی دیفرانسیل* $(1)\quad x^2y''-xy'+(x^2+1)y=0$ *را حل نمایید.*
چون $f_1(0)=0$ *است، بنابراین* $x=0$ *یک نقطه ی منفرد می باشد. طرفین معادله ی (۱) را بر ضریب* y'' *تقسیم نموده و معادله را به صورت زیر می نویسیم:*

$$y''-\frac{1}{x}y'+\frac{x^2+1}{x^2}y=0$$

توابع -1 *و* x^2+1 *در* $x=0$ *تحلیلی هستند، پس* $x=0$ *یک نقطه ی منفرد منظم است و معادله ی دیفرانسیل دارای جوابی به فرم زیر می باشد:*

$$y=x^r\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^m \quad , \quad c_0\neq 0$$

با جایگذاری y *و* y' *و* y'' *در معادله دیفرانسیل (۱) داریم:*

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_mx^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_mx^{m+r}$$
$$+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r+2}+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r}=0$$

بنابراین:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r-1)^2c_mx^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}c_mx^{m+r+2}=0 \quad (2)$$

لذا معادله ی شاخصی عبارتست از: $(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$.
برای بدست آوردن جواب اول در معادله ی (۲) قرار می دهیم: $r = 1$، بنابراین:

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 c_m x^{m+1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 0$$

و با مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان، c_i ها را بدست می آوریم:

$$x^2 \text{ضریب} : \qquad 1^2 c_1 = 0 \Rightarrow \quad c_1 = 0$$

$$x^3 \text{ضریب} : \qquad 2^2 c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{c_0}{2^2}$$

$$x^{n+3} \text{ضریب} : \qquad (n+2)^2 c_{n+2} + c_n = 0 \Rightarrow c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+2)^2}$$

تمام ضرایب فرد صفر می باشد و با انتخاب $c_0 = 1$ داریم:

$$y_1 = x(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \times 4^2} - \ldots)$$

برای بدست آوردن جواب دوم، y_2 را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_2 = y_1 \ln x + x \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می نماییم

$$y_2' = y_1' \ln x + y_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) a_m x^m$$

$$y_2'' = y_1'' \ln x + 2y_1' \frac{1}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1) a_m x^{m-1}$$

با جایگذاری y_2' و y_2'' در معادله دیفرانسیل (۱) داریم:

$$\begin{aligned}
&(x^2 y_1'' - x y_1' + (x^2+1) y_1) \ln x + 2x y_1' - 2y_1 \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0
\end{aligned}$$

و چون y_1 جواب معادله است، لذا ضریب $\ln x$ مساوی صفر می باشد و داریم:

$$\begin{aligned}
&2x(1 - \frac{3x^2}{2^2} + \frac{5x^4}{2^2 \times 4^2} - \frac{7x^6}{x^2 \times 4^2 \times 6^2} + \ldots) \\
&- 2(x - \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^2 \times 4^2} - \frac{x^7}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \ldots) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} m^2 a_m x^{m+1} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{m+3} = 0
\end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب x های همتوان ضرایب a_i بدست آمده و جواب دوم به صورت زیر است،

$$y_2 = y_1 \ln x + x(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \times 4^2}(1+\frac{1}{2}) + \dots)$$

جواب عمومی نیز عبارتست از: $y = Ay_1 + By_2$.

(۳) اگر معادله ی شاخصی دارای دو ریشه ی متمایز باشد که تفاضل آنها عدد صحیح باشد، یعنی $r_1 - r_2 = n, n \in \mathbb{N}$، آنگاه جواب اول را متناظر با ریشه ی بزرگتر به صورت زیر حساب می کنیم:

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \quad , \quad c_0 \neq 0$$

و برای تعیین جواب دوم از روش تغییر پارامتر استفاده می کنیم و فرم جواب دوم به صورت زیر می باشد:

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (x > 0)$$

جواب عمومی نیز عبارتست از: $y = Ay_1 + By_2$.

