امتحان میان ترم ریاضی عمومی ۲ رشته های فنی و فیزیک زمان ۱۵–۱۳ دوشنبه ۱۳۹۷/۲/۱۷

---

۱. تابع دو متغیره f با ضابطه زیر را در نظر بگیرید. پیوستگی و مشتقات جزیی این تابع را در مبدا مختصات بررسی کنید. (۱۵ نمره)

$$f(x,y)=\begin{cases}(2x+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

۲. مقادیر ثابت a، b و c را طوری بیابید که مشتق جهتی تابع

$$f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3,$$

در نقطه $(1,2,-1)$ دارای مقدار ماکسیمم ۶۴ در جهت مثبت محور z ها باشد. (۱۰ نمره)

۳. تاب منحنی با معادلات پارامتری

$$\vec{\mathrm{r}}(t)=(t-\sin t)\ \vec{\mathrm{i}}+(1-\cos t)\ \vec{\mathrm{j}}+\sqrt{-t}\ \vec{\mathrm{k}},$$

را در نقطه $t=-3\pi$ محاسبه نمایید. (۵ نمره)

۴. (الف) معادله صفحه مماس بر رویه $z=xe^{y^2}-ye^{x^2}$ را در نقطه $(1,2)$ تعیین کنید، (ب) نقطه ای بر رویه $z=x^2-y^2$ بیابید طوری که صفحه مماس بر آن موازی صفحه معین شده در قسمت (الف) باشد. (۱۰ نمره)

۵. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ نزدیکترین نقاط رویه $z^2-xy=1$ را به مبدا مختصات بیابید. (۱۰ نمره)

۶. فرض کنید $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی حقیقی باشد که دوبار مشتق پذیر است و c را یک عدد حقیقی ثابت در نظر بگیرید. تابع دو متغیره $u(x,y)$ را با ضابطه $u(x,y)=f(x+ct)+f(x-ct)$ تعریف کنید. نشان دهید (۱۰ نمره)

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

1) $f(x,y)=\begin{cases}(2x+y^2)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\times\underbrace{\cos\infty}_{\text{کراندار}} = \boxed{0}$

math-teacher.blog.ir

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta \to \left|(2x+y^2)\cancel{\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}-0\right|<\varepsilon$ Max=1

$\to |2x+y^2|<\varepsilon \to 2|x|+|y^2|<\varepsilon$

$\frac{|x|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}}{|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}} \to 2\sqrt{x^2+y^2}+\ x^2+y^2<\varepsilon \to 2\delta+\delta^2<\varepsilon$

$\to(\delta+1)^2-1<\varepsilon$

$\to \delta<\sqrt{\varepsilon+1}-1$

$\boxed{\text{بنابراین پیوسته است}}$ $f(0,0)=0$ و $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ چون

$f_x(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \to f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$

$\to f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{2\cancel{h}\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)-0}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}2\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)=$ نامشخص $\to$ حد ندارد

بنابراین مشتق جزئی $f_x(0,0)$ $\boxed{\text{وجود ندارد}}$

$f_y(x,y)=\lim_{h\to0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \to f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$

$\to f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{h^{\cancel{2}}\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)-0}{\cancel{h}}=\lim_{h\to0}h\cos\left(\frac{1}{h^2}\right)=0\times$ کراندار $=\boxed{0}$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد ؛
• ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

2) $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ $\quad (1,2,-1)$

a,b,c ؟ ، در جهت مثبت محور z ، $\mathrm{Max}\, D_u f=64$

$\boxed{D_u f=\vec{\nabla} f\cdot\vec{\lambda}_u}$ زیر

math-teacher.blog.ir

$$\vec{\nabla} f=(ay^2+3cz^2x^2,\ 2axy+bz,\ by+2czx^3)\xrightarrow{(1,2,-1)}$$

$$\vec{\nabla} f=(4a+3c,\ 4a-b,\ 2b-2c)$$

$$\vec{\nabla} f\cdot\vec{\lambda}_u=64\longrightarrow(4a+3c,4a-b,2b-2c)\cdot(0,0,1)=64$$

