

کتاب پردازش تصویر دیجیتال گونزالس
[برای دانلود کتاب کامل اینجا کلیک کنید](#)

شکل ۳.۴۹ (الف) تصویر کمی تار از متن سفید را در زمینه خاکستری تیره نشان می دهد. شکل ۳.۴۹ (ب) با استفاده از فیلتر هموارسازی گوسی با اندازه $31 * 31$ با $S = 5$ بدست آمد. همانطور که در بحث قبلی ما در مورد هسته های پایین گذر گوسی توضیح داده شد ، اندازه هسته ای که ما در اینجا استفاده کردیم کوچکترین عدد صحیح فرد کمتر از ۶ ثابته است. ۶ - ثابته شکل ۳.۴۹ (ج) ماسک بدون تیز است که با استفاده از معادله به دست آمده است. (۳-۵۵). برای به دست آوردن تصویر در شکل ۳.۴۹ (د) از اتاق بیان بدون پوشش تیز معادله استفاده شده است. (۳-۵۶) با $k = 1$ این تصویر به طور قابل توجهی واضح تر از تصویر اصلی در شکل ۳.۴۹ (ا) است ، اما ما می توانیم بهتر عمل کنیم ، همانطور که در پاراگراف بعدی نشان می دهیم.

شکل ۳.۴۹ (e) نتیجه استفاده از معادله را نشان می دهد. (۳-۵۶) با $k = 4,5$ این مقدار تقریباً در بالاترین حد است . آنچه می توانیم بدون معرفی برخی از مصنوعات جدی در تصویر استفاده کنیم. مصنوعات تیره ، تقریباً سیاه رنگ ، هاله هایی در اطراف مرز شخصیت ها هستند. همانطور که قبلاً توضیح دادیم ، "برآمدگی" پایین در شکل ۳.۴۸ (d) منفی می شود. هنگام مقیاس بندی تصویر به گونه ای که فقط مقادیر مثبتی برای نمایش داشته باشد ، مقادیر منفی بسته به روش مقیاس بندی استفاده شده ، یا در 0 بریده می شوند ، یا مقیاس بندی می شوند تا بیشترین مقدار منفی 0 شود. در هر صورت ، blips تاریک ترین مقادیر در تصویر خواهد بود.

نتایج در شکل ها. تولید ۳.۴۹ (d) و ۳.۴۹ (e) با استفاده از عکس سنتی که قبلاً توضیح داده شد ، دشوار است و قدرت و تنوع پردازش تصویر را در زمینه عکاسی دیجیتال نشان می دهد.



تصویر ۳.۴۹ (الف) تصویر اصلی با اندازه $259 * 600$ پیکسل. (ب) تصویر با استفاده از فیلتر پایین گذر $31 * 31$ گاوس با $S = 5$ تار می شود. (ج) ماسک. (د) نتیجه ماسک زدن تیز با استفاده از معادله. (۳-۵۶) با $k = 1$ (e) نتیجه افزایش فشار با $k = 4,5$

استفاده از مشتقات سفارش اول برای تیز کردن تصویر-درجه

مشتقات اول در پردازش تصویر با استفاده از مقدار شیب اجرا می شود. گرادیان یک تصویر f در مختصات (X, Y) به عنوان بردار ستون دو بعدی تعریف می شود

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

این بردار دارای ویژگی هندسی مهمی است که در جهت بیشترین میزان تغییر f در مکان (x, y) نشان می دهد. اندازه (طول) بردار ∇f ، نشان داده شده به عنوان $M(x, y)$ علامت بردار بردار ∇f نیز اغلب استفاده می شود) ، جایی که

$$M(x, y) = \|\nabla f\| = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad (3-58)$$

ما در قسمت ۱۰.۲ شیب را با جزئیات بیشتری بحث خواهیم کرد. در اینجا ، ما فقط به استفاده از آن برای وضوح تصویر علاقه داریم.

مقدار (x, y) نرخ تغییر جهت بردار گرادیان است. توجه داشته باشید که (x, y) تصویری با اندازه اصلی است ، هنگامی ایجاد می شود که x و y در تمام نقاط پیکسل در F متفاوت باشند. معمولاً مرسوم است که از این تصویر به عنوان تصویر گرادیان (یا به سادگی گرادیان هنگامی که معنی واضح است) استفاده شود. از آنجا که اجزای بردار گرادیان مشتق هستند ، عملگرهای خطی هستند. با این حال ، مقدار این بردار به دلیل عملیات مربع و ریشه مربع نیست. از سوی دیگر ، مشتقات جزئی در معادله (۳-۵۷) تغییرناپذیر چرخش نیستند ، اما اندازه بردار گرادیان است.

در برخی از پیاده سازی ها ، تقریب مربعات و عملیات ریشه مربعی با مقادیر مطلق مناسب تر است:

$$M(x, y) \approx |g_x| + |g_y| \quad (3-59)$$

این عبارت هنوز تغییرات نسبی شدت را حفظ می کند ، اما خاصیت ایزوتروپیک به طور کلی از بین می رود. با این حال ، همانطور که در مورد لاپلاسیان ، خواص ایزوتروپیک گرادیان گسسته تعریف شده در پاراگراف زیر فقط برای تعداد محدودی از افزایشهای چرخشی که به هسته های مورد استفاده برای تقریب مشتقات بستگی دارد ، حفظ می شود. همانطور که معلوم است ، محبوب ترین هسته هایی که برای تقریب گرادیان استفاده می شوند در چندین برابر ۹۰ درجه همسانگرد هستند. این نتایج مستقل از این است که آیا از معادله (۳-۵۸) یا (۳-۵۹) ، استفاده می کنیم یا خیر. بنابراین اگر ما بخواهیم این کار را انجام دهیم ، هیچ چیز مهمی در استفاده از معادله اخیر از دست نمی رود.

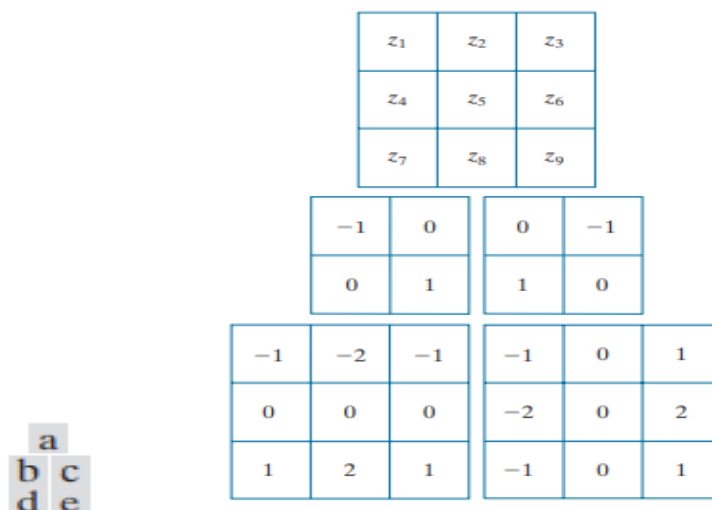
همانطور که در مورد لاپلاسیان ، ما اکنون تقریب های مجزایی را برای معادلات قبلی مشخص می کنیم و از آنها هسته های مناسب را فرموله می کنیم. به منظور ساده سازی بحث بعدی ، از علامت شکل ۳.۵۰ (a) برای نشان دادن شدت پیکسل ها در منطقه ۳ ۳ ۳ استفاده می کنیم. به عنوان مثال ، مقدار نقطه مرکزی ، z_5 ، نشان دهنده مقدار (x, y) در یک مکان دلخواه ، (x, y) است. z_1 نشان دهنده مقدار $f(x-1, y-1)$ است ؛ و غیره همانطور که در معادله (۳-۴۸) ، نشان داده شده است. ساده ترین تقریبی برای مشتق مرتبه اول که شرایط

بیان شده در ابتدای این بخش را برآورده می کند عبارتند از: $g_x = (z_8 - z_5)$ and $g_y = (z_6 - z_5)$. دو تعریف دیگر، پیشنهاد شده توسط رابرتز [۱۹۶۵] در توسعه اولیه پردازش تصویر دیجیتال، از تفاوت های متقابل استفاده می کند:

$$g_x = (z_9 - z_5) \quad \text{and} \quad g_y = (z_8 - z_6) \quad (3-60)$$

اگر از معادلات (۳-۵۸) و (۳-۶۰)، استفاده کنیم تصویر گرادیان را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$M(x, y) = [(z_9 - z_5)^2 + (z_8 - z_6)^2]^{1/2} \quad (3-61)$$



شکل ۳.۵۰ (الف) منطقه 3×3 از یک تصویر، که ZS مقادیر شدت است. (ب)-(ج) عملگرهای گرادیان متقابل رابرتز. (د) - (ه) عملگرهای سوپل. مجموع تمام ضرایب هسته هسته به صفر، همانطور که از عملگر مشتق انتظار می رود.

اگر از معادلات (۳-۵۹) و (۳-۶۰)، استفاده کنیم سپس

$$M(x, y) \approx |z_9 - z_5| + |z_8 - z_6| \quad (3-62)$$

جایی که قابل درک است که x و y در ابعاد تصویر به روشی که قبلاً توضیح داده شد متفاوت است. شرایط تفاوت مورد نیاز در معادله (۳-۶۰) را می توان با استفاده از دو هسته در شکل ۳.۵۰ (ب) و (ج) پیاده سازی کرد. از این هسته ها به عنوان عملگرهای گرادیان متقابل Roberts یاد می شود.

همانطور که قبلاً اشاره شد، ما ترجیح می دهیم از هسته هایی با اندازه های عجیب و غریب استفاده کنیم زیرا آنها دارای مرکز تقارن مکانی منحصر به فرد (صحیح) هستند. کوچکترین هسته هایی که ما به آنها علاقه داریم دارای اندازه 3×3 هستند. تقریب g_x و g_y با استفاده از محله 3×3 با محوریت Z به شرح زیر است:

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3) \quad (3-63)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7) \quad (3-64)$$

این معادلات را می توان با استفاده از هسته های شکل پیاده سازی کرد. ۳.۵۰ (د) و (ه) تفاوت بین ردیف سوم و اول ناحیه تصویر ۳*۳ مشتق جزئی را در جهت x تقریب می کند و با استفاده از هسته در شکل ۳.۵۰ (d) پیاده سازی می شود.

تفاوت بین ستون سوم و اول مشتق جزئی را در جهت y تقریبی می کند و با استفاده از هسته در شکل ۳.۵۰ (e) پیاده سازی می شود. مشتقات جزئی در تمام نقاط یک تصویر با پیچاندن تصویر با این هسته ها بدست می آید. سپس اندازه شیب را مانند قبل بدست می آوریم. به عنوان مثال ، جایگزینی g_x و g_y به معادله (۳-۵۹) بازده

$$M(x, y) = \left[g_x^2 + g_y^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left[(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3) \right]^2 + \left[(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7) \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-65)$$

این معادله نشان می دهد که مقدار M در هر مختصات تصویر (x, y) با مجذور نمودن مقادیر کانولوشن دو هسته با تصویر I در این مختصات ، جمع بندی دو نتیجه و ریشه یابی مربع داده می شود.

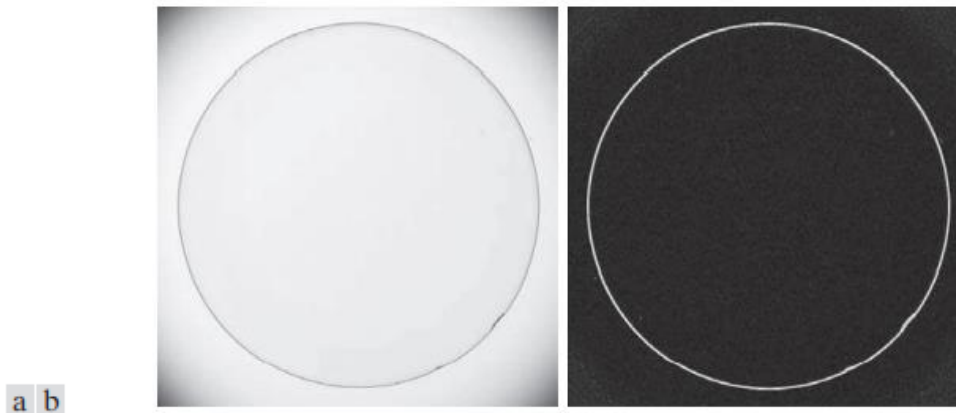
هسته های موجود در شکل ۳.۵۰ (d) و (e) عملگرهای Sobel نامیده می شوند. ایده استفاده از مقدار وزنی ۲ در ضرایب مرکزی این است که با اهمیت بیشتر به نقطه مرکزی به هموارسازی دست یابید (در فصل ۱۰ به تفصیل در این مورد بحث خواهیم کرد). ضرایب در تمام هسته ها در شکل ۳.۵۰ برابر صفر است ، بنابراین آنها در مناطق با شدت ثابت ، همانطور که از یک عملگر مشتق انتظار می رود ، پاسخ صفر می دهند. همانطور که قبلاً ذکر شد ، وقتی تصویری با هسته ای که ضرایب آن به صفر می رسد ترکیب می شود ، عناصر تصویر تغییر یافته حاصل نیز صفر می شود ، بنابراین تصاویر به طور کلی با هسته های شکل ۳.۵۰ مقادیر منفی خواهند داشت.

محاسبات g_x و g_y عملیات خطی هستند و همانطور که در بالا ذکر شد با استفاده از کانولوشن اجرا می شوند. جنبه غیر خطی وضوح با گرادیان محاسبه $M(x, y)$ شامل مربع و ریشه های مربع یا استفاده از مقادیر مطلق است که همه آنها عملیات غیر خطی هستند. این عملیات پس از فرایند خطی (کانولوشن) انجام می شود که g_x و g_y را تولید می کند.

مثال ۳.۲۰: استفاده از شیب برای افزایش لبه.

از گرادیان اغلب در بازرسی های صنعتی استفاده می شود ، یا برای کمک به انسان در تشخیص نقص ها و یا آنچه رایج تر است ، به عنوان یک مرحله پیش پردازش در بازرسی خودکار. ما در فصل ۱۰ در این باره بیشتر خواهیم

گفت. با این حال ، در حال حاضر آموزنده خواهد بود که یک مثال ساده را در نظر بگیریم تا نشان دهیم که چگونه می توان از گرادیان برای افزایش نقایص و از بین بردن آرام تغییر ویژگی های پس زمینه استفاده کرد. شکل ۳.۵۱ (الف) یک تصویر نوری از یک لنز تماسی است ، که با چیدمان نورپردازی طراحی شده است تا نقص ها را برجسته کند ، مانند دو نقص لبه ای در مرکز لنز که در ساعت ۴ و ۵ دیده می شود. شکل ۳.۵۱ (ب) گرادیان بدست آمده با استفاده از معادله را نشان می دهد. (۳-۶۵) با دو هسته Sobel در شکل. ۳.۵۰ (د) و (ه) نقص لبه ها نیز در این تصویر کاملاً قابل مشاهده است ، اما با این مزیت اضافه که سایه های خاکستری ثابت یا متغیر آهسته حذف شده اند ، بنابراین کار محاسباتی مورد نیاز برای بازرسی خودکار را تا حد قابل توجهی ساده کرده است. گرادیان همچنین می تواند برای برجسته سازی مشخصات کوچکی که ممکن است به راحتی در یک تصویر مقیاس خاکستری قابل مشاهده نباشند (مواردی مانند اینها می تواند مواد خارجی ، جیب های هوا در محلول حمایتی یا نقص های کوچک در لنز باشد) استفاده شود. توانایی افزایش ناپیوستگی های کوچک در زمینه خاکستری دیگر ویژگی مهم گرادیان است.



شکل ۳.۵۱ (الف) تصویر یک لنز تماسی (عیوب موجود در مرکز ساعت ۴ و ۵). (ب) گرادیان سوبل. (تصویر اصلی از شرکت Perceptics Corporation تهیه شده است.)

۳.۷ فیلترهای بالاگذر میان ناگذر و فیلترهای باندگذر و پایین گذر

فیلترهای خطی مکانی و حوزه فرکانسی به چهار دسته کلی طبقه بندی می شوند: فیلترهای کم گذر و بالا ، که در بخشهای ۳.۵ و ۳.۶ معرفی کردیم ، و فیلترهای باندگذر و باند میان ناگذر، که در این قسمت معرفی می کنیم. ما در ابتدای بخش ۳.۵ اشاره کردیم که سه نوع فیلتر دیگر را می توان از فیلترهای کم گذر ساخت. در این بخش روش هایی را برای انجام این کار بررسی می کنیم. همچنین ، ما سومین رویکرد مورد بحث را در انتهای بخش ۳.۴ برای به دست آوردن کربن های فیلتر مکانی نشان می دهیم. یعنی ما از یک بسته نرم افزاری طراحی فیلتر برای تولید توابع فیلتر ۱ بعدی استفاده می کنیم. سپس ، ما از اینها برای تولید توابع فیلترهای دوبعدی جداگانه

یا از طریق معادله (۳-۴۲) ، یا با چرخاندن توابع $D-1$ در مرکز آنها برای تولید هسته های دو بعدی استفاده می کنیم. نسخه های چرخشی تقریبی از توابع متقارن دایره ای (ایزوتروپیک) هستند.

شکل ۳.۵۲ (a) عملکرد انتقال یک فیلتر low-pass ایده آل ۱ بعدی در حوزه فرکانس را نشان می دهد [این همان شکل ۳.۳۲ (a) است]. ما از مباحث قبلی در این فصل می دانیم که فیلترهای کم گذر فرکانس های بالا را تضعیف یا حذف می کند ، در حالی که فرکانس های پایین را عبور می دهد. یک فیلتر بالا گذر دقیقاً برعکس رفتار می کند. همانطور که در شکل ۳.۵۲ (ب) نشان داده می شود ، یک فیلتر بالاگذر تمام فرکانسهای زیر مقدار قطع ، ω_c را حذف یا تضعیف می کند و همه فرکانسهای بالاتر از این مقدار را عبور می دهد. مقایسه شکل ها. ۳.۵۲ (a) و (b)، ما می بینیم که یک تابع انتقال فیلتر بالا با تفریق یک تابع پایین گذر از ۱ بدست می آید. این عملیات در حوزه فرکانس است. همانطور که در بخش ۳.۴ می دانید ، یک ثابت در حوزه فرکانس یک ضربه در حوزه مکانی است. بنابراین ، با حذف یک هسته فیلتر پایین گذر از یک ضربه واحد با مرکز مشابه هسته ، یک هسته فیلتر بالا در حوزه مکانی به دست می آوریم. تصویری که با این هسته فیلتر شده است همان تصویری است که با تفریق یک تصویر با گذر کم از تصویر اصلی به دست می آید. ماسک تیز توسط معادله (۳-۵۵) تعریف شده است. دقیقاً این عملیات است. بنابراین ، معادلات (۳-۵۴) و (۳-۵۶) عملیات معادله را اجرا کنید (به مسئله ۳.۴۲ مراجعه کنید).

از بحث معادله به یاد بیاورید. (۳-۳۳) که تکانه واحد آرایه ای از ۰ با یک ۱ واحد است

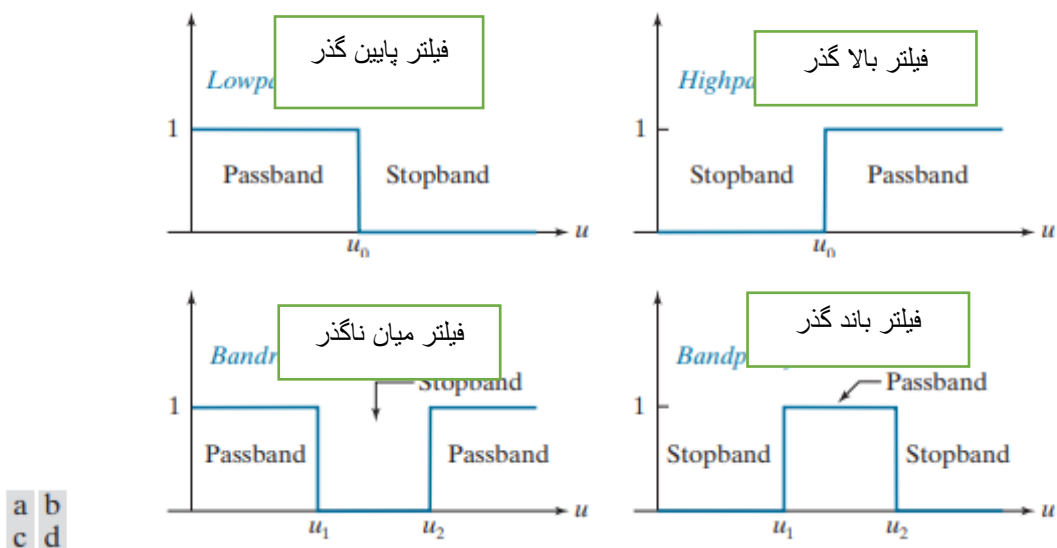
شکل ۳.۵۲ (ج) عملکرد انتقال یک فیلتر باند میان ناگذر را نشان می دهد. این تابع انتقال را می توان از مجموع یک تابع پایین گذر و یک تابع با گذر فرکانس های مختلف ایجاد کرد (تابع بالا گذر را می توان از یک تابع پایین گذر متفاوت ایجاد کرد). تابع انتقال فیلتر باند در شکل ۳.۵۲ (d) را می توان با تفریق تابع میان ناگذر از ۱ (یک ضربه واحد در حوزه مکانی) بدست آورد. فیلترهای میان ناگذر همچنین به عنوان فیلترهای ناچ نامیده می شوند ، اما دومی بیشتر تمایل به محلی دارند ، همانطور که در فصل ۴ نشان خواهیم داد. جدول ۳.۷ بحث قبلی را خلاصه می کند.

نکته کلیدی در شکل ۳.۵۲ و جدول ۳.۷ این است که تمام توابع انتقال نشان داده شده را می توان با یک تابع انتقال فیلتر پایین گذر بدست آورد. این مهم است. همچنین مهم است بدانیم که ما از طریق تفاسیر گرافیکی ساده در حوزه فرکانس به این نتیجه رسیدیم. رسیدن به همان نتیجه بر اساس تحول در حوزه مکانی کار بسیار سخت تری خواهد بود.

مثال ۳.۲۱: تصفیه پایین گذر، بالاگذر، میان ناگذر و باندگذر .

در این مثال ما نشان می دهیم که چگونه می توانیم با یک تابع انتقال فیلتر پایین گذر یک بعدی که با استفاده از یک بسته نرم افزاری تولید می شود شروع کنیم و سپس از آن تابع انتقال برای تولید هسته های فیلتر مکانی

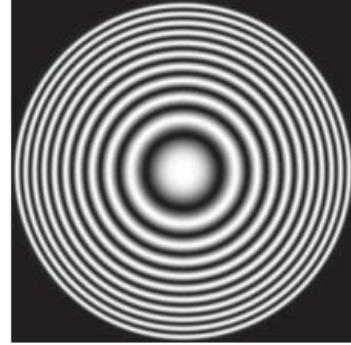
بر اساس مفاهیم معرفی شده در این بخش استفاده کنیم. ما همچنین خواص فیلترینگ مکانی این هسته ها را بررسی می کنیم.



شکل ۳.۵۲ توابع انتقال فیلترهای ایده آل $D-1$ در حوزه فرکانس (u فرکانس را نشان می دهد). (الف) فیلتر پایین گذر. (ب) فیلتر بالاگذر. (ج) فیلتر میان ناگذر. (د) فیلتر باندگذر. (مانند گذشته، ما برای سادگی فقط فرکانس های مثبت را نشان می دهیم).

جدول ۳.۷ خلاصه ای از چهار نوع اصلی فیلترهای مکانی که بر اساس فیلترهای کم گذر بیان شده اند. مراکز هسته های همزمان

نوع فیلتر	هسته فضایی از نظر هسته پایین گذر ، lp
فیلتر پایین گذر	$lp(x, y)$
فیلتر بالا گذر	$hp(x, y) = \delta(x, y) - lp(x, y)$
فیلتر میان ناگذر	$br(x, y) = lp_1(x, y) + hp_2(x, y)$ $= lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - lp_2(x, y)]$
فیلتر باند گذر	$bp(x, y) = \delta(x, y) - br(x, y)$ $= \delta(x, y) - [lp_1(x, y) + [\delta(x, y) - lp_2(x, y)]]$



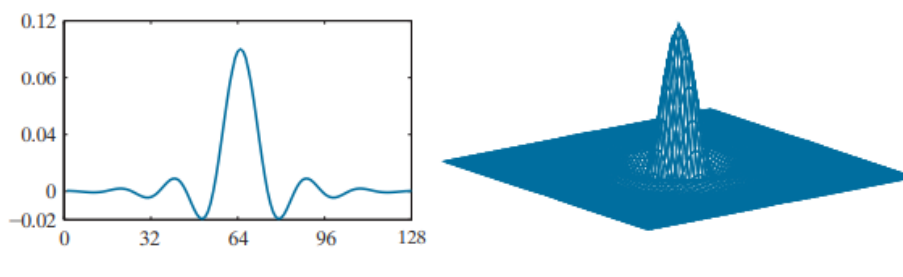
شکل ۳.۵۳ تصویر صفحه منطقه با اندازه ۵۹۷*۵۹۷ پیکسل.