مثال ۴.۶.۵ معادله ی دیفرانسیل $xy'' - 2y' + y = 0 \quad (1)$ را حل نمایید.
نقطه ی $x = 0$ منفرد منظم است، لذا طرفین (۱) را بر ضریب y'' تقسیم نموده و معادله را به صورت زیر می نویسیم:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{x}{x^2}y = 0$$

توابع -2 و x در نقطه ی $x = 0$ تحلیلی می باشند، پس $x = 0$ یک نقطه ی منفرد منظم است و با جایگذاری y، y' و y'' در (۱) داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)c_m x^{m+r-1} - 2\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0$$

یا

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-3)c_m x^{m+r-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+r} = 0 \quad (2)$$

معادله ی شاخصی عبارتست از : $r(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 3, r_2 = 0$. چون تفاضل ریشه ها عدد صحیح می باشد، جواب اول را متناظر با ریشه ی بزرگتر بدست می آوریم. برای این کار در (۲) قرار می دهیم $r = 3$ بنابراین داریم:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+3)mc_m x^{m+2} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+3} = 0$$

$$x^3\text{ضریب}: \qquad 4c_1 + c_0 = 0 \Rightarrow \quad c_1 = -\frac{c_0}{4}$$

$$x^4\text{ضریب}: \qquad 10c_2 + c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{c_0}{40}$$

$$x^{n+3}\text{ضریب}: \qquad (n+4)(n+1)c_{n+1} + c_n = 0 \Rightarrow c_{n+1} = \frac{c_n}{(n+4)(n+1)}$$

لذا جواب اول معادله با انتخاب $c_0 = 1$ به صورت زیر می باشد:

$$y = x^3(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{720} + \ldots)$$

جواب دوم را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y_2 = ky_1 \ln x + x^0 \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$$

y_2' و y_2'' را حساب می نماییم،

$$y_2' = ky_1' \ln x + ky_1 \frac{1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m a_m x^{m-1}$$

$$y_2'' = ky_1'' \ln x + 2ky_1' \frac{1}{x} - \frac{ky_1}{x^2} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2}$$

با جایگذاری y_2 ، y_2' و y_2'' در معادله دیفرانسیل (۱) داریم:

$$(xy_1'' - 2y_1' + y_1)k \ln x + 2ky_1' - 3\frac{ky_1}{x} + \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

چون y_1 جواب معادله است، ضریب $k \ln x$ صفر است. بنابراین:

$$2k(3x^2 - x^3 + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{120} + \ldots) - 3k(x^2 - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{720} + \ldots)$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} m(m-3) a_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = 0$$

با مساوی قرار دادن ضرایب داریم:

$$y_2 = -\frac{a_0}{12} y_1 \ln x + a_0(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^4}{4} - \ldots) + a_3 x^3 (1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{40} + \ldots)$$

بنابراین جواب عمومی عبارتست از: $y = Ay_1 + By_2$.

تمرین ۱۰ جواب عمومی معادلات زیر را بدست آورید.

(۱) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$

(۲) $5x^2 y'' + xy' - (1 - x^3)y = 0$

(۳) $3x^2 y'' + x(2 - x)y' - (2 + x^2)y = 0$

فصل ۶

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

۱.۶ مقدمه

فرض می کنیم y_1، y_2،... ، y_n توابعی از یک متغیر مستقل x باشند. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل را خطی گوییم، اگر هر یک از معادلات دستگاه، یک معادله دیفرانسیل خطی باشد. در این فصل طریقه ی حل دستگاه معادلات خطی با ضرایب ثابت را از دو روش حذفی و اپراتوری ارائه می دهیم.

۲.۶ روش حذفی

در این روش با حذف کردن تابع های مجهول و مشتقات این توابع، معادله ای بدست می آوریم که فقط شامل یک تابع مجهول ومشتقات آن باشد و با حل این معادله، یکی از توابع مجهول بدست می آید و سپس سایر تابع های مجهول را بدست می آوریم.

