تام م. آپوستل

مرکز نشر دانشگاهی

حساب دیفرانسیل و انتگرال

جلد اول

ترجمهٔ
علیرضا ذکائی
مهدی رضائی دلفی
علی اکبر عالم‌زاده
فرخ فیروزان

۲

برخی از کاربردهای انتگرالگیری

۱.۲ مقدمه

در بخش ۱۸.۱ مساحت مجموعهٔ عرضی یک تابع نامنفی را بصورت انتگرال بیان‌کردیم. در این فصل نشان خواهیم داد که مساحتهای نواحی کلیتر را نیز می‌توان بشکل انتگرال بیان نمود. همچنین کاربردهای دیگر انتگرال را در رابطه با مفاهیمی چون حجم، کار، و میانگینها مورد بحث قرار می‌دهیم. بعد، در پایان فصل، به بررسی خواص تابعهائی خواهیم پرداخت که با انتگرالها تعریف می‌شوند.

۲.۲ مساحت ناحیهٔ بین دو نمودار که بصورت انتگرال بیان شده است

اگر دو تابع f و g با نامساوی $f(x) \leqslant g(x)$، بازای هر x دربازهٔ $[a, b]$، بهم مربوط

شکل ۱.۲ مساحت ناحیهٔ بین دو نمودار که بصورت انتگرال بیان شده است؛

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx.$$

شده باشند می‌نویسیم $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ است. شکل ۱۰۲ دومثال را نشان می‌دهد. چنانچه $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ باشد مجموعهٔ S مرکب از کلیهٔ نقاط (x, y) صادق در نامساویهای

$$f(x) \leqslant y \leqslant g(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$$

را ناحیهٔ بین نمودارهای f و g می‌خوانند. قضیهٔ زیر به ما می‌گوید که چگونه مساحت S را بصورت انتگرال بیان کنیم.

قضیهٔ ۱.۲. فرض‌کنیم f و g بر $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ باشد، دراینصورت ناحیهٔ S بین نمودار های آنها اندازه پذیر است و مساحتش $a(S)$ با انتگرال

$$a(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \qquad (۱۰۲)$$

داده می‌شود.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم f و g، مثل شکل ۱۰۲(الف)، نامنفی باشند. F و G را مجموعه‌های زیر می‌انگاریم:

$$F = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y < f(x)\},$$
$$G = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant g(x)\}.$$

یعنی G مجموعهٔ عرضی g و F مجموعهٔ عرضی f منهای نمودار f می‌باشد. ناحیهٔ S بین نمودارهای f و g تفاضل $S = G - F$ خواهد بود. بنابر قضایای ۱۰۰۱ و ۱۱۰۱ هر دوی F و G اندازه پذیرند. چون $F \subseteq G$ تفاضل $S = G - F$ نیز اندازه پذیر است و داریم

$$a(S) = a(G) - a(F) = \int_a^b g(x)\, dx$$
$$- \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

این (۱۰۲) را وقتی f و g نامنفی باشند ثابت می‌کند.

اکنون حالت کلی را که $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ است ولی f و g لزوماً نامنفی نیستند در نظر می‌گیریم. مثالی در شکل ۱۰۲(ب) نموده شده است. این حالت را می‌توانیم به وضعیت قبلی تحویل کنیم باین صورت که ناحیه را آنقدر بطرف بالا می‌لغزانیم تا دربالای محور x قرارگیرد. یعنی عدد مثبتی مثل c را آنقدر بزرگ اختیار می‌کنیم تا مطمئن شویم‌که بازای هر x در $[a, b]$، $0 \leqslant f(x) + c \leqslant g(x) + c$. بنابرآنچه پیشتر ثابت کرده‌ایم ناحیهٔ جدید T بین نمودارهای $f + c$ و $g + c$ اندازه پذیر است و مساحتش با انتگرال زیر داده می‌شود:

$$a(T) = \int_a^b [(g(x) + c) - (f(x) + c)]\, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

اما T با S همنهشت است؛ پس S نیز اندازه پذیر بوده و خواهیم داشت

$$a(S) = a(T) = \int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx.$$

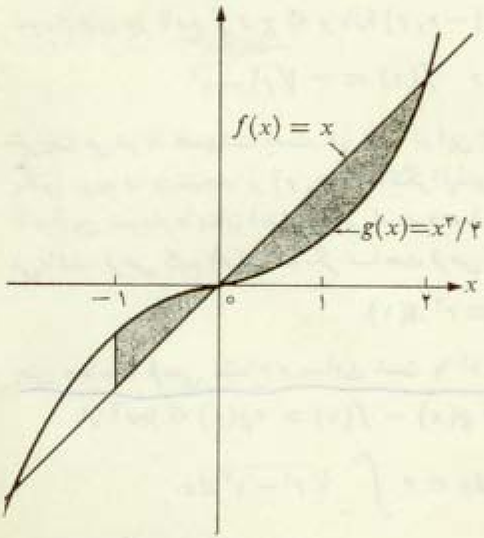
این برهان را کامل خواهد کرد.

۳.۲ مثالهای حل شده

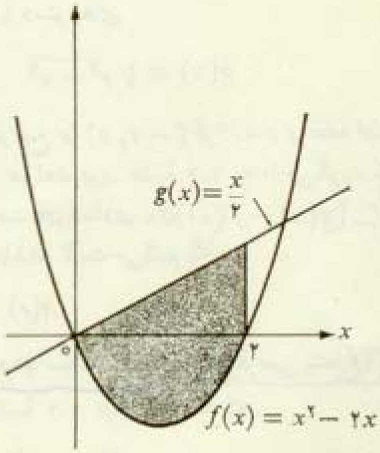
مثال ۱. مساحت ناحیهٔ S بین نمودارهای f و g روی بازهٔ $[0, 2]$ را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x(x - 2)$ و $g(x) = x/2$.

حل. دو نمودار در شکل ۲.۲ نشان داده شده‌اند. قسمت سایه‌دار نمایشگر S است. چون $f \leqslant g$ روی بازهٔ $[0, 2]$ است پس از قضیهٔ ۱.۲ استفاده کرده می‌نویسیم

$$a(S) = \int_0^2 [g(x) - f(x)]\, dx = \int_0^2 \left(\frac{5}{2}x - x^2\right) dx = \frac{5}{2}\frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} = \frac{7}{3}.$$



شکل ۳.۲ مثال ۲.



شکل ۲.۲ مثال ۱.

مثال ۲. مساحت ناحیهٔ S بین نمودارهای f و g روی بازهٔ $[-1, 2]$ را درصورتی حساب کنید که $f(x) = x$ و $g(x) = x^3/4$.

$k = 1/r$ بدست می‌آوریم که

$$A(r) = 2\int_{-r}^{r} g(x)\,dx = 2r\int_{-1}^{1} g(rx)\,dx = 2r\int_{-1}^{1}\sqrt{r^2-(rx)^2}\,dx$$
$$= 2r^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = r^2 A(1).$$

این ثابت می‌کند که $A(r) = r^2 A(1)$، یعنی همان چیزی که ادعا شده بود.

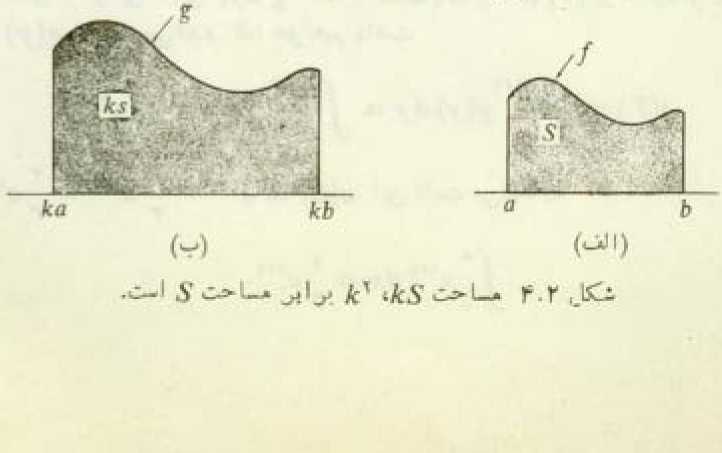
تعریف. عدد π را مساوی مساحت یک قرص یکه تعریف می‌کنیم.

دستوری که هم‌اکنون ثابت شد مبین آن است که $\boxed{A(r) = \pi r^2}$.

مثال پیشگفته رفتار مساحت را تحت انبساط یا انقباض ناحیه‌های مسطح نشان می‌دهد. فرض کنیم S مجموعهٔ معینی از نقاط در صفحه باشد، و مجموعهٔ جدیدی از نقاط را درنظر می‌گیریم که از ضرب مختصات هرنقطهٔ S در سازهٔ ثابتی چون $k > 0$ بدست می‌آیند. این مجموعه را با kS نموده و می‌گوئیم با S متشابه است. فرایندی که با آن kS از S حاصل می‌شود یک تبدیل تشابه نام دارد. هر نقطه در امتداد خطی راست‌که از مبدأگذشته باندازهٔ k برابر فاصله‌اش تا مبدأ تغییر مکان می‌یابد. اگر $k > 1$ تبدیل را یک‌کشش یا یک‌انبساط (از مبدأ) و، چنانچه $0 < k < 1$، آن را یک کاهش یا یک انقباض (بطرف مبدأ) می‌خوانند.

بعنوان مثال، هرگاه S ناحیهٔ محدود به دایرهٔ یکه بمرکز مبدأ باشد، آنگاه kS یک ناحیهٔ مستدیر با همان مرکز و بشعاع k خواهد بود. در مثال ۳ نشان دادیم‌که، برای‌نواحی مستدیر، مساحت kS، k^2 برابر مساحت S می‌باشد. حال ثابت می کنیم این‌خاصیت مساحت در مورد هر مجموعهٔ عرضی برقرار است.

مثال ۴. رفتار مساحت یک مجموعهٔ عرضی تحت تبدیل تشابه. فرض می‌کنیم f بر $[a, b]$ نامنفی و انتگرالپذیر بوده و S مجموعهٔ عرضی آن باشد. مثالی در شکل ۴.۲(الف) نموده شده است. هرگاه یک تبدیل تشابه را با سازهٔ مثبت k بکار بریم آنگاه kS مجموعهٔ عرضی تابع جدیدی، مثلاً g، روی بازهٔ $[ka, kb]$ خواهدبود. [ر.ک.



شکل ۴.۲ مساحت kS، k^2 برابر مساحت S است.

شکل ۴.۲ (ب).] نقطهٔ (x, y) روی نمودار g است اگر و فقط اگر نقطهٔ $(x/k, y/k)$ روی نمودار f باشد. از اینرو $y/k = f(x/k)$، درنتیجه $y = kf(x/k)$. بعبارت دیگر، تابع جدید g با دستور

$$g(x) = kf(x/k),$$

بازای هر x در $[ka, kb]$، به f مربوط می‌شود. بنابراین، مساحت kS بدین صورت‌داده می‌شود:

$$a(kS) = \int_{ka}^{kb} g(x)\,dx = k\int_{ka}^{kb} f(x/k)\,dx = k^2\int_a^b f(x)\,dx,$$

که در آخرین مرحله از خاصیت انبساط برای انتگرالها (قضیهٔ ۱۹.۱) استفاده کردیم. چون $\int_a^b f(x)dx = a(S)$ این ثابت می‌کند که $a(kS) = k^2 a(S)$. بعبارت دیگر، مساحت kS، k^2 برابر مساحت S است.

مثال ۵. محاسبهٔ انتگرال $\int_0^a x^{1/2}dx$. انتگرال در مورد مساحت تیغی دو دم است. اگرچه ما معمولاً برای محاسبهٔ مساحات از انتگرال بهره می‌گیریم اما گاهی هم می‌توانیم برای محاسبهٔ انتگرالها از اطلاعات خود در باب مساحت استفاده کنیم. این موضوع را با محاسبهٔ مقدار انتگرال $\int_0^a x^{1/2}dx$، که در آن $a > 0$، روشن می‌کنیم. (این انتگرال وجود دارد زیرا انتگرالده بر $[0, a]$ صعودی و کراندار است.)

شکل ۵.۲ نمودار تابع f را که با $f(x) = x^{1/2}$ روی بازهٔ $[0, a]$ داده شده نشان می‌دهد. مجموعهٔ عرضی آن S مساحتی دارد که با

$$a(S) = \int_0^a x^{1/2}\,dx$$

داده می‌شود. حال این مساحت را بطریقی دیگر حساب می‌کنیم. کافی است ملاحظه کنیم که ناحیهٔ S و ناحیهٔ سایه‌دار T درشکل ۵.۲ باهم‌مستطیلی بقاعدهٔ a وارتفاع $a^{1/2}$ را پرمی‌کنند. بنابراین $a(S) + a(T) = a^{3/2}$، پس داریم

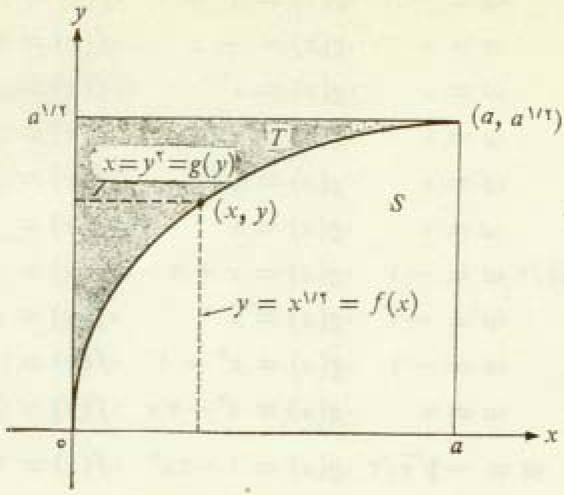
$$a(S) = a^{3/2} - a(T).$$

اما T مجموعهٔ عرضی تابعی چون g است که روی بازهٔ $[0, a^{1/2}]$ بر محور y با معادلهٔ $g(y) = y^2$ تعریف می‌شود. لذا خواهیم داشت

$$a(T) = \int_0^{a^{1/2}} g(y)\,dy = \int_0^{a^{1/2}} {}^2\,dy = y\frac{1}{3}a^{3/2},$$

پس $a(S) = a^{3/2} - \frac{1}{3}a^{3/2} = \frac{2}{3}a^{3/2}$. این ثابت می‌کند که

$$\int_0^a x^{1/2}\,dx = \frac{2}{3}a^{3/2}.$$



شکل ۵.۲ مجاسبهٔ انتگرال $\int_0^a x^{1/2}dx$.

در حالت کلیتر، اگر $a > 0$ و $b > 0$، می‌توانیم از خاصیت جمعپذیری انتگرال استفاده کرده و دستور

$$\int_a^b x^{1/2}\, dx = \frac{2}{3}(b^{3/2} - a^{3/2})$$

را بدست آوریم.

استدلال پیشگفته را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال $\int_a^b x^{1/n}dx$، وقتی n عدد صحیح مثبتی است، نیز بکارگرفت. ما این نتیجه را بعنوان یک قضیه ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۲.۲. بازای $a > 0$، $b > 0$، و عدد صحیح و مثبت n، داریم

$$\int_a^b x^{1/n}\, dx = \frac{b^{1+1/n} - a^{1+1/n}}{1 + 1/n}. \qquad (2.2)$$

برهان این قضیه آنقدر شبیه برهان مثال ۵ است‌که ما آوردن جزئیاتش را به‌خواننده وامی گذاریم.

۴.۲ تمرینات

در تمرینات ۱ تا ۱۴، در هرحالت، مساحت ناحیهٔ S را که بین نمودارهای f و g روی بازهٔ $[a, b]$ قرار دارد حساب کنید. دو نمودار را بکشید و S را با سایه مشخص نمائید.

۱. $f(x) = 4 - x^2$، $g(x) = 0$، $a = -2$، $b = 2$.

۲. $f(x) = 4 - x^2$، $g(x) = 8 - 2x^2$، $a = -2$، $b = 2$.

۳. $f(x)=x^3+x^2$، $g(x)=x^3+1$، $a=-1$، $b=1$.

۴. $f(x)=x-x^2$، $g(x)=-x$، $a=0$، $b=2$.

۵. $f(x)=x^{1/3}$، $g(x)=x^{1/2}$، $a=0$، $b=1$.

۶. $f(x)=x^{1/3}$، $g(x)=x^{1/2}$، $a=1$، $b=2$.

۷. $f(x)=x^{1/3}$، $g(x)=x^{1/2}$، $a=0$، $b=2$.

۸. $f(x)=x^{1/2}$، $g(x)=x^2$، $a=0$، $b=2$.

۹. $f(x)=x^2$، $g(x)=x+1$، $a=-1$، $b=(1+\sqrt{5})/2$.

۱۰. $f(x)=x(x^2-1)$، $g(x)=x$، $a=-1$، $b=\sqrt{2}$.

۱۱. $f(x)=|x|$، $g(x)=x^2-1$، $a=-1$، $b=1$.

۱۲. $f(x)=|x-1|$، $g(x)=x^2-2x$، $a=0$، $b=2$.

۱۳. $f(x)=2|x|$، $g(x)=1-3x^3$، $a=-\sqrt{3}/3$، $b=\frac{1}{3}$.

۱۴. $f(x)=|x|+|x-1|$، $g(x)=0$، $a=-1$، $b=2$.

۱۵. نمودارهای $f(x)=x^2$ و $g(x)=cx^3$، که در آن $c>0$، در نقاط $(0,0)$ و $(1/c, 1/c^2)$ یکدیگر را قطع می‌کنند. c را طوری بیابید که مساحت ناحیه‌ای که بین این نمودارها و روی بازهٔ $[0, 1/c]$ قرار دارد $2/3$ باشد.