شکل ۳.۵۳ یک تصویر به اصطلاح صفحه صفحه را نشان می دهد که اغلب برای آزمایش ویژگیهای روشهای فیلتر استفاده می شود. نسخه های مختلفی از صفحات منطقه وجود دارد. یکی در شکل ۳.۵۳ با استفاده از معادله ایجاد شده است

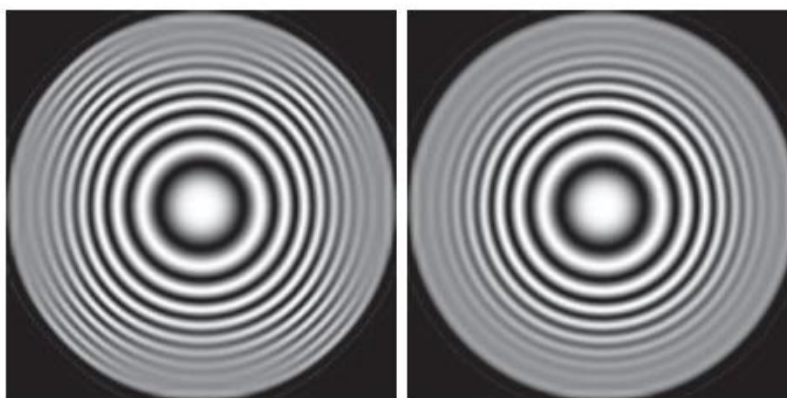
$$z(x,y) = \frac{1}{2} [1 + \cos(x^2 + y^2)] \quad (3-66)$$

با x و y در محدوده $[۰, ۲۸.۲]$ ، در افزایش ۰.۰۲۷۵ متفاوت است. این منجر به تصویری با اندازه ۵۹۷*۵۹۷ پیکسل شد. منطقه سیاه و سفید با تنظیم ۰ پیکسل با فاصله بیشتر از ۸.۲ از مرکز تصویر ایجاد شد. ویژگی اصلی صفحه صفحات این است که فرکانس مکانی آن به عنوان تابعی از فاصله از مرکز افزایش می یابد ، همانطور که می توانید با توجه به اینکه باریک تر شدن حلقه ها از مرکز بیشتر می شود ، مشاهده می کنید. این ویژگی یک صفحه ناحیه را به تصویری ایده آل برای نشان دادن رفتار چهار نوع فیلتر مورد بحث تبدیل می کند.

شکل ۳.۵۴ (الف) یک عملکرد فیلتر ۱ بعدی ، ۱۲۸ عنصری کم ارتفاع مکانی با استفاده از MATLAB را نشان می دهد [در مقایسه با شکل ۳.۳۲ (ب)]. همانطور که قبلاً بحث شد ، ما می توانیم از این تابع $D-1$ برای ساختن یک هسته ۲ بعدی و جداگانه جداکننده فیلتر بر اساس معادله استفاده کنیم. (۳-۴۲) ، یا می توانیم آن را در مرکز آن بچرخانیم تا یک هسته دو بعدی ایزوتروپیک تولید شود. هسته در شکل ۳.۵۴ (ب) با استفاده از روش اخیر بدست آمده است. شکل ۳.۵۵ (a) و (b) نتایج فیلتر شدن تصویر در شکل ۳.۵۳ به ترتیب با هسته های قابل تفکیک و ایزوتروپیک است. هر دو فیلتر فرکانسهای پایین صفحه ناحیه را عبور داده و فرکانسهای بالا را به طور قابل توجهی تضعیف کرده اند. با این حال ، توجه داشته باشید که هسته فیلتر قابل تفکیک ، فرکانس های منتقل شده را به صورت "مربعی" (غیر شعاعی متقارن) تولید می کند. این نتیجه فیلتر شدن تصویر در جهت عمود بر یک هسته قابل تفکیک است که ایزوتروپ نیست. با استفاده از هسته ایزوتروپیک نتیجه ای حاصل شد که در تمام جهات شعاعی یکنواخت است. این مطابق انتظار است ، زیرا هم فیلم و هم تصویر همسانگرد هستند.



شکل ۳.۵۴ (الف) یک تابع فیلتر پایین گذر مکانی ۱ بعدی. (ب) هسته دو بعدی که با چرخاندن پروفایل ۱ بعدی در مورد مرکز آن.



a b

شکل ۳.۵۵ (الف) تصویر صفحه منطقه با یک هسته قابل تفکیک پایین گذر فیلتر شده است. (ب) تصویر با هسته پایین گذر ایزوتروپیک در شکل ۳.۵۴ (ب) تصحیح شده است.

شکل ۳.۵۶ نتایج فیلتر کردن صفحه منطقه با چهار فیلتر توصیف شده در جدول ۳.۷ را نشان می دهد. ما در شکل ۳.۵۴ (ب) از هسته ۲ بعدی کم گذر در شکل ۳.۵۴ (ب) به عنوان پایه ای برای فیلتر بالا گذر و از سرنل های مشابه پایین گذر برای فیلتر هدف استفاده کردیم.

شکل ۳.۵۶ (a) همان شکل ۳.۵۵ (b) است که برای راحتی آن را تکرار می کنیم. شکل ۳.۵۶ (ب) نتیجه متغیر با گذر بالا است. توجه داشته باشید که چگونه فرکانس های پایین به طور موثر فیلتر شده اند. همانطور که در مورد تصاویر با فیلتر بالا ، صادق است ، مناطق سیاه ناشی از برش دادن مقادیر منفی در صفحه توسط ۰ است. شکل ۳.۵۶ (ج) همان تصویر مقیاس شده را با استفاده از معادلات نشان می دهد. (۲-۳۱) و (۲-۳۲). در اینجا به وضوح می بینیم که فقط فرکانس های بالا توسط فیلتر عبور می کند. از آنجا که هسته بالا گذر با استفاده از همان هسته پایین گذر که ما برای تولید شکل ۳.۵۶ (a) ساخته شده بود ، با مقایسه دو نتیجه مشخص می شود که فیلتر گذرگاه فرکانس هایی را که توسط فیلتر پایین گذر تضعیف شده بود ، عبور می دهد. شکل ۳.۵۶ (د) تصویر تغییر یافته باند را نشان می دهد ، که در آن تضعیف باند وسط فرکانس ها مشهود است. در نهایت ، شکل ۳.۵۶

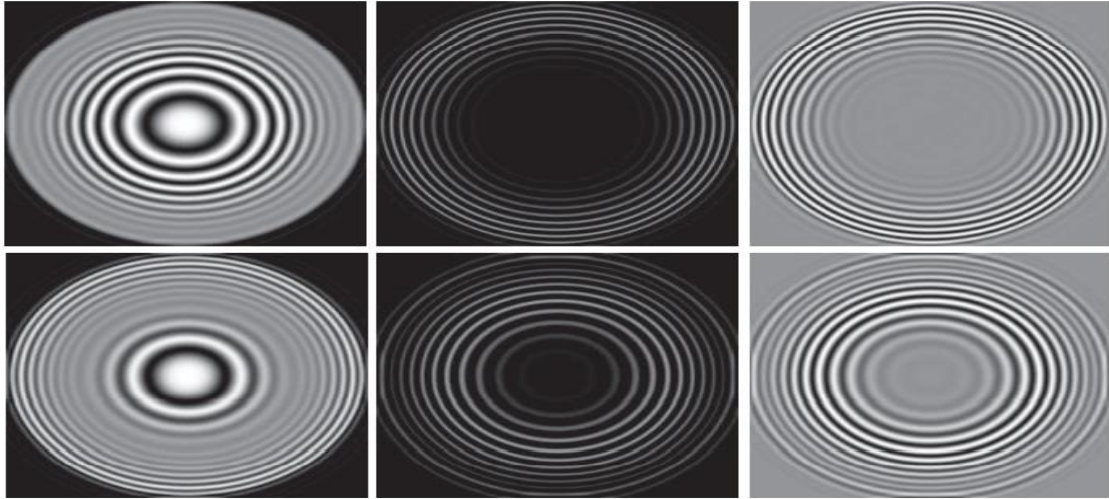
(e) نتیجه فیلتر شدن باند را نشان می دهد. این تصویر همچنین دارای مقادیر منفی است ، بنابراین در شکل ۳.۵۶ (f) مقیاس بندی شده نشان داده شده است. از آنجایی که هسته باند با کم کردن کرنل ردیف باند از یک تکانه واحد ایجاد شد ، می بینیم که فیلتر باند عبور از فرکانسهایی که توسط فیلتر باند میان ناگذر ضعیف شده بود گذشت. ما در فصل ۴ نمونه های اضافی از باند گذر و فیلتر کردن باند را ارائه می دهیم.

۳.۸ ترکیب روشهای ارتقاء مکانی

با چند استثنا ، مانند ترکیب محو شدن با آستانه (شکل ۳.۴۱) ، ما تا کنون توجه خود را به رویکردهای پردازش حوزه مکانی متمرکز کرده ایم. به طور مکرر ، برای انجام یک کار معین نیاز به استفاده از چندین تکنیک تکمیلی برای دستیابی به نتیجه قابل قبول است. در این بخش ، ما نحوه ترکیب چندین رویکرد تا کنون در این فصل را برای رسیدگی به یک کار دشوار برای افزایش تصویر توضیح می دهیم.

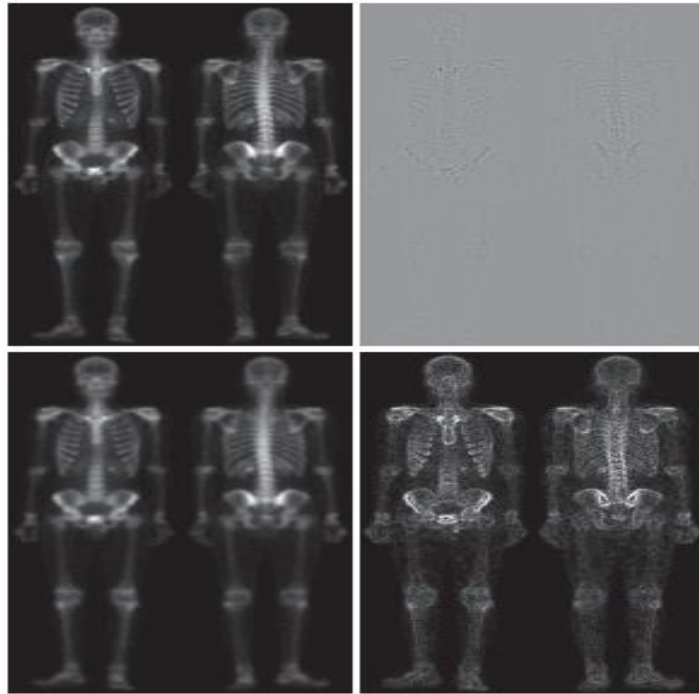
تصویر شکل ۳.۵۷ (الف) اسکن استخوان کل بدن است که برای تشخیص بیماریهایی مانند عفونت استخوان و تومورها استفاده می شود. هدف ما این است که این تصویر را با وضوح بیشتر و بیرون آوردن بیشتر جزئیات اسکلتی تقویت کنیم. محدوده دینامیکی محدود سطوح شدت و محتوای نویز زیاد باعث افزایش این تصویر می شود. راهبردی که ما دنبال می کنیم این است که از لاپلاسیان برای برجسته کردن جزئیات و از شیب برای افزایش لبه های برجسته استفاده کنیم. به دلایلی که به زودی توضیح داده خواهد شد ، از یک نسخه صاف شده از تصویر گرادین برای پوشاندن تصویر لاپلاسیان استفاده می شود. در نهایت ، ما سعی می کنیم با استفاده از تبدیل شدت ، دامنه پویایی سطوح شدت را افزایش دهیم.

شکل ۳.۵۷ (ب) لاپلاسیان تصویر اصلی را نشان می دهد که با استفاده از هسته در شکل ۳.۴۵ (d) به دست آمده است. این تصویر (فقط برای نمایش) با همان تکنیک شکل ۳.۴۷ مقیاس بندی شده است. ما می توانیم در این مرحله به سادگی با افزودن شکل یک تصویر واضح را بدست آوریم. ۳.۵۷ (a) و (b) ، با توجه به معادله (۳-۵۴). فقط با نگاه کردن به سطح نویز در شکل ۳.۵۷ (b) ، اگر تصویر را اضافه کنیم ، انتظار می رود یک تصویر نسبتاً پر نویز نیز شود. ۳.۵۷ (الف) و (ب). این با نتیجه در شکل ۳.۵۷ (ج) تأیید می شود. یکی از راه هایی که بلافاصله برای کاهش نویز به ذهن می رسد ، استفاده از یک فیلتر متوسط است. با این حال ، فیلتر میانی یک فرایند غیر خطی تهاجمی است که می تواند ویژگی های تصویر را حذف کند. این امر در پردازش تصویر پزشکی غیرقابل قبول است.



a b c
d e f

شکل ۳.۵۶ تصفیه مکانی تصویر صفحه منطقه. (الف) نتیجه پایین گذر؛ این همان شکل ۳.۵۵ (ب) است. (ب) نتیجه بالاگذر. (ج) تصویر (ب) با شدت مقیاس بندی شده. (د) نتیجه میان ناگذر. (ه) نتیجه گذر از باند. (و) تصویر (ه) با شدت مقیاس بندی شده.



a b
c d

شکل ۳.۵۷ (الف) تصویر اسکن استخوان کل بدن. (ب) لاپلاسیین (الف). (ج) تصویر واضح با افزودن به دست می آید (الف) و (ب). (د) شیب Sobel تصویر (). (ا) تصویر اصلی با اجازه از GE سیستم های پزشکی یک روش دیگر استفاده از ماسکی است که از یک نسخه صاف شیب تصویر اصلی تشکیل شده است. این رویکرد بر اساس ویژگیهای اول است و یک رویکرد جایگزین استفاده از ماسکی است که از یک نسخه صاف شیب تصویر

اصلی تشکیل شده است. این رویکرد بر اساس ویژگیهای مشتقات مرتبه اول و دوم است که هنگام توضیح شکل ۳.۴۴ بحث کردیم. لاپلاسیین ، یک عملگر مشتق مرتبه دوم است و دارای مزیت مشخصی است که برای افزایش جزئیات برتر است. با این حال ، این باعث می شود که نتایج پر نویزتری نسبت به شیب تولید کند. این نویز در مناطق صاف ، جایی که بیشتر قابل مشاهده است ، قابل اعتراض است. شیب در مناطق دارای شدت قابل توجه (سطح شیب دار و پله) واکنش قوی تری نسبت به لاپلاسیینی دارد. پاسخ شیب به نویز و جزئیات دقیق تر از لاپلاسیان است و می توان با صاف کردن شیب با یک فیلتر پایین گذر ، بیشتر کاهش داد. بنابراین ، ایده این است که شیب را صاف کرده و آن را در تصویر لاپلاسیین ضرب کنید. در این زمینه ، ممکن است شیب صاف شده را به عنوان یک تصویر ماسک در نظر بگیریم. این محصول جزئیات را در مناطق قوی حفظ می کند ، در حالی که نویز را در مناطق نسبتاً $reducing$ کاهش می دهد. این فرآیند را می توان تقریباً به عنوان ترکیب بهترین ویژگی های لاپلاسیین و شیب تفسیر کرد. برای به دست آوردن یک تصویر واضح نهایی ، نتیجه به اصل اضافه می شود.

شکل ۳.۵۷ (د) شیب Sobel تصویر اصلی را نشان می دهد که با استفاده از معادله محاسبه شده است. (۳-۵۹). اجزای g_x و g_y با استفاده از هسته های شکل به دست آمد. ۳.۵۰ (d) و (e) به ترتیب. همانطور که انتظار می رفت ، لبه ها در این تصویر بسیار غالب هستند

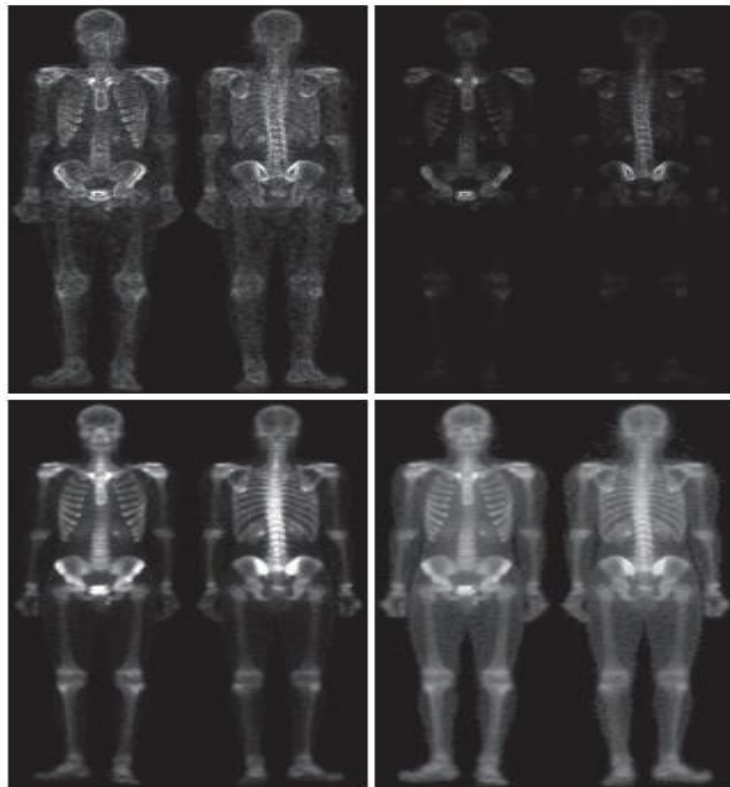
نسبت به تصویر لاپلاسیین تصویر شیب صاف شده در شکل ۳.۵۷ (e) با استفاده از فیلتر جعبه با اندازه ۵ ۵ ۵ بدست آمده است. ۳.۵۷ (d) و (e) بسیار روشن تر از شکل ۳.۵۷ (b) هستند. شواهد بیشتری نشان می دهد که شیب یک تصویر با محتوای حاشیه قابل توجه دارای مقادیری است که به طور کلی بالاتر از یک تصویر لاپلاسیی است.

شکل ۳.۵۷ (f) حاصل عکس گرادیان لاپلاسیین و صاف شده را نشان می دهد. به تسلط لبه های قوی و فقدان نسبی سر و صدای قابل مشاهده توجه کنید ، که دلیل این امر پوشاندن لاپلاسیین با یک تصویر گرادیان صاف است.

افزودن تصویر محصول به نسخه اصلی منجر به وضوح تصویر در شکل ۳.۵۷ (g) شد. افزایش وضوح جزئیات در این تصویر نسبت به تصویر اصلی در اکثر قسمت های تصویر ، از جمله دنده ها ، نخاع ، لگن و جمجمه مشهود است. این نوع بهبود تنها با استفاده از لاپلاسیین یا گرادیان امکان پذیر نبود.

روش تیز کردن که به تازگی مورد بحث قرار گرفته است ، به طرز قابل توجهی بر دامنه پویایی سطوح شدت در تصویر تأثیر نمی گذارد. بنابراین ، مرحله نهایی در کار تقویت ما افزایش دامنه دینامیکی تصویر واضح است. همانطور که در بخشهای ۳.۲ و ۳.۳ به تفصیل مورد بحث قرار گرفتیم ، چندین تابع تبدیل شدت وجود دارد که می تواند این هدف را محقق کند. پردازش هیستوگرام روش مناسبی برای تصاویری نیست که هیستوگرام آنها با اجزای تاریک و روشن مشخص می شود ، که در اینجا موردی است. ویژگی های تاریک تصاویری که ما با آنها سر و کار داریم ، به مراتب بهتر به تحول قانون قدرت منجر می شود. از آنجا که ما می خواهیم سطوح شدت ، مقدار

g را در معادله گسترش دهیم. (3-5) باید کمتر از 1 باشد. پس از چند آزمایش با این معادله ، در شکل 3.57 (h) به نتیجه رسیدیم که با $g = 0,5$ و $c = 1$ بدست آمد. مقایسه این تصویر با شکل 3.57 (g)، ما توجه می کنیم که جزئیات مهم دیگری در شکل 3.57 (h) قابل مشاهده است. نواحی اطراف مچ ، دست ، مچ پا و پا نمونه های خوبی از این امر هستند. ساختار استخوان اسکلتی نیز بسیار برجسته تر است ، از جمله استخوان های بازو و پا. به تعریف ضعیف طرح کلی بدن و بافت بدن توجه کنید. بیرون آوردن جزئیاتی از این طبیعت با گسترش دامنه پویایی سطوح شدت ، نویز را نیز افزایش می دهد ، اما شکل 3.57 (h) یک بهبود بصری قابل توجه نسبت به تصویر اصلی است.



e	f
g	h

شکل 3.57 (ادامه دارد) (ه) تصویر سوپل با فیلتر جعبه 5 5 صاف شده است. (و) تصویر ماسک که حاصل ضرب (b) و (e) است. (ز) تصویر واضح با افزودن تصاویر (a) و (f) به دست می آید. (ح) نتیجه نهایی با اعمال تبدیل قانون شدت به (g) بدست می آید. تصاویر (g) و (h) را با (a) مقایسه کنید. (تصویر اصلی برگرفته از G.E. سیستم های پزشکی)

خلاصه ، منابع ، و مطالعه بیشتر

مطالب این فصل نمایانگر تکنیک های فعلی است که برای تبدیل شدت و فیلترینگ مکانی استفاده می شود. موضوعات به دلیل ارزش آنها به عنوان مواد اساسی انتخاب شدند که به عنوان پایه ای در زمینه ای در حال توسعه عمل می کنند. اگرچه بیشتر مثالهای مورد استفاده در این فصل به بهبود تصویر می پردازد ، اما تکنیکهای ارائه شده کاملاً کلی هستند و شما در فصلهای باقی مانده در زمینه های غیر مرتبط با بهبود مجدداً با بسیاری از آنها روبرو خواهید شد.

مطالب بخش ۳.۱ از گونزالز [۱۹۸۶] است. برای مطالعه بیشتر مطالب در بخش ۳.۲ ، به Schowengerdt [۲۰۰۶] و Poyton [۱۹۹۶] مراجعه کنید. منابع اولیه در مورد پردازش هیستوگرام (بخش ۳.۳) عبارتند از گونزالز و فیتس [۱۹۷۷] و وودز و گونزالز [۱۹۸۱]. استارک [۲۰۰۰] تعاریف جالبی از یکسان سازی هیستوگرام برای افزایش کنتراست تطبیقی ارائه می دهد.

برای مطالعه تکمیلی در مورد فیلترهای مکانی خطی (بخش ۳.۴-۳.۷) ، به Jain [۱۹۸۹] ، روزنفلد و کاک [۱۹۸۲] ، [۲۰۰۶] Schowengerdt ، [۱۹۹۶] Castleman و آمباگ [۲۰۱۰] مراجعه کنید. برای یک رویکرد جالب برای تولید هسته های گاوس با ضرایب صحیح به [۲۰۱۱] Padid مراجعه کنید. کتاب پیتاس و ونتانسوپولوس [۱۹۹۰] منبع خوبی برای مطالعه بیشتر در مورد میانه و دیگر فیلم های مکانی غیر خطی است. برای جزئیات بیشتر در مورد جنبه های نرم افزاری بسیاری از مثالهای این فصل ، Woods, Gonzalez ، و Eddins [۲۰۰۹] را ببینید.

چالش ها و مسائل

راه حل مشکلاتی که با علامت (*) مشخص شده اند در بسته پشتیبانی دانشجویی DIP ξ E وجود دارد (به وب سایت کتاب مراجعه کنید: www.ImageProcessingPlace.com).

۳.۱ یک تابع تبدیل واحد برای پخش شدت یک تصویر ارائه دهید تا کمترین شدت ۰ و بیشترین آن $L-1$ باشد.
۳.۲ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) * یک تابع پیوسته برای اجرای تغییر گسترش کنتراست در شکل ۳.۲ (الف) ارائه دهید. علاوه بر m ، تابع شما باید شامل یک پارامتر E برای کنترل شیب تابع در هنگام انتقال از مقادیر شدت کم به زیاد باشد. عملکرد شما باید عادی شود تا حداقل و حداکثر مقادیر آن به ترتیب ۰ و ۱ باشد.

(ب) یک خانواده از تغییرات را به عنوان تابعی از پارامتر E ، با مقدار ثابت $L \times L \times m$ ، که L تعداد سطوح شدت در تصویر است ترسیم کنید.

۳.۳ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) * مجموعه ای از توابع تبدیل برش شدت را پیشنهاد کنید که قادر به تولید تمام صفحات بیتی یک تصویر ۸ بیتی تک رنگ است. به عنوان مثال، اعمال یک تابع تبدیل با ویژگی $T(r) = 0$ اگر $r > 0$ یا زوج باشد، و $T(r) = 1$ اگر r فرد باشد، تصویری از کمترین سطح معنی دار بیت (شکل ۳.۱۳ را ببینید). (نکته: از جدول حقیقت ۸ بیتی برای تعیین شکل هر تابع تبدیل استفاده کنید).

(ب) چند تابع تبدیل شدت برای تصاویر ۱۶ بیتی وجود خواهد داشت؟

(ج) آیا رویکرد اساسی در (الف) محدود به تصاویری است که تعداد سطوح شدت آنها یک عدد صحیح ۲ است یا این روش برای هر تعداد سطوح شدت صحیح عمومی است؟

(د) اگر روش کلی است، چگونه از راه حل شما در (الف) متفاوت است؟

۳.۴ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) روشی را برای استخراج صفحات بیت یک تصویر بر اساس تبدیل مقدار پیکسل های آن به باینری پیشنهاد دهید.

(ب) همه صفحات بیت تصویر ۴ بیت زیر را پیدا کنید:

0	1	8	6
2	2	1	1
1	15	14	12
3	6	9	10

۳.۵ به طور کلی:

(الف) * صفر کردن صفحات بیت پایین تر مرتبه چه تاثیری بر هیستوگرام یک تصویر می گذارد؟

(ب) اگر به جای صفحات بیت مرتبه بالاتر صفر بگذاریم، چه تاثیری بر هیستوگرام می گذارد؟

۳.۶ توضیح دهید که چرا تکنیک یکسان سازی هیستوگرام گسسته به طور کلی یک هیستوگرام f_l در نتیجه نمی دهد.

۳.۷ فرض کنید که یک تصویر دیجیتال در معرض یکسان سازی هیستوگرام قرار می گیرد. نشان دهید که یک پاس دوم از همسان سازی برنامه (در تصویر مساوی با هیستوگرام) دقیقاً همان نتیجه را برای پاس اول ایجاد می کند.

۳.۸ با فرض مقادیر پیوسته، به عنوان مثال نشان دهید که ممکن است موردی وجود داشته باشد که در آن عملکرد تبدیل در معادله ذکر شده باشد. (۳-۱۱) شرایط رضایت بخش (الف) و (ب) مورد بحث در بخش ۳.۳، اما حالت معکوس آن ممکن است از کار بیفتد (a').

۳.۹ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) نشان دهید که عملکرد تغییر گسسته در معادله ارائه شده است. (۳-۱۵) برای شرایط برابر با هیستوگرام (a) و (b) که در ابتدای بخش ۳.۳ بیان شده است.