$$\frac{(0,0,z)}{z}=(0,0,1)$$

$$\longrightarrow 2b-2c=64\longrightarrow\boxed{b-c=32}\ (\mathrm{I})$$

بیشترین مقدار مشتق سوئی در جهت بردار گرادیان رخ می دهد

یعنی گرادیان هم در جهت مثبت محور z است : (موازی آن)

$$\frac{4a+3c}{0}=\frac{4a-b}{0}=\frac{2b-2c}{1}\longrightarrow\begin{cases}4a+3c=0\\4a-b=0\end{cases}\xrightarrow{\text{تفریق}}\boxed{3c+b=0}\ (\mathrm{II})$$

$$\xrightarrow[\text{تفریق}]{\mathrm{I},\mathrm{II}}-4c=32\longrightarrow\boxed{c=-8}\xrightarrow{3c+b=0}\boxed{b=24}\xrightarrow{4a-b=0}\boxed{a=6}$$

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد ؛
• ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
• ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

ابرهمیشه ماه مهربان _ اردیبهشت ۹۷

[پیام آخرمو یادتونه ، گفتم "همه مدلش" !]

3) $\vec{r} = (t - \sin t \ , 1 - \cos t \ , \sqrt{-t}\ ) \qquad t = -3\pi$

$$\vec{V} = (1 - \cos t, \sin t, -\tfrac{1}{2}(-t)^{-1/2}) \xrightarrow{t=-3\pi} (2, 0, -\tfrac{1}{2}(3\pi)^{-1/2})$$

$$\vec{a} = (\sin t, \cos t, -\tfrac{1}{4}(-t)^{-3/2}) \longrightarrow (0, -1, -\tfrac{1}{4}(3\pi)^{-3/2})$$

$$\vec{a}' = (\cos t, -\sin t, -\tfrac{3}{8}(-t)^{-5/2}) \longrightarrow (-1, 0, -\tfrac{3}{8}(3\pi)^{-5/2})$$

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{array}{ccc} i & j & k \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -\tfrac{1}{2}(3\pi)^{-1/2} \\ 0 & -1 & -\tfrac{1}{4}(3\pi)^{-3/2} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{1}{2}(3\pi)^{-1/2}, \tfrac{1}{2}(3\pi)^{-3/2}, -2\right)$$

$$\boxed{\tau = \frac{(V \times a) \cdot a'}{|V \times a|^2}}$$ فرمول

$$|V \times a| = \sqrt{\tfrac{1}{4}(3\pi)^{-1} + \tfrac{1}{4}(3\pi)^{-3} + 4}$$

$$\tau = \frac{\left(-\tfrac{1}{2}(3\pi)^{-1/2}, \tfrac{1}{2}(3\pi)^{-3/2}, -2\right) \cdot \left(-1, 0, -\tfrac{3}{8}(3\pi)^{-5/2}\right)}{\tfrac{1}{4}(3\pi)^{-1} + \tfrac{1}{4}(3\pi)^{-3} + 4}$$

$$\boxed{\tau = \frac{\tfrac{1}{2}(3\pi)^{-1/2} + \tfrac{3}{4}(3\pi)^{-5/2}}{\tfrac{1}{4}(3\pi)^{-1} + \tfrac{1}{4}(3\pi)^{-3} + 4}}$$

ابراهیم شاه ابراهیمی - اردیبهشت ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد ؛

4) $z = xe^{y^2} - ye^{x^2}$

$(1,2)$ معادله صفحه مماس ؟

برای نوشتن معادله صفحه: $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ به نقطه و بردار نرمال نیاز داریم.

نقطه رو که سوال داده.