۱۶. فرض کنید $f(x)=x-x^2$ و $g(x)=ax$. a را چنان تعیین کنید که ناحیهٔ بالای نمودار g و پائین نمودار f دارای مساحتی برابر $9/2$ شود.

۱۷. π را مساوی مساحت قرص مستدیر یکه تعریف کرده‌ایم. درمثال ۳ ازبخش ۳.۲ ثابت کردیم که $2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi$. از خواص انتگرال استفاده کرده انتگرالهای زیر را برحسب π محاسبه نمائید:

(الف) $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$ ؛ (ب) $\int_{0}^{2}\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}\,dx$ ؛

(پ) $\int_{-2}^{2}(x-3)\sqrt{4-x^2}\,dx$.

$9\pi/2$ $\pi/2$ -6π

۱۸. مساحتهای دوازده ضلعیهای منتظم را که محاط در و محیط بریک قرص مستدیر یکه‌اند محاسبه کنید و بدینوسیله نامساویهای $3<\pi<12(2-\sqrt{3})$ را نتیجه بگیرید.

۱۹. فرض کنید C نشانگر دایرهٔ یکه باشد که معادلهٔ دکارتی‌اش $x^2+y^2=1$ است. E را مجموعهٔ نقاطی بگیرید که با ضرب مختص x هر نقطهٔ (x, y) واقع بر C درسازهٔ ثابت $a>0$ و مختص y آن در سازهٔ ثابت $b>0$ بدست می‌آیند. مجموعهٔ E یک بیضی نام دارد. (وقتی $a=b$ بیضی دایرهٔ دیگری خواهد بود.)

(الف) نشان دهید که هر نقطهٔ (x, y) واقع بر E در معادلهٔ دکارتی $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ صدق می‌کند.

(ب) از خواص انتگرال استفاده کرده ثابت کنید ناحیه‌ای که این بیضی در برمی‌گیرد اندازه‌پذیر است و مساحتش πab می‌باشد.

۲۰. تمرین ۱۹ تعمیمی از مثال ۳ در بخش ۳.۲ است. تعمیم متناظر مثال ۴ از بخش ۳.۲ را بیان و ثابت کنید.

۲۱. با استفاده از استدلالی شبیه آنکه در مثال ۵ از بخش ۳.۲ شد قضیهٔ ۲.۲ را ثابت نمائید.

۵.۲ توابع مثلثاتی

پیش از آنکه کاربردهای دیگر انتگرالگیری را معرفی‌کنیم کمی از موضوع منحرف می‌شویم تا توابع مثلثاتی را مورد بحث قرار دهیم. فرض می‌کنیم خواننده از خواص شش تابع مثلثاتی سینوس، کسینوس، تانژانت، کتانژانت، سکانت، وکسکانت؛ و معکوسهای آنها، آرک سینوس، آرک کسینوس، آرک تانژانت، و غیره، اطلاعاتی دارد. این توابع در درسهای مقدماتی مثلثات در رابطه با مسائل مختلفی‌که دربارهٔ اضلاع و زوایای مثلثها مطرح می‌شوند مورد بحث قرار می‌گیرند.

توابع مثلثاتی درحساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت دارند؛ این چندان بسبب ارتباط آنها با اضلاع و زوایای مثلث نبوده بلکه تا حدودی بخاطر خواصی است که بعنوان تابع دارا می‌باشند. توابع ششگانهٔ مثلثاتی خاصیت مشترک مهمی دارند که به خاصیت تناوبی معروف است.

تابع f را متناوب با دورهٔ تناوب $p \neq 0$ خوانند اگر که هروقت قلمرو آن حاوی x باشد شامل $x+p$ نیز باشد و، بازای هر x درقلمرو f، $f(x+p) = f(x)$. توابع سینوس و کسینوس متناوب با دورهٔ تناوب 2π هستند که π مساحت قرص مستدیر یکه می‌باشد. بسیاری از مسائل در فیزیک و مهندسی با پدیده‌های متناوب (نظیر ارتعاشات، حرکت سیارات، و حرکت موجی) سروکار دارند، و توابع سینوس وکسینوس پایه‌ای برای تحلیل ریاضی اینگونه مسائل را تشکیل می‌دهند.

توابع سینوس و کسینوس را می‌توان براههای متفاوت بسیاری معرفی کرد. بعنوان مثال، تعاریفی هندسی وجود دارند که تابعهای سینوس و کسینوس را به زوایا مربوط می‌سازند، و تعاریفی تحلیلی هستند که این توابع را بدون هیچگونه ارتباط با هندسه معرفی می‌کنند. تمام این روشها معادلند باین معنی که توابع حاصل ازهمهٔ آنها یکی است.

ما معمولاً وقتی با سینوس وکسینوس کارمی کنیم آنقدرکه به خواص‌حاصل ازتعاریف آنها توجه داریم به خود تعریفها وقعی نمی‌گذاریم. بعضی از این خواص، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ارجی دارند، در زیر ذکر شده‌اند. طبق معمول، مقادیر توابع سینوس و کسینوس در x را بترتیب با $\sin x$ و $\cos x$ نشان می‌دهیم.

خواص اساسی سینوس و کسینوس

۱. قلمرو تعریف. توابع سینوس و کسینوس همه‌جا برخط حقیقی تعریف شده‌اند.

۲. مقادیر خاص. داریم $\cos \pi = -1$ ، $\cos 0 = \sin(\pi/2) = 1$.

۳. کسینوس تفاضل. بازای هر x و y داریم

$$\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x. \qquad (۳.۲)$$

۴. نامساویهای اساسی. بازای $0 < x < \pi/2$ داریم

$$0 < \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} \qquad (۴.۲)$$

از این چهار خاصیت می‌توانیم همهٔ خواص سینوس و کسینوس را که در حساب دیفرانسیل و انتگرال اهمیت دارند نتیجه بگیریم. چنین وضع این فکر را پیش می‌آورد که شاید می‌شد توابع مثلثاتی را بطور اصل موضوعی معرفی کرد. یعنی می‌توانستیم خواص ۱ تا ۴ را بعنوان اصول موضوع برای سینوس و کسینوس اختیار کرده و کلیهٔ خواص دیگر را بعنوان قضایا نتیجه بگیریم. برای اطمینان از اینکه یک نظریهٔ تهی را مطرح نکرده‌ایم لازم است نشان دهیم توابعی هستند که از خاصیتهای بالا بهره‌مندند. ما فعلاً از این مسئله در می‌گذریم. ابتدا فرض می‌کنیم توابعی هستند که این خواص اساسی را دارند و سپس نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان خواص دیگر را نتیجه گرفت. بعد، در بخش ۷.۲، برای تعریف سینوس و کسینوس، یک روش هندسی تعیین می‌کنیم بطوری که توابعی با خواص مطلوب بدست آیند. در فصل ۱۱ نیز، برای معرفی سینوس و کسینوس، یک روش تحلیلی را باختصار توصیف خواهیم نمود.

قضیهٔ ۳.۲. هرگاه دو تابع سینوس و کسینوس خواص ۱ تا ۴ را داشته باشند آنگاه از این خاصیتها نیز برخوردار خواهند بود:

(الف) اتحاد فیثاغورسی. بازای هر x، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

(ب) مقادیر خاص. $\sin 0 = \cos(\pi/2) = \sin \pi = 0$.

(پ) خواص زوج و فرد بودن. کسینوس تابعی زوج وسینوس تابعی فرد است. یعنی بازای هر x داریم

$$\cos(-x) = \cos x, \ \sin(-x) = -\sin x.$$

(ت) روابط متقابل. بازای هر x داریم

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = \cos x, \ \cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) = -\sin x.$$

(ث) خاصیت تناوبی. بازای هر x داریم

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \ \cos(x + 2\pi) = \cos x.$$

(ج) دستورهای جمع. بازای هر x و y داریم

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

(ج) دستورهای تفریق. بازای هر a و b داریم

$$\sin a - \sin b = ۲ \sin \frac{a-b}{۲} \cos \frac{a+b}{۲},$$
$$\cos a - \cos b = -۲ \sin \frac{a-b}{۲} \sin \frac{a+b}{۲}.$$

(ح) خاصیت یکنوائی. سینوس دربازهٔ $[۰, \pi/۲]$ اکیداً صعودی وکسینوس اکیداً نزولی است.

برهان. اگردر (۳.۲) فرض کنیم $y = x$ و از رابطهٔ $۱ = \cos ۰$ استفاده نمائیم قسمت(الف) فوراً نتیجه خواهد شد. خاصیت (ب) از(الف) با اختیار $x = ۰$، $x = \pi/۲$، $x = \pi$، وبکاربردن رابطهٔ $\sin(\pi/۲) = ۱$ بدست می‌آید. خاصیت زوج بودن کسینوس نیز از (۳.۲) با فرض $y = ۰$ نتیجه می‌شود. بعد دستور

$$\cos\left(\frac{۱}{۲}\pi - x\right) = \sin x \tag{۵.۲}$$

را با اختیار $y = \pi/۲$ در (۳.۲) نتیجه می‌گیریم. ازاین و (۳.۲) درمی‌یابیم که سینوس فرد است چونکه

$$\sin(-x) = \cos\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{۲} - x\right)\right]$$
$$= \cos \pi \cos\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) + \sin \pi \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = -\sin x.$$

این (پ) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ت) دوباره از (۵.۲) استفاده کرده، ابتدا x را با $x + \pi/۲$ عوض می‌کنیم، و بعد $-x$ را بجای x می‌گذاریم. سپس چندبار استفاده از (ت) روابط تناوبی (ث) را به ما خواهد داد.

برای اثبات دستور جمع درمورد کسینوس فقط x را در (۳.۲) با $-x$ عوض کرده و از خواص زوج و فرد بودن استفاده می‌کنیم. بعد، با بکارگیری قسمت (ت) و دستورجمع برای کسینوس، بدست می‌آوریم که

$$\sin(x+y) = -\cos\left(x + y + \frac{\pi}{۲}\right) = -\cos x \cos\left(y + \frac{\pi}{۲}\right)$$
$$+ \sin x \sin\left(y + \frac{\pi}{۲}\right) = \cos x \sin y + \sin x \cos y.$$

این(ج) را ثابت می‌کند. برای رسیدن به دستورهای تفریق (چ) ابتدا در دستورجمع برای $\sin(x+y)$، y را با $-y$ عوض می‌کنیم تا بدست آید که

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y.$$

چنانچه این را از دستور برای $\sin(x+y)$ کم کرده و همین کار را برای تابع کسینوس انجام دهیم بدست خواهیم آورد که

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = ۲ \sin y \cos x,$$
$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -۲ \sin y \sin x.$$

با اختیار $x = (a+b)/۲$ و $y = (a-b)/۲$ متوجه می‌شویم‌که اینها بشکل‌دستورهای تفریق (چ) درمی‌آیند.

خواص (الف) تا (چ) فقط از خواص ۱ تا ۳ نتیجه شدند. خاصیت ۴ برای اثبات (ح) بکار می‌رود. نامساویهای (۴.۲) نشان می‌دهند که $\cos x$ و $\sin x$، در صورتی که $۰ < x < \pi/۲$، مثبت‌اند. حال اگر $۰ < b < a < \pi/۲$ اعداد $(a+b)/۲$ و $(a-b)/۲$ در بازهٔ $(۰, \pi/۲)$ قرار دارند، و دستورهای تفریق (چ) نشان می‌دهند که $\sin a > \sin b$ و $\cos a < \cos b$. این برهان قضیهٔ ۳.۲ را کامل می‌کند.

خواص دیگر توابع سینوس و کسینوس در مجموعهٔ تمرینات بعدی (صفحهٔ ۱۳۱) مطرح می‌شوند بویژه، از دو دستور نام می‌بریم که درحساب دیفرانسیل و انتگرال بارها مورد استفاده قرار می‌گیرند. اینها را دستورهای زاویهٔ مضاعف یا دستورهای دو برابر می‌نامند. داریم

$$\sin ۲x = ۲ \sin x \cos x, \cos ۲x = \cos^۲ x - \sin^۲ x = ۱ - ۲ \sin^۲ x.$$

البته اینها صرفاً حالات خاصی ازدستورهای جمع هستندکه با فرض $y = x$ بدست می‌آیند. دستور دوم برای $\cos ۲x$ از دستور اول با استفاده از اتحاد فیثاغورس نتیجه می‌شود. همچنین اتحاد فیثاغورس نشان می‌دهد که بازای هر x، $|\cos x| \leqslant ۱$ و $|\sin x| \leqslant ۱$.

۶.۲ دستورهای انتگرالگیری برای سینوس و کسینوس

خواص یکنوائی قسمت (ح) قضیهٔ ۳.۲ همراه با روابط متقابل و خاصیتهای تناوبی نشان می‌دهند که توابع سینوس و کسینوس برهربازه قطعه قطعه یکنوایند. بنابراین، با چندبار استفاده از قضیهٔ ۱۲.۱، می‌بینیم که سینوس و کسینوس برهربازهٔ متناهی انتگرالپذیر است. حال، با بکاربردن قضیهٔ ۱۴.۱، انتگرالهای آنها را محاسبه خواهیم کرد. در این محاسبه از یک جفت نامساوی استفاده می‌شود که ما آن را بصورت قضیهٔ جداگانه‌ای بیان می‌داریم.

قضیهٔ ۴.۲. اگر $۰ < a \leqslant \pi/۲$ و $n \geqslant ۱$ داریم

$$\frac{a}{n}\sum_{k=۱}^{n} \cos\frac{ka}{n} < \sin a < \frac{a}{n}\sum_{k=۰}^{n-۱} \cos\frac{ka}{n}. \qquad (۶.۲)$$

برهان. نامساویهای (۶.۲) از اتحاد مثلثاتی

$$\text{۲} \sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}} x \sum_{k=\text{۱}}^{n} \cos kx = \sin\left(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)x - \sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x, \qquad (\text{۷.۲})$$

که بازای $\text{۱} \leqslant n$ و هر x حقیقی معتبر است، نتیجه می‌شوند. برای اثبات (۷.۲) از یکی از دستورهای تفریق (ج) در قضیهٔ ۳.۲ استفاده کرده می‌نویسیم

$$\text{۲} \sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}} x \cos kx = \sin\left(k+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)x - \sin\left(k-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)x.$$

با اختیار $k = \text{۱}, \text{۲}, \ldots, n$ و افزودن این معادلات بهم درمی‌یابیم کـه مجموع طرف راست توی هم می‌رود و ما (۷.۲) را بدست می‌آوریم.

اگر $x/\text{۲}$ مضرب صحیحی از π نباشد می‌توانیم دوطرف (۷.۲) را بر $\text{۲}\sin(x/\text{۲})$ تقسیم کنیم تا بدست آید که

$$\sum_{k=\text{۱}}^{n} \cos kx = \frac{\sin\left(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)x - \sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x}{\text{۲}\sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x}.$$

چنانچه n را با $n-\text{۱}$ عوض‌کرده و ۱ را به طرفین رابطهٔ حاصل بیفزائیم نیزخواهیم داشت

$$\sum_{k=\text{۰}}^{n-\text{۱}} \cos kx = \frac{\sin\left(n-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)x + \sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x}{\text{۲}\sin\frac{\text{۱}}{\text{۲}}x}.$$

هردوی این دستورها وقتی معتبرند کـه بازای هرعدد صحیح m، $x \neq \text{۲}m\pi$. بـا فرض $x = a/n$، که درآن $\text{۰} < a \leqslant \pi/\text{۲}$، متوجه می‌شویم کـه دو نامساوی (۶.۲) معادل دو نامساوی

$$\frac{a}{n}\,\frac{\sin\left(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)\frac{a}{n} - \sin\left(\frac{a}{\text{۲}n}\right)}{\text{۲}\sin\left(\frac{a}{\text{۲}n}\right)} < \sin a$$

$$< \frac{a}{n}\,\frac{\sin\left(n+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\right)\frac{a}{n} + \sin\left(\frac{a}{\text{۲}n}\right)}{\text{۲}\sin\left(\frac{a}{\text{۲}n}\right)}$$

می‌باشد. این جفت نامساوی بنوبهٔ خود با دو نامساوی

$$\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\frac{a}{n}-\sin\left(\frac{a}{۲n}\right)<\frac{\sin\left(\frac{a}{۲n}\right)}{\left(\frac{a}{۲n}\right)}\sin a \qquad (۸.۲)$$

$$<\sin\left(n-\frac{۱}{۲}\right)\frac{a}{۲}+\sin\left(\frac{a}{۲n}\right)$$

معادل است. بنابراین، اثبات (۶.۲) معادل اثبات (۸.۲) خواهد بود. ثابت می‌کنیم که بازای $۰<۲n\theta\leqslant\pi/۲$ داریم

$$\sin(۲n+۱)\theta-\sin\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}\sin ۲n\theta \qquad (۹.۲)$$

$$<\sin(۲n-۱)\theta+\sin\theta.$$

این نامساویها وقتی $\theta=a/(۲n)$ به نامساویهای (۸.۲) تحویل می‌شوند.

برای اثبات نامساوی سمت چپ (۹.۲) از دستور جمع برای سینوس استفاده کرده می‌نویسیم

$$\boxed{\sin(۲n+۱)\theta=\sin ۲n\theta\cos\theta+\cos ۲n\theta\sin\theta} \qquad (۱۰.۲)$$

$$<\sin ۲n\theta\frac{\sin\theta}{\theta}+\sin\theta,$$

که درآن از نامساویهای

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta},\ ۰<\cos ۲n\theta\leqslant ۱,\ \sin\theta>۰,$$

که همه بخاطر اینکه $۰<۲n\theta\leqslant\pi/۲$ معتبرند، نیز بهره برده‌ایم. نامساوی (۱۰.۲) با نامساوی طرف چپ (۹.۲) معادل است.