(ب) * نشان دهید که تغییر گسسته معکوس در معادله. (۳-۱۶) شرایط رضایت بخش (a) و (b) در بخش ۳.۳ تنها در صورتی که هیچ یک از سطوح شدت $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$, r_k در تصویر اصلی وجود نداشته باشد. ۳.۱۰ دو تصویر $f(x, y)$ و $g(x, y)$ دارای هیستوگرام غیر عادی h_f و h_g هستند. شرایط (در مقادیر پیکسل ها در f و g) را بیان کنید که تحت آن می توانید هیستوگرام تصاویر ایجاد شده به شرح زیر را تعیین کنید:

(a) $f(x, y) + g(x, y)$

(b) $f(x, y) - g(x, y)$

(c) $f(x, y) \times g(x, y)$

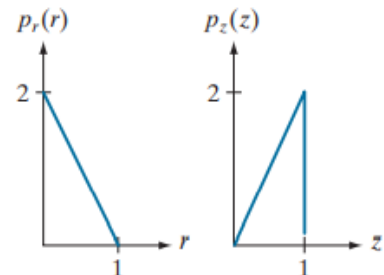
(d) $f(x, y) \div g(x, y)$

نحوه تشکیل هیستوگرام ها در هر مورد را نشان دهید. همانطور که در بخش ۲.۶ تعریف شده است ، عملیات حسابی عملیات عنصری هستند.

۳.۱۱ مقادیر شدت پیوسته را فرض کنید و فرض کنید مقادیر شدت تصویر دارای $p_r(r) = 0$ $p_r(r) = 2r/(L-1)^2$ for $0 \leq r \leq L-1$, برای سایر موارد باشد. مقادیر r (a) * تابع تبدیل را پیدا کنید که مقادیر شدت ورودی ، r ، را به مقادیر ، s ، یک تصویر برابر با هیستوگرام ترسیم می کند.

(b) * تابع دگرگونی را بیابید که (هنگامی که بر شدتهای برابر شده با هیستوگرام اعمال می شود) تصویری تولید کند که شدت PDF آن $p_z(z) = 3z^2/(L-1)^3$ for $0 \leq z \leq L-1$ باشد و $p_z(z) = 0$ برای سایر مقادیر z . (ج) تابع تبدیل را از (ب) مستقیماً بر حسب r ، شدت تصویر ورودی بیان کنید.

۳.۱۲ تصویری با شدت در محدوده $[0, 1]$ دارای PDF ، $p_r(r)$ است که در شکل زیر نشان داده شده است. مطلوب است که سطوح شدت این تصویر را طوری تغییر دهیم که $p_z(z)$ مشخص شده در تصویر نشان داده شود. مقادیر پیوسته را فرض کنید و تبدیل (بیان شده بر حسب r و z) را که این کار را انجام می دهد ، پیدا کنید.



در شکل ۳.۲۵ (ب) ، تابع تبدیل (۲) $G^{-1}(sk)$ از معادله برچسب گذاری شده است. (۳-۲۳) [تصویر آینه ای است. (۱) $G(zq)$ در معادله (۳-۲۱) درباره خطی که به دو نقطه پایانی آیا این ویژگی همیشه برای این دو تابع تبدیل وجود دارد؟ توضیح.

۳.۱۴ * روش پردازش هیستوگرام محلی مورد بحث در بخش ۳.۳ مستلزم این است که در هر محل محله هیستوگرام نوشته شود. روشی را برای به روز رسانی هیستوگرام از یک محله به محله دیگر پیشنهاد کنید ، به جای محاسبه یک هیستوگرام جدید در هر زمان.

۳.۱۵ رفتار معادله (۳-۳۵) چیست؟ وقتی $a = b = 0$ ؟ توضیح.

۳.۱۶ یک تراشه کامپیوتری به شما داده می شود که می تواند در زمان واقعی فیلتر خطی را انجام دهد ، اما به شما گفته نمی شود که این تراشه همبستگی دارد یا پیچش را انجام می دهد. جزئیات آزمایشی را که انجام می دهید ، مشخص کنید تا مشخص شود که تراشه کدام یک از دو عملیات را انجام می دهد.

۳.۱۷ * ما در بخش ۳.۴ ذکر کردیم که برای انجام مداخله ، هسته را 180° درجه می چرخانیم. روال در معادله "ساخته شده" است. (۳-۳۵). شکل ۳.۲۸ همبستگی با همبستگی. قسمتی از تصویر را که در بیضی بزرگ محصور شده است ، بچرخانید ، اما w با آن 180° درجه بچرخد. گسترش معادله (۳-۳۵) برای یک هسته کلی 3×3 و نشان دهید که نتیجه گسترش شما با تصویر شما مطابقت دارد. این به صورت گرافیکی نشان می دهد که پیچش و همبستگی با چرخش هسته متفاوت است.

۳.۱۸ هسته و تصویر زیر به شما داده می شود:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(الف) * هنگامی که هسته در نقطه $(2, 3)$ (ردیف دوم ، ستون سوم) تصویر نشان داده شده در بالا قرار دارد ، یک طرح از ناحیه احاطه شده توسط بیضی بزرگ در شکل ۳.۲۸ ارائه دهید. نمایش مقادیر خاص w و f .

(ب) * محاسبه $w \star f$ با استفاده از حداقل صفر بالشتک مورد نیاز. هنگامی که کارلن روی نقطه $(2, 3)$ f قرار می گیرد ، جزئیات محاسبات خود را نشان دهید. و سپس نتیجه نهایی کامل حرکت را نشان دهید.

(ج) (ب) را تکرار کنید ، اما برای همبستگی ، $w \star f$.

۳.۱۹ * اعتبار معادلات (۳-۳۶) و (۳-۳۷). را اثبات کنید.

۳.۲۰ هسته ، w ، در مسئله ۳.۱۸ قابل تفکیک است.

(a) * با بازرسی ، دو هسته پیدا کنید ، $w = w_1 \star w_2$ و w_2 تا w_2 است.

(الف) با استفاده از تصویر در مسئله ۳.۱۸ ، محاسبه کنید

$f \star w_1$ با استفاده از حداقل پد صفر (شکل ۳.۳۰ را ببینید). هنگامی که هسته در نقطه $(2, 3)$ (ردیف دوم ، ستون سوم) f قرار دارد ، جزئیات محاسبه خود را نشان دهید و سپس پیچش کامل را نشان دهید.

(ب) کانونلوشن w_2 را با نتیجه (b) محاسبه کنید. جزئیات محاسبه خود را هنگامی که هسته در نقطه (۳، ۳) حاصل از (b) متمرکز شده است نشان دهید و سپس حرکت کامل را نشان دهید. با نتیجه در مسئله ۳.۱۸ (ب) مقایسه کنید.

۳.۲۱ با توجه به هسته و تصویر زیر:

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) کانونلوشن این دو را بیان کنید.

(ب) آیا نتیجه شما دارای سوگیری است؟

۳.۲۲ به موارد زیر پاسخ دهید:

هسته توسط VWT قابل تفکیک تشکیل شده است؟ 'If $v = [1 \ 2 \ 1]^T$ and $w^T = [2 \ 1 \ 1 \ 3]$,

هسته زیر قابل تفکیک است. w_1 و w_2 را به گونه ای بیابید که $w = w_1 \star w_2$ باشد.

$$w = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

۳.۲۳ موارد زیر را انجام دهید:

(a) * نشان دهید که هسته گوسی $G(s,t)$ ، در معادله (۳-۴۵) قابل تفکیک است. (راهنما: اولین پاراگراف را در بحث هسته های جداکننده اول در بخش ۳.۴ بخوانید.)

(ب) از آنجا که G قابل تفکیک و به صورت دایره ای متقارن است، می توان آن را به شکل $VWT-G$ بیان کرد. فرض کنید که شکل هسته در معادله (۳-۴۶) استفاده می شود، و این تابع برای تولید هسته $m \times m$ نمونه برداری می شود. v در این مورد چیست؟

۳.۲۴ * نشان دهید که حاصل ضرب بردار ستون با بردار ردیف معادل کانونلوشن ۲ بعدی دو بردار است. طول بردارها نباید یکسان باشد. شما می توانید از یک روش گرافیکی (مانند شکل ۳.۳۰) برای توضیح توضیحات خود استفاده کنید.

۳.۲۵ با توجه به هسته K ، D -گوسی، g_1, g_2, \dots, g_K با وسایل دلخواه و انحرافات استاندارد:

(a) * تعیین کنید که نوشته های ستون سوم جدول ۳.۶ برای محصول $g_1 \times g_2 \times \dots \times g_K$ چه مقدار خواهد بود.

(ب) ستون چهارم برای پیچیدگی $g_1 \star g_2 \star \dots \star g_K$ چگونه خواهد بود؟

(نکته: کار با واریانس آسانتر است؛ انحراف استاندارد فقط ریشه مربعی نتیجه شما است.)
 ۳.۲۶ دو تصویر نشان داده شده در تصویر زیر کاملاً متفاوت هستند، اما هیستوگرام آنها یکسان است. فرض کنید هر تصویر با استفاده از هسته 3×3 جعبه 3×3 تار شده است.
 (الف) * آیا هیستوگرام تصاویر تار هنوز هم برابر است؟ توضیح.



(ب) اگر پاسخ شما منفی است، یا دو هیستوگرام را ترسیم کنید یا دو جدول با جزئیات اجزای هیستوگرام ارائه دهید.

۳.۲۷ یک تصویر با استفاده از یک هسته گوسی با اندازه 3×3 با انحراف استاندارد چهار بار فیلتر می شود. ۱.۰ به دلیل خاصیت همبستگی مشارکت، ما می دانیم که نتایج معادل را می توان با استفاده از یک هسته واحد گوسی به دست آورد که از پیچاندن تک تک هسته ها تشکیل شده است.

(الف) * اندازه کرنل گوسی تنها چقدر است؟

(ب) انحراف معیار آن چقدر است؟

۳.۲۸ یک تصویر با سه هسته گوسی پایین گذر با اندازه های 3×3 ، 5×5 و 7×7 و انحراف معیار به ترتیب ۱.۵، ۲ و ۴ فیلتر می شود. یک فیلتر کامپوزیت، w ، به عنوان کانولوشن این سه فیلتر تشکیل می شود.

(الف) * آیا فیلتر حاصل گوسی است؟ توضیح.

(ب) انحراف معیار آن چقدر است؟

(ج) اندازه آن چقدر است؟

۳.۲۹ * در مورد اثر محدودکننده فیلتر کردن مکرر یک تصویر با یک هسته فیلتر 3×3 پایین گذر بحث کنید. ممکن است اثرات مرزی را نادیده بگیرید.

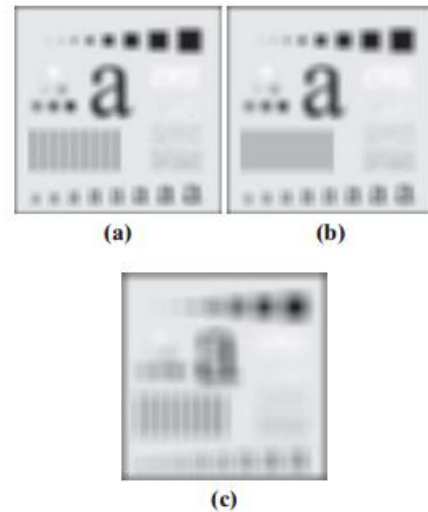
۳.۳۰ در شکل ۳.۴۲ (ب) گوشه های طرح برآورد سایه تیره تر یا روشن تر از مناطق اطراف آنها به نظر می رسد. دلیل این امر را توضیح دهید.

۳.۳۱ * یک تصویر با هسته ای فیلتر می شود که ضرایب آن ۱ است. نشان دهید که مجموع مقادیر پیکسل در تصاویر اصلی و فیلتر شده یکسان است.

۳.۳۲ یک تصویر با یک هسته فیلتر می شود که ضرایب ضریب آن ۰ است. نشان دهید که مجموع مقادیر پیکسل در تصویر فیلتر شده نیز ۰ است.

۳.۳۳ یک نقطه نور را می توان با یک تصویر دیجیتالی متشکل از همه صفرها ، با ۱ در محل نقطه نور ، مدل کرد. اگر یک نقطه نور را از طریق یک لنز فوکوس شده مشاهده کنید ، به صورت یک لکه فازی ظاهر می شود که اندازه آن بستگی به میزان فوکوس لنز دارد. ما در بخش ۳.۵ ذکر کردیم که فیلتر کردن یک تصویر با یک هسته جعبه یک مدل ضعیف برای لنزهای فوکوس شده است و تقریب بهتری با یک هسته گاوس به دست می آید. با استفاده از قیاس تک نقطه ای نور ، دلیل این امر را توضیح دهید.

۳.۳۴ در تصویر اصلی مورد استفاده برای ایجاد سه تصویر تار نشان داده شده ، میله های عمودی دارای عرض ۵ پیکسل ، ارتفاع ۱۰۰ پیکسل و فاصله آنها ۲۰ پیکسل است. تصویر با استفاده از هسته های جعبه مربع با اندازه های ۲۳ ، ۲۵ و ۴۵ عنصر در کنار تار شد. میله های عمودی در سمت چپ ، قسمت پایین (a) و (c) مبهم هستند ، اما بین آنها فاصله جدایی وجود دارد.



با این حال ، میله ها در تصویر (b) ادغام شده اند ، با وجود این واقعیت که هسته مورد استفاده برای ایجاد این تصویر بسیار کوچکتر از هسته ای است که تصویر را تولید کرده است (c). دلیل این امر را توضیح دهید.

۳.۳۵ یک برنامه کاربردی مانند شکل ۳.۴۱ را در نظر بگیرید ، که در آن می خواهید اجسام کوچکتر از مواردی را که با مربع اندازه پیکسل های $q * q$ محصور شده اند حذف کنید. فرض کنید می خواهیم شدت متوسط آن اجسام را به یک دهم مقدار متوسط اولیه آنها کاهش دهیم. به این ترتیب ، شدت آنها به شدت پس زمینه نزدیکتر است و می توان آنها را با آستانه از بین برد. اندازه (عجیب و غریب) کوچکترین هسته جعبه را نشان دهید که کاهش متوسط مطلوب را در تنها یک گذر هسته از روی تصویر ایجاد می کند.

۳.۳۶ با اشاره به فیلترهای آمار سفارش (بخش ۳.۵ را ببینید):

(الف) * ما اشاره کردیم که خوشه های جداگانه ای از تیره یا روشن (نسبت به پس زمینه) پیکسل هایی که مساحت آنها کمتر از نیمی از مساحت یک فیلتر متوسط است ، توسط فیلتر مجبور به ارزش متوسط همسایگان می شوند. یک فیلتر اندازه $n * n$ (فرد) فرض کنید و دلیل این امر را توضیح دهید.

(ب) تصویری را در نظر بگیرید که دارای مجموعه های مختلفی از خوشه های پیکسل است. فرض کنید که همه نقاط یک خوشه روشن تر یا تیره تر از پس زمینه هستند (اما نه هر دو همزمان در یک خوشه) و مساحت هر خوشه کمتر از n^2 است. تحت چه شرایطی یک یا چند مورد از این خوشه ها به معنایی که در قسمت (الف) شرح داده شده است، منزوی نمی شوند؟

۳.۳۷ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) * روشی را برای محاسبه میانگین یک محله $n * n$ ایجاد کنید.

(ب) تکنیکی را برای به روز رسانی میانه پیشنهاد دهید زیرا مرکز محله از پیکسل به پیکسل منتقل می شود. ۳.۳۸ در یک برنامه کاربردی، یک هسته صاف کننده بر روی تصاویر ورودی برای کاهش نویز استفاده می شود، سپس یک هسته لاپلاسیان برای افزایش جزئیات مورد استفاده قرار می گیرد. اگر ترتیب این عملیات ها معکوس شود آیا نتیجه یکسان خواهد بود؟

۳.۳۹ * نشان دهید که لاپلاسیان در معادله تعریف شده است. $(3-50)$ ایزوتروپ (تغییرناپذیر در چرخش) است. مقادیر پیوسته را فرض کنید. از جدول ۲.۳، چرخش مختصات را با زاویه u نشان می دهد

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \text{ and } y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

جایی که (x, y) و (x', y') مختصات بدون چرخش و انتقال هستند.

۳.۴۰ * در شکل ۳.۴۶ مشاهده کردید که لاپلاسیان با $a-8$

در مرکز نتایج واضح تری نسبت به نمونه ای با $4-$ در مرکز ارائه می دهد. دلیل آن را توضیح دهید.

۳.۴۱ * یک کرنل $3 * 3$ برای انجام ماسک زدن بدون وضوح در یک عبور از یک تصویر بدهید. فرض کنید که تصویر متوسط با استفاده از فیلتر جعبه با اندازه $3 * 3$ به دست می آید.

۳.۴۲ نشان دهید که کم کردن لاپلاسیان از سن، نتیجه ای متناسب با ماسک تیز در معادله $(3-55)$ می دهد. از تعریف لاپلاسیانی که در معادله $(3-53)$ ذکر شده است استفاده کنید.

۳.۴۳ موارد زیر را انجام دهید:

(الف) * نشان دهید که مقدار گرادیان داده شده در معادله $(3-58)$ یک عملیات ایزوتروپیک است (به بیانیه مسئله ۳.۳۹ مراجعه کنید).

(ب) نشان دهید که در صورت محاسبه گرادیان با معادله $(3-59)$ ، خاصیت همسانگرد از بین می رود.

۳.۴۴ آیا هریک از هسته های زیر (تیز کننده) بالا قابل تفکیک هستند؟ برای کسانی که هستند، بردارهای v و w را پیدا کنید که vw^T برابر هسته (ها) باشد.

(الف) هسته لاپلاسیانی در شکل ۳.۴۵ (الف) و (ب)

(ب) هسته های گرادیان متقابل رابرتز که در شکل ۳.۵۰ (ب) و (ج) نشان داده شده است.

(ج) * هسته Sobel در شکل ۳.۵۰ (د) و (ه)

۳.۴۵ در یک برنامه تشخیص کاراکتر ، صفحات متنی با استفاده از تابع تبدیل آستانه فرم در شکل ۳.۲ (ب) به دوتایی تبدیل می شوند. پس از آن روشی انجام می شود که شخصیت ها را نازک می کند تا زمانی که به رشته های دودویی ۱ تبدیل می شوند و در پس زمینه ۰ قرار می گیرند. به دلیل نویز ، دو خطی شدن و نازک شدن منجر به شکستن رشته های شخصیت با فاصله بین ۱ تا ۳ پیکسل می شود. یکی از راههای "ترمیم" شکافها این است که یک هسته صاف بر روی تصویر دوتایی اجرا کنید تا آن را تار کنید ، و در نتیجه پلهایی از پیکسلهای غیر صفر بین شکافها ایجاد کنید.

(الف) * اندازه (فرد) کوچکترین کارل جعبه را که می تواند این کار را انجام دهد ، بیان کنید.

(ب) پس از پر کردن شکاف ها ، تصویر را برای تبدیل مجدد به حالت دودویی ، آستانه باند ی می کنند. برای پاسخ شما در (الف) ، حداقل ارزش آستانه مورد نیاز برای انجام این کار ، بدون اینکه دوباره بخش ها تجزیه شوند ، چقدر است؟

۳.۴۶ یک شرکت تولیدی یک سیستم تصویربرداری خریداری کرد که وظیفه آن صاف یا تیز کردن تصاویر است. نتایج استفاده از سیستم در زمینه تولید ضعیف بوده است و مدیر کارخانه گمان می کند که سیستم آنطور که باید تصاویر را صاف و تیز نمی کند. شما به عنوان مشاور استخدام می شوید تا مشخص شود که آیا سیستم این عملکردها را به درستی انجام می دهد یا خیر. چگونه می توان تعیین کرد که سیستم به درستی کار می کند؟ (نکته: گزاره های مسائل ۳.۳۱ و ۳.۳۲ را مطالعه کنید).

۳.۴۷ از یک دوربین تلویزیونی CCD برای انجام یک مطالعه طولانی مدت با مشاهده همان منطقه به مدت ۲۴ ساعت در روز و به مدت ۳۰ روز استفاده می شود. تصاویر دیجیتال هر ۵ دقیقه ضبط و به یک مکان مرکزی ارسال می شوند. روشنایی صحنه از نور طبیعی روز به نورپردازی هنری تغییر می کند. در هیچ زمان صحنه بدون نور نیست ، بنابراین همیشه می توان تصویری قابل قبول به دست آورد. از آنجا که محدوده روشنایی به گونه ای است که همیشه در محدوده عملکرد خطی دوربین قرار دارد ، تصمیم گرفته می شود از هیچ مکانیسم جبرانی در خود دوربین استفاده نکند. در عوض ، تصمیم گرفته شده است که از تکنیک های پردازش تصویر برای پس پردازش و در نتیجه عادی سازی تصاویر ، معادل روشنایی ثابت استفاده شود. روشی را برای این کار پیشنهاد دهید. شما آزاد هستید که از هر روشی که می خواهید استفاده کنید ، اما تمام مفروضاتی را که برای رسیدن به طرح خود ایجاد کرده اید به وضوح بیان کنید

فصل چهارم : فیلترینگ در دامنه فرکانس

فیلتر: دستگاه یا ماده ای برای سرکوب یا به حداقل رساندن امواج یا نوسانات فرکانس های خاص.
فرکانس: تعداد دفعاتی که یک تابع متناوب همان توالی مقادیر را در طول واحد تغییر متغیر مستقل تکرار می کند.

فرهنگ لغت دانشگاهی جدید وبستر

پیش نمایش

پس از یک مقدمه تاریخی مختصر در مورد تبدیل فوریه و اهمیت آن در پردازش تصویر ، ما از اصول اولیه نمونه برداری عملکردی شروع می کنیم و گام به گام برای به دست آوردن تبدیل های گسسته یک و دو بعدی فوریه پیش می رویم. همراه با کانولوشن ، تبدیل فوریه جزء اصلی پردازش حوزه فرکانس است. در طول این توسعه ، ما همچنین چندین جنبه مهم نمونه برداری ، مانند الایزینگ را لمس می کنیم ، که درست آنها مستلزم درک حوزه فرکانس است و بنابراین در این فصل به بهترین نحو مورد بررسی قرار می گیرد. این مقاله با فرمول بندی فیلتر در حوزه فرکانس ، به موازات تکنیک های فیلترینگ فضایی مورد بحث در فصل ۳ ، دنبال می شود. ما فصل را با مشتق از معادلات زیربنایی تبدیل سریع فوریه (FFT) به پایان می بریم و مزایای محاسباتی آن را مورد بحث قرار می دهیم. به این مزایا ، تغییر دامنه فرکانس را عملی کرده و در بسیاری از موارد ، برتر از فیلتر در حوزه فضایی است.

پس از اتمام این فصل ، خوانندگان باید:

- معنی فیلتر دامنه فرکانسی و تفاوت آن با فیلترینگ در حوزه فضایی را درک کنید.
- با مفاهیم نمونه گیری ، بازسازی عملکرد و الایزینگ آشنا باشید.
- درک پیچیدگی در حوزه فرکانس و نحوه ارتباط آن با فیلترینگ.
- بدانید چگونه می توانید عملکردهای فیلتر دامنه فرکانس را از هسته های فضایی بدست آورید و بالعکس.
- بتوانید توابع تبدیل فیلتر را مستقیماً در حوزه فرکانس ایجاد کنید
- درک کنید که چرا پر کردن تصویر مهم است.
- مراحل مورد نیاز برای انجام فیلترینگ در حوزه فرکانس را بدانید.
- درک کنید که چه زمانی فیلتر دامنه فرکانسی بر فیلتر در حوزه فضایی برتری دارد.

با سایر تکنیکهای فیلترینگ در حوزه فرکانس مانند پوشش دهی تیره بدون وضوح و فیلتر همومورفیک آشنا باشید.

منشا و مکانیک تبدیل سریع فوریه و نحوه استفاده موثر از آن در پردازش تصویر را درک کنید.

۴.۱ پیش زمینه

بحث را با خلاصه ای از ریشه های تبدیل فوریه و تأثیر آن بر شاخه های بشمار ریاضیات ، علوم و مهندسی آغاز می کنیم.

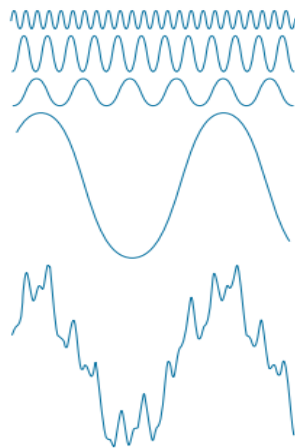
یک تاریخچه مختصر از سری چهارم و تبدیل

ژان باپتیست ژوزف فوریه ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۷۶۸ در شهر اوسر ، در میانه راه بین پاریس و دیژون متولد شد. سهمی که او بیشتر در خاطر او است در یک خاطره در سال ۱۸۰۷ بیان شد و بعداً در سال ۱۸۲۲ در کتاب خود ، (*La Théorie Analytique de la Chaleur* نظریه تحلیلی گرما) منتشر شد. این کتاب ۵۵ سال بعد توسط فریمن به انگلیسی تبدیل شد (به فریمن [۱۸۷۸] مراجعه شود). اساساً ، سهم فوریه در این زمینه بیان می کند که هر عملکرد منطقه ای را می توان به عنوان مجموع سینوس ها و/یا کسینوس های فرکانس های مختلف بیان کرد که هریک در ضریب متفاوتی ضرب می شوند (ما اکنون این مجموع را مجموعه فوریه می نامیم). مهم نیست که عملکرد چقدر پیچیده است. اگر متناوب است و شرایط ریاضی ملایم را برآورده می کند ، می توان آن را با چنین مبلغی نشان داد. این امر در حال حاضر بدیهی تلقی می شود ، اما در زمانی که برای اولین بار ظاهر شد ، این مفهوم که توابع پیچیده را می توان به عنوان مجموع سینوس ها و کسینوس های ساده نشان داد اصلاً شهودی نبود (شکل ۴.۱ را ببینید). بنابراین ، جای تعجب نیست که ایده های فوریه در ابتدا با شک و تردید روبرو شدند.

توابعی که متناوب نیستند (اما مساحت آنها در زیر منحنی نامحدود است) را می توان بصورت انتگرال سینوس ها و/یا کسینوس ها ضرب در یک تابع وزنی بیان کرد. فرمول در این مورد تبدیل فوریه است و کاربرد آن حتی در بسیاری از رشته های نظری و کاربردی از سری فوریه بیشتر است. هر دو نمایندگی ویژگی مهمی را به اشتراک می گذارند که یک تابع ، بیان شده در دو سری فوریه یا تبدیل ، می تواند به طور کامل از طریق یک روند معکوس ، بدون از دست دادن اطلاعات ، بازسازی (بازیابی) شود. این یکی از مهمترین ویژگیهای این نمایش ها است زیرا به ما اجازه می دهد در حوزه فوریه (که عموماً دامنه فرکانس نامیده می شود) کار کنیم و سپس بدون از دست دادن اطلاعات به دامنه اصلی عملکرد بازگردیم. در نهایت ، استفاده از سری فوریه و تغییر در حل مشکلات عملی است که آنها را به طور گسترده مطالعه می کند و به عنوان ابزارهای اساسی مورد استفاده قرار می گیرد.