بردار عمود بر سطح هم که همیشه همون «گرادیان» [پیام آخر رو یادتونه، مفهوم گرادیان رو بلد باشین !]

$$g: z - xe^{y^2} + ye^{x^2} = 0 \longrightarrow \vec{\nabla} g = \left(-e^{y^2} + 2xye^{x^2} \,,\, -2xye^{y^2} + e^{x^2} \,,\, 1\right)$$

$$\xrightarrow{(1,2)} \vec{\nabla} g = (\underbrace{-e^4 + 4e}_{a} \,,\, \underbrace{-4e^4 + e}_{b} \,,\, \underbrace{1}_{c})$$

$$\xrightarrow{\text{معادله صفحه}} \boxed{(-e^4+4e)(x-1) + (-4e^4+e)(y-2) + 1\,(z - (e^4 - 2e)) = 0}$$

z_0 ← نحوه یافتن *

$$* \; z = xe^{y^2} - ye^{x^2} \xrightarrow[(1,2)]{} z = e^4 - 2e$$

5) $z^2 - xy = 1$ $\quad$ هدف $= \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

تابع لاگرانژ : $L = x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-1)$

$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial x}=0} 2x-\lambda y=0 \rightarrow \lambda=\frac{2x}{y}$

$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial y}=0} 2y-\lambda x=0 \rightarrow \lambda=\frac{2y}{x}$

$\rightarrow \frac{2x}{y}=\frac{2y}{x} \rightarrow y^2=x^2 \rightarrow \boxed{y=\pm x}^{*}$

$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial z}=0} 2z+2\lambda z=0 \rightarrow \lambda=-1$

$\xrightarrow{\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0} z^2-xy-1=0 \xrightarrow[y=\pm x]{*} \begin{cases} z^2-x^2-1=0 \\ z^2+x^2-1=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 2z^2-2=0$

$\rightarrow z^2=1$

$\rightarrow \boxed{z=\pm 1}$

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در شرط}} 1-xy-1=0 \rightarrow xy=0 \xrightarrow{y=\pm x} \pm x^2=0 \rightarrow \underline{x=0} \rightarrow \boxed{y=0}$

بنابراین نقاط اکسترمم برابر (۱و۰و۰) و (۱-و۰و۰) هستند.

$\xrightarrow{\text{جایگذاری در هدف}} d=\sqrt{0^2+0^2+(\pm1)^2}=\boxed{1}$

ابراهیم شاه ابراهیمی _ اردیبهشت ۹۷

کارشناس ارشد مهندسی عمران

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مدرس تخصصی دانشگاه و کنکور ارشد ؛

- ریاضی۱و۲ ، معادلات دیفرانسیل
- ریاضی مهندسی ، محاسبات عددی

6) $u(x,y) = f_1(x+cy) + f_2(x-cy)$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$ اثبات:

math-teacher.blog.ir

سمت چپ $\longrightarrow$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial f_1} \times \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial f_2} \times \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_1'(x+cy) \times 1 + f_2'(x-cy) \times 1\right)$$

$$= \boxed{f_1''(x+cy) + f_2''(x-cy)}$$

سمت راست $\longrightarrow$ $$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial f_1} \times \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial f_2} \times \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(f_1'(x+cy) \times c + f_2'(x-cy) \times (-c)\right)$$

$$= c f_1''(x+cy) \times c + (-c) f_2''(x-cy) \times (-c)$$

$$= c^2 f_1''(x+cy) + c^2 f_2''(x-cy)$$

$$= \boxed{c^2\left[f_1''(x+cy) + f_2''(x-cy)\right]}$$

این همه شاهکارها را اوردی بجاش ؟

برای مثال هم می‌توانستیم تابع $u = e^{x+cy} + e^{x-cy}$ را نشان دهیم

$$u_{xx} = e^{x+cy} + e^{x-cy}$$

$$u_{yy} = c^2 e^{x+cy} + c^2 e^{x-cy} = c^2\left[e^{x+cy} + e^{x-cy}\right] \mapsto c^2 u_{xx} = u_{yy}$$

به همین سادگی :)