مجموعه های مرتب

① تعریف: فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه A باشد، گوییم

۱) R انعکاسی است هرگاه

$$\forall a\in A \quad (a,a)\in R$$

۲) R متعدی است هرگاه

$$\forall a,b,c\in A \quad [(a,b)\in R,\ (b,c)\in R] \Rightarrow (a,c)\in R$$

۳) R پادمتقارن است هرگاه

$$\forall a,b\in A\, [(a,b)\in R \wedge (b,a)\in R] \Rightarrow a=b$$

۴) اگر R هر سه خاصیت فوق را داشته باشد، گوییم یک ترتیب جزئی روی A است و (A,R) یک مجموعه جزئاً مرتب است.

تذکر: یک رابطه ترتیب جزئی دلخواه را معمولاً با $\leqslant$ نشان می‌دهیم ولی نباید آن را با ترتیب اعداد اشتباه کرد!

② تعریف: فرض کنید $(A, \leqslant)$ یک مجموعه جزئاً مرتب باشد. گوییم $\leqslant$ یک ترتیب کلی روی A است هرگاه به ازای هر $a,b\in A$، $a\leqslant b$ یا $b\leq a$. در اینصورت گوییم $(A, \leqslant)$ یک مجموعه کلاً مرتب است.

مثال ①: $(\mathbb{N}, \leqslant)$ یک مجموعه کلاً مرتب است.

② به ازای هر مجموعه X، $(P(X), \subseteq)$ یک مجموعه جزئاً مرتب است ولی لزوماً کلاً مرتب نیست.

③ $(\mathbb{N}, |)$، $|$ عاد کردن، یک مجموعه جزئاً مرتب است ولی کلاً مرتب نیست.

④ $(\{۲,۴,۸\}, |)$ یک مجموعه کلاً مرتب است.

⑤ $(\mathbb{R}, \leqslant)$ کلاً مرتب است.

۳) تعریف: اگر $(A, \leq)$ جزئاً مرتب و $B \subseteq A$ و $(B, \leq_{|B})$ کلاً مرتب باشد، آنگاه $(B, \leq_{|B})$ یک زنجیر در A نامیده می‌شود.

مثال: مثال ۲ فوق یک زنجیر در $(IN, |)$ است.

۴) تعریف: رابطهٔ $\leq'$ روی $IR \times IR$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(a_1, a_2) \leq' (b_1, b_2) \Longleftrightarrow (a_1 \leq b_1 \text{ و } a_2 \leq b_2)$$

سؤال: آیا $(IR \times IR, \leq')$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب است؟ آیا کلاً مرتب است؟

۵) تعریف: فرض کنید $(A, \leq)$ مجموعه‌ای جزئاً مرتب باشد و $B \subseteq A$.

۱) $u \in A$ یک کران بالای B است هرگاه به ازای هر $b \in B$، $u \geq b$.

۲) $u_0 \in A$ یک کوچکترین کران بالای B است هرگاه اولاً یک کران بالای B باشد و ثانیاً به ازای هر کران بالای B مانند u، $u_0 \leq u$.

۳) $v \in A$ یک کران پایین B است هرگاه به ازای هر $b \in B$، $v \leq b$.

۴) $v_0 \in A$ یک بزرگترین کران پایین B است هرگاه اولاً یک کران پایین B باشد، ثانیاً به ازای هر کران پایین B مانند v، $v \leq v_0$.

نکته: بزرگترین کران پایین و کوچکترین کران بالا درصورت وجود منحصر به فرد هستند. (چرا؟)

مثال. $(\mathbb{R}, \leq)$ و $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$.

الف» هر عدد در بازهٔ $[1,+\infty)$ یک کران بالای $(0,1)$ است. ضمناً کوچکترین کران بالای $(0,1)$ برابر با 1 است.

ب» هر عدد در بازهٔ $(-\infty,0]$ یک کران پایین $(0,1)$ است. درضمن بزرگترین 0 کران پایین $(0,1)$ است.

مثال. $(\mathbb{N}, |)$ و $B=\{2,3,4,10\}$

الف» یک، تنها کران پایین و بنابراین بزرگترین کران پایین B است.

ب» 60 کوچکترین کران بالای B است و 60 و هر مضرب آن یک کران بالای B است.

درواقع کوچکترین ~~مقسوم علیه~~ مضرب مشترک و بزرگترین مقسوم علیه مشترک B، همان کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین B هستند.

6 تعریف: فرض کنید $(A,\leq)$ جزئاً مرتب باشد،

1) عنصر $e\in A$ را یک عضو ماکسیمال $(A,\leq)$ گوییم هرگاه به ازای هر $a\in A$، از $e\leq a$ نتیجه شود که $e=a$ (یعنی e از هیچ عضو A، کوچکتر نباشد)

2) عنصر $e'\in A$ را یک عضو مینیمال $(A,\leq)$ گوییم هرگاه به ازای هر $a\in A$، از $a\leq e'$ نتیجه شود که $e'=a$ (یعنی e' از هیچ عضو A بزرگتر نباشد)

مثال: ① فرض کنید $A = \{\{1\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$. در اینصورت $(A, \subseteq)$ دارای عضوهای ماکسیمال $\{1,3\}$ و $\{2,3\}$ و عضو مینیمال $\{1\}$ و $\{2,3\}$ است.

② مجموعه جزئاً مرتب $(\{1,2,3,4,5\}, |)$ عضوهای ماکسیمال ۵، ۴، ۳ و دارای یک عضو مینیمال ۱ است.

تمرین: فرض کنید $X = \{a,b,c\}$ ، مجموعه جزئاً مرتب $(P(X), \subseteq)$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید $Y = \{\{a,b\}, \{c,a\}\}$

۱) همه کران های بالا و پایین Y را به عنوان زیرمجموعه ای از $(P(X), \subseteq)$ بیابید.

۲) عناصر ماکسیمال و مینیمال $(P(X), \subseteq)$ را بیابید.

۳) عناصر ماکسیمال و مینیمال $(Y, \subseteq)$ را بیابید.

حل: ① کوچکترین کران بالای Y برابر است با $\{a,b\} \cup \{c,a\} = \{a,b,c\}$ و کران بالای دیگری ندارد. ضمناً بزرگترین کران پایین Y برابر است با $\{a,b\} \cap \{c,a\} = \{a\}$. تنها کران پایین دیگر Y عبارت است از $\emptyset$.

② تنها عضو ماکسیمال $(P(X), \subseteq)$ ، عبارت است از X و تنها عضو مینیمال آن $\emptyset$ است.

③ در مجموعه جزئاً مرتب $(Y, \subseteq)$ ، $\{a,b\}$ و $\{c,a\}$ هر دو هم ماکسیمال هستند و هم مینیمال (چرا؟)