کاربرد اولیه ایده های فوریه در حوزه انتشار گرما بود ، جایی که آنها اجازه فرمول بندی معادلات دیفرانسیل را برای نمایش گرما به گونه ای دادند که بتوان برای اولین بار راه حل هایی را به دست آورد. در طول قرن گذشته و

به ویژه در ۶۰ سال گذشته ، کل صنایع و رشته های دانشگاهی در نتیجه ایده های اولیه فوریه از بین رفته اند. ظهور رایانه های دیجیتال و "کشف" الگوریتم تبدیل سریع فوریه (FFT) در اوایل دهه ۱۹۶۰ زمینه پردازش سیگنال را مکانولوشن کرد. این دو فناوری اصلی برای اولین بار امکان پردازش عملی بسیاری از سیگنالهای دارای اهمیت استثنایی ، از مانیتورهای پزشکی و اسکنرها تا ارتباطات الکترونیکی مدرن را فراهم کرد. همانطور که در بخش ۳.۴ آموختید ، ترتیب عملیات $MNmn$ (چند برابر و اضافات) برای تصفیه یک تصویر M N * با هسته ای به اندازه $m * n$ عناصر لازم است. اگر هسته قابل تفکیک باشد ، تعداد عملیات به $MN (m * n)$ کاهش می یابد. در بخش ۴.۱۱ ، خواهید آموخت که انجام عملیات $MN \log_2 MN$ برای انجام فرایند فیلتر معادل در حوزه فرکانس لازم است ، جایی که ۲ در جلو از این واقعیت ناشی می شود که ما باید یک FFT رو به جلو و یک معکوس را محاسبه کنیم.



شکل ۴.۱ تابع پایین مجموع چهار تابع بالای آن است. ایده فوریه در سال ۱۸۰۷ مبنی بر اینکه توابع متناوب را می توان به عنوان مجموع وزنی سینوس ها و کسینوس ها نشان داد با شک و تردید مواجه شد. برای به دست آوردن ایده ای از مزایای محاسباتی نسبی فیلتر در فرکانس در مقابل حوزه فضایی ، تصاویر مربع و هسته ها را به ترتیب در اندازه $M * M$ و $m * m$ در نظر بگیرید. مزیت محاسباتی (به عنوان تابعی از اندازه هسته) فیلتر کردن چنین تصویری با FFT در مقایسه با استفاده از یک هسته غیر قابل تفکیک به صورت زیر تعریف می شود:

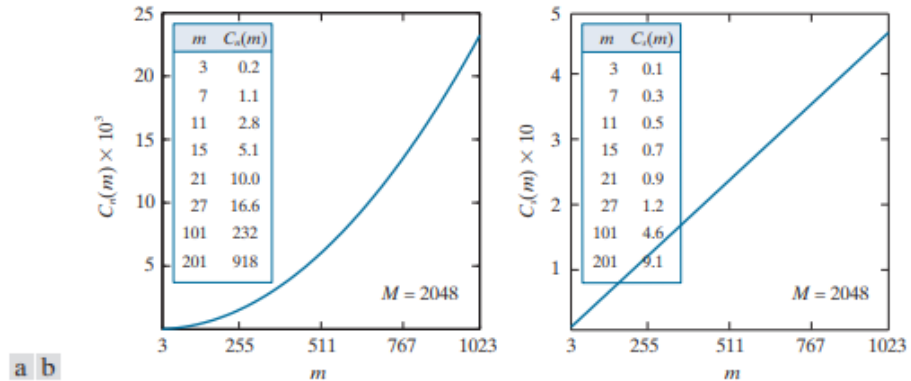
$$C_n(m) = \frac{M^2 m^2}{2M^2 \log_2 M^2} \quad (4-1)$$

$$= \frac{m^2}{4 \log_2 M}$$

اگر هسته قابل تفکیک باشد ، مزیت می شود

$$C_s(m) = \frac{2M^2 m}{2M^2 \log_2 M^2} = \frac{m}{2 \log_2 M} \quad (4-2)$$

در هر صورت ، وقتی $C(m) = 1$ مزیت (از نظر محاسبات کمتر) متعلق به روش FFT است. در غیر این صورت مزیت به نفع فیلترینگ فضایی است.



شکل ۴.۲ (الف) مزیت محاسباتی FFT نسبت به هسته های فضایی غیر قابل تفکیک. (ب) مزیت نسبت به هسته های جداسازی. اعداد $C(m)$ در جداول درج شده نباید در فاکتورهای ۱۰ نشان داده شده برای منحنی ها ضرب شود.

شکل ۴.۲ (ب) نمودار $C_n(m)$ را به عنوان تابعی از m برای تصویری با اندازه متوسط ($M = 2048$) نشان می دهد. جدول داخلی نمای دقیق تری برای اندازه های کوچکتر هسته نشان می دهد. همانطور که می بینید ، FFT برای هسته های اندازه $7 * 7$ و بزرگتر مزیت دارد. این مزیت به سرعت به عنوان تابع m افزایش می یابد و برای $m = 101$ و بیش از 200 و برای $m = 201$ نزدیک به 1000 است. برای این که در صورت فیلتر کردن بانکی از تصاویر با اندازه $2048 * 2048$ ، به معنی این مزیت برسید. با 1 FFT دقیقه طول می کشد ، فیلتر کردن مجموعه ای از تصاویر با هسته ای جدا نشدنی با اندازه $201 * 201$ عنصر به ترتیب 17 ساعت طول می کشد. این تفاوت معناداری است و نشان دهنده اهمیت پردازش دامنه فرکانس با استفاده از FFT است.

در مورد هسته های قابل تفکیک ، مزیت محاسباتی چندان چشمگیر نیست ، اما همچنان معنی دار است. نقطه "مقاطع" در حال حاضر حدود 27 - است و وقتی $m = 101$ تفاوت بین فیلترهای حوزه فرکانسی و فضایی هنوز قابل مدیریت است. با این حال ، می توانید مشاهده کنید که با $m = 201$ مزیت استفاده از FFT به ضریب 10 نزدیک می شود ، که شروع به اهمیت می کند. در هر دو نمودار توجه داشته باشید که FFT برای هسته های فضایی بزرگ مورد علاقه زیادی است.

تمرکز ما در بخشهای بعدی بر روی تبدیل فوریه و خواص آن است. با پیشرفت در این فصل ، مشخص می شود که تکنیک های فوریه در طیف وسیعی از برنامه های پردازش تصویر مفید هستند. فصل را با بحث FFT به پایان می بریم.

مزایای محاسباتی ارائه شده توسط معادلات (۱-۴) و (۲-۴) این واقعیت را در نظر نمی گیرند که FFT عملیات بین اعداد مختلط و دیگر محاسبات ثانویه (اما در مقایسه کوچک) را که بعداً در این فصل مورد بحث قرار گرفت ، انجام می دهد. بنابراین ، مقایسه ها فقط باید به عنوان دستورالعمل تفسیر شوند ،

در مورد مثالهای این فصل

همانطور که در فصل ۳ ، اکثر نمونه های فیلتر کردن تصویر در این فصل به بهبود تصویر می پردازند. به عنوان مثال ، هموار و وضوح به طور سنتی با افزایش تصویر همراه است ، و همچنین تکنیک هایی برای دستکاری کنتراست. مبتدیان در پردازش تصویر دیجیتال ، پیشرفت را جالب و نسبتاً ساده می دانند. بنابراین ، استفاده از نمونه هایی از تقویت تصویر در این فصل ، نه تنها داشتن یک فصل اضافی در کتاب را نجات می دهد ، بلکه مهمتر از همه ، یک ابزار موثر برای معرفی تازه واردان به تکنیک های فیلترینگ در حوزه فرکانس است. ما از روش های پردازش دامنه فرکانسی برای سایر برنامه ها در فصل های ۵ ، ۷ ، ۸ ، ۱۰ و ۱۱ استفاده خواهیم کرد.

۴.۲ مفاهیم اولیه

ما به طور مختصر مکث می کنیم تا در بخشهای بعدی چند مفهوم اساسی را که اساس ماده هستند ، معرفی کنیم.

اعداد مختلط

عدد مختلط C به صورت زیر تعریف می شود

$$C = R + jI \quad (4-3)$$

جایی که R و I اعداد واقعی هستند و $j = \sqrt{-1}$ در اینجا R قسمت واقعی عدد مختلط و I قسمت موهومی آن را نشان می دهد. اعداد حقیقی زیرمجموعه اعداد مختلط هستند که در آنها $I = 0$. مزدوج یک عدد مختلط C ، با C^* مشخص شده است ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$C^* = R - jI \quad (4-4)$$

اعداد مختلط را می توان از نظر هندسی به عنوان نقاطی در یک صفحه (به نام صفحه پیچیده) در نظر گرفت که ابرسه آن محور واقعی (مقادیر R و مختصات آنها محور موهومی) مقادیر I است. یعنی عدد مختلط $R + jI$ نقطه (R, I) در سیستم مختصات صفحه پیچیده است.

گاهی اوقات مفید است که اعداد مختلط را در مختصات قطبی نشان دهیم ،

$$C = |C|(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (4-5)$$

جایی که $|C| = \sqrt{R^2 + I^2}$ طول بردار از مبدأ صفحه پیچیده تا نقطه (R, I) امتداد دارد و θ زاویه بین بردار و محور واقعی است. رسم نمودار محورهای واقعی و پیچیده با بردار در ربع اول نشان می دهد که $\tan \theta = (I/R)$ یا $\theta = \arctan(I/R)$ زوایایی را در محدوده $[-\pi/2, \pi/2]$ گرداند. اما از آنجا که من و R می توانند به طور مستقل مثبت و منفی باشند ، باید بتوانیم زاویه ها را در محدوده کامل بدست آوریم $[-\pi, \pi]$. ما این کار را با ردیابی علامت I و R هنگام محاسبه u انجام می دهیم. بسیاری از زبانهای برنامه نویسی این کار را بطور خودکار از طریق توابع چهار ضلعی چهار ضلعی انجام می دهند. به عنوان مثال ، MATLAB تابع $\text{atan2}(\text{Imag}, \text{Real})$ را برای این منظور ارائه می دهد.

با استفاده از فرمول اوایلر ،

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (4-6)$$

جایی که $e = 2.71828\dots$ ، نمای زیر را از اعداد پیچیده در مختصات قطبی نشان می دهد ،

$$C = |C|e^{j\theta} \quad (4-7)$$

جایی که C و u همانطور که در بالا تعریف شده است هستند. به عنوان مثال ، نمای قطبی مجموعه پیچیده $1 + j2$ is $\sqrt{5}e^{j\theta}$ است ، جایی که $\theta = 63.4^\circ$ or 1.1 رادیان است. معادلات قبلی برای توابع پیچیده نیز کاربرد دارد. یک تابع پیچیده ، $F(u)$ ، از یک متغیر واقعی u ، می تواند به عنوان مجموع $F(u) = R(u) + jI(u)$ بیان شود ، جایی که $R(u)$ و $I(u)$ واقعی هستند و توابع جزء فرضی $F(u)$ همانطور که قبلاً ذکر شد ، ترکیب مرکب این فصل و فصل بعد ، چندین بار به عملکردهای پیچیده برمی گردیم.

سری چهارم

همانطور که در قسمت قبل نشان داده شد ، یک تابع $f(t)$ یک متغیر پیوسته ، t ، که متناوب با یک دوره است ، T ، می تواند به عنوان مجموع سینوس ها و کسینوس ها ضرب در ضرایب مناسب بیان شود. این مبلغ ، که به عنوان مجموعه فوریه شناخته می شود ، دارای فرم است

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t} \quad (4-8)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j\frac{2\pi n}{T}t} dt \quad \text{for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4-9)$$

ضرایب هستند. این واقعیت که معادله (۴-۸) بسط سینوس ها و کسینوس ها از فرمول اویلر، معادله (۴-۶)، دنبال می شود.

پیامدها و ویژگی های غربالگری آنها

در مطالعه سیستمهای خطی و تبدیل فوریه، مفهوم ضربه و خاصیت الک کردن آن مهم است. واحد تکانه یک متغیر پیوسته t ، واقع در $t = 0$ ، و نشان داده شده δ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{if } t = 0 \\ 0 & \text{if } t \neq 0 \end{cases} \quad (4-10)$$

و برای شرط لازم الایزینگ محدود است

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (4-11)$$

از نظر فیزیکی، اگر t را به عنوان زمان تفسیر کنیم، یک ضربه ممکن است به عنوان یک جهش دامنه بی نهایت و مدت صفر، با واحد سطح در نظر گرفته شود. یک ضربه دارای اصطلاحاً ویژگی غربالگری نسبت به ادغام است

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (4-12)$$

به شرطی که $f(t)$ در $t = 0$ پیوسته باشد، شرطی که معمولاً در عمل برآورده می شود. الک کردن به سادگی مقدار تابع $f(t)$ را در محل ضربه (یعنی، در $t = 0$ در معادله قبلی) به دست می آورد. یک بیان کلی تر از ویژگی غربالگری شامل یک ضربه در یک نقطه دلخواه، t_0 ، نشان داده شده به عنوان $\delta(t - t_0)$ است. در این مورد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (4-13)$$

که به سادگی مقدار تابع را در محل ضربه می دهد. به عنوان مثال، اگر $f(t) = \cos(t)$ ، با استفاده از ضربه $\delta(t - \pi)$ در معادله (۴-۱۳) نتیجه $f(\pi) = \cos(\pi) = -1$ را به دست می آورد. قدرت مفهوم غربالگری به زودی آشکار می شود.

نکته جالب توجه بعدی در این بخش، یک قطار ضربه ای، $s_{\Delta T}(t)$ است که به عنوان مجموع تعداد بی نهایت تعداد تکانه ΔT از یکدیگر تعریف شده است:

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta T) \quad (4-14)$$

شکل ۴.۳ (a) یک تک ضربه واقع در $t = t_0$ و شکل ۴.۳ (b) یک قطار ضربه را نشان می دهد. تکانه های متغیرهای پیوسته با فلش های رو به بالا نشان داده می شوند تا ارتفاع بی نهایت و عرض صفر را شبیه سازی کنند. برای متغیرهای گسسته، ارتفاع محدود است، همانطور که در ادامه نشان خواهیم داد. اجازه دهید X یک متغیر گسسته

را نشان دهد. همانطور که در فصل ۳ آموختید، واحد گسسته، $d(x)$ ، در زمینه سیستمهای گسسته همان اهداف را دارد که ضربه $d(t)$ هنگام کار با متغیرهای پیوسته انجام می دهد. به صورت تعریف شده است

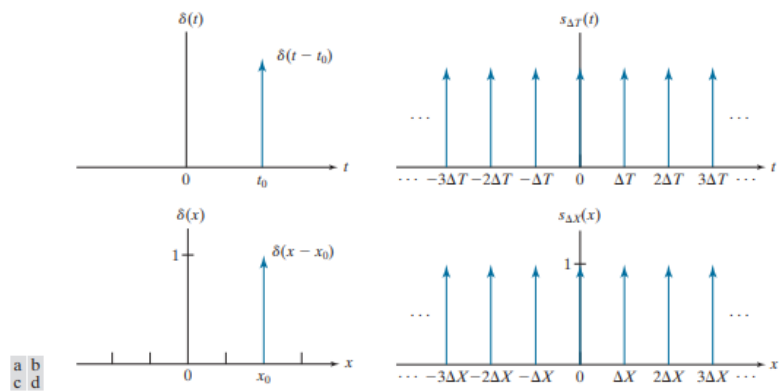
$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = 0 \\ 0 & \text{if } x \neq 0 \end{cases} \quad (4-15)$$

واضح است که این تعریف معادله گسسته معادله (۴-۱۱) را برآورده می کند:

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1 \quad (4-16)$$

ویژگی غربالگری برای متغیرهای گسسته دارای فرم است

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) = f(0) \quad (4-17)$$



شکل ۴.۳ (الف) ضربه مستمر واقع در $t = t_0$ (ب) یک قطار ضربه ای متشکل از تکانه های پیوسته. (ج) واحد ضربه مجزا واقع در $x = x_0$ (د) قطار ضربه ای متشکل از تکانه های گسسته واحد یا به طور کلی با استفاده از یک ضربه گسسته واقع در $x = x_0$ (به رابطه ۳-۳۳ مراجعه کنید)،

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0) \quad (4-18)$$

مانند قبل، می بینیم که ویژگی غربالگری مقدار تابع را در محل ضربه نشان می دهد. شکل ۴.۳ (c) واحد نمودار گسسته را به صورت نمودار نشان می دهد، و شکل ۴.۳ (d) مجموعه ای از تکانه های گسسته واحد را نشان می دهد، برخلاف نمونه پیوسته آن، ضربه گسسته یک تابع معمولی است.

تبدیل چهارگانه عملکردهای یک متغیر پیوسته

تبدیل فوریه یک تابع پیوسته $f(t)$ یک متغیر پیوسته t ، نشان دهنده $\mathfrak{F}\{f(t)\}$ ، با معادله تعریف می شود

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (4-19)$$

جایی که m نیز یک متغیر پیوسته است. ^{۱۱} چون t یکپارچه شده است، $\mathfrak{S}\{f(t)\}$ فقط یک تابع m است. یعنی

$$\mathfrak{S}\{f(t)\} = F(\mu); \text{ بنابراین، تبدیل فوریه } f(t) \text{ را به صورت زیر می نویسیم}$$

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (4-20)$$

برعکس، با توجه به $F(\mu)$ ، می توانیم $f(t)$ را با استفاده از تبدیل معکوس فوریه، که به صورت زیر نوشته شده است، بدست آوریم.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad (4-21)$$

معادله (۴-۲۱) واقعیت مهمی را که در بخش ۴.۱ ذکر شده است نشان می دهد که یک تابع را می توان از تبدیل خود بازیابی کرد.

جایی که ما از این واقعیت استفاده کردیم که متغیر m در معکوس یکپارچه شده است. تبدیل کرده و به جای علامت سنگین تر، $f(t)$ نوشته است

$f(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{F(\mu)\}$ معادلات (۴-۲۰) و (۴-۲۱) شامل به اصطلاح جفت تبدیل فوریه هستند که اغلب به صورت $f(t) \Leftrightarrow F(\mu)$ نشان داده می شوند. پیکان دوگانه نشان می دهد که عبارت سمت راست با گرفتن تبدیل فوریه جلو از عبارت در سمت چپ به دست می آید، در حالی که عبارت سمت چپ با گرفتن تبدیل فوریه معکوس عبارت در سمت راست به دست می آید.

با استفاده از فرمول اوپلر می توان معادله (۴-۲۰) را نوشت. به عنوان

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[\cos(2\pi\mu t) - j\sin(2\pi\mu t)]dt \quad (4-22)$$

از آنجا که t در این معادله یکپارچه شده است، متغیر تئونی سمت چپ m است که فرکانس برابر است با اصطلاحات سینوس و کسینوس

اگر $f(t)$ واقعی باشد، می بینیم که تغییر آن به طور کلی پیچیده است. توجه داشته باشید که تبدیل فوریه بسط $f(t)$ ضرب در عبارات سینوسی است که فرکانس آنها با مقادیر m تعیین می شود. بنابراین، چون تنها متغیری که پس از ادغام باقی می ماند، فرکانس است، می گوییم که دامنه تبدیل فوریه، حوزه فرکانس است. ما بعداً در این فصل حوزه فرکانس و خواص آن را با جزئیات بیشتری بحث خواهیم کرد. در بحث ما، t می تواند هر متغیر پیوسته را نشان دهد و واحدهای متغیر فرکانس m به واحدهای t بستگی دارد. به عنوان مثال، اگر t زمان را در

^{۱۱} به طور کلی شرایط موجود برای تبدیل فوریه پیچیده است (Champeney [۱۹۸۷])، اما شرط کافی برای وجود آن این است که انتگرال مقدار مطلق $f(t)$ یا انتگرال عدد

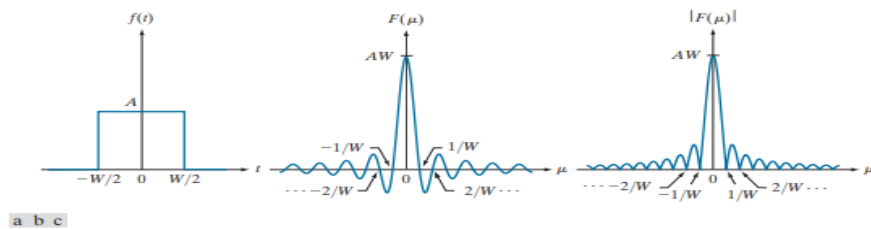
مربع $f(t)$ ، متناهی باشد. وجود به ندرت در عمل به جز سیگنالهای ایده آل شده مانند سینوسوئیدها مطرح است. که برای همیشه گسترش می یابد اینها با استفاده از تکانه های عمومی اداره می شوند. علاقه اصلی ما به فوریه مجزا است. تبدیل جفت که، همانطور که به زودی خواهید دید، برای همه تابع محدود وجود دارد

ثانیه نشان دهد ، واحدهای m چرخه/ثانیه یا هرتز (هرتز) هستند. اگر t فاصله را در متر نشان دهد ، واحدهای m چرخه/متر و غیره هستند. به عبارت دیگر ، واحدهای حوزه فرکانس چرخه در واحد متغیر مستقل تابع ورودی هستند.

مثال ۴.۱: بدست آوردن تبدیل فوریه یک تابع پیوسته ساده.

تبدیل فوریه تابع در شکل ۴.۴ (a) از معادله (۴-۲۰) زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-W/2}^{W/2} Ae^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \frac{-A}{j2\pi\mu} [e^{-j2\pi\mu t}]_{-W/2}^{W/2} = \frac{-A}{j2\pi\mu} [e^{-j\pi\mu W} - e^{j\pi\mu W}] \\ &= \frac{A}{j2\pi\mu} [e^{j\pi\mu W} - e^{-j\pi\mu W}] \\ &= AW \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \end{aligned}$$



شکل ۴.۴ (الف) تابع جعبه ، (ب) تبدیل فوریه آن ، و (ج) طیف آن. همه توابع در هر دو جهت به بی نهایت گسترش می یابد. به رابطه معکوس بین عرض W تابع و صفرهای تبدیل توجه کنید.

جایی که ما از الایزینگ مثلثاتی $\sin \theta = (e^{j\theta} - e^{-j\theta})/2j$ استفاده کردیم. در این مورد ، شرایط پیچیده فوریه به خوبی به یک عملکرد سینوسی واقعی تبدیل می شود. نتیجه در آخرین مرحله از عبارت قبلی به عنوان تابع sinc شناخته می شود که شکل کلی دارد

$$\text{sinc}(m) = \frac{\sin(\pi m)}{(\pi m)} \quad (4-23)$$

که در آن $\text{sinc}(0) = 1$ و $\text{sinc}(m) = 0$ برای همه مقادیر صحیح دیگر m شکل ۴.۴ (ب) نمودار $F(m)$ را نشان می دهد.

به طور کلی ، تبدیل فوریه شامل اصطلاحات پیچیده ای است و معمولاً برای اهداف نمایش با اندازه تبدیل (مقدار واقعی) کار می شود ، که به آن طیف فوریه یا طیف فرکانسی می گویند:

$$|F(\mu)| = AW \left| \frac{\sin(\pi\mu W)}{(\pi\mu W)} \right|$$

شکل ۴.۴ (ج) نمودار $F(m)$ را به عنوان تابعی از فرکانس نشان می دهد. ویژگیهای کلیدی که باید به آنها توجه کنید عبارتند از (۱) که مکانهای صفرهای $F(m)$ و $F(m)$ با عکس W ، عملکرد "جعبه" عکس معکوس است. (۲) اینکه ارتفاع لوبها به عنوان تابعی از فاصله از مبدا کاهش می یابد. و (۳) که تابع برای مقدار مثبت و منفی m

تا بی نهایت گسترش می یابد. همانطور که بعداً خواهید دید ، این ویژگیها در تفسیر طیف تبدیلیهای دو بعدی فوریه تصاویر بسیار مفید هستند.

مثال ۴.۲: تبدیل فوریه یک ضربه و یک قطار ضربه ای.

تبدیل فوریه یک تکانه واحد واقع در مبدا از معادله (۴-۲۰) زیر حاصل می شود:

$$\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} \delta(t) dt = e^{-j2\pi\mu}$$

جایی که ما از ویژگی غربالگری از معادله (۴-۱۲) استفاده کردیم. بنابراین ، ما می بینیم که تبدیل فوریه از یک ضربه واقع در مبدا حوزه فضایی یک ثابت در حوزه فرکانس است (این مختصر را در بخش ۳.۴ در ارتباط با شکل ۳.۳۰ بحث کردیم).

به طور مشابه ، تبدیل فوریه یک ضربه واقع در $t = t_0$ است

$$\mathfrak{F}\{\delta(t-t_0)\} = F(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi\mu t} \delta(t-t_0) dt = e^{-j2\pi\mu t_0}$$

جایی که ما از ویژگی غربالگری از معادله (۴-۱۳) استفاده کردیم. اصطلاح $e^{-j2\pi\mu t_0}$ نشان دهنده یک دایره واحد با محوریت منشأ صفحه پیچیده است ، همانطور که می توانید با استفاده از فرمول اوپلر برای گسترش نمایی به اجزای سینوس و کسینوس آن را به راحتی مشاهده کنید. در بخش ۴.۳ ، از تبدیل فوریه یک قطار ضربه ای متناوب استفاده خواهیم کرد. به دست آوردن این تغییر به همان سادگی ای نیست که در مورد تکانه های فردی نشان دادیم. با این حال ، درک چگونگی ایجاد تغییر شکل یک قطار ضربه ای مهم است ، بنابراین زمان لازم را برای استخراج آن در اینجا اختصاص می دهیم. ما با ذکر این نکته شروع می کنیم که تنها تفاوت اساسی در شکل معادله (۴-۲۰) و (۴-۲۱) است. علامت نمایی است. بنابراین ، اگر یک تابع $f(t)$ دارای تبدیل فوریه $F(\mu)$ باشد ، بنابراین ارزیابی این تابع در t ، $F(t)$ ، باید تبدیل $f(-\mu)$ داشته باشد. با استفاده از این ویژگی تقارن و با توجه به اینکه همانطور که در بالا نشان دادیم که تبدیل چهارم یک ضربه $\delta(t-t_0)$ is $e^{-j2\pi\mu t_0}$ است ، نتیجه می شود که تابع $e^{-j2\pi\mu t_0} \delta(-\mu - t_0)$ تبدیل دارد به با اجازه دادن به $-t_0 = a$ ، نتیجه می شود که تبدیل $e^{j2\pi\mu t}$ is $\delta(-\mu + a) = \delta(\mu - a)$ ، است ، جایی که آخرین مرحله درست است زیرا d صفر است مگر $\mu = a$ ، که همان شرایط است.