برای اثبات نامساوی سمت راست (۹.۲) مجدداً از دستورجمع برای سینوس استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\boxed{\sin(۲n-۱)\theta=\sin ۲n\theta\cos\theta-\cos ۲n\theta\sin\theta.}$$

چنانچه $\sin\theta$ را به طرفین آن بیفزائیم خواهیم داشت

$$\boxed{\sin(۲n-۱)\theta+\sin\theta=\sin ۲n\theta} \qquad (۱۱.۲)$$

$$\left(\cos\theta+\sin\theta\frac{۱-\cos ۲n\theta}{\sin ۲n\theta}\right).$$

اما، چون داریم

$$\frac{۱-\cos ۲n\theta}{\sin ۲n\theta}=\frac{۲\sin^۲ n\theta}{۲\sin n\theta\cos n\theta}=\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta},$$

پس طرف راست (۱۱.۲) مساوی

$$\sin 2n\theta\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}\right) = \sin 2n\theta\frac{\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta}{\cos n\theta}$$
$$= \sin 2n\theta\frac{\cos(n-1\theta)}{\cos n\theta}$$

خواهد بود. بنابراین، برای اتمام برهان (۹.۲)، فقط کافی است نشان دهیم که

$$\frac{\cos(n-1)\theta}{\cos n\theta} > \frac{\sin\theta}{\theta}. \qquad (۱۲.۲)$$

اما داریم

$$\cos n\theta = \cos(n-1)\theta\cos\theta - \sin(n-1)\theta\sin\theta$$
$$< \cos(n-1)\theta\cos\theta < \cos(n-1)\theta\frac{\theta}{\sin\theta},$$

که درآن مجدداً از نامساوی اساسی $\cos\theta < \theta/(\sin\theta)$ استفاده کرده‌ایم. این رابطهٔ آخر (۱۲.۲) را ایجاب می‌کند، پس برهان قضیهٔ ۴.۲ تمام است.

قضیهٔ ۵.۲. هرگاه دو تابع سینوس و کسینوس ازخواص اساسی ۱ تا ۴ بهره‌مند باشند آنگاه بازای هر a ی حقیقی خواهیم داشت

$$\int_0^a \cos x\,dx = \sin a, \qquad (۱۳.۲)$$

$$\int_0^a \sin x\,dx = 1 - \cos a. \qquad (۱۴.۲)$$

برهان. ابتدا (۱۳.۲) را ثابت می‌کنیم و بعد، با استفاده از (۱۳.۲)، (۱۴.۲) را نتیجه می‌گیریم. فرض کنیم $0 < a \leqslant \pi/2$. چون کسینوس بر $[0, a]$ نزولی است می‌توانیم قضیهٔ ۱۴.۱ را همراه با نامساویهای قضیهٔ ۴.۲ بکار برده (۱۳.۲) را بدست آوریم. این دستور همچنین برای $a = 0$، باین دلیل‌که هر دوطرف آن صفرند، خود بخود برقرار است. حال می‌توان ازخواص عمومی انتگرال استفاده‌کرده حیطهٔ اعتبارآن را تا همهٔ a های حقیقی وسعت داد.

بعنوان مثال، هرگاه $-\pi/2 \leqslant a \leqslant 0$، آنگاه $0 \leqslant -a \leqslant \pi/2$، و خاصیت انعکاسی به ما چنین می‌دهد که

$$\int_0^a \cos x\,dx = -\int_0^{-a}\cos(-x)\,dx = -\int_0^{-a}\cos x\,dx$$
$$= -\sin(-a) = \sin a.$$

لذا (۱۳.۲) در بازهٔ $[-\pi/۲, \pi/۲]$ معتبر است. حال فرض می‌کنیم $\pi/۲ \leqslant a \leqslant ۳\pi/۲$. دراینصورت $-\pi/۲ \leqslant a-\pi \leqslant \pi/۲$، پس داریم

$$\int_{۰}^{a} \cos x dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \cos x dx + \int_{\pi/۲}^{a} \cos x dx$$

$$= \sin \tfrac{۱}{۲}\pi + \int_{-\pi/۲}^{a-\pi} \cos(x+\pi) dx = ۱ - \int_{-\pi/۲}^{a-\pi} \cos x dx$$

$$= ۱ - \sin(a-\pi) + \sin\left(-\tfrac{۱}{۲}\pi\right) = \sin a.$$

ازاینرو (۱۳.۲) بازای هر a دربازهٔ $[-\pi/۲, ۳\pi/۲]$ برقرار است. اما این بازه طولش ۲π است، پس دستور (۱۳.۲) برای هر a برقرار است چونکه هر دو طرف آن نسبت به a متناوب با دورهٔ تناوب ۲π می‌باشند.

حال از (۱۳.۲) استفاده‌کرده (۱۴.۲) را نتیجه می‌گیریم. ابتدا ثابت‌می‌کنیم‌که (۱۴.۲) وقتی $a = \pi/۲$ برقراراست. چنانچه خاصیت انتقالی، رابطهٔ متقابل $\cos x = \sin\left(x + \tfrac{۱}{۲}\pi\right)$، و خاصیت انعکاسی را بترتیب بکار بریم درخواهیم یافت که

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \sin x dx = \int_{-\pi/۲}^{۰} \sin(x+\pi/۲) dx = \int_{-\pi/۲}^{۰} \cos x dx$$

$$= \int_{۰}^{\pi/۲} \cos(-x) dx.$$

با استفاده از رابطهٔ $\cos(-x) = \cos x$ و معادلهٔ (۱۳.۲) خواهیم داشت

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \sin x dx = ۱.$$

حال بازای هر aی حقیقی می‌توانیم بنویسیم

$$\int_{۰}^{a} \sin x dx = \int_{۰}^{\pi/۲} \sin x dx + \int_{\pi/۲}^{a} \sin x dx$$

$$= ۱ + \int_{۰}^{a-\pi/۲} \sin(x+\pi/۲) dx$$

$$= ۱ + \int_{۰}^{a-\pi/۲} \cos x dx = ۱ + \sin(a - \pi/۲) = ۱ - \cos a.$$

این نشان می‌دهد که معادلهٔ (۱۳.۲) معادلهٔ (۱۴.۲) را ایجاب می‌کند.

مثال ۱. با استفاده از (۱۳.۲) و (۱۴.۲) همراه با خاصیت جمعپذیری

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \int_{۰}^{b} f(x) dx - \int_{۰}^{a} f(x) dx$$

دستورهای انتگرالگیری کلیتری را بدست می‌آوریم:

$$\int_a^b \cos x dx = \sin b - \sin a$$

و

$$\int_a^b \sin x dx = (1 - \cos b) - (1 - \cos a) = -(\cos b - \cos a).$$

چنانچه بار دیگر از علامت خاص $f(x)\Big|_a^b$ برای نمودن تفاضل $f(b) - f(a)$ استفاده کنیم می‌توانیم این دستورهای انتگرالگیری را بشکل

$$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big|_a^b \text{ و } \int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b$$

بنویسیم.

مثال۲. با استفاده از نتایج مثال ۱ و خاصیت انبساط

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x/c) dx$$

دستورهای زیر را که بازای $c \neq 0$ معتبرند بدست می‌آوریم:

$$\int_a^b \cos cx dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \cos x dx = \frac{1}{c}(\sin cb - \sin ca)$$

و

$$\int_a^b \sin cx dx = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} \sin x dx = -\frac{1}{c}(\cos cb - \cos ca).$$

مثال ۳. اتحاد $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ ایجاب می‌کند که $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$، پس از مثال ۲ خواهیم داشت

$$\int_0^a \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^a (1 - \cos 2x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{4}\sin 2a.$$

چون $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ نیز در می‌یابیم که

$$\int_0^a \cos^2 x dx = \int_0^a (1 - \sin^2 x)\, dx = a - \int_0^a \sin^2 x dx$$

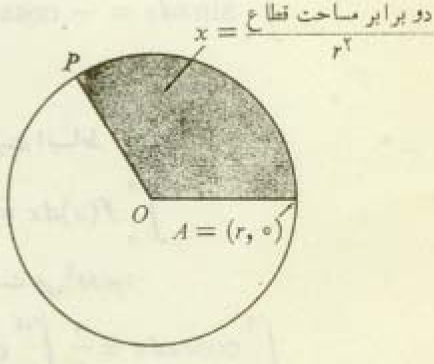
$$= \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\sin 2a.$$

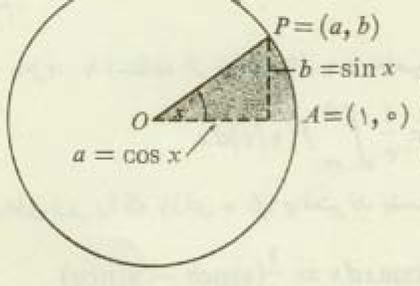
۷.۲ توصیف هندسی توابع سینوس و کسینوس

در این بخش برای تعریف توابع سینوس وکسینوس روشی هندسی معین کرده و تعبیرهندسی

آن خواص اساسی را که در بخش ۵.۲ ذکر شدند بدست می‌دهیم.

دایره‌ای بشعاع r و بمرکز مبدأ را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ $(r, ۰)$ را با A نشان داده وفرض می‌کنیم P نقطهٔ دلخواه دیگری بردایره باشد. دوپاره‌خط OA و OP شکلی هندسی بنام زاویه را معین می‌کنند که آن را با علامت $\angle AOP$ نشان می‌دهیم. مثالی در شکل ۶.۲ نموده شده است. می خواهیم به این زاویه عدد حقیقی و نامنفی x را طوری نسبت دهیم که بتوان آن را بعنوان میزان اندازه‌اش بکار برد. متداولترین راه انجام این‌کار باین ترتیب است که دایره‌ای بشعاع ۱ اختیار کرده و فرض کنیم x طول قوس مستدیر AP باشد که درجهت عکس حرکت عقربهٔ ساعت از A به P پیموده می‌شود، وبگوئیم که‌اندازهٔ $\angle AOP$





شکل ۶.۲ زاویهٔ $\angle AOP$ مشتمل است بر x رادیان. شکل ۷.۲ توصیف هندسی $\sin x$ و $\cos x$.

برابر x رادیان است. در وضع موجود این بحث از دیدگاه منطقی قانع کننده نیست زیرا ما هنوز از مفهوم طول قوس سخنی بمیان نیاورده‌ایم. طول قوس بعداً در فصل ۱۴ مطرح خواهد شد. چون ازمفهوم مساحت قبلاً سخن رفته است بعنوان اندازهٔ $\angle AOP$ ترجیح می‌دهیم بجای طول قوس AP از مساحت قطاع مستدیر AOP استفاده کنیم. فرض شده که قطاع AOP وقتی P بالای محور حقیقی است بخش کوچکتر قرص مستدیر و زمانی که P پائین محور حقیقی است بخش بزرگتر آن باشد.

بعداً، وقتی طول قوس مطرح شد، درخواهیم یافت که طول قوس AP درست دو برابرمساحت‌قطاع AOP است. بنابراین، برای‌آنکه هردوروش یک‌مقیاس سنجش زوایارا بدست دهند،ما از دوبرابر مساحت قطاع AOP بعنوان‌اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOP$ استفاده خواهیم کرد. اما، برای دستیابی به یک اندازهٔ «فارغ از بعد» زوایا، یعنی اندازه‌ای مستقل از فاصلهٔ‌یکه در دستگاه مختصات‌ما، اندازهٔ $\angle AOP$ را دوبرابر مساحت قطاع AOP بخش بر مجذور شعاع تعریف خواهیم‌کرد. این نسبت با انبساط یا انقباض دایره تغییرنمی‌کند، و درنتیجه، اگر نظر خود را معطوف دایرهٔ یکه کنیم، به کلیت خللی وارد نخواهد شد. واحد اندازه‌گیری که باین صورت بدست می‌آید رادیان نام دارد. لذا می‌گوئیم اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOP$، x رادیان است هرگاه $x/۲$ مساحتی باشدکه قطاع AOP ازقرص‌مستدیریکه جدا می‌کند.

ما قبلاً علامت π را برای نشان دادن مساحت یک قرص مستدیر یکه معرفی کرده‌ایم. وقتی $P = (-۱, ۰)$ قطاع AOP یک قرص نیمه‌مستدیر بمساحت $\pi/۲$ است، پس زاویه‌ای مساوی π رادیان را در برمی‌گیرد. تمامی قرص قطاعی است مشتمل بر ۲π رادیان. اگر P از اول در $(۱, ۰)$ بوده و یکبار دور دایره در جهت خلاف حرکت عقربهٔ ساعت بگردد مساحت قطاع AOP، در حالی که هرمقدار در بازهٔ $[۰, \pi]$ را فقط یکبار گرفته.از ۰ به π صعود می‌کند. این خاصیت را، که از نظر هندسی قابل توجیه است، می‌توان با بیان مساحت بصورت انتگرال ثابت کرد، اما این برهان مورد بحث ما واقع نخواهد شد.

قدم بعدی تعریف سینوس و کسینوس یک زاویه است. در واقع ما ترجیح می‌دهیم ازسینوس وکسینوس یک عدد صحبت کنیم تا یک زاویه، درنتیجه سینوس و کسینوس توابعی خواهند بود که بر خط حقیقی تعریف شده‌اند. این طور عمل می‌کنیم: عدد x را که در $۰ < x < ۲\pi$ صادق است انتخاب کرده و فرض می‌کنیم P چنان نقطه‌ای بردایرهٔ یکه است که مساحت قطاع AOP مساوی $x/۲$ می‌باشد. فرض کنیم (a, b) مختصات P را نشان دهد. مثالی درشکل ۷.۲ نموده شده است. اعداد a و b کاملاً توسط x معین می‌شوند. کسینوس و سینوس x را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\cos x = a, \quad \sin x = b.$$

بعبارت دیگر، $\cos x$ طول P و $\sin x$ عرض آن خواهد بود.

بعنوان مثال، وقتی $x = \pi$، داریم $P = (-۱, ۰)$، پس $\cos \pi = -۱$ و $\sin \pi = ۰$. بهمین نحو، وقتی $x = \pi/۲$، خواهیم داشت $P = (۰, ۱)$، و درنتیجه $\cos(\pi/۲) = ۰$ و $\sin(\pi/۲) = ۱$. این‌عمل سینوس وکسینوس رابصورت توابعی‌که دربازهٔ باز $(۰, ۲\pi)$ تعریف شده‌اند توصیف می‌کند. ما این تعریفها را بوسیلهٔ معادلات‌زیر به تمام محور حقیقی تعمیم می‌دهیم:

$$\sin ۰ = ۰, \cos ۰ = ۱, \sin(x + ۲\pi) = \sin x, \cos(x + ۲\pi) = \cos x.$$

حال‌چهارتا بع‌مثلثاتی‌دیگر برحسب‌سینوس‌وکسینوس بادستورهای متداول زیر تعریف‌می‌شوند:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{۱}{\cos x}, \csc x = \frac{۱}{\sin x}.$$

این توابع برای‌کلیهٔ xهای حقیقی مگربرخی از نقاط تنها که مخرجها صفر می‌شوندتعریف شده‌اند. همهٔ آنها در خاصیت تناوبی $f(x + ۲\pi) = f(x)$ صدق می‌کنند. تانژانت و کتانژانت از دورهٔ تناوب کوچکتر π برخوردارند.

اینک برای تعیین اینکه چگونه این تعریفها به خواص اساسی مذکور در بخش ۵.۲ منجر می‌شوند دلائل هندسی می‌آوریم. خواص ۱ و ۲ پیشتر بوسیلهٔ نحوهٔ تعریف ما ازسینوس و کسینوس تأمین شده‌اند. اتحاد فیثاغورس با مراجعه به شکل ۷.۲ واضح می‌شود. پاره‌خط OP وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاعش طولهای $|\cos x|$ و $|\sin x|$ را دارند. ازاینرو قضیهٔ فیثاغورس برای مثلثهای قائم‌الزاویه اتحاد $\cos^2 x + \sin^2 x = ۱$ را نتیجه خواهد داد.

حال قضیهٔ فیثاغورس برای مثلثهای قائم‌الزاویه را مجدداً بکار می‌گیریم تا برهان هندسی دستور (۳.۲) برای $\cos(y-x)$ را بدست دهیم. به دو مثلث قائم‌الزاویهٔ PAQ و PBQ در شکل ۸.۲ رجوع می‌کنیم. در مثلث PAQ طول ضلع AQ برابر $|\sin y - \sin x|$ است، یعنی مساوی قدرمطلق تفاضل عرضهای Q و P می‌باشد. بهمین نحو، AP از طول $|\cos x - \cos y|$ برخوردار می‌باشد. چنانچه d طول وتر PQ را نشان دهد بنابرقضیهٔ فیثاغورس داریم

$$d^2 = (\sin y - \sin x)^2 + (\cos x - \cos y)^2.$$

از طرف دیگر، در مثلث قائم‌الزاویهٔ PBQ ضلع BP دارای طول $|1-\cos(y-x)|$ و ضلع BQ دارای طول $|\sin(y-x)|$ می‌باشد. بنابراین، قضیهٔ فیثاغورس به ما چنین می‌دهد که

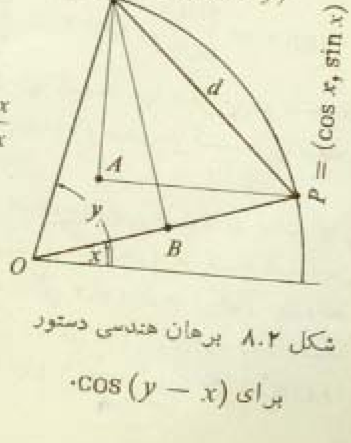
$$d^2 = [1-\cos(y-x)]^2 + \sin^2(y-x).$$

از متحد قراردادن دوعبارت حاصل برای d^2 و حل آن نسبت به $\cos(y-x)$ به دستور مطلوب (۳.۲) برای $\cos(y-x)$ خواهیم رسید.