مثال ۱.۲.۶ *دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.*

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 5y_2 \quad (1) \\ \\ y_2' = 5y_1 - 6y_2 \quad (2) \end{cases}$$

ابتدا از یکی از معادلات دستگاه مثلاً (۱)، y_2 را بدست آورده و یک بار مشتق می گیریم.

$$y_2 = \frac{2}{5}y_1 - \frac{1}{5}y_1' \quad (3) \quad \Rightarrow \quad y_2' = \frac{2}{5}y_1' - \frac{1}{5}y_1'' \quad (4)$$

در (۲) به جای y_2' از (۴) و به جای y_2 از (۳) قرار می دهیم، بنابراین،

$$y_1'' + 4y_1' + 13y_1 = 0 \quad (5)$$

(۵) یک معادله ی دیفرانسیل خطی همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. این معادله را حل می نماییم و y_1 را بدست می آوریم.

$$t^2 + 4t + 13 = 0 \Rightarrow t = -2 \pm 3i \Rightarrow y_1 = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \quad (6)$$

از (۶) ، y_1' را بدست می آوریم.

$$y_1' = -2e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + e^{-2x}(-3c_1\sin 3x + 3c_2\cos 3x)$$

y_1 و y_1' را در (۳) جایگذاری می نماییم و y_2 را بدست می آوریم.

$$y_2 = \frac{1}{5}e^{-2x}((4c_1 - 3c_2)\cos 3x + (3c_1 + 4c_2)\sin 3x)$$

مثال ۲.۲.۶ دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} y_1'' + 2y_1 + 4y_2 = e^x & (1) \\ \\ y_2'' - y_1 - 3y_2 = -x & (2) \end{cases}$$

ابتدا از معادله ی (۱)، y_2 را بدست آورده و دو بار مشتق می گیریم.

$$y_2 = -\frac{1}{4}y_1'' - \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{4}e^x \quad (3) \qquad \Rightarrow y_2'' = -\frac{1}{4}y_1^{(4)} - \frac{1}{2}y_1'' + \frac{1}{4}e^x \quad (4)$$

در (۲) به جای y_2'' از (۴) و به جای y_2 از (۳) جایگذاری می نماییم و لذا داریم،

$$y_1^{(4)} - y_1'' - 2y_1 = 4x - 2e^x \Rightarrow t^4 - t^2 - 2 = (t^2+1)(t^2-2) = 0 \Rightarrow t = \pm i, t = \pm\sqrt{2}$$

$$y_1 = c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}} + c_3\cos x + c_4\sin x + e^x - 2x$$

از این معادله y_1'' را بدست آورده و y_1 و y_1'' را در (۳) جایگذاری می نماییم.

$$y_2 = -c_1e^{x\sqrt{2}} - c_2e^{-x\sqrt{2}} - \frac{c_3}{4}\cos x - \frac{c_4}{4}\sin x - \frac{1}{2}e^x + x$$

۳.۶ روش تبدیل لاپلاس

در این روش از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس گرفته و سپس با استفاده از روش حذفی توابع مجهول را بدست می آوریم.

مثال ۱.۳.۶ دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad , \quad x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 0$$

از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می گیریم،

$$\begin{cases} \pounds(x') = -\pounds(y) \\ \\ \pounds(y') = \pounds(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX - x(0) = -Y \\ \\ sY - y(0) = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX - 1 = -Y \\ \\ sY = X \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} sX - 1 = -Y \\ \\ s^2Y - sX = 0 \end{cases} \Rightarrow s^2Y + Y = 1 \Rightarrow Y = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\pounds^{-1}(Y) = \pounds^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) \Rightarrow y(t) = \sin t$$

با جایگذاری $Y = \frac{1}{s^2+1}$ در معادله ی $sY = X$ داریم:

$$X = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow \pounds^{-1}(X) = \pounds^{1}(\frac{s}{s^2+1}) \Rightarrow x(t) = \cos t$$

مثال ۲.۳.۶ دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} x' + y = 2\sin t \\ y' + x = \cos t \end{cases} \quad , \quad x(0) = y(0) = 0$$