برای $\delta(-\mu + a)$ or $\delta(\mu - a)$ قطار ضربه $S_{\Delta T}(t)$ در معادله (۴-۱۴) متناوب با دوره ΔT است ، بنابراین می توان آن را به عنوان یک سری فوریه بیان کرد:

$$s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} s_{\Delta T}(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt$$

با اشاره به شکل ۴.۳ (ب) ، می بینیم که انتگرال در بازه $[-\Delta T/2, \Delta T/2]$ تکانه واقع در مبدأ. بنابراین ، معادله قبلی تبدیل می شود

$$c_n = \frac{1}{\Delta T} \int_{-\Delta T/2}^{\Delta T/2} \delta(t) e^{-j\frac{2\pi n}{\Delta T}t} dt = \frac{1}{\Delta T} e^0 = \frac{1}{\Delta T}$$

جایی که ما از ویژگی غربال کردن $d(t)$ استفاده کردیم. سپس سری فوریه تبدیل می شود

$$s_{\Delta T}(t) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$$

هدف ما بدست آوردن تبدیل فوریه این عبارت است. از آنجا که مجموع یک فرایند خطی است ، بدست آوردن تبدیل فوریه یک مجموع همان بدست آوردن مجموع تبدیل اجزای فردی مجموع است. این اجزا نمایی هستند و ما قبلاً در این مثال آن را مشخص کردیم

$$\mathfrak{F}\left\{e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} = \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

بنابراین ، $S(\mu)$ ، تبدیل فوریه قطار ضربه ای متناوب ، است

$$S(\mu) = \mathfrak{F}\{s_{\Delta T}(t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} = \frac{1}{\Delta T} \mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\} = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)$$

این نتیجه اساسی به ما می گوید که تبدیل فوریه یک قطار ضربه ای با دوره ΔT نیز یک قطار ضربه ای است که دوره آن $1/\Delta T$ است. این تناسب معکوس بین دوره های $s_{\Delta T}(t)$ و $S(\mu)$ مشابه چیزی است که در شکل ۴.۴ در ارتباط با عملکرد جعبه و تغییر آن یافتیم. این رابطه معکوس نقش اساسی را در باقیمانده این فصل ایفا می کند.

کانولوشن

ما در بخش ۳.۴ نشان دادیم که پیچاندن دو تابع شامل چرخاندن (چرخاندن 180° درجه) یک تابع در مورد مبدأ آن و لغزش آن بر روی دیگری است. در هر جابجایی در فرآیند کشویی ، ما یک محاسبه را انجام می دهیم ، که برای متغیرهای گسسته ، مجموع محصولات است [به معادله (۳-۳۵) مراجعه کنید]. در بحث کنونی ، ما به تجمع دو تابع پیوسته ، $f(t)$ و $h(t)$ ، از یک متغیر پیوسته ، t علاقه مند هستیم ، بنابراین باید به جای جمع از یکپارچه سازی استفاده کنیم. ترکیب این دو تابع ، که قبلاً توسط عملگر den مشخص شده است ، به صورت زیر تعریف می شود

$$(f \star h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4-24)$$

همانطور که در بخش ۳.۴، این واقعیت که تجمع یک تابع با یک ضربه، منشاء تابع را تغییر می دهد. عملکرد در محل ضربه نیز برای تداخل پیوسته صادق است. (به شکل ۳.۲۹ و ۳.۳۰ مراجعه کنید).

در جایی که علامت منفی نشان دهنده چرخش است، t جابجایی مورد نیاز برای لغزش یک تابع از عملکرد دیگر است و t یک متغیر ساختگی است که به هم پیوسته است. در حال حاضر فرض می کنیم که توابع از $-\infty$ گسترش می یابند.

ما مکانیک های اساسی کانولوشن را در بخش ۳.۴ نشان دادیم و خواهیم داد. بنابراین دوباره بعداً در این فصل و در فصل ۵. در حال حاضر، ما علاقه مند هستیم که تغییر فوریه معادله (۴-۲۴) را پیدا کنیم. ما با معادله (۴-۱۹) شروع می کنیم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{(f \star h)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j2\pi\mu t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

اصطلاح داخل پرانتز تبدیل فوریه از $h(t-\tau)$ است. بعداً در این فصل نشان خواهیم داد که جایی که $\mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} = H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}$ ، جایی که $H(\mu)$ تبدیل فوریه از $h(t)$ است. استفاده از این در معادله قبلی به ما می دهد

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{(f \star h)(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) [H(\mu)e^{-j2\pi\mu\tau}] d\tau \\ &= H(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j2\pi\mu\tau} d\tau \\ &= H(\mu)F(\mu) \\ &= (H \bullet F)(\mu) \end{aligned}$$

به یاد داشته باشید، چرخش متحرک است، بنابراین ترتیب توابع در عبارات کانولوشنی مهم نیست جایی که "•" نشان دهنده ضرب است. همانطور که قبلاً اشاره شد، اگر از حوزه t به عنوان حوزه فضایی و حوزه m از حوزه فرکانس نام ببریم، معادله قبلی به ما می گوید که تبدیل فوریه از تلاقی دو تابع در حوزه فضایی برابر است با محصول در حوزه فرکانس تبدیل فوریه از دو تابع. برعکس، اگر حاصلضرب دو تبدیل را داشته باشیم، می توانیم با محاسبه تبدیل فوریه معکوس، کانولوشن را در حوزه فضایی بدست آوریم. به عبارت دیگر، $f \star h$ و $H \bullet F$ یک جفت تبدیل فوریه هستند. این نتیجه نیمی از قضیه کانولوشن است و به صورت نوشته شده است

$$(f \star h)(t) \Leftrightarrow (H \bullet F)(\mu) \quad (4-25)$$

همانطور که قبلاً اشاره شد ، پیکان دو نشان می دهد که عبارت سمت راست با تغییر شکل فوریه جلو در سمت چپ به دست می آید ، در حالی که بیان در سمت چپ با استفاده از تبدیل فوریه معکوس عبارت در سمت راست به دست می آید. پیروی از کانولوشنی مشابه ، به نیمی دیگر از قضیه کانولوشن منجر می شود:

$$(f \cdot h)(t) \Leftrightarrow (H \star F)(\mu) \quad (4-26)$$

که بیان می کند که انقباض در حوزه فرکانس مشابه ضرب در حوزه فضایی است ، که هر دو به ترتیب با تبدیل های فوریه جلو و معکوس مرتبط هستند. همانطور که بعداً در این فصل خواهید دید ، تئوری کانولوشن اساس فیلترینگ در حوزه فرکانس است.

۴.۳ نمونه برداری و تبدیل چهارگانه عملکردهای نمونه

در این بخش ، ما از مفاهیم بخش ۴.۲ برای تدوین مبنایی برای بیان نمونه گیری به صورت ریاضی استفاده می کنیم. با شروع از اصول اساسی ، این امر ما را به تغییر فوریه توابع نمونه برده می رساند. یعنی تبدیل گسسته فوریه.

نمونه برداری

توابع پیوسته قبل از اینکه در رایانه پردازش شوند باید به دنباله ای از مقادیر گسسته تبدیل شوند. این امر به نمونه برداری و کمی سازی نیاز دارد ، همانطور که در بخش ۲.۴ معرفی شده است. در بحث زیر ، نمونه گیری را با جزئیات بیشتری بررسی می کنیم.

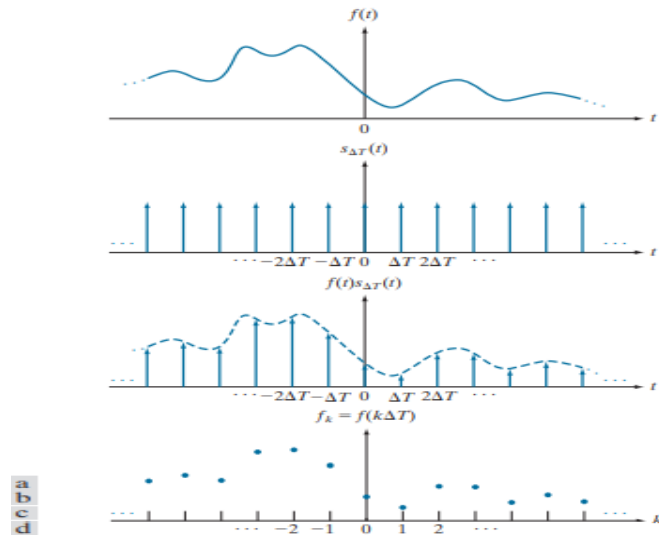
یک تابع پیوسته را در نظر بگیرید ، $f(t)$ ، که می خواهیم در فواصل یکنواخت ، ΔT ، از متغیر مستقل t نمونه برداری کنیم (شکل ۴.۵ را ببینید). در ابتدا فرض می کنیم که تابع نسبت به t از $-\infty$ تا ∞ گسترش می یابد. یکی از روشهای نمونه گیری این است که $f(t)$ را در یک تابع نمونه برداری برابر با یک قطعه از تکانه های واحد ΔT از هم جدا کنید. به این معنا که،

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T) \quad (4-27)$$

جایی که $\tilde{f}(t)$ تابع نمونه برداری را نشان می دهد. همانطور که شکل ۴.۵ (ج) نشان می دهد ، هر جزء از این جمع بندی یک ضربه با مقدار $f(t)$ در محل ضربه است. ارزش هر نمونه با "قدرت" ضربه محاسبه شده ، که با ادغام به دست می آوریم ، داده می شود. یعنی مقدار f_k یک نمونه دلخواه در دنباله نمونه توسط

$$f_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - k\Delta T)dt = f(k\Delta T) \quad (4-28)$$

جایی که ما از ویژگی δ در معادله (۴-۱۳) استفاده کردیم.. معادله (۴-۲۸) برای هر عدد صحیح $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ صادق است، شکل ۴.۵ (d) نتیجه را نشان می دهد که مجموعه ای از نمونه های مساوی از عملکرد اصلی.



شکل ۴.۵ (الف) یک تابع پیوسته (ب) مجموعه ای از تکانه ها که برای مدل سازی نمونه استفاده می شود. (ج) تابع نمونه به عنوان حاصلضرب (الف) و (ب) تشکیل شده است. (د) مقادیر نمونه به دست آمده از ادغام و استفاده از ویژگی غربال کردن ضربه ها. (خط تیره در (c) برای ارجاع نشان داده شده است. این بخشی از داده ها نیست.)

تبدیل چهارگانه عملکردهای نمونه

اجازه دهید $F(m)$ نشان دهنده تبدیل فوریه یک تابع پیوسته $f(t)$ باشد. همانطور که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت، تابع نمونه مربوطه، $\tilde{f}(t)$ ، حاصل ضرب است. $f(t)$ و یک قطار ضربه ای. از قضیه کانولوشن می دانیم که تبدیل فوریه حاصلضرب دو تابع در حوزه فضایی، کانولوشن تبدیل دو تابع در حوزه فرکانس است. بنابراین، تبدیل فوریه تابع نمونه به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mu) &= \mathfrak{F}\{\tilde{f}(t)\} = \mathfrak{F}\{f(t)s_{\Delta T}(t)\} \\ &= (F \star S)(\mu) \end{aligned} \quad (4-29)$$

جایی که از مثال ۴.۲،

$$S(\mu) = \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right) \quad (4-30)$$

عبارت است از تبدیل فوریه قطار ضربه $s_{\Delta T}(t)$ ما مجوز از $F(m)$ و $S(m)$ به طور مستقیم از تعریف یک بعدی D حرکت در معادله (۴-۲۴):

$$\begin{aligned}
\bar{F}(\mu) &= (F \star S)(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) S(\mu - \tau) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \delta\left(\mu - \tau - \frac{n}{\Delta T}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Delta T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\mu - \frac{n}{\Delta T}\right)
\end{aligned}
\tag{4-31}$$

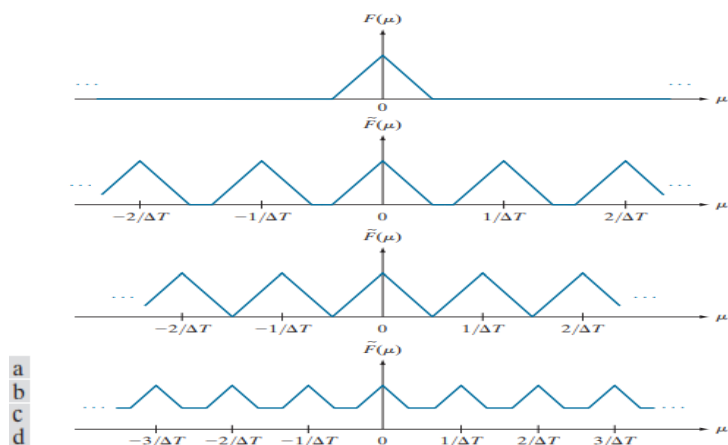
جایی که آخرین مرحله از ویژگی غربال ضربه، معادله (۴-۱۳) حاصل می شود. جمع بندی در آخرین خط معادله (۴-۳۱) نشان می دهد که تبدیل فوریه $\tilde{F}(m)$ از تابع نمونه برداری $\tilde{f}(t)$ یک دنباله نامحدود و متناوب از نسخه های تغییر عملکرد اصلی و پیوسته فاصله بین نسخه ها با مقدار ΔT تعیین می شود. توجه داشته باشید که اگر چه $\tilde{f}(t)$ یک تابع نمونه برداری است، تبدیل آن، $\tilde{F}(m)$ ، پیوسته است زیرا از نسخه های $F(m)$ تشکیل شده است، که عملکرد پیوسته شکل ۴.۶ خلاصه ای گرافیکی از نتایج قبلی است.^{۱۲} شکل ۴.۶ (a) طرحی از تبدیل فوریه، $F(m)$ ، یک تابع $f(t)$ است، و شکل ۴.۶ (b) نشان می دهد تبدیل، $\tilde{F}(m)$ ، از عملکرد نمونه، $\tilde{f}(t)$ همانطور که در قسمت قبل اشاره شد- مقدار ΔT میزان نمونه برداری است که برای تولید تابع نمونه برداری استفاده می شود. بنابراین، در شکل ۴.۶ (ب) میزان نمونه گیری به اندازه کافی بالا بود که بتواند فاصله کافی بین دوره ها را فراهم آورد و در نتیجه یکپارچگی (یعنی نسخه های کامل) $F(m)$ را حفظ کند. که در شکل ۴.۶ (ج)، میزان نمونه برداری فقط برای حفظ $F(m)$ کافی بود، اما در شکل ۴.۶ (d)، میزان نمونه برداری کمتر از حداقل مورد نیاز برای نگهداری نسخه های مجزا از $F(m)$ بود، و بنابراین شکست خورد. برای حفظ تغییر شکل اولیه شکل ۴.۶ (ب) نتیجه سیگنال بیش از حد نمونه برداری شده است، در حالی که شکل ۱ نشان می دهد. ۴.۶ (ج) و (د) به ترتیب نتایج نمونه برداری بحرانی و زیر نمونه برداری از سیگنال هستند. این مفاهیم پایه ای هستند که به شما کمک می کند تا اصول قضیه نمونه گیری را درک کنید، که در ادامه به آن می پردازیم.

نظریه نمونه برداری

ما ایده نمونه گیری را بصورت شهودی در بخش ۲.۴ مطرح کردیم. اکنون ما نمونه گیری را به طور رسمی در نظر می گیریم و شرایطی را ایجاد می کنیم که تحت آن می توان یک تابع پیوسته را به طور منحصر به فرد از مجموعه ای از نمونه های آن بازیابی کرد.

^{۱۲} به منظور شفافیت طرح های تبدیل فوریه در شکل ۴.۶، و دیگر تصاویر مشابه در این فصل، ما این واقعیت را نادیده می گیریم که تبدیلات فوریه به طور معمول توابع پیچیده ای هستند. علاقه ما در اینجا به مفاهیم است.

تابع $f(t)$ که تبدیل فوریه آن برای مقادیر فرکانسهای خارج از یک بازه نامحدود (باند) $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ در مورد مبدا صفر است، تابع محدود باند نامیده می شود. شکل ۴.۷ (a)، که بخش بزرگی از شکل ۴.۶ (a) است، چنین تابعی است. به طور مشابه، شکل ۴.۷ (ب) نمای دقیق تری از تغییر عملکرد نمونه است [شکل ۴.۶ (ج) را ببینید]. مقدار بیشتر ΔT باعث ادغام دوره ها در $\tilde{F}(m)$ می شود. مقدار کمتر می تواند یک فاصله تمیز بین دوره ها را ایجاد کند.



شکل ۴.۶ (الف) طرح تصویری از تبدیل فوریه از یک تابع محدود باند. (ب) - (د) تبدیل توابع نمونه برداری مربوطه در شرایط نمونه برداری بیش از حد، نمونه گیری بحرانی و نمونه گیری کم. ما می توانیم $f(t)$ را از نمونه های آن بازیابی کنیم اگر بتوانیم یک نسخه واحد از $F(m)$ را از توالی متناوب کپی های این تابع موجود در $F(m)$ جدا کنیم، تبدیل تابع نمونه برداری شده $f(t)$ به از بحث در بخش قبل به یاد بیاورید که $\tilde{F}(m)$ یک تابع پیوسته و متناوب با دوره $1/\Delta T$ است. بنابراین، تنها چیزی که ما نیاز داریم یک دوره کامل برای توصیف کل تغییر است. به عبارت دیگر، ما می توانیم با استفاده از تبدیل معکوس فوریه، $f(t)$ را از آن دوره واحد بازیابی کنید. استخراج از $\tilde{F}(m)$ یک دوره واحد که برابر با $F(m)$ باشد در صورت جدا شدن امکان پذیر است. نسبت بین نسخه ها کافی است (شکل ۴.۶ را ببینید). از نظر شکل ۴.۷ (ب)، جداسازی کافی در صورت $1/2\Delta T > \mu_{\max}$ یا

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad (4-32)$$

به یاد داشته باشید، میزان نمونه گیری تعداد نمونه های گرفته شده در واحد متغیر مستقل است.

این معادله نشان می دهد که یک تابع پیوسته و محدود با باند می تواند به طور کامل از مجموعه ای از نمونه های آن بازیابی شود اگر نمونه ها با سرعتی بیش از دو برابر بیشترین محتوای فرکانس تابع بدست بیایند. این نتیجه فوق العاده مهم به عنوان قضیه نمونه گیری معروف است.^{۱۳}

به برعکس ، می توانیم بگوییم حداکثر فرکانسی که می تواند توسط "ضبط" شود. رساندن سیگنال با نرخ $1/\Delta T$ is $\mu_{max} = 1/2\Delta T$. است. نرخ نمونه برداری دقیقاً برابر دو برابر بیشترین فرکانس را نرخ نایکویست می نامند. نمونه گیری دقیقاً با نرخ نایکویست گاهی اوقات برای بازیابی عملکرد کامل کافی است ، اما مواردی وجود دارد که این امر منجر به مشکلات می شود ، همانطور که بعداً در مثال ۴.۳ توضیح خواهیم داد. به همین دلیل است که قضیه نمونه گیری مشخص می کند که نمونه برداری باید از نرخ نایکویست فراتر رود. شکل ۴.۸ روش بازیابی $F(m)$ از $\tilde{F}(m)$ هنگام یک تابع را نشان می دهد. با نرخ بیشتر از نرخ نایکویست نمونه برداری می شود. تابع شکل ۴.۸ (ب) توسط معادله تعریف شده است

$$H(\mu) = \begin{cases} \Delta T & -\mu_{max} \leq \mu \leq \mu_{max} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-33)$$

هنگامی که در دنباله متناوب در شکل ۴.۸ (a) ضرب می شود ، این تابع دوره متمرکز بر مبدا را جدا می کند. سپس ، همانطور که شکل ۴.۸ (c) نشان می دهد ، $F(m)$ را با ضرب بدست می آوریم. وارد کردن $\tilde{F}(m)$ توسط $H(m)$:

$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu) \quad (4-34)$$

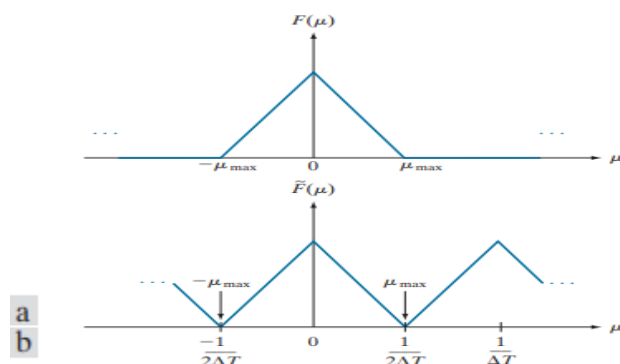
هنگامی که $F(m)$ داریم ، می توانیم $f(t)$ را با استفاده از تبدیل معکوس فوریه بازیابی کنیم:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)e^{j2\pi\mu t} d\mu \quad (4-35)$$

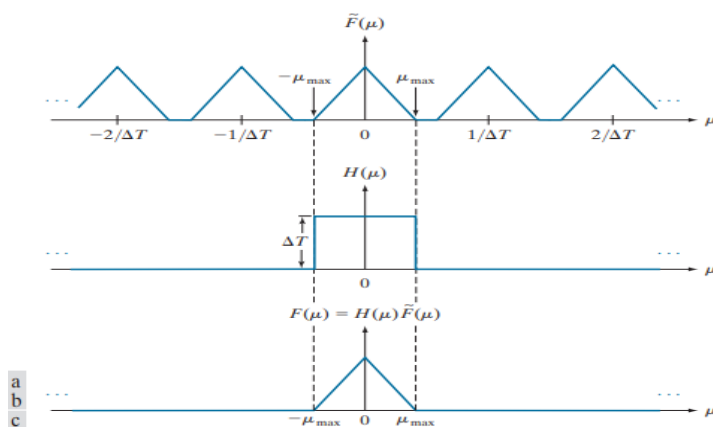
معادلات (۴-۳۳) تا (۴-۳۵) ثابت می کند که از لحاظ تئوری ، امکان بازیابی یک تابع محدود باند از نمونه های بدست آمده با سرعتی بیش از دو برابر بیشترین فرکانس تابع وجود دارد. همانطور که در بخش زیر بحث خواهیم کرد ، این شرط که $f(t)$ باید محدود به باند باشد به طور کلی نشان می دهد که $f(t)$ باید گسترش یابد از $-\infty$ تا ∞ ، شرطی که در عمل برآورده نمی شود. همانطور که به زودی خواهیم دید ، محدود کردن مدت زمان یک عملکرد از بازیابی کامل آن جلوگیری می کند. از نمونه های آن ، مگر در موارد خاص. تابع $H(m)$ فیلتر پایین گذر نامیده می شود زیرا فرکانس ها را در انتهای پایین محدوده فرکانس عبور می دهد ، اما فرکانس های بالاتر را حذف می کند (فیلتر می کند). این فیلتر به دلیل تبدیل لحظه ای آن در سرعت (بین ۰ تا ΔT در محل

^{۱۳} قضیه نمونه گیری سنگ بنای نظریه پردازش سیگنال دیجیتال است. این اولین بار در سال ۱۹۲۸ توسط هری نیکویست ، دانشمند و مهندس آزمایشگاههای بل ، فرموله شد. کلود ای. شانون ، همچنین از آزمایشگاه های بل ، قضیه را به طور رسمی در سال ۱۹۴۹ ثابت کرد. علاقه مجدد به قضیه نمونه گیری در اواخر دهه ۱۹۴۰ با ظهور سیستم های اولیه محاسبات دیجیتالی و ارتباطات مدرن ایجاد شد ، که نیاز به روش هایی برای مقابله با داده های دیجیتالی (نمونه برداری)

$-\mu_{\max}$ و عکس آن در μ_{\max} یک فیلتر پایین گذر ایده آل نامیده می شود ، مشخصه ای که به طور فیزیکی در سخت افزار قابل اجرا نیست. ما می توانیم فیلم های ایده آل را شبیه سازی کنیم. در نرم افزار ، اما حتی در این صورت محدودیت هایی وجود دارد (بخش ۴.۸ را ببینید). از آنجا که آنها در بازبازی (بازسازی) عملکرد اصلی از نمونه های آن مثر هستند ، فیلترهایی که برای مقصودی که مورد بحث قرار گرفتند استفاده می شوند ، فیلترهای بازسازی نیز نامیده می شوند.



شکل ۴.۷ (الف) طرح تصویری از تبدیل فوریه از یک تابع محدود باند. (ب) دگرگونی حاصل از نمونه گیری انتقادی آن تابع محدود باند.



شکل ۴.۸ (الف) تبدیل فوریه از یک تابع نمونه برداری شده ، محدود با باند. (ب) عملکرد ایده آل تبدیل فیلتر پایین گذر. (ج) حاصل از (ب) و (الف) ، برای استخراج یک دوره از دنباله متناوب نامحدود در (الف) استفاده می شود.