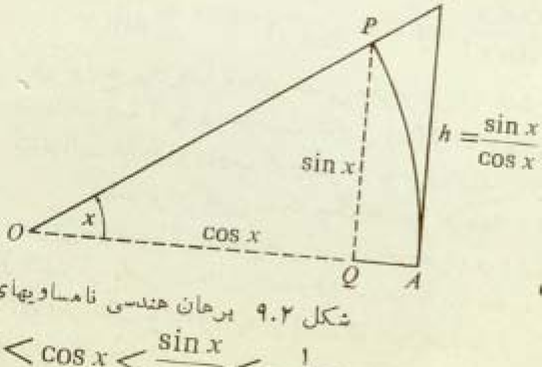
بالاخره، برهانهای هندسی نامساویهای اساسی خاصیت ۴ را می‌توان با مراجعه به شکل ۹.۲ ارائه داد. کافی است مساحت قطاع OAP را با مساحتهای مثلثهای OQP و OAB مقایسه کنیم. بخاطر نحوهٔ تعریف ما از اندازهٔ زاویه، مساحت قطاع OAP برابر $x/2$ است. مثلث OAB دارای قاعدهٔ ۱ و ارتفاع، مثلاً، h می‌باشد. بنابر تشابه مثلثها درخواهیم یافت که $h/1 = (\sin x)/(\cos x)$، پس مساحت مثلث OAB برابر $h/2 = (\sin x)/(2\cos x)$ می‌باشد. بنابراین، مقایسهٔ مساحات نامساویهای

$$\frac{1}{2}\sin x\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$$

را به ما خواهد داد. باتقسیم بر $(\sin x)/2$ و تقابل‌گیری، نامساویهای اساسی (۴.۲) را بدست می‌آوریم.



شکل ۸.۲ برهان هندسی دستور برای $\cos(y-x)$.



شکل ۹.۲ برهان هندسی نامساویهای $0<\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{1}{\cos x}$.

بار دیگر به خواننده یادآور می‌شویم که بحث این بخش بدین منظور است کـه از سینوس و کسینوس و خواص اساسی آنها تعبیری هندسی فراهم شود. یک برخورد تحلیلی با این توابع، بدون استفاده از هندسه، در بخش ۱۱.۱۱ توصیف خواهد شد.

جداول مفصل مقادیر سینوس، کسینوس، تانژانت، و کتانژانت در اکثر کتب راهنمای ریاضی آمده‌اند. نمودارهای شش تابع مثلثاتی درشکل ۱۰.۲ (صفحهٔ ۱۳۵) روی یک بازهٔ تناوب کامل نشان داده شده‌اند. بقیهٔ نمودار در هـر حالت بـا توسل به خاصیت تناوبی بدست خواهد آمد.

۸.۲ تمرینات

دراین مجموعه از تمرینات می‌توانید ازخواص سینوس و کسینوس که در بخشهای ۵.۲ تا ۷.۲ گفته شده استفاده نمائید.

۱. (الف) ثابت کنید بازای هرعـدد صحیح n، $\sin n\pi = 0$، و اینها تنها مقادیری از x هستند که بازای آنها $\sin x = 0$.

(ب) کلیهٔ xهای حقیقی را بیابید که $\cos x = 0$.

۲. کلیهٔ x هـای حقیقی را بیـابید کـه (الف) $\sin x = 1$؛ (ب) $\cos x = 1$؛ (پ) $\sin x = -1$؛ (ت) $\cos x = -1$.

۳. ثابت کنید بازای هر x، $\sin(x+\pi) = -\sin x$ و $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

۴. ثابت کنید بازای هر x حقیقی

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \text{و} \quad \cos 3x = \cos x - 4\sin^2 x\cos x.$$

همچنین ثابت کنید که $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

۵. (الف) ثابت کنید $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ و $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. [راهنمائی: از تمرین ۴ استفاده نمائید.]

(ب) ثابت کنید $\sin\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ و $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$.

(پ) ثابت کنید $\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

۶. ثابت کنید بازای هر x و y که $\tan x\tan y \neq -1$،

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}.$$

دستورهای متناظر را برای $\tan(x+y)$ و $\cot(x+y)$ بدست آورید.

۷. اعداد A و B را چنان بیابید که بازای هر x،

$$3\sin\left(x + \frac{1}{3}\pi\right) = A\sin x + B\cos x.$$

۸. ثابت کنید اگر C و α اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد حقیقی A و B وجود دارند بطوری که بازای هر x، $C\sin(x+\alpha) = A\sin x + B\cos x$.

۹. ثابت‌کنید اگر A و B اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد C و α، که $C \geqslant ۰$، وجود دارند بطوری که دستور تمرین ۸ بازای آنها برقرار است.

۱۰. C و α را طوری تعیین کنید که $C > ۰$ و بازای هر x،

$$C\sin(x+\alpha) = -۲\sin x - ۲\cos x.$$

۱۱. ثابت کنید اگر A و B اعداد حقیقی مفروضی باشند اعداد C و α، که $C \geqslant ۰$، چنان وجود دارند که $C\cos(x+\alpha) = A\sin x + B\cos x$. اعداد C و α را برای وقتی که $A = B = ۱$ مشخص کنید.

۱۲. کلیهٔ xهای حقیقی را بیابید که $\sin x = \cos x$.

۱۳. کلیهٔ xهای حقیقی را بیابید که $\sin x - \cos x = ۱$.

۱۴. ثابت کنید که اتحادهای زیر بازای هر x و y برقرارند.

(الف) $۲\cos x\cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$.

(ب) $۲\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$.

(پ) $۲\sin x\cos y = \sin(x-y) + \sin(x+y)$.

۱۵. چنانچه $h \neq ۰$ ثابت کنید که اتحادهای زیر بازای هر x برقرارند:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin(h/۲)}{h/۲}\cos(x + h/۲),$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\frac{\sin(h/۲)}{h/۲}\sin(x + h/۲).$$

این دستورها در حساب دیفرانسیل مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۱۶. هریک از احکام زیر را اثبات یا رد کنید.

(الف) بازای هر $x \neq ۰$ داریم $\sin ۲x \neq ۲\sin x$.

(ب) بازای هر x، yی هست بطوری که $\cos(x+y) = \cos x + \cos y$.

(پ) xی هست که بازای هر y، $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$.

(ت) yی مخالف صفر وجود دارد بقسمی که $\int_۰^y \sin x\,dx = \sin y$.

۱۷. انتگرال $\int_a^b \sin x\,dx$ را بازای هریک از مقادیر زیر از a و b حساب کنید. در هر مورد نتیجهٔ خود را بطور هندسی برحسب مساحات تعبیر نمائید.

(الف) $a = ۰$، $b = \pi/۶$.

(ب) $a = ۰$، $b = \pi/۴$.

(پ) $a = ۰$، $b = \pi/۳$.

(ت) $a = ۰$، $b = \pi/۲$.

(ث) $a = ۰$، $b = \pi$.

(ج) $a = ۰$، $b = ۲\pi$.

(چ) $a = -۱$، $b = ۱$.

(ح) $a = -\pi/۶$، $b = \pi/۴$.

هریک از انتگرالهای تمرینات ۱۸ تا ۲۷ را حساب کنید.

۱۸. $\int_0^{\pi}(x+\sin x)\,dx$.

۱۹. $\int_0^{\pi/2}(x^2+\cos x)\,dx$.

۲۰. $\int_0^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx$.

۲۱. $\int_0^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx$.

۲۲. $\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\cos t\right)dt$.

۲۳. $\int_0^{\pi}\left|\frac{1}{2}+\cos t\right|dt$.

۲۴. $\int_{-\pi}^{x}\left|\frac{1}{2}+\cos t\right|dt$
درصورتی که $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

۲۵. $\int_x^{x^2}(t^2+\sin t)\,dt$.

۲۶. $\int_0^{\pi/2}\sin 2x\,dx$.

۲۷. $\int_0^{\pi/3}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

۲۸. دستورهای انتگرالگیری زیر را، که بازای $b \neq 0$ معتبرند، ثابت کنید:

$$\int_0^x \cos(a+bt)\,dt=\frac{1}{b}[\sin(a+bx)-\sin a],$$

$$\int_0^x \sin(a+bt)\,dt=-\frac{1}{b}[\cos(a+bx)-\cos a].$$

۲۹. (الف) با استفاده از اتحاد $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ دستور انتگرالگیری

$$\int_0^x \sin^3 t\,dt=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2+\sin^2 x)\cos x$$

را نتیجه بگیرید.

(ب) اتحاد $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$ را نتیجه گرفته و آن را در اثبات

$$\int_0^x \cos^3 t\,dt=\frac{1}{3}(2+\cos^2 x)\sin x$$

بکار برید.

۳۰. اگر تابع f متناوب بـا دورهٔ تناوب $p>0$ بوده و بر $[0, p]$ انتگرالپذیر باشد ثابت کنید که بازای هر a،

$$\int_0^p f(x)\,dx=\int_a^{a+p} f(x)\,dx.$$

۳۱. (الف) ثابت کنید بازای هر عدد صحیح $n \neq 0$،

$$\int_{\circ}^{۲\pi} \sin nx\,dx = \int_{\circ}^{۲\pi} \cos nx\,dx = \circ.$$

ب) قسمت (الف) و دستورهای جمع برای سینوس و کسینوس را بکاربرده دستورهای زیر را، که بازای اعداد صحیح m و n که $m^۲ \neq n^۲$ معتبرند، ثابت کنید:

$$\int_{\circ}^{۲\pi} \sin nx \cos mx\,dx = \int_{\circ}^{۲\pi} \sin nx \sin mx\,dx$$
$$= \int_{\circ}^{۲\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \circ;$$

اگر $n \neq \circ$، $\int_{\circ}^{۲\pi} \sin^۲ nx\,dx = \int_{\circ}^{۲\pi} \cos^۲ nx\,dx = \pi$.

این دستورها به روابط تعامدی برای سینوس و کسینوس معروفند.

۳۲. از اتحاد

$$۲\sin\frac{x}{۲}\cos kx = \sin(۲k+۱)\frac{x}{۲} - \sin(۲k-۱)\frac{x}{۲}$$

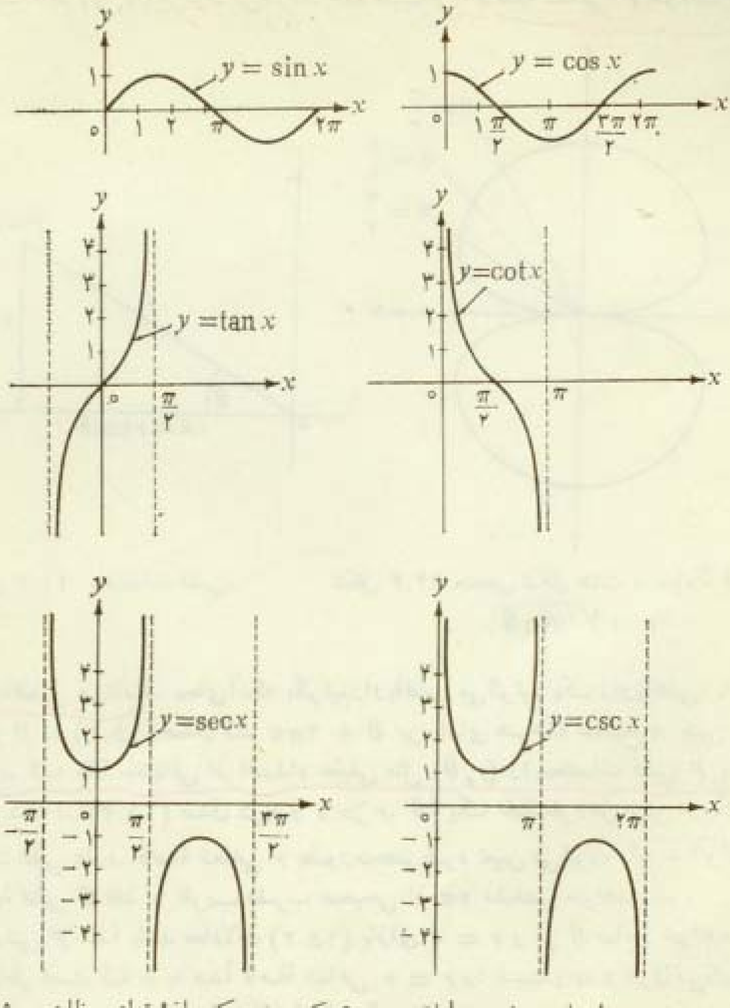
و خاصیت توی هم روی مجموعهای متناهی استفاده کرده ثابت کنید اگر $x \neq ۲m\pi$ (m عددی صحیح است) خواهیم داشت

$$\sum_{k=۱}^{n} \cos kx = \frac{\sin\frac{۱}{۲}nx\cos\frac{۱}{۲}(n+۱)x}{\sin\frac{۱}{۲}x}.$$

۳۳. اگر $x \neq ۲m\pi$ (m عددی صحیح است) ثابت کنید که

$$\sum_{k=۱}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{۱}{۲}nx\sin\frac{۱}{۲}(n+۱)x}{\sin\frac{۱}{۲}x}.$$

۳۴. به‌شکل ۷.۲ مراجعه‌کنید. بامقایسهٔ مساحت مثلث OAP بامساحت قطاع مستدیر OAP ثابت کنید اگر $\circ < x < \pi/۲$، $\sin x < x$. بعد، از این مطلب که $\sin(-x) = -\sin x$ استفاده کرده ثابت کنید اگر $\circ < |x| < \pi/۲$، $|\sin x| < |x|$.



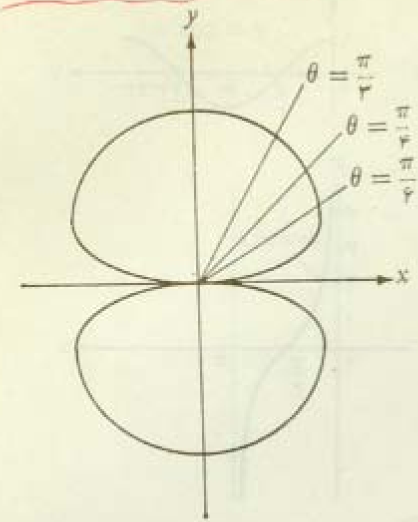
شکل ۲.۱۰ نمودارهای توابع مثلثاتی بصورتی که روی یک بازهٔ تناوب ظاهر می‌شوند.

۹.۲ مختصات قطبی

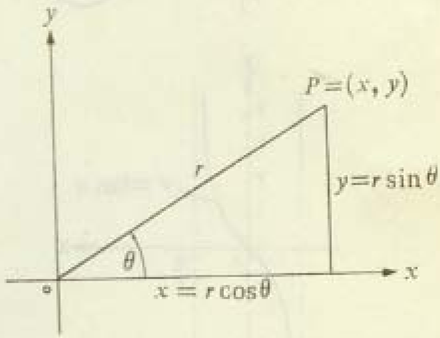
تا بحال نقاط در صفحه را با مختصات قائم مشخص کرده‌ایم. می‌توانیم محل آنها را با مختصات قطبی هم تعیین کنیم. این کار بصورت زیر انجام می‌گیرد: فرض کنیم P نقطه‌ای باشد متمایز از مبدأ. همچنین پاره‌خطی که P را به مبدأ وصل می‌کند طولش $r > 0$ بوده و با قسمت مثبت محور x زاویه‌ای برابر θ رادیان بسازد. مثالی در شکل ۱۱.۲ نموده شده است. دوعدد r و θ را مختصات قطبی P می‌نامند. اینها با معادلات

$$x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta \qquad (۱۵.۲)$$

به‌مختصات قائم (x, y) مربوط می‌شوند. عدد مثبت r را فاصلهٔ شعاعی P خوانده و θ را



شکل ۱۲.۲ منحنی شکل هشت با معادلهٔ قطبی $r = \sqrt{|\sin\theta|}$.



شکل ۱۱.۲ مختصات قطبی.

یک‌زاویهٔ‌قطبی می‌نامند. بجای‌آنکه بگوئیم‌زاویهٔ‌قطبی می‌گوئیم یک زاویهٔ‌قطبی، باین‌دلیل که اگر θ در (۱۵.۲) صدق کند $\theta + ۲n\pi$ نیز بازای هرعدد صحیح n چنین می‌کند. می‌پذیریم که کلیهٔ جفتهائی از اعداد حقیقی مثل (r, θ) را مختصات قطبی P بنامیم در صورتی که در (۱۵.۲) صدق کرده و $r > ۰$. لذا یک نقطهٔ مفروض بیش از یک جفت مختصات قطبی دارد. فاصلهٔ شعاعی r بطورمنحصربفرد تعیین می‌شود، $r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$، اما زاویهٔ قطبی θ فقط با تقریب مضرب صحیحی از ۲π مشخص خواهد شد.

وقتی P مبدأ باشد معادلات (۱۵.۲) بازای $r = ۰$ و هر θ صادق خواهند بود. بدین خاطر است که ما به مبدأ فاصلهٔ شعاعی $r = ۰$ را نسبت داده و قبول می‌کنیم که هر θی حقیقی می‌تواند بعنوان یک زاویهٔ قطبی آن بکار رود.

فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی که بربازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است. مجموعهٔ همهٔ نقاط با مختصات قطبی (r, θ) را که در $r = f(\theta)$ صدق می‌کنند نمودار f در مختصات قطبی می‌خوانند. معادلهٔ $r = f(\theta)$ معادلهٔ قطبی این نمودار نام دارد. ممکن است درمورد بعضی منحنیها بکاربردن معادلات قطبی از معادلات دکارتی ساده‌تر و راحتترباشد. مثلاً دایره با معادلهٔ دکارتی $x^۲ + y^۲ = ۴$ ازمعادلهٔ قطبی ساده‌تر $r = ۲$ برخوردار است. معادلات (۱۵.۲) نشان می‌دهند که چگونه می‌توان مختصات قائم را به مختصات قطبی بدل کرد.

مثال. شکل ۱۲.۲ یک منحنی شبیه شکل‌هشت را نشان می‌دهد که معادلهٔ دکارتی‌اش $(x^۲ + y^۲)^۳ = y^۲$ است. با استفاده از (۱۵.۲) درمی‌یابیم که $x^۲ + y^۲ = r^۲$، پس

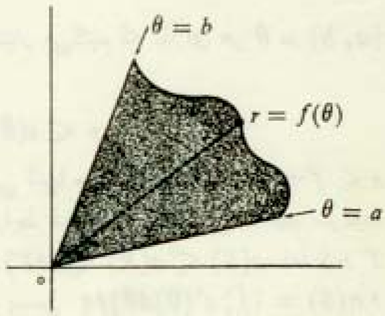
مختصات قطبی نقاط واقع بر این منحنی در معادلهٔ $r^6 = r^2 \sin^2\theta$ یا $r^2 = |\sin\theta|$ یا $r = \sqrt{|\sin\theta|}$ صدق می‌کنند. رسم این منحنی با استفاده از معادلهٔ قطبی مشکل نیست. بعنوان مثال، دربازهٔ $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$، $\sin\theta$ از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، پس r نیز از ۰ تا ۱ زیاد خواهد شد. با رسم چند مقدار که آسان حساب می‌شوند، مثلاً مقادیر متناظر $\theta = \pi/6$، $\theta = \pi/4$، و $\theta = \pi/3$، می‌توانیم بسرعت آن قسمت از منحنی را که در ربع اول قرار دارد بکشیم. بقیهٔ منحنی با توسل به تقارن موجود در معادلهٔ دکارتی یا تقارن و خاصیت تناوبی $|\sin\theta|$ بدست می‌آید. رسم این منحنی فقط بکمک معادلهٔ دکارتی آن مشکلتر خواهد بود.

۱۰.۲ انتگرال مساحت در مختصات قطبی

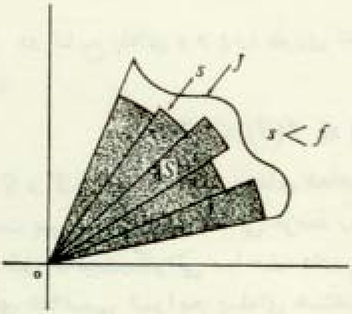
فرض کنیم f تابعی باشد نامنفی‌که بربازهٔ $[a, b]$ که در آن $0 \leqslant b - a \leqslant 2\pi$ تعریف شده است. مجموعهٔ همهٔ نقاط با مختصات قطبی (r, θ) را که در نامساویهای

$$0 \leqslant r \leqslant f(\theta), \ a \leqslant \theta \leqslant b$$

صدق می‌کنند مجموعهٔ شعاعی f روی $[a, b]$ می‌خوانند. ناحیهٔ سایه‌دار نشان داده شده



شکل ۱۳.۲ مجموعهٔ شعاعی f روی بازهٔ $[a, b]$.



شکل ۱۴.۲ مجموعهٔ شعاعی تابع پله‌ای s اجتماعی از قطاعهای مستدیر است. مساحتش برابر $\frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)d\theta$ خواهد بود.

در شکل ۱۳.۲ یک نمونه است. چنانچه f بر $[a, b]$ ثابت باشد مجموعهٔ شعاعی آن قطاع مستدیری است که زاویه‌ای برابر $b - a$ رادیان را در برمی‌گیرد. شکل ۱۴.۲ مجموعهٔ شعاعی S یک تابع پله‌ای s را نشان می‌دهد. روی هریک از زیربازه‌های باز (θ_{k-1}, θ_k) از $[a, b]$ که در آن s ثابت است، مثلاً $s(\theta) = s_k$، نمودار s در مختصات قطبی قوس مستدیری بشعاع s_k خواهد بود، و مجموعهٔ شعاعی آن قطاعی مستدیر است که زاویه‌ای برابر $\theta_k - \theta_{k-1}$ رادیان را دربر می‌گیرد. بنا برنحوهٔ تعریف اندازهٔ زاویه، مساحت

این قطاع مساوی $(\theta_k - \theta_{k-1})s_k^2/2$ است. چون $b - a \leqslant 2\pi$ هیچ دو از این قطاعها همدیگر را قطع نمی‌کنند. پس، برطبق جمع‌پذیری، مساحت مجموعهٔ شعاعی S روی تمام بازهٔ $[a, b]$ توسط

$$a(S) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s_k^2\cdot(\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2}\int_a^b s^2(\theta)d\theta$$

داده می‌شود که در آن $s^2(\theta)$ بمعنی مربع $s(\theta)$ می‌باشد. لذا، برای توابع پله‌ای، مساحت مجموعهٔ شعاعی بصورت انتگرال بیان‌شده است. حال ثابت می‌کنیم که این دستورانتگرالی بشکل عمومی‌تری برقرار است.

قضیهٔ ۶.۲. فرض کنیم R مبین مجموعهٔ شعاعی تابع نامنفی f روی بازهٔ $[a, b]$ باشد، که در آن $0 \leqslant b - a \leqslant 2\pi$، و گیریم که R اندازه‌پذیر است. اگر f^2 بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد مساحت R توسط انتگرال

$$a(R) = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\theta)d\theta$$

داده خواهد شد.

برهان. دو تابع پله‌ای s و t را طوری اختیار می‌کنیم که بازای هر θ در $[a, b]$ در نامساویهای

$$0 \leqslant s(\theta) \leqslant f(\theta) \leqslant t(\theta)$$

صدق کنند، و S و T را بترتیب مجموعه‌های شعاعی آنها می‌انگاریم. چون $s \leqslant f \leqslant t$ بر $[a, b]$ است پس مجموعه‌های شعاعی توسط روابط شمول $S \subseteq R \subseteq T$ بهم مربوط می‌شوند. لذا، طبق خاصیت یکنوائی مساحت، داریم $a(S) \leqslant a(R) \leqslant a(T)$. اما S و T مجموعه‌های شعاعی توابع پله‌ای هستند، پس $a(S) = [\int_a^b s^2(\theta)d\theta]/2$ و $a(T) = [\int_a^b t^2(\theta)d\theta]/2$. بنابراین، نامساویهای

$$\int_a^b s^2(\theta)d\theta \leqslant 2a(R) \leqslant \int_a^b t^2(\theta)d\theta$$

را برای کلیهٔ توابع پله‌ای s و t که بر $[a, b]$ در $s \leqslant f \leqslant t$ صدق می‌کنند خواهیم داشت. اما s^2 و t^2 توابع پله‌ای دلخواهی هستند که بر $[a, b]$ در $s^2 \leqslant f^2 \leqslant t^2$ صدق می‌کنند، پس، ازآنجاکه f^2 انتگرالپذیراست، باید داشته‌باشیم $2a(R) = \int_a^b f^2(\theta)d\theta$. این قضیه را ثابت می‌کند.

توجه: می‌توان ثابت کرد که اندازه‌پذیری R از فرض انتگرالپذیر بودن f^2 نتیجه می‌شود، ولی ما اثبات این مطلب را مطرح نخواهیم کرد.

مثال. برای آنکه مساحت مجموعهٔ شعاعی R راکه منحنی شکل هشت مشهود درشکل

۱۲.۲ آن را در برگرفته محاسبه کنیم مساحت قسمتی را که در ربع اول قرار دارد حساب کرده و آن را در چهار ضرب می‌نمائیم. برای این منحنی داریم $f^{۲}(\theta) = |\sin\theta|$ و، چون بازای $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi/۲$ داریم $\sin\theta \geqslant ۰$، درمی‌یابیم که

$$a(R) = ۴ \int_{۰}^{\pi/۲} \frac{۱}{۲} f^{۲}(\theta) d\theta = ۲ \int_{۰}^{\pi/۲} \sin\theta d\theta$$
$$= ۲\,[\cos ۰ - \cos(\pi/۲)] = ۲.$$

۱۱.۲ تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۴ نشان دهید که مجموعهٔ نقاطی که مختصات قائم (x, y) آنها در معادلهٔ دکارتی داده شده صدق می‌کنند برابر است با مجموعهٔ کلیهٔ نقاطی که مختصات قطبی (r, θ)ی آنها در معادلهٔ قطبی متناظر صدق می‌نمایند.

۱. $(x-۱)^{۲} + y^{۲} = ۱$؛ $r = ۲\cos\theta$، $\cos\theta > ۰$.

۲. $x^{۲} + y^{۲} - x = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}}$؛ $r = ۱ + \cos\theta$.

۳. $(x^{۲} + y^{۲})^{۲} = x^{۲} - y^{۲}$، $y^{۲} \leqslant x^{۲}$؛ $r = \sqrt{\cos ۲\theta}$، $\cos ۲\theta \geqslant ۰$.

۴. $(x^{۲} + y^{۲})^{۲} = |x^{۲} - y^{۲}|$؛ $r = \sqrt{|\cos ۲\theta|}$.

در هر یک از تمرینات ۵ تا ۱۵ نمودار f را در مختصات قطبی بکشید و مساحت مجموعهٔ شعاعی f را روی بازهٔ تعیین شده محاسبه نمائید. می‌توانید هر مجموعه را اندازه‌پذیر بدانید.

۵. مارپیچ ارشمیدس: $f(\theta) = \theta$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۶. دایرهٔ مماس بر محور y: $f(\theta) = ۲\cos\theta$، $-\pi/۲ \leqslant \theta \leqslant \pi/۲$.

۷. دو دایرهٔ مماس بر محور y: $f(\theta) = ۲|\cos\theta|$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۸. دایرهٔ مماس بر محور x: $f(\theta) = ۴\sin\theta$، $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi$.

۹. دو دایرهٔ مماس بر محور x: $f(\theta) = ۴|\sin\theta|$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۰. پر رز: $f(\theta) = \sin ۲\theta$، $۰ \leqslant \theta \leqslant \pi/۲$.

۱۱. رز چهار برگ: $f(\theta) = |\sin ۲\theta|$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۲. هشت تنبل: $f(\theta) = \sqrt{|\cos\theta|}$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۳. شبدر چهار برگ: $f(\theta) = \sqrt{|\cos ۲\theta|}$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۴. دلگون: $f(\theta) = ۱ + \cos\theta$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۵. لیماسون: $f(\theta) = ۲ + \cos\theta$، $۰ \leqslant \theta \leqslant ۲\pi$.

۱۲.۲ کاربرد انتگرالگیری در محاسبهٔ حجم

در بخش ۶.۱ مفهوم مساحت را بصورت یک تابع مجموعه‌ای معرفی کردیم که از چند خاصیت، که آنها را اصول موضوع برای مساحت گرفتیم، برخوردار بود. بعد، در بخشهای

۱۸۰۱ و ۲۰۲، نشان دادیم که می‌توان مساحت بسیاری از نواحی را توسط انتگرالگیری حساب کرد. همین روش را می‌شود در بحث مفهوم حجم بکار گرفت.

فرض کنیم مجموعه‌های مشخصی از نقاط چون S در فضای سه‌بعدی وجود دارند که ما آنها را مجموعه‌های اندازه‌پذیر می‌نامیم، و نیز تابع مجموعه‌ای v، بنام تابع حجم، هست که به هر مجموعهٔ اندازه‌پذیر S عدد $v(S)$، بنام حجم S، را نسبت می‌دهد. ما علامت A را برای نمایش ردهٔ کلیهٔ مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فضای سه‌بعدی بکار می‌بریم، و هر مجموعهٔ S در A را یک جسم می‌خوانیم.

مثل حالت مساحت، تعدادی از خواص را که می‌خواهیم حجم داشته باشد ذکر کرده و آنها را بعنوان اصول موضوع برای حجم اختیار می‌کنیم. انتخاب اصول موضوع به ما این توان را می‌دهد تا ثابت کنیم که حجم بسیاری از اجسام را می‌شود بوسیلهٔ انتگرالگیری محاسبه نمود.

سه اصل موضوع اول، نظیر حالت مساحت، خواص نامنفی بودن، جمعپذیری، و تفاضلی را وصف می‌کنند. بجای اصل موضوع پایائی تحت همنهشتی نوع دیگری اصل موضوع، بنام اصل کاوالیری، را بکار می‌گیریم. این اصل به اجسام همنهشت و نیز برخی از اجسام که، درعین ناهمنهشت بودن، مساحتهای مقاطع عرضی آنها بوسیلهٔ صفحات عمود برخطی مفروض یکی است احجام مساوی نسبت می‌دهد. بعبارت دقیقتر، فرض کنیم S یک جسم و L خطی مفروض باشد. اگر صفحهٔ F بر L عمود باشد اشتراک $F \cap S$ را مقطع عرضی‌عمود بر L می‌خوانند. چنانچه هرمقطع عرضی‌عمود بر L در صفحهٔ خود اندازه‌پذیر باشد S را یک جسم کاوالیری می‌نامیم. اصل کاوالیری به دو جسم کاوالیری S و T در- صورتی احجام مساوی نسبت می‌دهد که بازای هر صفحهٔ F عمود برخط مفروض L داشته باشیم $a(S \cap F) = a(T \cap F)$.

اصل کاوالیری را می‌توان شهوداً این طور تجسم کرد: یک جسم کاوالیری را بصورت توده‌ای از ورقه‌های نازک از یک جنس، مثلاً یک دسته ورق، در نظر آورید که هر ورقه برخط مفروض L عمود است. چنانچه هر ورقه را در صفحهٔ خودش بلغزانیم می‌توانیم شکل جسم را تغییر دهیم ولی نه حجمش را.

اصل موضوع بعدی این را می‌گوید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب طول بالهای آن. یک مکعب مستطیل مجموعه‌ای است که با مجموعهٔ

$$\{(x, y, z) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c\} \qquad (۱۶۰۲)$$

همنهشت باشد. مابجای «مکعب مستطیل» از اصطلاح کوتاهتر «جعبه» استفاده خواهیم کرد. اعداد نامنفی a، b، c در (۱۶۰۲) را طول بالهای جعبه می‌نامند.

بالاخره، اصل موضوعی را می‌گنجانیم مبین آنکه هر مجموعهٔ محدب اندازه‌پذیر است. مجموعه‌ای را محدب خوانند هرگاه بازای هر جفت از نقاط P و Q در آن پاره‌خط واصل بین P و Q نیز در مجموعه باشد. این اصل موضوع، همراه با خواص جمعپذیری و تفاضلی، این اطمینان را می‌دهد که کلیهٔ اجسام مقدماتی که در کاربردهای معمولی حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شوند اندازه‌پذیر می‌باشند.

حال می‌توان اصول موضوع حجم را بصورت زیر بیان کرد.

تعریف اصل موضوعی حجم. فرض کنیم ردهٔ A از اجسام وتابع‌مجموعه‌ای v، که قلمروش A است، وجود دارند با این خواص:

۱. *خاصیت نامنفی بودن.* بازای هر مجموعهٔ S در A داریم $v(S) \geqslant 0$.

۲. *خاصیت جمعپذیری.* هرگاه S و T در A باشند آنگاه $S \cup T$ و $S \cap T$ نیز در A هستند و داریم

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T) - v(S \cap T).$$

۳. *خاصیت تفاضلی.* هرگاه S و T در A باشند و $S \subseteq T$ آنگاه $T - S$ نیز در A است و داریم $v(T - S) = v(T) - v(S)$.

۴. *اصل کاوالیری.* هرگاه S و T دو جسم کاوالیری در A بوده و بازای هرصفحهٔ F عمود برخطی مفروض داشته باشیم $a(S \cap F) \leqslant a(T \cap F)$ آنگاه $v(S) \leqslant v(T)$.

۵. *انتخاب مقیاس.* هر جعبهٔ B در A است. هرگاه‌یالهای B طولهای a، b، و c را داشته باشند آنگاه $v(B) = abc$.

۶. هر مجموعهٔ محدب در A است.

اصل موضوع ۳ نشان می‌دهدکه مجموعهٔ تهی $\varnothing$ در A بوده واز حجم صفر برخوردار است. چون $v(T - S) \geqslant 0$ این اصل خاصیت یکنوائی زیر را نیز ایجاب می‌کند:

بازای مجموعه‌های S و T در A که $S \subseteq T$، $v(S) \leqslant v(T)$.

خاصیت یکنوائی بنوبهٔ خود نشان می‌دهد که هرمجموعهٔ مسطح کرانـدار S در A حجمی برابر صفر دارد. یک مجموعهٔ مسطح را کراندار نامند اگر کـه زیرمجموعهٔ یک مـربع در صفحه باشد. هرگاه جعبهٔ B را بارتفاع c وبقاعدهٔ این مربع درنظر بگیریم آنگاه $S \subseteq B$، پس داریم $v(S) \leqslant v(B) = a^2c$ که در آن a طول هـر یـال مربع قاعده است. اگـر می‌داشتیم $v(S) > 0$ می‌توانستیم c راطوری اختیارکنیم که $c < v(S)/a^2$، که با نامساوی $v(S) \leqslant a^2c$ متناقض است. این نشان می‌دهدکه $v(S)$ نمی‌تواند مثبت‌باشد. پس،هما نطور که حکم شده، $v(S) = 0$.