از معادلات دستگاه تبدیل لاپلاس می گیریم،

$$\begin{cases} \pounds(x') + \pounds(y) = 2\pounds(\sin t) \\ \\ \pounds(y') + \pounds(x) = \pounds(\cos t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\pounds(x) - x(0) + \pounds(y) - y(0) = \frac{2}{s^2+1} \\ \\ s\pounds(y) - y(0) + \pounds(x) - x(0) = \frac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} sX + Y = \frac{2}{s^2+1} \\ \\ sY + X = \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -s^2X - sY = -\frac{2s}{s^2+1} \\ \\ sY + X = \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow X(1-s^2) = -\frac{s}{s^2+1}$$

$$X = \frac{s}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 0 \Rightarrow X = \frac{\frac{1}{4}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}}{s^2+1}$$

$$\pounds^{-1}(X) = \frac{1}{4}\pounds^{-1}(\frac{1}{s-1}) + \frac{1}{4}\pounds^{-1}(\frac{1}{s+1}) - \frac{1}{2}\pounds^{-1}(\frac{1}{s^2+1})$$

$$x = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t \Rightarrow x' = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t$$

x' را در معادله ی $x' + y = 2\sin t$ قرار می دهیم،

$$y = 2\sin t + \frac{1}{4}(e^{-t} - e^t) + \frac{1}{2}\cos t$$

۴.۶ روش اپراتورها

مثال ۱.۴.۶ دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x - 3y = 2e^{2t} \quad (1) \\ \\ -x + \frac{dy}{dt} - 4y = 3e^{2t} \quad (2) \end{cases}$$

با استفاده از نماد $D = \frac{d}{dt}$ داریم:

$$\begin{cases} (D-2)x - 3y = 2e^{2t} \\ \\ -x + (D-4)y = 3e^{2t} \end{cases}$$

با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2e^{2t} & -3 \\ 3e^{2t} & D-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} D-2 & -3 \\ -1 & D-4 \end{vmatrix}} = \frac{2(D-4)e^{2t}+9e^{2t}}{D^2-6D+5} = \frac{4e^{2t}-8e^{2t}+9e^{2t}}{D^2-6D+5} = \frac{5e^{2t}}{D^2-6D+5}$$

بنابراین: $(3)\quad (D^2-6D+5)x = 5e^{2t}$. این معادله را حل می نماییم.

$$(D-1)(D-5)=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=5 \Rightarrow y_c = c_1e^t + c_2e^{5t}$$

$$(D-5)x = V_1 \Rightarrow (D-1)V_1 = 5e^{2t} \Rightarrow V_1 = e^t\int e^{-t}.(5e^{2t})dt = 5e^t\int e^t dt = 5e^{2t}$$

با جایگذاری مقدار V_1 داریم:

$$(D-5)x = 5e^{2t} \Rightarrow x = e^{5t}\int e^{-5t}.(5e^{2t})dt = 5e^t\int e^{-3t}dt = 5e^{5t}.(-\frac{1}{3}e^{-3t}) \Rightarrow x = -\frac{5}{3}e^{2t}$$

بنابراین: $x = c_1e^t + c_2e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t}$. به همین ترتیب،

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-2 & 2e^{t} \\ -1 & 3e^{2t} \end{vmatrix}}{D^2-6D+5} = \frac{3(D-2)e^{2t}+2e^{2t}}{D^2-6D+5} = \frac{6e^{2t}-6e^{2t}+2e^{2t}}{D^2-6D+5} = \frac{2e^{2t}}{D^2-6D+5}$$

بنابراین داریم:

$$(D^2-6D+5)y = 2e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y = Ae^t + Be^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}$$

c_1 ، c_2 ، A و B مستقل نیستند و می توان دو تای آنها را بر حسب دو تای دیگر بدست آورد، مثلاً با جایگذاری x ، x' و y در (۱) داریم:

$$c_1e^t + 5c_2e^{5t} - \frac{10}{3}e^{2t} - 2c_1e^t - 2c_2e^{5t} + \frac{10}{3}e^{2t} - 3Ae^t - 3Be^{5t} + 2e^{2t} = 2e^{2t}$$

$$\begin{cases} -c_1 - 3A = 0 \\ 3c_2 - 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -3A \quad , \quad c_2 = B$$

بنابراین جوابها به صورت زیر می باشد،

$$x = -3Ae^t + Be^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t} \quad , \quad y = Ae^t + Be^{5t} - \frac{2}{3}e^{2t}$$

مثال ۲.۴.۶ دستگاه معادلات زیر را حل نمایید.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y - x = e^t + 1 \\ \\ \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} + z + 2y = e^t + 2 \\ \\ \frac{dz}{dt} + \frac{dx}{dt} - x + z = e^t + 3 \end{cases}$$