در شکل ۳.۳۲ ما برای سادگی مقاطع شعاعی توابع تبدیل فیلتر را فقط با استفاده از فرکانس های مثبت ترسیم کرده ایم. اکنون می بینید که توابع فیلتر دامنه فرکانس شامل فرکانس های مثبت و منفی است

الایزینگ

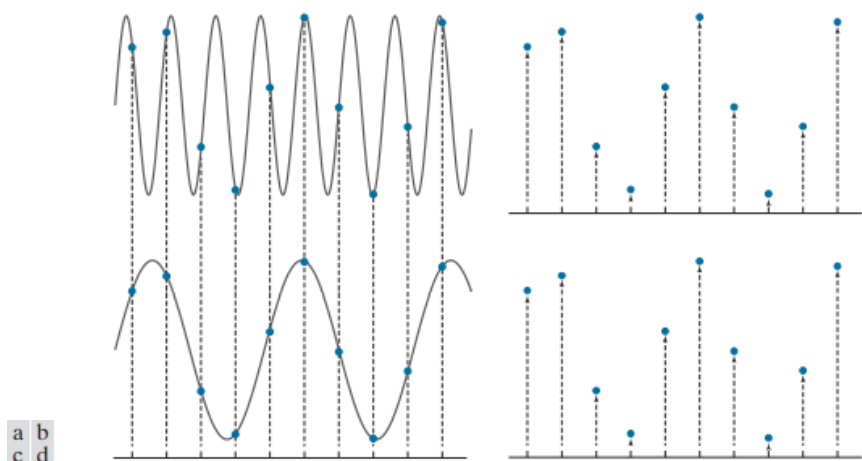
از نظر لغوی، کلمه مستعار به معنی "الایزینگ جعلی" است. در زمینه پردازش سیگنال، الایزینگ به پدیده‌های نمونه‌گیری اشاره دارد که باعث می‌شود سیگنال‌های مختلف پس از نمونه‌گیری از یکدیگر غیرقابل تشخیص شوند. یا، به گونه‌ای دیگر، برای یک سیگنال مشاهده می‌شود. از نظر مفهومی، رابطه بین نمونه‌گیری و الایزینگ دشوار نیست. فهم پایه و اساس پدیده‌های الایزینگ در رابطه با نمونه برداری این است که ما

می‌تواند یک عملکرد دیجیتالی را فقط با مقادیر نمونه‌های آن توصیف کند. این بدان معناست که ممکن است دو (یا بیشتر) عملکردهای پیوسته کاملاً متفاوت با هم منطبق شوند. مقادیر نمونه‌های مربوطه، اما ما راهی برای دانستن آن نداریم. ویژگی‌های توابع بین آن نمونه‌ها برای توضیح، شکل ۴.۹ نشان می‌دهد. دو عملکرد سینوسی کاملاً متفاوت با نرخ یکسان نمونه برداری شده است. همانطور که می‌بینید. در شکل ۴.۹ (a) و (c) مکانهای متعددی وجود دارد که مقادیر نمونه در آن هستند.

در دو تابع یکسان است، و در نتیجه توابع نمونه مشابه، مانند شکلها ۴.۹ (ب) و (د)، نشان داده شده است. دو تابع پیوسته که دارای ویژگی‌هایی هستند که به تازگی توضیح داده شده است، An نامیده می‌شود. جفت مستعار، و چنین جفت‌هایی پس از نمونه‌گیری قابل تشخیص نیستند. توجه داشته باشید که دلیل این توابع به این دلیل الایزینگ شده‌اند که ما از نرخ نمونه برداری بسیار درشت استفاده کردیم. که است، توابع زیر نمونه برداری شد. به طور شهودی واضح است که اگر نمونه‌گیری بود تفاوت بیشتر و بیشتر بین دو عملکرد پیوسته در سیگنال‌های نمونه نشان داده می‌شود. هدف اصلی موارد زیر است.

بحث برای پاسخ به این سال است: حداقل میزان نمونه‌گیری مورد نیاز چقدر است. برای اجتناب از (یا کاهش) الایزینگ؟ این سوال هم نظری دارد و هم کاربردی پاسخ دهید و در فرایند رسیدن به پاسخ‌ها، شرایط را ایجاد می‌کنیم تحت آن الایزینگ رخ می‌دهد

ما می‌توانیم از ابزارهایی که قبلاً در این بخش توسعه یافته است برای پاسخ رسمی به آنها استفاده کنیم. سوالی که ما تازه مطرح کردیم تنها کاری که باید انجام دهیم این است که آن را به شکل دیگری بپرسیم: اگر یک تابع محدود با باند کمتر از نرخ نایکویست (یعنی کمتر از دو برابر بیشترین فرکانس آن) نمونه برداری شود، چه اتفاقی می‌افتد؟ این دقیقاً همان وضعیت زیر نمونه‌ای است که قبلاً در این بخش مورد بحث قرار گرفت و در پاراگراف قبلی به آن اشاره شد.



شکل ۴.۹ توابع در (الف) و (ج) کاملاً متفاوت هستند، اما نسخه های دیجیتالی آنها در (ب) و (د) یکسان هستند. الایزینگ زمانی اتفاق می افتد که نمونه های دو یا چند تابع با هم منطبق باشند، اما توابع در جاهای دیگر متفاوت هستند

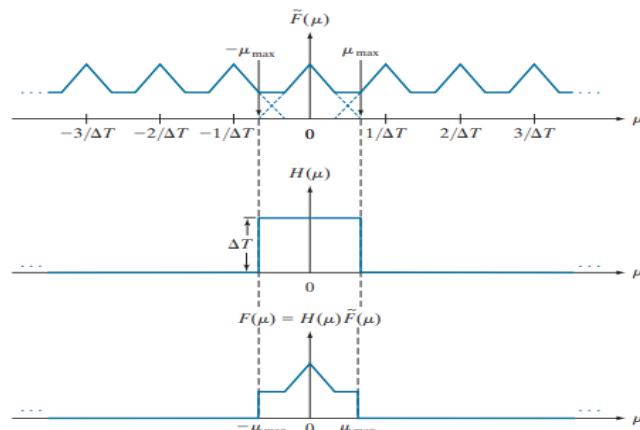
اگر نتوانیم یک دوره تبدیل را جدا کنیم، نمی توانیم سیگنال را بدون الایزینگ بازیابی کنیم

شکل ۴.۱۰ (a) همان شکل ۴.۶ (d) است. این به صورت شماتیک تبدیل فوریه یک تابع با نمونه محدود را نشان می دهد. این تصویر نشان می دهد که اثر خالص کاهش میزان نمونه برداری زیر نرخ نایکویست این است که دوره های تبدیل فوریه در حال حاضر با هم همپوشانی دارند و جداسازی یک دوره غیرممکن می شود. از تبدیل، صرف نظر از فیلتر مورد استفاده. به عنوان مثال، استفاده از پایین گذر ایده آل اگر نتوانیم یک دوره تبدیل را جدا کنیم، نمی توانیم سیگنال را بدون الایزینگ بازیابی کنیم، فیلتر در شکل ۴.۱۰ (ب) منجر به تغییری می شود که توسط فرکانس های دوره های مجاور خراب شده است، همانطور که در شکل ۴.۱۰ (ج) نشان داده شده است. تبدیل معکوس سپس یک تابع، $f_a(t)$ ، متفاوت از اصلی ایجاد می کند. یعنی $f_a(t)$ یک تابع مستعار است زیرا شامل اجزای فرکانسی است که در اصل وجود ندارد. با استفاده از اصطلاحات قبلی ما، $f_a(t)$ به عنوان یک عملکرد متفاوت به نمایش در می آید. این امکان وجود دارد که توابع مستعار هیچ شباهتی به عملکردهایی که از آن منشاء گرفته اند نداشته باشند. متأسفانه، به جز در موارد خاصی که در زیر ذکر شد، الایزینگ همیشه در سیگنال های نمونه وجود دارد. این امر به این دلیل است که حتی اگر تابع نمونه اصلی محدود به باند باشد، اجزای فرکانس نامحدود در لحظه محدود کردن مدت زمان تابع معرفی می شوند، که همیشه باید در عمل انجام دهیم. به عنوان یک مثال، فرض کنید که ما می خواهیم مدت زمان یک تابع محدود با باند، $f(t)$ را به یک بازه نامحدود محدود کنیم، مثلاً $[0, T]$ ما می توانیم این کار را با ضرب $f(t)$ در تابع انجام دهیم

$$h(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-36)$$

این تابع همان شکل اولیه را دارد مانند شکل ۴.۴ (a)، که تبدیل فوریه آن، $H(m)$ دارای اجزای فرکانسی است که در هر دو جهت تا بی نهایت گسترش می یابد، همانطور که در شکل ۴.۴ (b) نشان داده شده است. از قضیه کانولوشن، ما می دانیم که تبدیل محصول $f(t)h(t)$ ، تلاقی در حوزه فرکانس تبدیل $F(m)$ و $H(m)$ است. حتی اگر $F(m)$ محدود به باند باشد، پیچاندن آن با $H(m)$ ، که شامل لغزش یک تابع بر عملکرد دیگر است، نتیجه ای را به همراه خواهد داشت که اجزای فرکانس در هر دو جهت تا بی نهایت گسترش می یابد (به مسئله ۴.۱۲ مراجعه کنید). از اینجا نتیجه می گیریم که هیچ عملکردی با مدت محدود نمی تواند محدود به باند باشد. برعکس، یک تابع محدود به باند باید از $-\infty$ to ∞ گسترش یابد^{۱۴}.

اگرچه الایزینگ یک واقعیت اجتناب ناپذیر در کار با پرونده های نمونه برداری شده با طول نامحدود است، اما می توان با هموار کردن (فیلترینگ پایین گذر) تابع ورودی برای تضعیف فرکانس های بالاتر، اثرات الایزینگ را کاهش داد. این فرایند که آنتی الایزینگ نامیده می شود، باید قبل از نمونه گیری از عملکرد انجام شود، زیرا الایزینگ یک مسئله نمونه گیری است که نمی توان با استفاده از تکنیک های محاسباتی "پس از این واقعیت" را لغو کرد.



a
b
c

شکل ۴.۱۰ (الف) تبدیل فوریه از یک تابع با محدودیت نمونه و محدود. (تداخل بین دوره های مجاور نشان داده شده است). (ب) همان فیلتر ایده آل پایین گذر مورد استفاده در شکل ۴.۸. (ج) حاصل از (الف) و (ب). دخالت در دوره های مجاور منجر به الایزینگ می شود که از بازایی کامل $F(m)$ و در نتیجه، $f(t)$ جلوگیری می کند.

مثال ۴.۳: الایزینگ

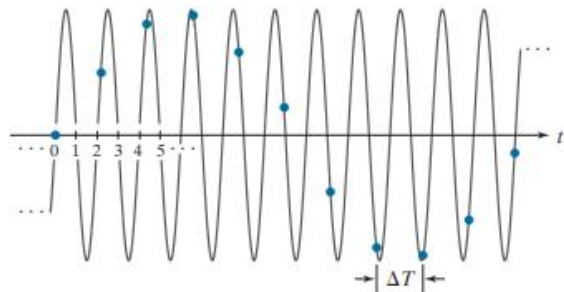
شکل ۴.۱۱ تصویری کلاسیک از الایزینگ را نشان می دهد. یک موج سینوسی خالص که به طور نامحدود در هر دو جهت گسترش می یابد دارای یک فرکانس واحد است، بدیهی است که باند آن محدود است. فرض کنید موج

^{۱۴} در این حالت، تابع را می توان کوتاه کرد و همچنان محدود به باند است، به شرطی که کوتاه شده دقیقاً شامل شود تعداد انتگرال دوره ها یک دوره کوتاه شده (و بنابراین عملکرد) را می توان با مجموعه ای از نمونه های گسسته که قضیه نمونه گیری را برآورده می کند، نشان داد که در فاصله کوتاه شده گرفته شده است.

سینوسی در تصویر (در حال حاضر نقاط بزرگ را نادیده بگیرید) دارای معادله $f(t) = \sin(\pi t)$ است و محور افقی با زمان t ، در ثانیه مطابقت دارد. تابع از محور در $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ عبور می کند.

به یاد بیاورید که یک تابع $f(t)$ متناوب با دوره P است اگر $f(t+P) = f(t)$ برای همه مقادیر t . دوره تعداد (شامل کسرها) واحدهای متغیر مستقل است که برای تکمیل یک چرخه به تابع نیاز است. فرکانس یک تابع متناوب تعداد دوره ها (چرخه ها) است که تابع در یک واحد از متغیر مستقل تکمیل می کند. بنابراین، فراوانی یک تابع متناوب متقابل دوره است. همانند قبل، نرخ نمونه گیری تعداد نمونه های گرفته شده در واحد متغیر مستقل است.

در مثال حاضر، متغیر مستقل زمان است و واحدهای آن ثانیه است. دوره P ، $\sin(\pi t)$ ثانیه است و فرکانس آن $1/P = 1/2$ چرخه در ثانیه است. با توجه به قضیه نمونه گیری، اگر میزان نمونه برداری بیش از دو برابر بیشترین فرکانس سیگنال باشد، می توانیم این سیگنال را از مجموعه ای از نمونه های آن بازیابی کنیم. این بدان معناست که سرعت نمونه برداری بیشتر از ۱ نمونه در ثانیه ($2 \times 1/2 = 1$) برای بازیابی سیگنال مورد نیاز است. از نظر دیگر، جداسازی، ΔT ، بین نمونه ها باید کمتر از ۱ ثانیه باشد. توجه داشته باشید که نمونه برداری از این سیگنال دقیقاً دو برابر فرکانس (۱ نمونه/ثانیه)، با نمونه های گرفته شده در $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ منجر به $\dots, \sin(-\pi), \sin(0), \sin(\pi), \dots$ که همه آنها ۰ هستند. این نشان می دهد که چرا قضیه نمونه گیری نیاز به نرخ نمونه برداری دارد که دو برابر بیشترین فرکانس عملکرد است، همانطور که قبلاً ذکر شد.



شکل ۴.۱۱ تصویر الیزینگ. تابع زیر نمونه (نقاط) شبیه موج سینوسی است که فرکانسی بسیار کمتر از فرکانس سیگنال پیوسته دارد. دوره موج سینوسی ۲ ثانیه است، بنابراین صفر عبور از محور افقی در هر ثانیه رخ می دهد. ΔT جداسازی بین نمونه ها است.

نقاط بزرگ در شکل ۴.۱۱ نمونه هایی هستند که به طور یکنواخت با سرعت زیر ۱ نمونه/ثانیه مورد نیاز گرفته می شوند (یعنی نمونه ها بیش از ۱ ثانیه از یکدیگر گرفته می شوند؛ در واقع، فاصله بین نمونه ها از ۲ ثانیه بیشتر می شود). سیگنال نمونه برداری شده شبیه موج سینوسی است، اما فرکانس آن تقریباً یک دهم فرکانس عملکرد اصلی است. این سیگنال نمونه برداری شده، دارای فرکانسی بسیار کمتر از هر چیزی که در عملکرد

پیوسته اصلی وجود دارد ، نمونه ای از الیزینگ است. اگر سیگنال با سرعتی کمی بیشتر از نرخ نایکویست نمونه برداری شده باشد ، نمونه ها اصلاً شبیه موج سینوسی نخواهند بود (به مسئله ۴.۶ مراجعه کنید).

شکل ۴.۱۱ همچنین نشان می دهد که چگونه الیزینگ می تواند در ضبط موسیقی با معرفی فرکانس هایی که در نویز اصلی وجود ندارد ، بسیار مشکل ساز باشد. به منظور کاهش این امر ، سیگنالهایی با فرکانسهای بالای نیمی از سرعت نمونه برداری باید فیلتر شوند تا اثر سیگنالهای مستعار وارد شده به ضبطهای دیجیتالی کاهش یابد. به همین دلیل است که تجهیزات ضبط دیجیتال حاوی فیلترهای پایین گذر هستند که به طور خاص برای حذف اجزای فرکانس بالای نصف میزان نمونه برداری مورد استفاده تجهیزات طراحی شده است.

اگر فقط نمونه های شکل ۴.۱۱ به ما داده شود ، مسئله دیگری که نشان دهنده جدی بودن الیزینگ است این است که ما هیچ راهی نداریم که بدانیم این نمونه ها نمایشی واقعی از عملکرد اصلی نیستند. همانطور که بعداً در این فصل خواهید دید ، نام گذاری در تصاویر می تواند نتایج گمراه کننده ای مشابه ایجاد کند.

بازسازی عملکرد (بازیابی) از داده های نمونه

در این بخش ، ما نشان می دهیم که بازسازی یک تابع از مجموعه ای از نمونه های آن در عمل به درون یابی بین نمونه ها می انجامد. حتی عمل ساده نمایش تصویر مستلزم بازسازی تصویر از نمونه های آن توسط محیط نمایش است. بنابراین ، درک اصول بازسازی داده های نمونه مهم است. کانولوشن در توسعه این درک مرکزی است و اهمیت این مفهوم را بار دیگر نشان می دهد.

بحث شکل ۴.۸ و معادله (۴-۳۴) روش بازیابی کامل یک تابع محدود باند از نمونه های آن با استفاده از روشهای حوزه فرکانس را بیان می کند.

با استفاده از قضیه کانولوشن ، می توان نتیجه معادل در حوزه فضایی به دست آورد. از معادله (۴-۳۴) ،

$$F(\mu) = H(\mu)\tilde{F}(\mu),$$
 بنابراین نتیجه می شود

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathfrak{S}^{-1}\{F(\mu)\} \\ &= \mathfrak{S}^{-1}\{H(\mu)\tilde{F}(\mu)\} \\ &= h(t) \star \tilde{f}(t) \end{aligned} \quad (4-37)$$

جایی که ، مانند قبل ، $f(t)$ تابع نمونه برداری را نشان می دهد ، و آخرین مرحله از قضیه کانولوشن ، معادله (۴-۲۵) حاصل می شود. می توان آن را نشان داد (به مسئله ۴.۱۳ مراجعه کنید) ، آن زیر معادله (۴-۲۴) محاسبه برای $\tilde{f}(t)$ به معادله (۴-۳۷) ، و سپس از معادله (۴-۲۴) استفاده کنید، منجر به عبارت حوزه فضایی زیر برای $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\Delta T) \text{sinc}[(t - n\Delta T)/\Delta T] \quad (4-38)$$

جایی که تابع sinc در معادله (۴-۲۳) تعریف شده است. این نتیجه غیر منتظره نیست زیرا تبدیل معکوس فوریه فیلتر ایده آل (جعبه)، $H(m)$ ، یک تابع sinc است (به مثال ۴.۱ مراجعه کنید). معادله (۴-۳۸) نشان می دهد که تابع کاملاً بازسازی شده، $f(t)$ ، مجموعه ای بی نهایت از توابع sinc است که با مقادیر نمونه وزن می شوند. این ویژگی مهم را دارد که عملکرد بازسازی شده به طور یکسان برابر مقدار نمونه باشد

ues در افزایش های صحیح متعدد ΔT . یعنی برای هر $t = k\Delta T$ ، جایی که k یک عدد صحیح است، $f(t)$ برابر است با نمونه k th، $f(k\Delta T)$. این از معادله (۴-۳۸) زیر بر می آید. زیرا $\text{sinc}(0) = 1$ و $\text{sinc}(m) = 0$ برای هر عدد صحیح دیگر از m . بین نقاط نمونه، مقادیر $f(t)$ درون یابی هایی هستند که از مجموع توابع sinc تشکیل شده است.

معادله (۴-۳۸) به تعداد نامحدودی از اصطلاحات برای درون یابی بین نمونه ها نیاز دارد. در عمل، این بدان معناست که ما باید به دنبال تقریبی باشیم که بین نمونه های نامحدود باشد. همانطور که در بخش ۲.۶ بحث کردیم، رویکردهای درون یابی اصلی مورد استفاده در پردازش تصویر نزدیکترین همسایه، دو خطی و درون یابی دو طرفه است. ما در مورد اثرات درون یابی بر روی تصاویر در بخش ۴.۵ بحث خواهیم کرد.

به بخش ۲.۴ در مورد درون یابی مراجعه کنید.

۴.۴ تبدیل چهارگانه یک متغیر

یکی از اهداف اصلی این فصل مشتق شدن از تبدیل گسسته فوریه (DFT) است که از اصول اساسی شروع می شود. مطالب تا این مرحله ممکن است به عنوان پایه و اساس آن اصول اساسی تلقی شوند، بنابراین اکنون ما ابزارهای لازم را برای استخراج DFT در اختیار داریم.

دریافت DFT از تبدیل مستمر یک عملکرد نمونه همانطور که در بخش ۴.۳ بحث کردیم، تبدیل فوریه یک عملکرد نمونه برداری شده با محدوده از $-\infty$ to ∞ یک عملکرد پیوسته و متناوب است که از $-\infty$ to ∞ . در عمل، ما با تعداد محدودی نمونه کار می کنیم و هدف از این بخش به منظور استخراج DFT مجموعه های نمونه محدود است.

معادله (۴-۳۱) تبدیل داده های نمونه برداری شده $\tilde{F}(m)$ را از نظر تبدیل تابع اصلی ارائه می دهد، اما از نظر نمونه عبارتی برای $\tilde{F}(m)$ به ما نمی دهد. ما این عبارت را مستقیماً از تعریف تبدیل فوریه در معادله (۴-۱۹) می یابیم:

$$\tilde{F}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt \quad (4-39)$$

با جایگزینی معادله (۴-۲۷) برای $\tilde{f}(t)$ ، بدست می آوریم

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{-j2\pi\mu t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - n\Delta T) e^{-j2\pi\mu t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-j2\pi\mu n\Delta T}\end{aligned}\quad (4-40)$$

آخرین مرحله از معادله (۴-۲۸) و ویژگی غربالگری ضربه دنبال می شود. اگرچه f_n یک تابع مجزا است، تبدیل فوریه آن، $\tilde{F}(m)$ ، پیوسته و بی وقفه متناوب با دوره ΔT است، همانطور که از معادله (۴-۳۱) می دانیم. بنابراین، تنها چیزی که برای توصیف $\tilde{F}(m)$ نیاز داریم یک دوره است و نمونه برداری از یک دوره از این تابع است. مبنای DFT فرض کنید ما می خواهیم M نمونه هایی از $\tilde{F}(m)$ با فاصله مساوی گرفته شده را در اختیار بگیریم. یک فاصله زمانی از $\mu = 0$ to $\mu = 1/\Delta T$ را ببینید. شکل ۴.۸ این امر با گرفتن نمونه در فرکانس های زیر انجام می شود:

$$\mu = \frac{m}{M\Delta T} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-41)$$

جایگزینی این نتیجه برای m به معادله (۴-۴۰) و اجازه دادن به F_m بازده نتیجه را نشان می دهد

$$F_m = \sum_{n=0}^{M-1} f_n e^{-j2\pi mn/M} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-42)$$

این عبارت تبدیل گسسته فوریه ای است که ما به دنبال آن هستیم.^{۱۵} (۴-۴۲) مجموعه ای $\{F_m\}$ از مقادیر پیچیده M مربوط به تبدیل فوریه گسسته نمونه ورودی را ارائه می دهد. برعکس، با توجه به $\{F_m\}$ ، می توانیم مجموعه نمونه $\{F_m\}$ را با استفاده از تبدیل فوریه معکوس (IDFT) بازیابی کنیم.

$$f_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m e^{j2\pi mn/M} \quad n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-43)$$

نشان دهید (به مسأله ۴.۱۵ مراجعه کنید) که معادله (۴-۴۳) را جایگزین می کند. برای f_n به معادله (۴-۴۲) الایزینگ $F_m = F_m$ را می دهد. به طور مشابه، جایگزینی معادله (۴-۴۲) به معادله (۴-۴۳) برای F_m بازده $f_n = f_n$ این بدان معناست که معادلات (۴-۴۲) و (۴-۴۳) یک جفت تبدیل گسسته فوریه را تشکیل می دهند. علاوه بر این، این الایزینگ ها نشان می دهد که تبدیل فوریه جلو و معکوس برای هر مجموعه ای از نمونه ها که مقادیر آنها محدود است، وجود دارد. توجه داشته باشید.

^{۱۵} با مراجعه به شکل ۴.۶ (ب)، توجه داشته باشید که فاصله $[\Delta T, 1, 0]$ که طی آن یک دوره از پوششهای $\tilde{F}(m)$ را نمونه برداری کردیم، دو نیم دوره مجاور تبدیل (اما با کمترین نیمه دوره در فرکانس های بالاتر ظاهر می شود). این بدان معناست که داده های F_m نیاز به سفارش مجدد دارد تا نمونه هایی را که از پایین ترین تا بالاترین فرکانس دوره مرتب شده اند، بدست آورد. این مبلغی است که برای راحتی استفاده از نمونه ها در $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ پرداخت می شود، به جای استفاده از نمونه ها در هر دو طرف مبدا، که مستلزم استفاده از نماد منفی است. روش مورد استفاده برای سفارش داده های تبدیل در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار می گیرد.