توجه کنید که اصل کاوالیری بشکل نامساویها بیان شده است. چنانچه بـازای هـر صفحهٔ F عمود برخطی مفروض داشته باشیم $a(S \cap F) = a(T \cap F)$ می‌توانیم اصل موضوع ۴ را دوبار بکار برده نتیجه بگیریم که $v(S) \leqslant v(T)$ و $v(T) \leqslant v(S)$، و در-نتیجه خواهیم داشت $v(T) = v(S)$.

اینک نشان می‌دهیم که حجم یک جسم استوانه‌ای قائم مساوی مساحت قاعده در ارتفاع آن است. منظور ما از یک جسم استوانه‌ای قائم یعنی مجموعه‌ای که با مجموعهٔ S بشکل

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in B, a \leqslant z \leqslant b\},$$

که در آن B یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر مسطح‌کراندار است، همنهشت باشد. مساحتهای مقاطع عرضی S که عمود برمحور z هستند تابع مساحت مقطع عرضی a_S را مشخص می‌کنند که بر بازهٔ $a \leqslant z \leqslant b$ مقدار ثابت $a(B)$ و در خارج $[a, b]$ مقدار ۰ را می‌گیرد.

حال فرض کنیم T جعبه‌ای با تابع مساحت مقطع عرضی a_T مساوی a_S باشد. اصل موضوع ۵ به ما می‌گوید که $v(T) = a(B)(b-a)$ که در آن $a(B)$ مساحت قاعدهٔ T و $b-a$ ارتفاع آن است. اصل کاوالیری می‌گوید که $v(S) = v(T)$، پس حجم S مساوی مساحت قاعدهٔ آن، یعنی $a(B)$، ضربدر ارتفاعش، یعنی $b-a$، می‌باشد. توجه کنید که حاصلضرب $a(B)(b-a)$ انتگرال تابع a_S روی بازهٔ $[a, b]$ می‌باشد. بعبارت دیگر، حجم یک‌جسم استوانه‌ای قائم‌مساوی‌انتگرال تابع مساحت مقطع عرضی‌است،یعنی

$$v(S) = \int_a^b a_S(z)dz.$$

این دستور را می‌توان به اجسام کاوالیری کلیتری تعمیم داد. فرض کنیم R یک جسم کاوالیری با مقاطع عرضی اندازه‌پذیر عمود برخط مفروض L باشد. محور مختصات را در امتداد L (آن را محور u بنامید) گرفته و فرض می‌کنیم $a_R(u)$ مساحت مقطع عرضیی باشد که توسط صفحهٔ عمود بر L در نقطهٔ u جدا می‌شود. حجم R را می‌توان از قضیهٔ زیرحساب کرد.

قضیهٔ ۷.۲. فرض کنیم R یک جسم کاوالیری در A با تابع مساحت مقطع عرضی a_R که بربازهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر و در خارج $[a, b]$ صفر است باشد. در اینصورت حجم R مساوی است با انتگرال مساحت مقطع عرضی:

$$v(R) = \int_a^b a_R(u)du.$$

برهان. توابع پله‌ای s و t را طوری اختیار می‌کنیم که بر $[a, b]$ داشته باشیم $s \leqslant a_R \leqslant t$، و s و t را درخارج $[a, b]$ صفرتعریف می‌کنیم. برای هر زیربازهٔ $[a, b]$ که بر آن s ثابت باشد می‌توانیم جسمی استوانه‌ای را در نظر آوریم (مثلاً یک استوانهٔ مستدیر قائم) که این طور ساخته شده باشد که مساحت مقطع عرضی آن براین زیربازه همان مقدار ثابت s را داشته باشد. اجتماع این استوانه‌هاروی همهٔ بازه‌های ثبات s جسمی است چون S که حجمش $v(S)$، بنا برجمعپذیری، مساوی انتگرال $\int_a^b s(u)du$ می‌باشد. بهمین نحو، جسمی مثل T، مساوی اجتماعی از استوانه‌ها، وجود دارد که حجم آن $v(T) = \int_a^b t(u)du$ خواهد بود. اما، بازای هر u در $[a, b]$،

$a_S(u) = s(u) \leqslant a_R(u) \leqslant t(u) = a_T(u)$، پس اصل کاوالیری ایجاب می‌کند که $v(S) \leqslant v(R) \leqslant v(T)$. بعبارت دیگر، $v(R)$ در نامساویهای

$$\int_a^b s(u)du \leqslant v(R) \leqslant \int_a^b t(u)du,$$

بازای کلیهٔ توابع پله‌ای s و t صادق در $s \leqslant a_S \leqslant t$ بر $[a, b]$، صدق می‌نماید. چون a_S بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است نتیجه می‌شودکه $v(R) = \int_a^b a_S(u)du$.

مثال. حجم یک جسم دوار. فرض کنیم f تابعی باشد که بر بازهٔ $[a, b]$ نامنفی و انتگرالپذیر است. چنانچه مجموعهٔ عرضی این تابع حول محور x بچرخد جسمی دوار را می‌پیماید. هر مقطع عرضی بریده شده توسط یک صفحهٔ عمود برمحور x قرصی مستدیر است. مساحت قرص مستدیر بریده شده در نقطهٔ x برابر $\pi f^2(x)$ است که در آن $f^2(x)$ بمعنی مربع $f(x)$ می‌باشد. بنابراین، طبق‌قضیهٔ ۷.۲، حجم جسم (چنانچه جسم در A باشد) مساوی انتگرال $\int_a^b \pi f^2(x)dx$ (در صورت وجود) خواهد بود. بخصوص، اگر بازای $-r \leqslant x \leqslant r$ داشته باشیم $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$، مجموعهٔ عرضی f قرصی نیم‌مستدیر بشعاع r بوده‌وجسم پیموده‌شده‌کره‌ای بشعاع r می‌باشد. کره محدب است. حجم آن مساوی است با

$$\int_{-r}^r \pi f^2(x)dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

کلیتر بگوئیم، فرض کنیم دوتابع نامنفی f و g داریم که بر بازهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر بوده و در $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ صدق نمایند. وقتی ناحیهٔ بین نمودارهای آنها حول محور x می‌چرخد جسمی دوار را می‌پیماید بطوری که هر مقاطع عرضیی که توسط صفحهٔ عمود برمحور x در نقطهٔ x از آن جدا می‌شود یک حلقهٔ دایره (ناحیه‌ای محدود به دو دایرهٔ متحدالمرکز) است با مساحت $\pi g^2(x) - \pi f^2(x)$. بنابراین، اگر $g^2 - f^2$ انتگرالپذیر باشد، حجم این چنین جسم (در صورت واقع بودن در A) با انتگرال

$$\int_a^b \pi[g^2(x) - f^2(x)]dx$$

داده می‌شود.

۱۳.۲ تمرینات

۱. از انتگرالگیری استفاده کرده حجم مخروط مستدیر قائمی را که از دوران مجموعهٔ عرضی تابع خطی $f(x) = cx$ روی بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant b$ تولید می‌شود محاسبه‌کنید. نشان دهید که حجم حاصل یکسوم مساحت قاعده ضربدر ارتفاع مخروط است.

در هر یک از تمرینات ۲ تا ۷ حجم جسمی را که از دوران مجموعهٔ عرضی تابع f روی بازهٔ تعیین شده تولید می‌شود محاسبه کنید. هر یک از مجموعه‌های عرضی را رسم کنید.

۲. $f(x)=\sqrt{x}$، $0 \leqslant x \leqslant 1$. ۵. $f(x)=\sin x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

۳. $f(x)=x^{1/4}$، $0 \leqslant x \leqslant 1$. ۶. $f(x)=\cos x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

۴. $f(x)=x^{2}$، $-1 \leqslant x \leqslant 2$.

۷. $f(x)=\sin x+\cos x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

در هر یک از تمرینات ۸ تا ۱۱ ناحیهٔ بین نمودارهای f و g را رسم کنید و حجم جسمی را که از دوران این ناحیه حول محور x پدید می‌آید محاسبه نمائید.

۸. $f(x)=\sqrt{x}$، $g(x)=1$، $0 \leqslant x \leqslant 1$.

۹. $f(x)=\sqrt{x}$، $g(x)=x^{2}$، $0 \leqslant x \leqslant 1$.

۱۰. $f(x)=\sin x$، $g(x)=\cos x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$.

۱۱. $f(x)=\sqrt{4-x^{2}}$، $g(x)=1$، $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$.

۱۲. نمودارهای $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x/2$ را روی بازهٔ $[0, 2]$ بکشید. عدد t را، که $2 > t > 1$، چنان بیابید که وقتی ناحیهٔ بین نمودارهای f و g روی بازهٔ $[0, t]$ حول محور x بچرخد جسم دواری را بپیماید که حجمش مساوی $\pi t^{3}/3$ باشد.

۱۳. چنانچه در یک کرهٔ توپر بشعاع $2r$ سوراخی بشعاع r در امتداد مرکز ایجاد کنیم چه حجمی از آن کاسته خواهد شد؟

۱۴. یک حلقهٔ دستمال سفره این طور تشکیل می‌شود که در امتداد مرکز یک کرهٔ توپر سوراخی استوانه‌ای بطور متقارن ایجاد کنیم. چنانچه طول سوراخ $2h$ باشد ثابت کنید حجم حلقهٔ دستمال سفره برابر $\pi a h^{3}$ است که در آن a عدد گویائی می‌باشد.

۱۵. جسمی دارای قاعدهٔ مستدیری بشعاع ۲ است. هرمقطع عرضی بریده شده توسط صفحه‌ای عمود بر یک قطر ثابت آن یک مثلث متساوی الاضلاع می‌باشد. حجم جسم را حساب کنید.

۱۶. مقاطع عرضی یک جسم مربعهائی هستند عمود برمحور x که مراکزشان براین محور واقعند. چنانچه مربع قطع شده در x بضلع $2x^{2}$ باشد حجم جسم را بین $x=0$ و $x=a$ بیابید. شکل را رسم کنید.

۱۷. حجم جسمی را بیابید که مقطع عرضی ایجاد شده بوسیلهٔ صفحه‌ای عمود بر محور x، بازای هر x در بازهٔ $0 \leqslant x \leqslant h$، دارای مساحت $ax^{2}+bx+c$ باشد. حجم را برحسب مساحت B_1، M، و B_2 مقاطع عرضی که بترتیب متناظر $x=0$، $x=h/2$، و $x=h$ می‌باشندبیان دارید. دستور حاصل به‌دستور منشورگون معروف است.

۱۸. ناحیهٔ واقع در صفحهٔ xy مرکب از کلیهٔ نقاط (x, y) را که در نامساویهای همزمان $0 \leqslant x \leqslant 2$ و $x^{2}/4 \leqslant y \leqslant 1$ صدق می‌کنند رسم نمائید. حجم جسم حاصل از دوران این ناحیه حول این خطوط را حساب کنید: (الف) محور x؛ (ب) محور y؛ (پ) خط قائم مار بر $(2, 0)$؛ (ت) خط افقی مار بر $(0, 1)$.

۱۴.۲ کاربرد انتگرالگیری در مفهوم کار

تاکنون کاربردهای ما از انتگرالگیری در مورد مساحت و حجم، یعنی مفاهیمی از هندسه، بوده‌اند. حال کاربردی را درمورد کار، که‌مفهومی از فیزیک است، مورد بحث قرارمی‌دهیم.

کارآن انرژی را اندازه می‌گیرد که توسط یک نیرو درحرکت یک جسم از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر صرف می‌شود. در این بخش ما فقط ساده‌ترین حالت، یعنی حرکت خطی، را درنظر می‌گیریم. یعنی فرض می‌کنیم حرکت در امتداد یک خط (که ما آن را محور x می‌گیریم) از نقطه‌ای، مثلاً $x = a$، به نقطهٔ دیگر، مثلاً $x = b$، صورت می‌گیرد، و نیز فرض می‌کنیم نیرو در امتداد این خط اثر می‌کند. می‌پذیریم که یا $a < b$ یا $b < a$. همچنین فرض می‌کنیم نیروی وارد برجسم تابعی از مکان باشد. چنانچه جسم در x باشد $f(x)$ را نیروی وارد بر آن می‌انگاریم که، درصورتی که نیرو در جهت مثبت محور x اثر کند، $f(x) > 0$ و، اگر درخلاف این جهت عمل نماید، $f(x) < 0$. وقتی نیرو ثابت باشد، مثلاً بازای هر x بین a و b داشته باشیم $f(x) = c$، کار انجام شده بوسیلهٔ f را با عدد $c \cdot (b-a)$، یعنی نیرو ضربدر تغییرمکان، تعریف می‌کنیم. کار ممکن است مثبت یا منفی باشد.

اگر نیرو با پوند و فاصله با فوت اندازه‌گیری شود کار را با پوند-فوت اندازه می‌گیریم. چنانچه نیرو به دین و فاصله به سانتیمتر (دستگاه cgs) باشد کار برحسب دین-سانتیمتر سنجیده می‌شود. هردین-سانتیمترکار یک «ارگ» نام دارد. چنانچه نیرو به نیوتن و فاصله به متر (دستگاه mks) باشد کار به نیوتن-متر خواهد بود. هر نیوتن-مترکار یک ژول گفته می‌شود. یک نیوتن $۱۰^۵$ دین و یک ژول $۱۰^۷$ ارگ است.

مثال. سنگی بوزن ۳پوند که در امتداد خطی مستقیم بطرف بالا پرتاب شده به‌ارتفاع ۱۵ فوتی رسیده و به زمین بازمی‌گردد. محور x را بسوی بالا در امتداد خط حرکت می‌گیریم. نیروی ثابت ثقل بطرف پائین اثر می‌کند، پس بازای هر x که $۰ \leqslant x \leqslant ۱۵$، $f(x) = -۳$. کار نیروی‌ثقل درحرکت سنگ از، مثلاً، $x =$ ۶ فوت تا $x =$ ۱۵ فوت برابر است با $-۳ \cdot (۱۵-۶) =$ -۲۷ پوند-فوت. وقتی همین سنگ از $x =$ ۱۵ فوت تا $x =$ ۶ فوت سقوط می‌کند کار نیروی ثقل‌مساوی $-۳ \cdot (۶-۱۵) =$ ۲۷ پوند-فوت خواهد بود.

حال فرض کنیم نیرو لزوماً ثابت نبوده بلکه تابع مفروضی ازمکان باشد که بربازه‌ای که a و b را بهم وصل می‌کند تعریف شده است. می‌پرسیم کار f درحرکت جسمی از a تا b را چگونه تعریف کنیم؟ گوئیم نحوهٔ عمل تقریباً بهمان صورتی است که درمورد مساحت و حجم کردیم. چند خاصیت کار را که نیازهای فیزیکی به ما تلقین می‌کنند بیان می‌داریم. بعد ثابت می‌کنیم که، درمورد هرتعریفی از کار که این خواص را داشته باشد، کار تابع نیروی انتگرالپذیر f مساوی انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ خواهد بود.

خواص اساسی کار. فرض‌کنیم $W_a^b(f)$ کار تابع نیروی f را درحرکت جسمی از a به b

نشان دهد. دراینصورت کار از خواص زیر برخوردار است:

۱. خاصیت جمعپذیری. هرگاه $a < c < b$ آنگاه $W_a^b(f) = W_a^c(f) + W_c^b(f)$.

۲. خاصیت یکنوائی. هرگاه $g \leqslant f$ بر $[a, b]$ باشدآنگاه $W_a^b(f) \leqslant W_a^b(g)$.
یعنی نیروی بزرگتر کار بیشتر انجام می‌دهد.

۳. دستور مقدماتی. هرگاه f ثابت باشد، مثلاً بازای هر x دربازهٔ باز (a, b) داشته باشیم $f(x) = c$، آنگاه $W_a^b(f) = c \cdot (b - a)$.

خاصیت جمعپذیری را می‌توان باستقرا به هر تعداد متناهی بازه تعمیم داد. یعنی، اگر $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$، داریم

$$W_a^b(f) = \sum_{k=1}^{n} W_k$$

که در آن W_k کار f از x_{k-1} تا x_k می‌باشد. بویژه، اگر نیرو تابع پله‌ای s باشد که بر بازهٔ باز (x_{k-1}, x_k) مقدار ثابت s_k را بگیرد، خاصیت ۳ چنین می‌گوید که $W_k = s_k \cdot (x_k - x_{k-1})$، پس خواهیم داشت

$$W_a^b(s) = \sum_{k=1}^{n} s_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \int_a^b s(x)dx.$$

لذا کار درمورد توابع پله‌ای بصورت انتگرال بیان شده است. حال اثبات اینکه این مطلب بطور کلیتری برقرار است آسان می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۲. فرض کنیم کار برای رده‌ای از توابع نیروی f طوری تعریف شده باشد که خواص ۱، ۲ و ۳ را دارا باشد. در اینصورت کار تابع نیروی انتگرالپذیر f در حرکت جسمی از a تا b برابر است با انتگرال f، یعنی

$$W_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

برهان. فرض کنیم s و t دو تابع پله‌ای باشند که در نامساویهای $s \leqslant f \leqslant t$ بر $[a, b]$ صدق می‌کنند. خاصیت یکنوائی کار چنین می‌گوید که $W_a^b(s) \leqslant W_a^b(f) \leqslant W_a^b(t)$.
لکن $W_a^b(s) = \int_a^b s(x)dx$ و $W_a^b(t) = \int_a^b t(x)dx$، پس عدد $W_a^b(f)$ درنامساویهای

$$\int_a^b s(x)dx \leqslant W_a^b(f) \leqslant \int_a^b t(x)dx,$$

بازای کلیهٔ توابع پله‌ای s و t صادق در $s \leqslant f \leqslant t$ بر $[a, b]$، صدق خواهد کرد. از آنجا که f بر $[a, b]$ انتگرالپذیر است نتیجه می‌شود که $W_a^b(f) = \int_a^b f(x)dx$.