ابتدا دستگاه را به فرم اپراتوری می نویسیم.

$$\begin{cases} (D-1)x+(D+2)y=e^t+1 \\ (D+2)y+(D+1)z=e^t+2 \\ (D-1)x+(D+1)z=e^t+3 \end{cases}$$

دترمینال ضرایب را محاسبه می نماییم.

$$\Delta = \begin{vmatrix} D-1 & D+2 & 0 \\ 0 & D+2 & D+1 \\ D-1 & 0 & D+1 \end{vmatrix} = 2(D+2)(D+1)(D-1)$$

با استفاده از دستور کرامر داریم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e^t+1 & D+2 & 0 \\ e^t+2 & D+2 & D+1 \\ e^t+3 & 0 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{(D+1)(D+2)(e^t+2)}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t+2}{2(D-1)}$$

$$2(D-1)x = e^t+2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} - x = 1+\frac{1}{2}e^t \quad (1)$$

معادله ی (۱) خطی مرتبه اول است و جواب آن عبارتست از:

$$\mu(t) = e^{\int -dt} = e^{-t} \Rightarrow x = \frac{1}{e^{-t}}\int e^{-t}(1+\frac{1}{2}e^t)dt = e^t\int (e^{-t}+\frac{1}{2})dt$$

$$\Rightarrow x = e^t(-e^{-t}+\frac{1}{2}t+c_1) = \frac{t}{2}e^t - 1 + c_1e^t$$

به همین ترتیب y و z را محاسبه می نماییم.

$$y = \frac{\begin{vmatrix} D-1 & e^t+1 & 0 \\ 0 & e^t+2 & D+1 \\ D-1 & e^t+3 & D+1 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{(D-1)(D+1)e^t}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t}{2(D+2)}$$

$$2(D+2)y = e^t \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt}+2y = \frac{1}{2}e^t$$

$$\mu(t) = e^{\int 2dt} = e^{2t} \Rightarrow y = \frac{1}{e^{2t}}\int e^{2t}.\frac{1}{2}e^t dt = e^{-2t}\int \frac{1}{2}e^{3t}dt$$

$$y = e^{-2t}(\frac{1}{6}e^{3t}+c_2) = \frac{1}{6}e^t + c_2e^{-2t}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} D-1 & D+2 & e^t+1 \\ 0 & D+2 & e^t+2 \\ D-1 & 0 & e^t+3 \end{vmatrix}}{2(D+2)(D+1)(D-1)} = \frac{e^t+4}{2(D+1)}$$

$$2(D+1)z = e^t+4 \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt}+z = \frac{1}{2}e^t+2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{4}e^t+2+c_3e^{-t}$$

تمرین ۱۱ دستگاه های معادلات زیر را حل نمایید.

- $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 - 2y_2 \end{cases}$
- $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 - e^{-x}\sin x \\ y_2' = 4y_1 - y_2 + 2e^{-x}\cos x \end{cases}$
- $\begin{cases} y_1' = y_1 - 5y_2 \quad , \quad y_1(0) = 1 \\ y_2' = 2y_1 - 5y_2 \quad , \quad y_2(0) = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y'' - 4x = -4e^t \\ x'' - x = 3y \end{cases} \qquad , x(0) = 2, x'(0) = 3, y(0) = 1, y'(0) = 2$

ضمیمه

برخی از فرمولهای انتگرالگیری

- فرض کنید a و b اعداد ثابتند آنگاه:

(۱) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

(۲) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

(۳) $\int du = u + c$

(۴) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(۵) $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$

(۶) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

(۷) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + c$

(۸) $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$

(۹) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

- **فرمولهای انتگرال توابع مثلثاتی:**

(۱) $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$

(۲) $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$

(۳) $\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)|+c$

(۴) $\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)|+c$

(۵) $\int \sec^2(ax+b)dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$

(۶) $\int \csc^2(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

(۷) $\int \sec(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax+b)+\tan(ax+b)|+c$

(۸) $\int \csc(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\csc(ax+b)+\cot(ax+b)|+c$

(۹) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+c$

(۱۰) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin(\frac{x}{a})+c$