که نه بیان به صراحت به فاصله نمونه گیری ΔT و نه به فواصل فرکانس معادله (۴-۴۱) بستگی دارد. بنابراین ، جفت DFT برای هر محدودیت قابل اجرا است .مجموعه ای از نمونه های مجزا که به طور یکنواخت گرفته شده اند. ما از m و n در توسعه قبلی برای نشان دادن متغیرهای مجزا استفاده کردیم ، زیرا انجام این کار برای مشتقات معمولی است. با این حال ، استفاده از علامت x و γ برای متغیرهای مختصات تصویر و u و v برای متغیرهای فرکانس ، جایی که اینها صحیح هستند ، بصری تر است ، به ویژه در دو بعد. \dagger سپس ، معادلات (۴-۴۲) و (۴-۴۳) می شوند.

$$F(u) = \sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{-j2\pi ux/M} \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-44)$$

$$f(x) = \frac{1}{M} \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{j2\pi ux/M} \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-45)$$

جایی که برای سادگی از نماد کاربردی به جای زیرنویس استفاده کردیم. مقایسه معادلات (۴-۴۲) تا (۴-۴۵) ، می توانید $F(u) = F_m$ و $f(x) = f_n$ را مشاهده کنید. از این به بعد ، ما از معادله (۴-۴۴) و (۴-۴۵) استفاده می کنیم. برای نشان دادن جفت $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ همانطور که در مورد مداوم ، ما اغلب به معادله (۴-۴۴) اشاره می کنیم. به عنوان DFT جلو $f(x)$ و به معادله (۴-۴۵) به عنوان DFT معکوس $F(u)$ مانند قبل ، از علامت $f(x)$ برای نشان دادن یک جفت تبدیل فوریه استفاده می کنیم. گاهی اوقات شما در ادبیات با عبارت M در مقابل معادله روبرو می شوید. (۴-۴۴) در عوض. این بر اثبات این دو معادله تأثیر نمی گذارد. یک جفت تبدیل فوریه تشکیل دهید (به مسئله ۴.۱۵ مراجعه کنید). آگاهی از این که $f(x)$ و $F(u)$ یک جفت تبدیل هستند در اثبات ارتباط بین توابع و تبدیل آنها مفید است. به عنوان مثال ، در مسئله ۴.۱۷ از شما خواسته می شود نشان دهید که $f(x-x_0) \Leftrightarrow F(u)e^{-j2\pi ux_0/M}$ یک جفت تبدیل فوریه است. یعنی باید نشان دهید که DFT $f(x-x_0)$ is $F(u)e^{-j2\pi ux_0/M}$ است و برعکس ، DFT معکوس $F(u)e^{-j2\pi ux_0/M}$ is $f(x-x_0)$ است به زیرا این کار با جایگزینی مستقیم معادله (۴-۴۴) و (۴-۴۵) ، انجام می شود. و قبلا ثابت کرده اید که این دو معادله یک جفت تبدیل فوریه (مسئله ۴.۱۵) هستند ، اگر ثابت کنید که یک طرف "DFT (IDFT)" از دیگر ، پس باید درست باشد که طرف دیگر (IDFT (DFT) طرفی است که شما به تازگی ثابت کرده اید. معلوم می شود که داشتن گزینه برای اثبات یک طرف یا طرف دیگر اغلب به طور قابل توجهی اثبات می کند. این امر در مورد جفت های تبدیل پیوسته ۱ بعدی و ۲ بعدی پیوسته و گسسته فوریه نیز صادق است. می توان نشان داد (مسئله ۴.۱۶ را ببینید) که هر دو تبدیل گسسته رو به جلو و معکوس بی نهایت متناوب هستند ، با دوره M . یعنی ،

^{۱۶} ما در استفاده از t برای متغیرهای فضایی پیوسته و m برای متغیرهای فرکانس پیوسته متناظر دقت کرده ایم. از این نقطه به بعد ، از x و u برای نشان دادن متغیرهای فضایی و فرکانسی گسسته ۱-بعدی به ترتیب استفاده خواهیم کرد. هنگام کار در حالت دو بعدی ، به ترتیب از (t, z) و (m, n) برای نشان دادن متغیرهای فضایی و فرکانسی پیوسته استفاده می کنیم. به طور مشابه ، از (γ, x, u) ، (v, u) برای نشان دادن همتایان مجزا خود استفاده خواهیم کرد.

$$F(u) = F(u + kM) \quad (4-46)$$

$$f(x) = f(x + kM) \quad (4-47)$$

جایی که k یک عدد صحیح است. معادل گسسته کانولوشن $D-1$ در معادله (۴-۲۴) است

$$f(x) \star h(x) = \sum_{m=0}^{M-1} f(m)h(x-m) \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1 \quad (4-48)$$

از آنجا که در فرمول های قبلی توابع متناوب هستند ، ترکیب آنها نیز متناوب است. معادله (۴-۴۸) یک دوره از دوره تناوبی ادواری را نشان می دهد. به همین دلیل ، این معادله اغلب به عنوان چرخش دایره ای نامیده می شود. این نتیجه مستقیم متناوب بودن DFT و عکس آن است. این برخلاف کانولوشنی است که در بخش ۳.۴ مطالعه کرده اید ، که در آن مقادیر جابجایی ، x ، با نیاز به لغزیدن یک تابع کاملاً از دیگری تعیین می شود و در محدوده ثابت نیست $[0, M-1]$ همانطور که در کانولوشن دایره ای. ما این تفاوت و اهمیت آن را در بخش ۴.۶ و در شکل ۴.۲۷ بحث خواهیم کرد.

در نهایت ، ما به این نکته اشاره می کنیم که قضیه کانولوشن در معادله (۴-۲۵) و (۴-۲۶) ارائه شده است. همچنین برای متغیرهای مجزا قابل استفاده است ، با این تفاوت که سمت راست معادله (۴-۲۶) در M ضرب می شود (مسئله ۴.۱۸).

رابطه بین نمونه های نمونه و فرکانس

اگر $f(x)$ شامل M نمونه های یک تابع $f(t)$ است که واحدهای ΔT از هم جدا شده اند ، طول رکورد شامل

مجموعه $\{f(x), x = 0, 1, 2, \dots, M-1\}$ است

$$T = M\Delta T \quad (4-49)$$

فاصله مربوطه ، Δu ، در حوزه فرکانس از معادله (۴-۴۱) زیر حاصل می شود:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} = \frac{1}{T} \quad (4-50)$$

سپس کل محدوده فرکانسی که توسط اجزای M DFT پوشانده می شود

$$R = M\Delta u = \frac{1}{\Delta T} \quad (4-51)$$

بنابراین ، ما از معادله (۴-۵۰) و (۴-۵۱) می بینیم. که وضوح در فرکانس ، Δu ، از DFT بطور معکوس به طول (مدت زمان ، اگر t زمان باشد) رکورد ، T ، که بیش از آن تابع پیوسته ، $f(t)$ ، نمونه گیری می شود ؛ و محدوده فرکانس های گسترده شده توسط DFT بستگی به فاصله نمونه گیری ΔT دارد. اینها را در نظر داشته باشید . روابط معکوس بین Δu و ΔT .

مثال ۴.۴: مکانیک محاسبه DFT.

شکل ۴.۱۲ (الف) چهار نمونه از یک تابع پیوسته $f(t)$ را نشان می دهد که واحدهای ΔT از هم جدا شده اند. شکل ۴.۱۲ (ب) نمونه ها را در حوزه X نشان می دهد. مقادیر $0, 1, 2, 3$ است که به تعداد نمونه ها به ترتیب اشاره می کند و از 0 شمارش می شود. به عنوان مثال $f(2) = f(t_0 + 2\Delta T)$ سومین نمونه $f(t)$ از معادله (۴-۴)، اولین مقدار $F(u)$ یعنی $F(0)$ است

$$F(0) = \sum_{x=0}^3 f(x) = [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 1 + 2 + 4 + 4 = 11$$

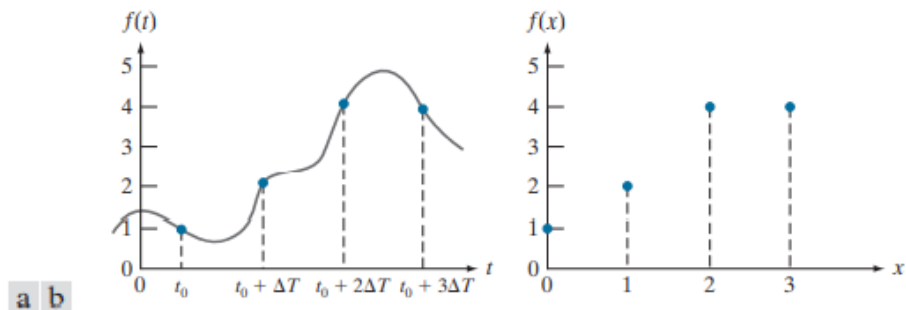
مقدار بعدی $F(u)$ است

$$F(1) = \sum_{x=0}^3 f(x) e^{-j2\pi(1)x/4} = 1e^0 + 2e^{-j\pi/2} + 4e^{-j\pi} + 4e^{-j3\pi/2} = -3 + 2j$$

به طور مشابه $F(2) = -(1 + 0j)$ and $F(3) = -(3 + 2j)$ توجه داشته باشید که همه مقادیر $f(x)$ در محاسبات استفاده می شود. هر مقدار $F(u)$ اگر به جای آن $F(u)$ به ما داده شود و از ما بخواهند معکوس آن را محاسبه کنیم، به همان شیوه پیش می رویم، اما از تبدیل معکوس فوریه استفاده می کنیم. برای مثال،

$$f(0) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) e^{j2\pi u(0)} = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^3 F(u) = \frac{1}{4} [11 - 3 + 2j - 1 - 3 - 2j] = \frac{1}{4} [4] = 1$$

که با شکل ۴.۱۲ (ب) موافق است. مقادیر دیگر $f(x)$ نیز به شیوه ای مشابه بدست می آید.



شکل ۴.۱۲ (الف) یک تابع پیوسته از واحدهای ΔT نمونه برداری کرد. (ب) نمونه هایی در دامنه X متغیر t پیوسته است، در حالی که X گسسته است.

۴.۵ گسترش عملکردهای دو متغیر

در بحث زیر مفاهیم معرفی شده در بخشهای قبلی این فصل را به دو متغیر بسط می دهیم. ضربه دو بعدی و ویژگی غربالگری آن ضربه $\delta(t, z)$ ، دو متغیر پیوسته، t و z ، مانند قبل تعریف شده است:

$$\delta(t, z) = \begin{cases} 1 & \text{if } t = z = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-52)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t, z) dt dz = 1 \quad (4-53)$$

همانطور که در مورد D-۱، ضربه D-۲ ویژگی غربالگری تحت یکپارچگی را نشان می دهد،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t, z) dt dz = f(0, 0) \quad (4-54)$$

یا به طور کلی برای یک ضربه واقع در (t_0, z_0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) \delta(t - t_0, z - z_0) dt dz = f(t_0, z_0) \quad (4-55)$$

مانند قبل، می بینیم که ویژگی غربالگری مقدار تابع را در محل ضربه نشان می دهد. برای متغیرهای گسسته X

و Y، تکانه واحد گسسته دو بعدی به صورت تعریف شده است

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = y = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-56)$$

و خاصیت غربالگری آن است

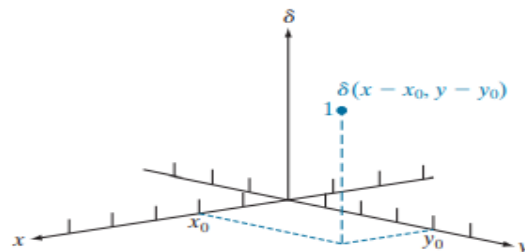
$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0) \quad (4-57)$$

جایی که $f(x, y)$ تابعی از متغیرهای گسسته X و Y است. برای یک ضربه در مختصات (x_0, y_0) شکل ۴.۱۳ را

بینید (ویژگی غربال

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) \quad (4-58)$$

هنگام کار با تصویری با ابعاد محدود، محدودیت های دو معادله قبلی با ابعاد تصویر جایگزین می شود.



شکل ۴.۱۳ واحد ۲ بعدی تکانه گسسته. متغیرهای X و Y گسسته هستند و d در همه جا صفر است مگر در

مختصات (x_0, y_0) که مقدار آن ۱ است.

جفت تبدیل دو بعدی چهار متغیره

بگذارید $f(t, z)$ یک تابع پیوسته از دو متغیر پیوسته، t و z باشد. جفت تبدیل دو بعدی و پیوسته فوریه توسط

عبارات آورده شده است

$$F(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \quad (4-59)$$

$$f(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\mu, \nu) e^{j2\pi(\mu t + \nu z)} d\mu d\nu \quad (4-60)$$

جایی که m و n متغیرهای فرکانس هستند. هنگام مراجعه به تصاویر ، t و z به عنوان متغیرهای فضایی پیوسته تفسیر می شوند. همانطور که در مورد $D-1$ ، حوزه متغیرهای m و n دامنه فرکانس پیوسته را مشخص می کند.

مثال ۴.۵: بدست آوردن تبدیل فوریه یک تابع جعبه دو بعدی

شکل ۴.۱۴ (a) معادل دو بعدی عملکرد جعبه $D-1$ در مثال ۴.۱ را نشان می دهد. پیروی از روشی مشابه آنچه در آن مثال استفاده شده است نتیجه را می دهد

$$\begin{aligned} F(\mu, \nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz = \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-Z/2}^{Z/2} A e^{-j2\pi(\mu t + \nu z)} dt dz \\ &= ATZ \left[\frac{\sin(\pi\mu T)}{(\pi\mu T)} \right] \left[\frac{\sin(\pi\nu Z)}{(\pi\nu Z)} \right] \end{aligned}$$

شکل ۴.۱۴ (ب) بخشی از طیف در مورد مبدا را نشان می دهد. همانطور که در مورد $D-1$ ، مکان صفرها در طیف متناسب با مقادیر T و Z است. در این مثال ، T بزرگتر از Z است ، بنابراین طیف در امتداد m -بیشتر "منقبض" می شود.

نمونه برداری دو بعدی و نظریه نمونه گیری دو بعدی

به شیوه ای مشابه مورد $D-1$ ، نمونه برداری در دو بعد را می توان با استفاده از یک تابع نمونه گیری (یعنی یک قطار ضربه ای دو بعدی) مدل سازی کرد:

$$s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m\Delta T, z - n\Delta Z) \quad (4-61)$$

جایی که ΔT و ΔZ فاصله بین نمونه ها در طول محور t - و z - تابع پیوسته $f(z, t)$ هستند. معادله (۴-۶۱) مجموعه ای از تکانه های متناوب را که بی نهایت در امتداد دو محور گسترش یافته است توصیف می کند (شکل ۴.۱۵ را ببینید). همانطور که در مورد $D-1$ نشان داده شده است

در شکل ۴.۵ ، ضرب $s_{\Delta T \Delta Z}(t, z) f(t, z)$ عملکرد نمونه را به دست می آورد.

تابع $f(z, t)$ گفته می شود که اگر تبدیل فوریه آن \cdot خارج از مستطیلی باشد که در فواصل $[-\mu_{\max}, \mu_{\max}]$ و $[-\nu_{\max}, \nu_{\max}]$ باند محدود است. به این معنا که،

$$F(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } |\mu| \geq \mu_{\max} \text{ and } |\nu| \geq \nu_{\max} \quad (4-62)$$

قضیه نمونه گیری دو بعدی بیان می کند که یک تابع پیوسته و محدود با باند $f(t, z)$ می تواند بدون خطا از مجموعه ای از نمونه های آن بازیابی شود اگر فواصل نمونه برداری

$$\Delta T < \frac{1}{2\mu_{\max}} \quad (4-63)$$

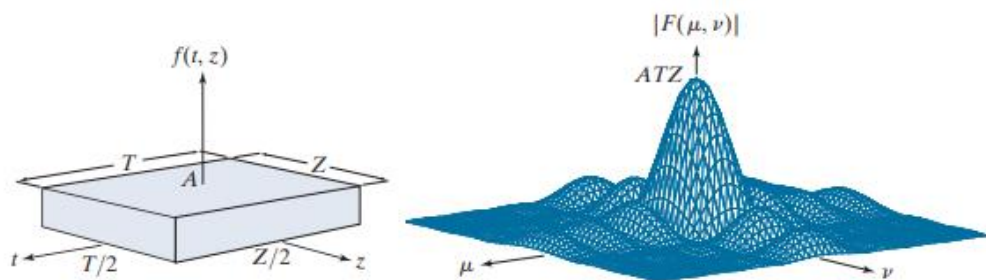
$$\Delta Z < \frac{1}{2\nu_{\max}} \quad (4-64)$$

یا بر حسب میزان نمونه برداری ، اگر

$$\frac{1}{\Delta T} > 2\mu_{\max} \quad (4-65)$$

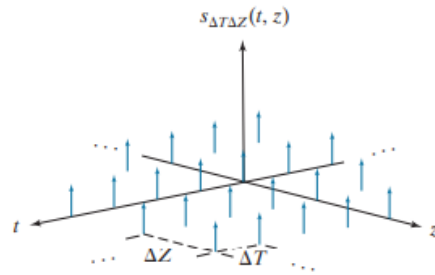
$$\frac{1}{\Delta Z} > 2\nu_{\max} \quad (4-66)$$

به بیان دیگر ، ما می گوییم که اگر یک عملکرد دو بعدی ، با محدوده باند و پیوسته با نمونه های بدست آمده با نرخهای بیش از دو برابر بیشترین فرکانس تابع در M - و N -نمایش داده شود ، هیچ اطلاعاتی از بین نمی رود. شکل ۴.۱۶ معادل دو بعدی شکل ها را نشان می دهد. ۴.۶ (ب) و (د) یک تابع تبدیل ایده آل فیلتر دو بعدی دارای شکلی است که در شکل ۴.۱۴ (a) نشان داده شده است (اما در حوزه فرکانس). قسمت خط کشی شده شکل ۴.۱۶ (الف) محل عملکرد فیلتر را برای دستیابی به جداسازی لازم در یک دوره تبدیل برای بازسازی یک عملکرد محدود با نوار از نمونه های آن نشان می دهد ، مانند شکل ۴.۸. از شکل ۴.۱۰ ، ما می دانیم که اگر از تابع نمونه برداری نشده باشد ، دوره ها با هم همپوشانی دارند و جدا کردن یک دوره واحد غیرممکن است ، همانطور که در شکل ۴.۱۶ (ب) نشان داده شده است. در چنین شرایطی ممکن است الیزینگ انجام شود.

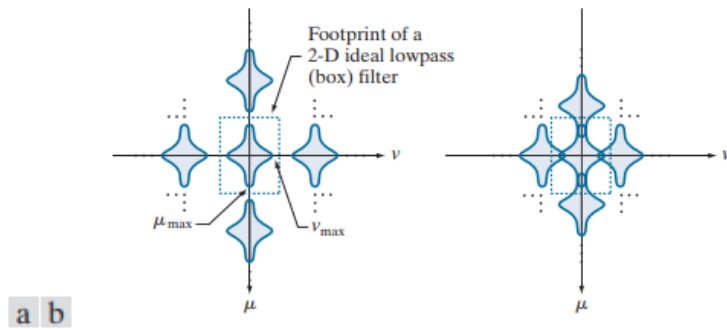


a b

شکل ۴.۱۴ (الف) عملکرد دو بعدی و (ب) قسمتی از طیف آن. جعبه در امتداد محور t طولانی تر است ، بنابراین طیف بیشتر در امتداد محور m منقبض می شود.



شکل ۴.۱۵ قطار ضربه ای دو بعدی



شکل ۴.۱۶ فوریه دو بعدی تبدیل (الف) نمونه برداری بیش از حد ، و (ب) زیر نمونه محدود ، تابع محدود

الایزینگ در تصاویر

در این بخش ، ما مفهوم الایزینگ به تصاویر را گسترش می دهیم و چندین جنبه الایزینگ مربوط به نمونه برداری و نمونه برداری مجدد را با جزئیات مورد بحث قرار می دهیم.

برنامه های افزودنی از ۱- ID الایزینگ

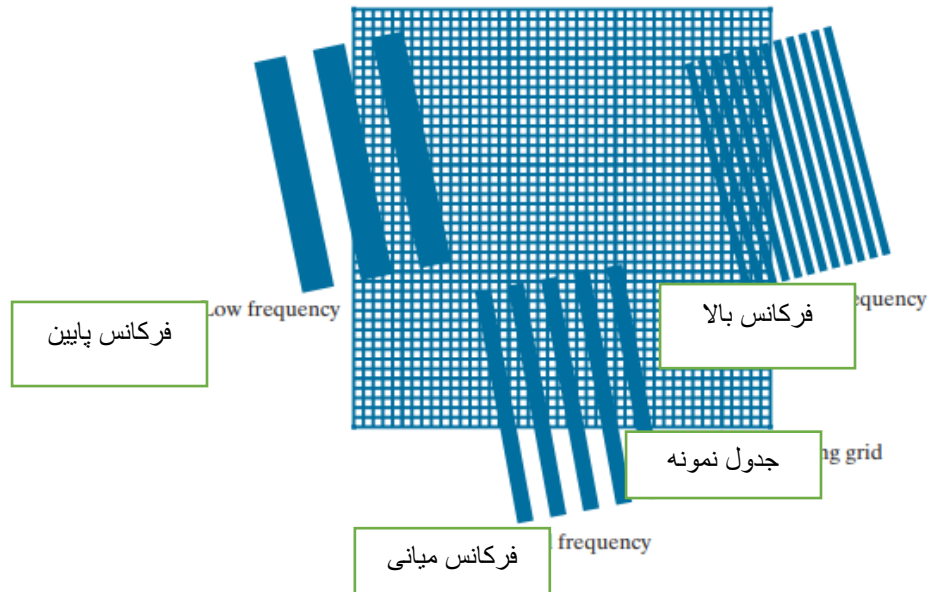
همانطور که در مورد $D-1$ ، یک تابع پیوسته $f(t, z)$ از دو متغیر پیوسته ، t و z ، می تواند به طور کلی فقط در صورتی محدود شود که در هر دو جهت مختصات بی نهایت گسترش یابد. همان عمل محدود کردن مدت زمان مکانی عملکرد (به عنوان مثال ، با ضرب آن در یک تابع جعبه) ، اجزای فرکانسی مفسدی را که تا محدوده فرکانس تا بی نهایت گسترش می یابد ، معرفی می کند ، همانطور که در بخش ۴.۳ توضیح داده شده است (همچنین به مسئله ۴.۱۲ مراجعه کنید). از آنجا که ما نمی توانیم از یک تابع بی نهایت نمونه بگیریم ، الایزینگ همیشه در تصاویر دیجیتال وجود دارد ، همانطور که در توابع نمونه برداری ۱-نمونه وجود دارد. دو حالت اصلی الایزینگ در تصاویر وجود دارد: الایزینگ فضایی و الایزینگ موقتی. الایزینگ فضایی ناشی از نمونه گیری ضعیف است ، همانطور که در بخش ۴.۳ مورد بحث قرار گرفته است ، و در تصاویر با الگوهای تکراری بیشتر قابل مشاهده است (و قابل اعتراض نیست). الایزینگ زمانی به فواصل زمانی بین تصاویر یک دنباله از تصاویر پویا مربوط می شود. یکی از رایج ترین مثالهای الایزینگ موقتی ، اثر "چرخ واگن" است ، که در آن چرخهایی با پره ها در دنباله ای از تصاویر (به عنوان مثال ، در فیلم) به نظر می رسد که به عقب می چرخند. این به دلیل پایین بودن نرخ فریم

نسبت به سرعت چرخش چرخ در دنباله است و شبیه پدیده ای است که در شکل ۴.۱۱ توضیح داده شده است ، که در آن با نمونه برداری سیگنالی تولید می شود که فرکانس بسیار کمتری نسبت به اصلی. تمرکز ما در این فصل بر الیزینگ فضایی است. نگرانی های اصلی مربوط به نام فضایی در تصاویر ، معرفی مصنوعات مانند ناهمواری در ویژگی های خط ، برجسته سازی های شگفت انگیز و ظاهر الگوهای فرکانسی است که در تصویر اصلی وجود ندارد. همانطور که از شکل ۴.۹ برای توضیح الیزینگ در توابع ۱-D استفاده کردیم ، می توانیم با استفاده از گرافیک ساده درک ماهیتی از الیزینگ در تصاویر را درک کنیم. شبکه نمونه گیری در بخش مرکزی شکل ۴.۱۷ نمای دو بعدی قطار ضربه ای در شکل ۴.۱۵ است. در شبکه ، مربع های سفید کوچک با محل ضربه ها (جایی که تصویر نمونه برداری می شود) مطابقت دارد و سیاه نشان دهنده جدایی بین نمونه ها است. قرار دادن شبکه نمونه بر روی یک تصویر مشابه ضرب تصویر در یک قطار ضربه ای است ، بنابراین همان مفاهیم نمونه برداری که در ارتباط با قطار ضربه ای در شکل ۴.۱۵ بحث کردیم ، در اینجا قابل اجرا است. تمرکز در حال حاضر به تجزیه و تحلیل گرافیکی برهم کنش بین نرخ نمونه برداری (جداسازی نقاط نمونه برداری در شبکه) و فرکانس سیگنال های دو بعدی نمونه برداری می شود.

شکل ۴.۱۷ یک شبکه نمونه برداری را نشان می دهد که تا حدی با سه سیگنال دو بعدی (مناطق تصویر) فرکانس های فضایی کم ، میانی و زیاد (نسبت به جداسازی بین سلول های نمونه برداری در شبکه) همپوشانی دارد. توجه داشته باشید که سطح "جزئیات" فضایی در مناطق متناسب با فرکانس است (یعنی سیگنالهای با فرکانس بالاتر دارای میله های بیشتری هستند).

بخشهایی از نواحی داخل گیره نمونه برداری مظاهر خشن نحوه ظاهر شدن آنها پس از نمونه برداری است. همانطور که انتظار می رفت ، هر سه ناحیه دیجیتالی تا حدی الیزینگ را نشان می دهند ، اما اثرات آنها بسیار متفاوت است و با افزایش اختلاف بین جزئیات (فراوانی) و میزان نمونه برداری بدتر می شود. ناحیه با فرکانس پایین به طرز معقولی خوب نمایش داده می شود ، با کمی ناهمواری خفیف در اطراف لبه ها. با افزایش فرکانس ناحیه تا محدوده متوسط ، ناهمواری ها افزایش می یابد زیرا میزان نمونه برداری یکسان است. این اعوجاج لبه (که مناسب نامیده میشود در تصاویر با خط قوی و/یا محتوای لبه رایج است.

منطقه دیجیتالی با فرکانس بالا در سمت راست بالای شکل ۴.۱۷ رفتار کاملاً متفاوت و تا حدی شگفت انگیز را از خود نشان می دهد. نوارهای اضافی (با فرکانس پایین تر) در قسمت دیجیتالی ظاهر می شوند و این نوارها با توجه به جهت نوارها در ناحیه پیوسته به طور قابل توجهی می چرخند. این نوارها مستعار یک سیگنال کاملاً متفاوت هستند. همانطور که مثال زیر نشان می دهد ، این نوع رفتار می تواند منجر به تصاویری شود که "طبیعی" به نظر می رسند و در عین حال هیچ ارتباطی با اصل ندارند.



شکل ۴.۱۷ اثرات الایزینگ مختلف ناشی از تعامل بین فرکانس سیگنال های دو بعدی و میزان نمونه برداری مورد استفاده برای دیجیتالی شدن آنها. مناطق خارج از شبکه نمونه برداری پیوسته و بدون الایزینگ هستند. مثال ۴.۶: الایزینگ در تصاویر.

یک سیستم تصویربرداری را در نظر بگیرید که کامل است ، به این معنا که بدون نویز است و تصویر دیجیتالی دقیقی از آنچه می بیند تولید می کند ، اما تعداد نمونه هایی که می تواند بگیرد $۹۶ * ۹۶$ پیکسل ثابت شده است. برای سادگی ، فرض کنید پیکسل ها مربع کوچکی از عرض و طول واحد هستند. ما می خواهیم از این سیستم برای دیجیتالی کردن تصاویر صفحه شطرنج مربع های سیاه و سفید متناوب استفاده کنیم. تصاویر تخته شطرنجی را می توان به صورت متناوب تفسیر کرد ، که در هر دو بعد نامحدود گسترش می یابد ، جایی که یک دوره برابر با جفت سیاه و سفید مجاور است. اگر ما تصاویر دیجیتالی "معتبر" را به عنوان تصاویری که از یک دنباله نامحدود استخراج شده اند به گونه ای مشخص کنیم که تصویر شامل یک عدد صحیح از دوره ها باشد ، بر اساس نظرات قبلی ما ، می دانیم که تصاویر متناوب که به درستی نمونه برداری شده اند ، بدون هیچ گونه الایزینگ مستقل خواهند بود. به در مثال حاضر ، این بدان معناست که اندازه مربع ها باید به گونه ای باشد که تقسیم ۹۶ بر اندازه ، یک عدد زوج به دست آورد. این یک عدد صحیح از دوره ها (جفت مربع سیاه/سفید) را ارائه می دهد. کوچکترین اندازه مربع ها در شرایط گفته شده ۱ پیکسل است.