توجه: بسیاری از مؤلفان کار را فقط بصورت انتگرال تابع نیرو تعریف می‌کنند. بحث پیشگفته انگیزهٔ این تعریف می‌باشد.

مثال. کار لازم برای کشیدن یك فنر. فرض می‌کنیم نیروی لازم $f(x)$ برای آنکه طول طبیعی فنری فولادی باندازهٔ x افزایش یابد متناسب با x باشد (قانون هوك). محور x را در امتداد محور فنر قرار می‌دهیم. چنانچه نیروی کشنده درجهت مثبت محور اثر کند خواهیم داشت $f(x) = cx$ که در آن ثابت فنر c مثبت است. (اگر نیروی $f(x)$ را بازای مقدار خاصی از $x \neq 0$ بدانیم c را می‌شود معین کرد.) کار لازم برای کشیدن فنر باندازهٔ a عبارت‌است از $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a cxdx = ca^2/2$، که عددی است متناسب با مجذور تغییرمکان.

در جلد ۲، بکمک انتگرالهای خط، کار مربوط به حرکاتی که در امتداد منحنیهائی غیر از خطوط مستقیم صورت می‌گیرند بحث خواهد شد.

۱۵.۲ تمرینات

در تمرینات ۱ و ۲ فرض کنید نیروی وارد بر فنر از قانون هوک تبعیت می‌کند.

۱. اگر یک نیروی ده پوندی فنر قابل ارتجاعی را باندازهٔ یک اینچ بکشد کار انجام شده برای کشیدن آن باندازهٔ یک فوت چقدر است؟

۲. فنری طول طبیعی‌اش یک متر است. نیروی ۱۰۰ نیوتنی آن‌را به ۰٫۹ متر جمع‌می‌کند. چند ژول کار لازم است تا آن را به نصف طول طبیعی‌اش برساند؟ وقتی ۲۰ ژول کار صرف شود طول فنر چه خواهد بود؟

۳. جسمی درامتداد محور x با نیروی محرک $f(x) = 3x^2 + 4x$ نیوتن حرکت‌می‌کند. حساب کنید چند ژول کار با این نیرو انجام می‌گیرد تا جسم (الف) از $x = 0$ به $x =$ ۷ متر برسد؛ (ب) از $x =$ ۲ متر به $x =$ ۷ متر برسد.

۴. جسمی در امتداد محور x با نیروی محرك درجهٔ دوم $f(x) = ax^2 + bx$ دین حرکت می‌کند. a و b را در صورتی حساب کنید که ۹۰۰ ارگ کار لازم باشد تا جسم را ده سانتیمتر از مبدأ دور سازد و، وقتی ۵ سانتیمتر $= x$، نیرو ۶۵ دین باشد.

۵. کابلی بطول ۵۰ فوت و وزن ۴ پوند در فوت از یک چرخ چاه آویزان است. کار انجام شده را در صورتی که ۲۵ فوت کابل دور چرخ بپیچد محاسبه نمائید. از تمام نیروها غیر از نیروی ثقل صرفنظر کنید.

۶. تمرین ۵ را در حالتی حل کنید که به انتهای کابل وزنه‌ای ۵۰ پوندی وصل‌شده باشد.

۷. وزنه‌ای ۱۵۰ پوندی به یک سرزنجیر قابل انعطاف بلندی بوزن ۲ پوند در فوت‌وصل شده است. ابتدا وزنه درحالی که ۱۰ فوت‌از زنجیرروی لبهٔساختمانی‌بارتفاع ۱۰۰فوت

قرار گرفته آویزان است. از تمام نیروها بجز نیروی ثقل صرفنظر کرده وکار نیروی ثقل را تا وقتی که وزنه به ۱۰ فوتی زمین می‌رسد محاسبه نمائید.

۸. در تمرین ۷ فرض کنید زنجیر فقط ۶۰ فوت بوده و بگذاریم وزنــه و زنجیر از همان موضع اولیهٔ قبلی به زمین بیفتد. مقدار کــار نیروی ثقل را وقتی وزنه بــه زمین می‌رسد حساب کنید.

۹. فرض کنید $V(q)$ ولتاژ لازم برای شارژ یک خازن بانــدازهٔ q باشد. کار لازم بــرای شارژ خازنی از $q = a$ تا $q = b$ بــا انتگــرال $\int_a^b V(q)dq$ تعریف می‌شود. چنانچه ولتاژ با بار الکتریکی متناسب باشد ثابت کنید کار مورد نیاز برای گذاشتن بار Q بـر یک خازن خالــی برابر $QV(Q)/۲$ است.

۱۶.۲ مقدار متوسط یك تابع

اغلب در کارهای علمی لازم است چند اندازه‌گیری تحت شرائطی مشابه انجام شود و بعد، برای تلخیص اطلاعات، متوسط یا میانگین آنها محاسبه‌گردد. متوسطهای مفید متعددی وجود دارند که معمولی‌ترین آنها میانگین حسابی است. اگــر a_1، a_2، . . .، a_n، n عدد حقیقی باشند میانگین حسابی آنها $\bar{a}$ با معادلهٔ

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad (۱۷.۲)$$

تعریف می‌شود. هرگاه اعداد a_k مقادیر تابع f در n نقطهٔ متمایز باشند، مثلاً $a_k = f(x_k)$، آنگاه عدد

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

میانگین حسابی‌مقادیر تابعی $f(x_1)$، . . .، $f(x_n)$ خواهدبود. می‌توانیم این‌مفهوم راتعمیم داده و مقدار متوسط را نه فقط برای تعدادی متناهی از مقادیر $f(x)$ بلکه برای کلیهٔ مقادیر $f(x)$، وقتی x در یک‌بازه تغییر می‌کند، حساب‌کنیم. تعریف زیر این مقصود را برمی‌آورد.

تعریف مقدار متوسط یك تابع بریك بازه. اگر f بر بازهٔ $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد $A(f)$، یعنی مقدار متوسط f بر $[a, b]$، را با دستور

$$A(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (۱۸.۲)$$

تعریف می‌کنیم.

این دستور زمانی که f نامنفی باشد ازتعبیر هندسی ساده‌ای برخوردار است. چنانچه بشکل $(b-a)A(f) = \int_a^b f(x)dx$ نوشته شود بیانگر آن است که مستطیلی بــارتفاع $A(f)$ و قاعدهٔ $[a, b]$ مساحتی مساوی مساحت مجموعهٔ عرضی f روی $[a, b]$ دارد.

حال می‌توانیم نشان دهیم که دستور (۱۸.۲) عملاً تعمیمی از مفهوم میانگین حسابی است. فرض کنیم f یک تابع پله‌ای باشد که بر n زیربازهٔ مساوی از $[a, b]$ ثابت است. بطور دقیق فرض می‌کنیم بازای n ,$k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $x_k = a + k(b-a)/n$ و، اگر $x_{k-۱} < x < x_k$، $f(x) = f(x_k)$. دراینصورت $x_k - x_{k-۱} = (b-a)/n$، پس خواهیم داشت

$$A(f) = \frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{۱}{b-a}\sum_{k=۱}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} = \frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} f(x_k).$$

لذا، درمورد توابع پله‌ای،متوسط $A(f)$ همان میانگین حسابی مقادیر $f(x_۱)$، . . .، $f(x_n)$ است که بربازه‌های ثابت گرفته شده‌اند.

اغلب در (۱۷.۲) از میانگینهای‌حسابی وزندار بجای‌میانگین حسابی معمولی‌استفاده می‌شود. چنانچه $w_۱$، $w_۲$، . . .، w_n، n عدد نامنفی (بنام وزنها) باشند که همه صفر نیستند، میانگین حسابی وزندار $\bar{a}$ از $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n با دستور

$$\bar{a} = \frac{\sum_{k=۱}^{n} w_k a_k}{\sum_{k=۱}^{n} w_k}$$

تعریف می‌گردد. وقتی تمام وزنهامساوی باشند این تعریف به‌تعریف میانگین حسابی‌معمولی تحویل می‌شود. تعمیم این مفهوم به توابع انتگرالپذیر با دستور

$$A(f) = \frac{\int_a^b w(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)dx} \qquad (۱۹.۲)$$

داده می‌شود که در آن w یک تابع وزن نامنفی است با این فرض که $\int_a^b w(x)dx \neq ۰$.

متوسطهای وزندار، علاوه برریاضیات، در فیزیک و مهندسی بسیار بکار می‌آیند. مثلاً میلهٔ راستی بطول a را درنظر بگیرید که از ماده‌ای با چگالی متغیر ساخته شده است. میله را در امتداد مثبت محور x قرار می‌دهیم بطوری که یک سرش در مبدأ ۰ باشد، و فرض می‌کنیم $m(x)$ جرم قسمتی از میله باشد که طولش (از ۰ اندازه‌گیری می‌شود) x است. هرگاه بازای تابع انتگرالپذیری چون ρ (ρ حرف یونانی رو است) داشته باشیم $m(x) = \int_0^x \rho(t)dt$ آنگاه ρ را جرم‌مخصوص میله می‌نامند. یک میلهٔ یکشکل میله‌ای‌است که جرم مخصوص آن ثابت است. انتگرال $\int_0^a x\rho(x)dx$ را گشتاور اول میله حول ۰ می‌نامند، و مرکز جرم نقطه‌ای است که مختص x آن

مرکز جرم $$\boxed{\bar{x} = \frac{\int_0^a x\rho(x)dx}{\int_0^a \rho(x)dx}}$$

می‌باشد. این مثالی است از یک متوسط وزندار. در اینجا ما تابع فاصلهٔ $f(x) = x$ را متوسط‌گیری می‌کنیم بطوری که جرم مخصوص ρ بعنوان تابع وزن بکار رفته است.

انتگرال $\int_0^a x^2\rho(x)dx$ را گشتاور دوم، یا گشتاور ماند، میله حول ۰ می‌خوانند، و عدد مثبت r که از دستور

شعاع چرخش

$$\boxed{r^2 = \frac{\int_0^a x^2\rho(x)dx}{\int_0^a \rho(x)dx}}$$

بدست می‌آید شعاع چرخش میله نام دارد. در این حالت تابعی که متوسط‌گیری می‌شود مربع تابع فاصله، یعنی $f(x) = x^2$، است و جرم مخصوص ρ بعنوان تابع وزن بکار رفته است.

متوسطهای وزندار از این قبیل در نظریهٔ ریاضی احتمال نیز ظاهر می‌شوند که در آنجا مفاهیم امید ریاضی و پراش همان نقشهای مرکز جرم و گشتاور ماند را دارند.

۱۷.۲ تمرینات

در تمرینهای ۱ تا ۱۰ متوسط $A(f)$ را برای تابع دادهٔ شدهٔ f روی بازهٔ تعین شده حساب کنید.

۱. $f(x) = x^2$، $a \leqslant x \leqslant b$.

۲. $f(x) = x^2 + x^3$، $0 \leqslant x \leqslant 1$.

۳. $f(x) = x^{1/2}$، $0 \leqslant x \leqslant 4$.

۴. $f(x) = x^{1/3}$، $1 \leqslant x \leqslant 8$.

۵. $f(x) = \sin x$، $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

۶. $f(x) = \cos x$، $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

۷. $f(x) = \sin 2x$، $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

۸. $f(x) = \sin x \cos x$، $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

۹. $f(x) = \sin^2 x$، $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

۱۰. $f(x) = \cos^2 x$، $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

۱۱. (الف) اگر بازای $0 \leqslant x \leqslant a$ داشته باشیم $f(x) = x^2$، عدد c را بین ۰ و a چنان بیابید که $f(c)$ مساوی متوسط f در $[0, a]$ باشد.
(ب) قسمت (الف) را درصورتی حل کنید که $f(x) = x^n$ که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی می‌باشد.

۱۲. فرض کنید بازای $0 \leqslant x \leqslant 1$، $f(x) = x^2$. مقدار متوسط f بر $[0, 1]$ مساوی ۱/۳ است. تابع‌وزن‌نامنفی w راچنان بیابید که متوسط وزندار f بر $[0, 1]$ بصورتی که با معادلهٔ (۱۹.۲) تعریف شده این مقادیر باشد:
(الف) ۱/۲؛ (ب) ۳/۵؛ (پ) ۲/۳.

۱۳. فرض کنید $A(f)$ متوسط f روی بازهٔ $[a, b]$ را نشان دهد. ثابت کنید متوسط دارای خواص زیر است:

(الف) خاصیت جمعپذیری: $A(f + g) = A(f) + A(g)$.

(ب) خاصیت همگنی: اگر c عدد حقیقی دلخواهی باشد $A(cf) = cA(f)$.

(پ) خاصیت یکنوائی: اگر $f \leqslant g$ بر $[a, b]$ باشد $A(f) \leqslant A(g)$.

۱۴. از خواص تمرین ۱۳ کدامها در مورد متوسطهای وزندار که بصورت معادلهٔ (۱۹.۲) تعریف می‌شوند معتبرند؟

۱۵. فرض کنید $A_a^b(f)$ نشانگر متوسط f بر بازهٔ $[a, b]$ باشد.

(الف) اگر $a < c < b$ ثابت‌کنید عددی‌مثل t صادق در $۰ < t < ۱$ هست‌بطوری که $A_a^b(f) = tA_a^c(f) + (۱ - t)A_c^b(f)$. پس $A_a^b(f)$ میانگین‌حسابی وزندار $A_a^c(f)$ و $A_c^b(f)$ می‌باشد.

(ب) ثابت کنید قسمت (الف) برای متوسطهای وزندار که بصورت معادلهٔ (۱۹.۲) تعریف می‌شوند نیز برقرار است.

هر یک از تمرینات ۱۶ تا ۲۱ دربارهٔ میله‌ای‌است بطول L واقع برمحور x که‌یک سرش درمبدأ است. برای جرم‌مخصوص ρ که درهرحالت توصیف شده اینهارا حساب‌کنید: (الف) مرکز جرم میله، (ب) گشتاور ماند حول مبدأ، و (پ) شعاع چرخش.

۱۶. $\rho(x) = ۱$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L$.

۱۷. $\rho(x) = ۱$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L/۲$، $\rho(x) = ۲$ بازای $L/۲ \leqslant x \leqslant L$.

۱۸. $\rho(x) = x$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L$.

۱۹. $\rho(x) = x$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L/۲$، $\rho(x) = L/۲$ بازای $L/۲ \leqslant x \leqslant L$.

۲۰. $\rho(x) = x^۲$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L$.

۲۱. $\rho(x) = x^۲$ بازای $۰ \leqslant x \leqslant L/۲$، $\rho(x) = L^۲/۴$ بازای $L/۲ \leqslant x \leqslant L$.

۲۲. جرم مخصوص ρ را چنان معین کنید که مرکز جرم میله‌ای بطول L در فاصلهٔ $L/۴$ از یک سر میله باشد.

۲۳. در یک مدار الکتریکی ولتاژ $e(t)$ در لحظهٔ t با دستور $e(t) = ۳\sin ۲t$ داده شده است. این مقادیر را حساب کنید:

(الف) ولتاژ متوسط در فاصلهٔ زمانی $[۰, \pi/۲]$؛

(ب) جذر میانگین مربعات ولتاژ؛ یعنی ریشهٔ‌دوم متوسط تابع $e^۲$ در بازهٔ $[۰, \pi/۲]$.

۲۴. در یک مدار الکتریکی ولتاژ $e(t)$ و شدت جریان $i(t)$ در لحظهٔ t با دستورهای $e(t) = ۱۶۰ \sin t$ و $i(t) = ۲\sin(t - \pi/۶)$ داده شده‌اند. توان متوسط‌مساوی

$$\frac{۱}{T}\int_۰^T e(t)i(t)dt$$

تعریف می‌شود که در آن T دورهٔ‌تناوب هم‌ولتاژ و هم شدت جریان است. T را تعیین کرده و توان متوسط را محاسبه نمائید.

۱۸۰۲ انتگرال بعنوان تابعی از حد بالائی. انتگرالهای نامعین

در این بخش فرض می‌کنیم f چنان تابعی باشد که انتگرال $\int_a^x f(t)dt$ بازای هر x در بازهٔ $[a, b]$ وجود دارد. a و f را ثابت گرفته و به بررسی این انتگرال بعنوان تابعی از x می‌پردازیم. مقدار این انتگرال را با $A(x)$ نشان می‌دهیم، پس چنین داریم:

$$\text{اگر } a \leqslant x \leqslant b\text{،}\quad A(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (۲۰.۲)$$

معادله‌ای باین شکل به ما توان ساختن تابع جدید A از تابع مفروض f را می‌بخشد بطوری که مقدار A در هر نقطهٔ $[a, b]$ با معادلهٔ (۲۰.۲) معین شده است. گاهی از تابع A بعنوان یک انتگرال نامعین f یاد می‌شود، و می‌گویند A از f بوسیلهٔ انتگرالگیری حاصل شده است. بجای انتگرال نامعین می‌گوئیم یک انتگرال نامعین زیرا A به حد پائینی a نیز وابسته است. مقادیر مختلف a توابع متفاوت A را بدست خواهند داد. هرگاه از حد پائینی متفاوتی، مثلاً c، استفاده کرده و انتگرال نامعین دیگر F را با معادلهٔ

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

تعریف نمائیم آنگاه خاصیت جمعپذیری به ما می‌گوید که

$$A(x) - F(x) = \int_a^x f(t)dt - \int_c^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt,$$

و درنتیجه تفاضل $A(x) - F(x)$ مستقل از x خواهد بود. بنابراین هر دو انتگرال نامعین یک تابع فقط در مقداری ثابت با هم فرق دارند (این ثابت به انتخاب a و c وابسته است).

وقتی انتگرال نامعینی از f معلوم است می‌توان مقدار انتگرالی چون $\int_a^b f(t)dt$ را با تفریقی ساده حساب کرد. بعنوان مثال، اگر n عدد صحیح نامنفیی باشد، دستور قضیهٔ ۱۵.۱ را داریم که

$$\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

و خاصیت جمعپذیری ایجاب می‌کند که

$$\int_a^b t^n\,dt = \int_0^b t^n\,dt - \int_0^a t^n\,dt = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

در حالت کلی، هرگاه $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$، آنگاه خواهیم داشت

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_c^b f(t)\,dt - \int_c^a f(t)\,dt = F(b) - F(a).} \qquad (۲۱.۲)$$

انتخاب دیگری از c فقط $F(x)$ را باندازهٔ یک ثابت تغییر می‌دهد؛ این تفاضل $F(b) - F(a)$ را تغییر نمی‌دهد زیرا مقدار ثابت در تفریق حذف خواهد شد.

چنانچه از علامت خاص

$$\boxed{F(x)\Big|_a^b}$$

برای نمایش تفاضل $F(b) - F(a)$ استفاده کنیم می‌توانیم معادلهٔ (۲۱.۲) را باین صورت بنویسیم:

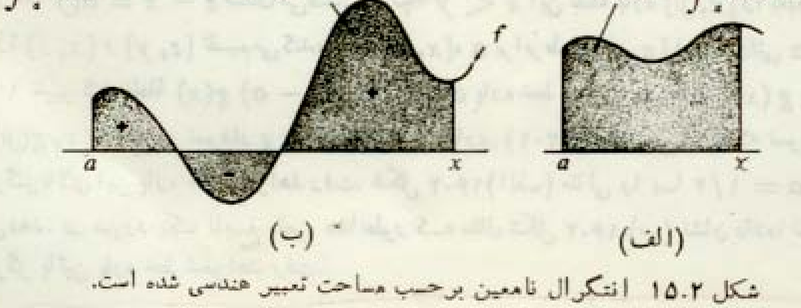
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

البته رابطهٔ هندسی بسیار ساده‌ای میان تابع f و انتگرالهای نامعین آن وجود دارد. مثالی درشکل ۱۵.۲(الف) نموده شده که درآن f تابعی است نامنفی وعدد $A(x)$ مساوی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار پائین نمودار f از a تا x می‌باشد. چنانچه f، مانند شکل ۱۵.۲ (ب)، هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی را بپذیرد انتگرال $A(x)$ مجموع مساحات نواحی بالای محور x منهای مجموع مساحتهای پائین این محور را بدست خواهد داد.

بسیاری از توابعی که در رشته‌های مختلف علوم ظاهر می‌شوند دقیقاً باین شکلند، بصورت انتگرالهای نامعینی از توابع دیگر. این یکی از دلائلی است که چرا بخش وسیعی از حساب دیفرانسیل و انتگرال به بررسی انتگرالهای نامعین اختصاص دارد.

گاهی دانستن خاصیت ویژه‌ای از f خاصیت ویژهٔ متناظری برای انتگرال نامعین ایجاب می‌کند. بعنوان مثال، هرگاه f بر $[a, b]$ نامنفی باشد، آنگاه انتگرال نامعین A صعودی است زیرا هر موقع $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ خواهیم داشت

$$A(y) - A(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt \geqslant 0. \quad \times$$



شکل ۱۵.۲ انتگرال نامعین برحسب مساحت تعبیر هندسی شده است.

این با تعبیر هندسی این معنی را می‌دهد که مساحت زیر نمودار یک تابع نامنفی از a تا x نمی‌تواند با افزایش x نزول کند.

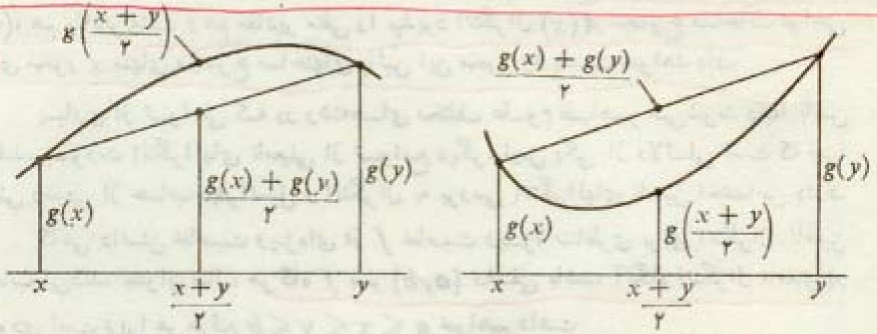
حال خاصیت دیگری را مطرح می‌کنیم که بطور هندسی بلافاصله مشهود نیست. فرض کنیم f بر $[a, b]$ صعودی باشد. می‌توانیم ثابت کنیم کـه انتگرال نامعین A از خاصیتی بنام تحدب برخوردار است. همانطور کـه در شکل ۱۶.۲ (الف) منعکس شده نمودار آن بطرف بالا خم می‌شود؛ یعنی وتری که هـر دو نقطهٔ نمودار را بهم وصل کند همیشه بالای نمودار جا می‌گیرد. تعریف تحلیلی تحدب را می‌توان بصورت زیر داد:

تعریف تابع محدب. تابع g را بر بازهٔ $[a, b]$ محدب نامند هرگاه بازای هر x و y در $[a, b]$ و هر α ی صادق در $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم

$$g(z) \leqslant \alpha g(y) + (1-\alpha) g(x) \quad \text{که درآن} \quad z = \alpha y + (1 - \alpha) x. \qquad (22.2)$$

می‌گوئیم g بر $[a, b]$ مقعر است اگر که نامساوی عکس برقرار باشد، یعنی

$$g(z) \geqslant \alpha g(y) + (1 - \alpha) g(x) \quad \text{که در آن} \quad z = \alpha y + (1 - \alpha)x.$$



(ب) یک تابع مقعر (الف) یک تابع محدب

شکل ۱۶.۲ تعبیر هندسی تحدب و تقعر.

ایـن نامساویها تعبیر هندسی ساده‌ای دارنـد. نقطهٔ $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$ در $z - x = \alpha(y - x)$ صدق می‌کند. چنانچه $x < y$ این نقطه بازهٔ $[x, y]$ را به‌دو زیر-بازهٔ $[x, z]$ و $[z, y]$ تقسیم می‌کند، طول $[x, z]$، α برابرطول $[x, y]$ است. وقتی α از ۰ تا ۱ تغییر کند نقطهٔ $\alpha g(y) + (1 - \alpha) g(x)$ پاره خط واصل بین نقاط $(x, g(x))$ و $(y, g(y))$ واقع بر نمودار g را می‌پیماید. نامساوی (۲۲.۲) چنین می‌گوید که نمودار g هرگز بالای این پاره خط نخواهد رفت. شکل ۱۶.۲ (الف) مثالی را بـا $\alpha = 1/2$ نشان می‌دهد. در مـورد یک تابـع مقعر، همانطور کـه مثال شکل ۱۶.۲ (ب) نشان داده، نمودار هرگز پائین پاره خط نخواهد رفت.

قضیهٔ ۹.۲. فرض کنیم $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. دراینصورت A بر هـر بازه‌ای که f در آن صعودی باشد محدب و برهر بازه‌ای که f در آن نزولی باشد مقعر است.

برهان. فرض کنیم f بر $[a, b]$ صعودی باشد، انتخاب می‌کنیم $y > x$، و قرار می‌دهیم $z = \alpha y + (1 - \alpha)x$. باید ثابت کنیم $A(z) \leqslant \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$. گوئیم از آنجا که $A(z) = \alpha A(z) + (1 - \alpha)A(z)$ حکم مورد نظر معادل

$$\alpha A(z) + (1 - \alpha)A(z) \leqslant \alpha A(y) + (1 - \alpha)A(x)$$

یا

$$(1 - \alpha)[A(z) - A(x)] \leqslant \alpha [A(y) - A(z)]$$

خواهد بود. چون داریم $A(z) - A(x) = \int_x^z f(t)\,dt$ و $A(y) - A(z) = \int_z^y f(t)\,dt$ پس باید ثابت کنیم که

$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leqslant \alpha \int_z^y f(t)\,dt. \qquad (۲۳.۲)$$

اما f صعودی است، پس نامساویهای زیر را خواهیم داشت:

اگر $x \leqslant t \leqslant z$، $f(t) \leqslant f(z)$ و، اگر $z \leqslant t \leqslant y$، $f(z) \leqslant f(t)$.

با انتگرالگیری از این نامساویها درمی‌یابیم که

$$\int_x^z f(t)\,dt \leqslant f(z)(z - x) \quad \text{و} \quad f(z)(y - z) \leqslant \int_z^y f(t)\,dt.$$

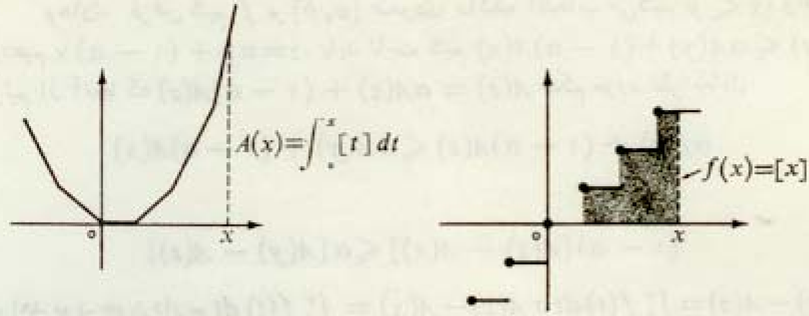
اما $(1 - \alpha)(z - x) = \alpha(y - z)$، پس این نامساویها چنین به ما می‌دهند:

$$(1-\alpha)\int_x^z f(t)\,dt \leqslant (1-\alpha)f(z)(z-x) = \alpha f(z)(y-z) \leqslant \alpha \int_z^y f(t)\,dt,$$

که (۲۳.۲) را باثبات می‌رساند. این ثابت می‌کند که A وقتی f صعودی باشد محدب است. وقتی f نزولی است می‌توانیم نتیجه‌ای را که هم اکنون ثابت شد درمورد $-f$ بکار بریم.

مثال. تابع کسینوس در بازهٔ $[0, \pi]$ نزولی است. چون $\sin x = \int_0^x \cos t\,dt$ پس نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[0, \pi]$ مقعر می‌باشد. در بازهٔ $[\pi, 2\pi]$ کسینوس صعود کرده و تابع سینوس محدب خواهد بود.

شکل ۱۷.۲ خواص دیگر انتگرالهای نامعین را نشان می‌دهد. نمودار سمت چپ نمودار تابع بزرگترین عدد صحیح $f(x) = [x]$ است؛ نمودارطرف راست ازآن انتگرال نامعین $A(x) = \int_0^x [t]\,dt$ می‌باشد. تابع A بر بازه‌هائی که f ثابت باشد خطی است. ما این را با گفتن اینکه انتگرال یک تابع پله‌ای قطعه قطعه خطی است وصف می‌کنیم. همچنین ملاحظه می‌کنیم که نمودار f از پاره خطهای ناهمبندی تشکیل شده است. نقاطی برنمودار f هستند که در آنها با تغییر مختصری در x جهشی ناگهانی در مقدار تابع ایجاد می‌شود. اما توجه کنید که انتگرال نامعین متناظر این رفتار را نشان نمی‌دهد. یک تغییر



شکل ۱۷.۲ انتگرال نامعین یك تابع پله‌ای قطعه قطعه خطی است.

مختصر در x فقط تغییر کوچکی در $A(x)$ را سبب می‌شود. باین علت است کـه نمـودار A ناهمبند نیست. ایـن مبین خاصیتی است کلی از انتگرالهای نامعین بنام پیوستگی. ما در فصل بعد مفهوم پیوستگی را بتفصیل بحث کـرده و ثابت می‌کنیم انتگـرال نامعین همواره تابعی پیوسته است.

۱۹.۲ تمرینات

انتگرالهای تمرینات ۱ تا ۱۶ را حساب کنید.

۱. $\int_0^x (1+t+t^2)\, dt$

۲. $\int_0^{2y} (1+t+t^2)\, dt$

۳. $\int_{-1}^{2x} (1+t+t^2)\, dt$

۴. $\int_1^{1-x} (1-2t+3t^2)\, dt$

۵. $\int_{-2}^{x} t^2(t^2+1)\, dt$

۶. $\int_x^{x^2} (t^2+1)^2\, dt$

۷. $\int_1^x (t^{1/2}+1)\, dt$، $x>0$.

۸. $\int_x^{x^2} (t^{1/2}+t^{1/4})\, dt$، $x>0$.

۹. $\int_{-\pi}^{x} \cos t\, dt$

۱۰. $\int_0^{x^2} (\frac{1}{2}+\cos t)\, dt$

۱۱. $\int_x^{x^2} (\frac{1}{2}-\sin t)\, dt$

۱۲. $\int_0^x (u^2+\sin 3u)\, du$

۱۳. $\int_x^{x^2} (v^2+\sin 3v)\, dv$

۱۴. $\int_0^y (\sin^2 x+x)\, dx$

۱۵. $\int_0^x (\sin 2w+\cos \frac{w}{2})\, dw$

۱۶. $\int_{-\pi}^{x} (\frac{1}{2}+\cos t)^2\, dt$

۱۷. کلیهٔ مقادیر حقیقی x را بیابید که

$$\int_{\circ}^{x}(t^{\text{۲}}-t)\,dt=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_{\sqrt{\text{۲}}}^{x}(t-t^{\text{۲}})\,dt.$$

شکل مناسبی بکشید و معادله را تعبیر هندسی کنید.

۱۸. فرض کنید اگر x عدد صحیحی نباشد $f(x)=x-[x]-\text{۱/۲}$، و اگر x عدد صحیحی باشد $f(x)=\circ$. (طبق معمول، $[x]$ نشانگر بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از x است.) تابع جدید P را بصورت زیر تعریف کنید:

$$\text{بازای هر } x \text{ حقیقی } P(x)=\int_{\circ}^{x}f(t)\,dt.$$

(الف) نمودار f را روی بازهٔ $[-\text{۳},\text{۳}]$ رسم کرده و ثابت نمائید کـه f متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است: بازای هر x، $f(x+\text{۱})=f(x)$.

(ب) ثابت کنید کـه اگـر $\circ\leqslant x\leqslant \text{۱}$، $P(x)=(x^{\text{۲}}-x)/\text{۲}$، و P متناوب با دورهٔ تناوب ۱ می‌باشد.

(پ) $P(x)$ را برحسب $[x]$ بیان نمائید.

(ت) ثابت c را چنان تعیین کنید که $\int_{\circ}^{\text{۱}}[P(t)+c]\,dt=\circ$.

(ث) بازای ثابت c ی قسمت (ت) قرار دهید $Q(x)=\int_{\circ}^{x}[P(t)+c]\,dt$. ثابت کنید Q متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است و،

$$\text{اگر } \circ\leqslant x\leqslant \text{۱}\text{،}\quad Q(x)=\frac{x^{\text{۳}}}{\text{۶}}-\frac{x^{\text{۲}}}{\text{۴}}+\frac{x}{\text{۱۲}}.$$

۱۹. تابع فرد f، کـه همه جا تعریف شده، متناوب با دورهٔ تناوب ۲ بوده، و بـر هـر بازه انتگرالپذیر می‌باشد داده شده است. قرار دهید $g(x)=\int_{\circ}^{x}f(t)\,dt$.

(الف) ثابت کنید بازای هرعدد صحیح n، $g(\text{۲}n)=\circ$.

(ب) ثابت کنید g زوج بوده و متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است.

۲۰. تابـع زوج f، که همه جا تعریف شده، متناوب با دورهٔ تناوب ۲ بوده، و بر هر بازه انتگرالپذیر می‌باشد داده شده است. قرار دهید $g(x)=\int_{\circ}^{x}f(t)dt$ و $A=g(\text{۱})$.

(الف) ثابت کنید g فرد است و $g(x+\text{۲})-g(x)=g(\text{۲})$.

(ب) $g(\text{۲})$ و $g(\text{۵})$ را برحسب A حساب کنید.

(پ) g بازای چه مقداری از A متناوب با دورهٔ تناوب ۲ است؟

۲۱. دو تابع مفروض f و g بر هر بازه انتگرالپذیر بوده و خواص زیر را دارند: f فرد است، g زوج است، $f(\text{۵})=\text{۷}$، $f(\circ)=\circ$، بازای هر x، $g(x)=f(x+\text{۵})$ و $f(x)=\int_{\circ}^{x}g(t)\,dt$. ثابت کنید که (الف) بازای هر x، $f(x-\text{۵})=-g(x)$؛ (ب) $\int_{\circ}^{\text{۵}}f(t)\,dt=\text{۷}$؛ (پ) $\int_{\circ}^{x}f(t)\,dt=g(\circ)-g(x)$.