هدف اصلی این مثال بررسی آنچه اتفاق می افتد هنگامی که تصاویر صفحه شطرنجی با مربع هایی با اندازه های کمتر از ۱ پیکسل در کنار سیستم به سیستم ارائه می شود. این مورد مربوط به مورد زیر نمونه ای است که قبلاً مورد بحث قرار گرفت و منجر به الایزینگ می شود. یک خط اسکن افقی یا عمودی از تصاویر صفحه شطرنج منجر

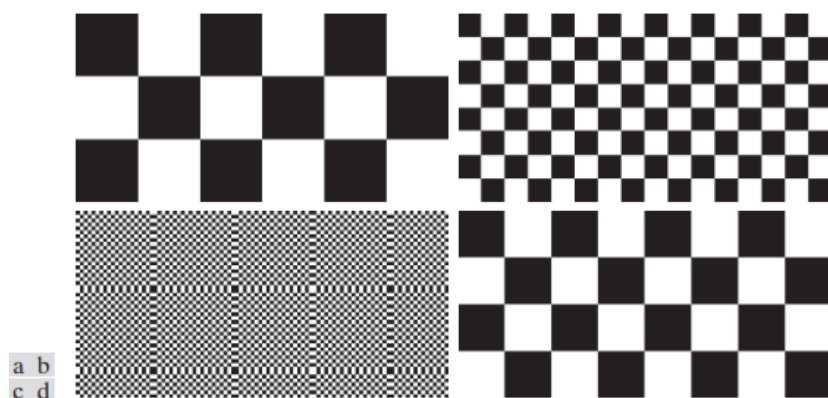
به یک موج مربعی ۱ بعدی می شود ، بنابراین ما می توانیم تجزیه و تحلیل را روی سیگنال های ۱ بعدی متمرکز کنیم.

برای درک قابلیت های سیستم تصویربرداری ما از نظر نمونه گیری ، از بحث قضیه نمونه گیری ۱-D یادآوری کنید که با توجه به میزان نمونه برداری ، حداکثر فرکانس مجاز قبل از ایجاد الیزینگ در سیگنال نمونه باید کمتر از یک نصف باشد. میزان نمونه گیری نرخ نمونه گیری ما ثابت است ، در یک نمونه در واحد متغیر مستقل (واحدها پیکسل هستند). بنابراین ، حداکثر فرکانسی که سیگنال ما می تواند برای جلوگیری از الیزینگ داشته باشد ۲/۱ چرخه/پیکسل است.

ما می توانیم با توجه به این نکته که سیستم ما قادر به پردازش است ، زمانی که مربعها ۱ واحد (پیکسل) عرض دارند ، به این نتیجه برسیم ، در این صورت دوره (چرخه) دو پیکسل است.

فرکانس متقابل دوره یا ۲/۱ چرخه/پیکسل است ، مانند پاراگراف قبلی. شکل ۴.۱۸ (الف) و (ب) نتیجه نمونه برداری از صفحات شطرنجی را نشان می دهند که مربع آنها به ترتیب دارای اندازه ۱۶ * ۱۶ و ۶ * ۶ پیکسل است. فرکانس خطوط اسکن در هر دو جهت این دو تصویر ۳۲/۱ و ۶/۱ سیکل/پیکسل است. اینها بسیار کمتر از ۲/۱ چرخه/پیکسل مجاز برای سیستم ما هستند. از آنجا که ، همانطور که قبلاً ذکر شد ، تصاویر کاملاً در قسمت دید سیستم ثبت شده اند ، همانطور که انتظار می رفت ، نتایج بدون الیزینگ است.

هنگامی که اندازه مربع ها به کمی کمتر از یک پیکسل کاهش می یابد ، تصویری با الیزینگ شدید به دست می آید ، همانطور که در شکل ۴.۱۸ (C) نشان داده شده است (مربع های مورد استفاده تقریباً اندازه ۰.۹۵ * ۰.۹۵ پیکسل داشتند). در نهایت ، کاهش اندازه مربع ها به کمی کمتر از ۰.۵ پیکسل در کناره ، تصویر را در شکل ۴.۱۸ (d) به دست آورد. در این مورد ، نتیجه مستعار شبیه یک الگوی معمولی تخته شطرنجی است. در حقیقت ، این تصویر از نمونه برداری از تصویر صفحه شطرنجی که مربع آن ۱۲ پیکسل در کنار آن است ، حاصل می شود. این تصویر آخر به خوبی یادآوری می کند که الیزینگ می تواند نتایجی را ایجاد کند که ممکن است از نظر بصری گمراه کننده باشد.



شکل ۴.۱۸ الایزینگ در (الف) و (ب) مربع ها دارای اندازه های ۱۶ و ۶ پیکسل در کناره هستند. در (ج) و (د) مربع ها اندازه دارند. به ترتیب ۰.۹۵ و ۰.۴۸ پیکسل. هر مربع کوچک در (C) یک پیکسل است. هر دو (ج) و (د) مستعار هستند. توجه کنید که چگونه (د) به عنوان یک تصویر "معمولی" نقاب می زند می توان با کمی فوکوس کردن تصویر برای دیجیتالی کردن اثرات الایزینگ را کاهش داد تا فرکانس های بالا تضعیف شود. همانطور که در بخش ۴.۳ توضیح داده شد، قبل از نمونه برداری از تصویر، باید فیلتر آنتی الایزینگ در "قسمت جلویی" انجام شود. هیچ چیزی به عنوان فیلترهای نرم افزاری ضد تسریع نرم افزار وجود ندارد که بتوان از آنها برای کاهش اثرات الایزینگ ناشی از نقض قضیه نمونه برداری استفاده کرد. اکثر بسته های تجاری دستکاری تصویر دیجیتالی دارای ویژگی ای به نام "آنتی-الایزینگ" هستند.

با این حال، همانطور که در مثال ۴.۸ در زیر نشان داده شده است، این اصطلاح مربوط به تار شدن تصویر دیجیتالی برای کاهش مصنوعات اضافی اضافی ناشی از نمونه گیری مجدد است. این عبارت در مورد کاهش الایزینگ در تصویر نمونه اصلی اعمال نمی شود. تعداد قابل توجهی از دوربین های دیجیتالی تجاری دارای فیلترهای ضد آلیزیم واقعی هستند، چه در لنز و چه در سطح خود سنسور. حتی طبیعت از این رویکرد برای کاهش آثار الایزینگ در چشم انسان استفاده می کند، همانطور که مثال زیر نشان می دهد.

مثال ۴.۷: طبیعت از محدوده قضیه نمونه گیری پیروی می کند.

هنگام بحث در مورد شکل ۲.۱ و ۲.۲، ما اشاره کردیم که مخروط ها سنسورهایی هستند که مسئول دید تیز هستند. مخروط ها در حفره، مطابق با محور بصری عدسی، متمرکز شده و غلظت آنها بر حسب درجه از آن محور اندازه گیری می شود. یک آزمایش استاندارد بینایی (توانایی حل جزئیات) در انسان، قرار دادن الگویی از نوارهای سیاه و سفید متناوب در یک درجه از میدان دید است. اگر تعداد کل نوارها از ۱۲۰ فراتر رود (به عنوان مثال، فرکانس ۶۰ چرخه/درجه)، شواهد تجربی نشان می دهد که ناظر تصویر را به عنوان یک توده خاکستری واحد درک می کند. به این معنا که عدسی در چشم به طور خودکار فرکانس های فضایی بالاتر از ۶۰ چرخه/درجه را فیلتر می کند.

نمونه برداری در چشم توسط مخروط ها انجام می شود، بنابراین، بر اساس قضیه نمونه گیری، ما انتظار داریم که چشم در حدود ۱۲۰ مخروط/درجه داشته باشد تا از اثرات الایزینگ جلوگیری شود. همانطور که معلوم شد، این دقیقاً همان چیزی است که ما داریم!

نمونه گیری مجدد تصویر و درون یابی

همانطور که در مورد D-۱، بازسازی کامل یک تابع تصویر محدود با باند از مجموعه ای از نمونه های آن نیاز به انقباض دو بعدی در حوزه فضایی با عملکرد sinc دارد. همانطور که در بخش ۴.۳ توضیح داده شد، این بازسازی کاملاً نظری مستلزم درون یابی با استفاده از جمع های بی نهایت است که در عمل، ما را مجبور می کند تا به

دنبال روشهای درون یابی تقریبی باشیم. یکی از رایج ترین کاربردهای درون یابی دو بعدی در پردازش تصویر ، تغییر اندازه تصویر (بزرگنمایی و کوچک شدن) است. بزرگنمایی ممکن است به عنوان نمونه گیری بیش از حد در نظر گرفته شود ، در حالی که کوچک شدن ممکن است به عنوان نمونه گیری نادرست تلقی شود. تفاوت اصلی بین این دو عملیات و مفاهیم نمونه گیری مورد بحث در بخشهای قبلی این است که ما از بزرگنمایی و کوچک شدن تصاویر دیجیتال استفاده می کنیم. ما درون یابی را در بخش ۲.۴ معرفی کردیم. علاقه ما در آنجا نشان دادن عملکرد نزدیکترین همسایه ، دو خطی و درون یابی دو طرفه بود. در این بخش ، تمرکز بر نمونه گیری و موضوعات ضد الایزینگ است. عموماً هنگامی که یک تصویر مقیاس بندی می شود ، چه با بزرگنمایی و چه با کوچک شدن ، الایزینگ ایجاد می شود. به عنوان مثال ، یک مورد خاص از درون یابی نزدیکترین همسایه در حال بزرگنمایی با تکرار پیکسل است ، که ما از آن برای افزایش اندازه تصویر چند برابر عدد صحیح استفاده می کنیم. برای دو برابر شدن اندازه تصویر ، هر ستون را کپی می کنیم. این اندازه تصویر را در جهت افقی دو برابر می کند. سپس ، هر ردیف تصویر بزرگ شده را کپی می کنیم تا اندازه آن در جهت عمودی دو برابر شود. از همین روش برای بزرگنمایی تصویر به تعداد دفعات صحیح استفاده می شود. تعیین سطح شدت هر پیکسل با این واقعیت از پیش تعیین شده است که مکانهای جدید تکراری دقیق مکانهای قدیمی هستند. در این روش خام بزرگنمایی ، یکی از اصلی ترین تأثیرات افزایش دهنده ، معرفی ژگی ها در خطوط مستقیم است که افقی یا عمودی نیستند. همانطور که در بخش ۲.۴ مورد بحث قرار گرفتیم ، اثرات الایزینگ در بزرگنمایی تصویر به طور قابل توجهی با استفاده از درون یابی پیچیده تر کاهش می یابد. در مثال زیر نشان می دهیم که الایزینگ همچنین می تواند یک مشکل جدی در کوچک شدن تصویر باشد.

مثال ۴.۸: نشان دادن الایزینگ در تصاویر طبیعی دوباره نمونه.

به طور کلی هنگامی که اندازه یک تصویر دیجیتالی کاهش می یابد ، آثار الایزینگ بدتر می شود. شکل ۴.۱۹ (الف) تصویری است که شامل مناطقی است که عمداً برای نشان دادن اثرات الایزینگ انتخاب شده است (به خطوط موازی باریک در همه لباسهایی که سوژه پوشیده است توجه کنید). در شکل ۴.۱۹ (الف) هیچ گونه منویزق الایزینگ غیرقابل اعتراض وجود ندارد ، که نشان می دهد نرخ نمونه گیری مورد استفاده در ابتدا برای کاهش الایزینگ کافی بود.

در شکل ۴.۱۹ (ب) ، تصویر با استفاده از حذف سطر/ستون به ۳۳٪ اندازه اصلی خود کاهش یافت. تأثیرات الایزینگ در این تصویر کاملاً قابل مشاهده است (برای مثال ، مناطق اطراف روسری و زانوهای سوژه را ببینید). تصاویر (الف) و (ب) در یک اندازه نشان داده می شوند زیرا تصویر کاهش یافته با تکرار پیکسل به اندازه اولیه خود بازگردانده می شود.

"معادل" دیجیتال تمرکز زدایی از تصاویر پیوسته که قبلاً برای کاهش الایزینگ ذکر شده است ، این است که فرکانس های بالای یک تصویر دیجیتالی را با هموار کردن آن با یک فیلتر پایین گذر قبل از نمونه گیری مجدد

تضعیف کند. شکل ۴.۱۹ (ج) همانند شکل ۴.۱۹ (ب) پردازش شد ، اما تصویر اصلی قبل از کاهش اندازه با استفاده از یک فیلتر میانگین فضایی $5 * 5$ بخش ۳.۵ را ببینید) هموار شد. بهبود نسبت به شکل ۴.۱۹ (ب) مشهود است. تصویر کمی تیره تر از (a) و (b) است ، اما الایزینگ دیگر قابل اعتراض نیست.



a b c

شکل ۴.۱۹ تصویری از الایزینگ بر روی تصاویر طبیعی نمونه برداری شده. (الف) یک تصویر دیجیتالی با اندازه $772 * 548$ پیکسل با الایزینگ ناچیز قابل مشاهده. (ب) تغییر اندازه تصویر به 33% اندازه اصلی آن با حذف پیکسل و سپس بازگرداندن آن به اندازه اصلی با تکرار پیکسل. الایزینگ به وضوح قابل مشاهده است. (ج) نتیجه تار شدن تصویر در (الف) با فیلتر میانگین قبل از تغییر اندازه. تصویر کمی تیره تر از (b) است ، اما الایزینگ دیگر قابل اعتراض نیست. (تصویر اصلی از آزمایشگاه فشرده سازی سیگنال ، دانشگاه کالیفرنیا ، سانتا باربارا گرفته شده است.)

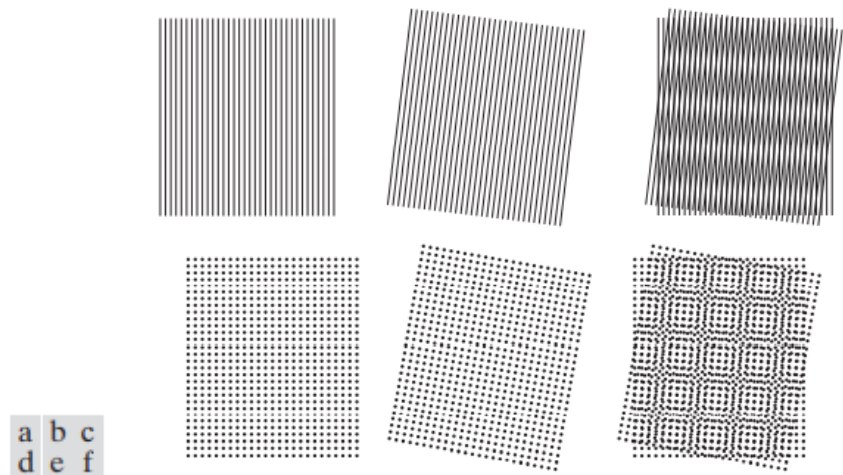
الگوهای الایزینگ و مویر

در اپتیک ، یک الگوی مویر یک پدیده ثانویه و بصری است که به عنوان مثال با قرار دادن دو توری با فاصله تقریباً مساوی تولید می شود. این الگوها معمولی و روزمره هستند. به عنوان مثال ، ما آنها را در روی هم پوشانیدن صفحه نمایش حشرات و تداخل بین خطوط رستر تلویزیون و مواد راه راه یا بافت بلند در پس زمینه ، یا توسط افراد استفاده می کنیم. در پردازش تصویر دیجیتال ، الگوهای شبیه مویر معمولاً هنگام نمونه برداری از رسانه های چاپی ، مانند روزنامه ها و مجلات ، یا در تصاویری با اجزای متناوب که فاصله آنها با فاصله بین نمونه ها قابل مقایسه است ، پدیدار می شوند. توجه به این نکته ضروری است که الگوهای مویر عمومیت بیشتری نسبت به نمونه برداری از مصنوعات دارند. برای مثال ، شکل ۴.۲۰ با استفاده از نقاشی های برداری که دیجیتالی نشده اند ، اثر مویر را نشان می دهد. به طور جداگانه ، الگوها تمیز و عاری از تداخل هستند. با این حال ، اقدامات ساده اضافه کردن یک الگو بر الگوی دیگر ، الگویی با فرکانس هایی که در هیچ یک از الگوهای اصلی وجود ندارد ، ایجاد می کند. به طور خاص به اثر مویر تولید شده توسط دو الگوی نقطه توجه کنید ، زیرا این مورد مورد علاقه در بحث زیر است.

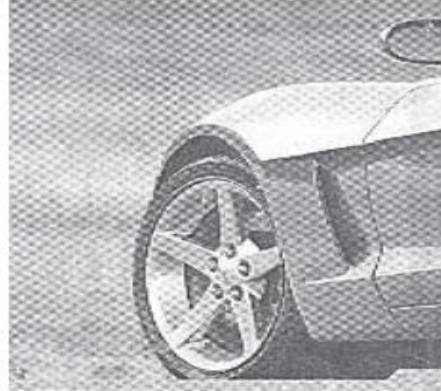
اصطلاح مویر یک کلمه فرانسوی است (نه نام یک فرد) که به نظر می رسد از بافندگان شروع شده است ، آنها ابتدا متوجه الگوهای تداخلی می شوند که بر روی برخی پارچه ها قابل مشاهده است. ریشه این کلمه از کلمه موهیر ، پارچه ای ساخته شده از موهای بز آنگورا است.

مثال ۴.۹: نمونه برداری از رسانه های چاپی.

روزنامه ها و سایر مواد چاپی از نقاط به اصطلاح نیم تن استفاده می کنند ، که نقاط سیاه یا بیضی هستند که اندازه ها و طرح های گروه بندی مختلف برای شبیه سازی تن خاکستری استفاده می شود. به عنوان یک قاعده ، اعداد زیر معمولی است: روزنامه ها با استفاده از ۷۵ نقطه نیم تن در اینچ (dpi) چاپ می شوند ، مجلات از ۱۳۳ dpi و بروشورهای با کیفیت بالا از ۱۷۵ dpi استفاده می کنند. شکل ۴.۲۱ نشان می دهد که چه اتفاقی می افتد وقتی که از یک تصویر (زیر) ۷۵ dpi نمونه برداری می شود. شبکه نمونه برداری (که جهت عمودی و افقی دارد) و الگوهای نقطه ای روی تصویر روزنامه (جهت گیری -۴۵ درجه سانتیگراد) با یکدیگر در ارتباط هستند و یک الگوی یکنواخت شبیه مویر ایجاد می کنند که باعث می شود تصویر لکه دار به نظر برسد. (ما در بخش ۴.۱۰ تکنیکی را برای کاهش اثرات الگوهای مویرایی در رسانه های چاپی نمونه برداری نشده مورد بحث قرار خواهیم داد.)



شکل ۴.۲۰ نمونه هایی از اثر مویر اینها نقشه های بردار هستند ، نه الگوهای دیجیتالی شده. قرار دادن یک الگو بر الگوی دیگر شبیه به ضرب الگوها است.



شکل ۴.۲۱ تصویر روزنامه با ۷۵ dpi دیجیتالی شد. به الگوی شبیه مویر حاصل از آن توجه کنید تعامل بین جهت ۴۵ درجه از نقاط نیمه تن و جهت شمالی-جنوبی عناصر نمونه برداری که برای دیجیتالی شدن تصویر استفاده می شود.

تبدیل دو بعدی چهارگانه و معکوس آن

توسعه مشابه ماده در بخشهای ۴.۳ و ۴.۴، تبدیل دو بعدی فوریه مجزا (DFT) را به دنبال خواهد داشت:

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (4-67)$$

جایی که $f(x, y)$ یک تصویر دیجیتالی با اندازه $M \times N$ است همانطور که در مورد $D-1$ ، معادله (۴-۶۷) باید برای مقادیر متغیرهای گسسته u و v در محدوده $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ و $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ارزیابی شود.^{۱۷} با توجه به تبدیل $F(u, v)$ ، می توانیم $f(x, y)$ را با استفاده از تبدیل فوریه معکوس IDFT بدست آوریم:

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \quad (4-68)$$

برای $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ و $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ، همانطور که در مورد $D-1$ ، [معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۵)]، معادله (۴-۶۷) و (۴-۶۸) یک جفت تبدیل فوریه دو بعدی گسسته، $f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$ را تشکیل می دهند. (اثبات یک بسط مستقیم پرونده $D-1$ در مسئله ۴.۱۵ است). بقیه این فصل بر اساس ویژگیهای این دو معادله و استفاده از آنها برای فیلتر کردن تصویر در حوزه فرکانس است. نظراتی که در ارتباط با معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۵) ارائه شده است. برای معادلات (۴-۶۷) و (۴-۶۸) قابل استفاده است؛ یعنی دانستن اینکه $f(x, y)$ و $F(u, v)$ یک جفت تبدیل فوریه هستند می تواند در اثبات روابط بین توابع و تبدیل آنها بسیار مفید باشد.

^{۱۷} همانطور که در بخش ۴.۴ ذکر شد، به خاطر داشته باشید که در این فصل از (t, z) و m ، n برای نشان دادن متغیرهای دو بعدی فضایی و حوزه فرکانس استفاده می کنیم. در حالت گسسته دو بعدی، از (x, y) برای متغیرهای فضایی و (u, v) برای متغیرهای حوزه فرکانس، که همه آنها گسسته هستند، استفاده می کنیم.

۴.۶ برخی از ویژگی های DFT و IDFT دو بعدی

در این بخش ، چندین ویژگی تبدیل فوریه دوبعدی و معکوس آن را معرفی می کنیم.

روابط بین مداخلات فضایی و فرکانسی

روابط بین نمونه برداری فضایی و فواصل حوزه فرکانس مربوطه در بخش ۴.۴ توضیح داده شده است. فرض کنید از یک عملکرد پیوسته $f(z, t)$ نمونه برداری شود تا یک تصویر دیجیتالی $f(x, y)$ تشکیل شود که به ترتیب از نمونه های $M * N$ گرفته شده در جهت $-t$ و z تشکیل شده است. اجازه دهید ΔT و ΔZ نشان دهنده جدایی بین نمونه ها باشند (شکل ۴.۱۵ را ببینید). سپس ، فاصله بین متناظر گسسته ، متغیرهای حوزه فرکانس توسط

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta T} \quad (4-69)$$

و

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta Z} \quad (4-70)$$

به ترتیب. به ویژگی مهمی که بین نمونه ها وجود دارد توجه کنید دامنه فرکانس هم با فاصله بین نمونه های فضایی و هم با تعداد نمونه ها نسبت عکس دارد.

تبدیل و چرخش

اعتبار جفت های تبدیل فوریه زیر را می توان با جایگزینی مستقیم به معادله (۴-۶۷) و (۴-۶۸) نشان داد. (به مسئله ۴.۲۷ مراجعه کنید):

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (4-71)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi(x_0u/M + y_0v/N)} \quad (4-72)$$

به یاد بیاورید که ما از علامت "" برای نشان دادن جفت های تبدیل فوریه استفاده می کنیم. یعنی عبارت سمت راست تبدیل است. از عبارت در سمت چپ ، و اصطلاح در سمت چپ تبدیل فوریه معکوس از عبارت در سمت راست است.

یعنی ضرب $f(x, y)$ در نمایی که نشان داده شده است مبدا DFT را به (u_0, v_0) و برعکس ، ضرب $F(u, v)$ در منفی آن نمایی منشاء $f(x, y)$ را به (x_0, y_0) تغییر می دهد. همانطور که در مثال ۴.۱۳ نشان می دهیم ، تبدیل هیچ تاثیری بر میزان (طیف) $F(u, v)$ ندارد.

استفاده از مختصات قطبی

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad u = \omega \cos \varphi \quad v = \omega \sin \varphi$$

در زوج تبدیل زیر نتیجه می شود:

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0) \quad (4-73)$$

که نشان می دهد چرخش $f(x, y)$ با زاویه $F(u, v)$ را با همان زاویه می چرخاند. برعکس، چرخش $F(u, v)$ با زاویه یکسان $f(x, y)$ را می چرخاند.

دوره تناوبی

همانطور که در مورد $D-1$ ، تبدیل دو بعدی فوریه و عکس آن بی نهایت تناوبی در جهت u و v است. به این معنا که،

$$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N) = F(u + k_1 M, v + k_2 N) \quad (4-74)$$

$$f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N) = f(x + k_1 M, y + k_2 N) \quad (4-75)$$

جایی که k_1 و k_2 اعداد صحیح هستند. دوره های دگرگونی و معکوس آن مسائل مهمی در پیاده سازی الگوریتم های مبتنی بر DFT طیف $D-1$ را در شکل ۴.۲۲ (a) در نظر بگیرید. همانطور که در بخش ۴.۴ توضیح داده شد [به پاورقی به معادله (۴-۴۲) مراجعه کنید]، داده های تبدیل در بازه ۰ تا $M-1$ شامل دو نیم دوره است که در نقطه $M/2$ ملاقات می کنند، اما قسمت پایینی دوره در فرکانس های بالاتر ظاهر می شود. برای اهداف نمایش و فیلتر، راحت تر است که در این فاصله یک دوره کامل از تبدیل که در آن داده ها به هم پیوسته و به ترتیب مرتب شده اند، مطابق شکل ۴.۲۲ (ب). تقریب می شود از معادله (۴-۷۱) که

$$f(x) e^{j2\pi(u_0 x/M)} \Leftrightarrow F(u - u_0)$$

به عبارت دیگر، ضرب $f(x)$ در عبارت نمایی نشان داده شده، داده های تبدیل را جابجا می کند تا مبدأ $F(u)$ ، به $u_0 = M/2$ اجازه دهیم، عبارت نمایی $e^{j\pi x}$ می شود که برابر $(-1)^x$ است زیرا x یک عدد صحیح است. در این مورد،

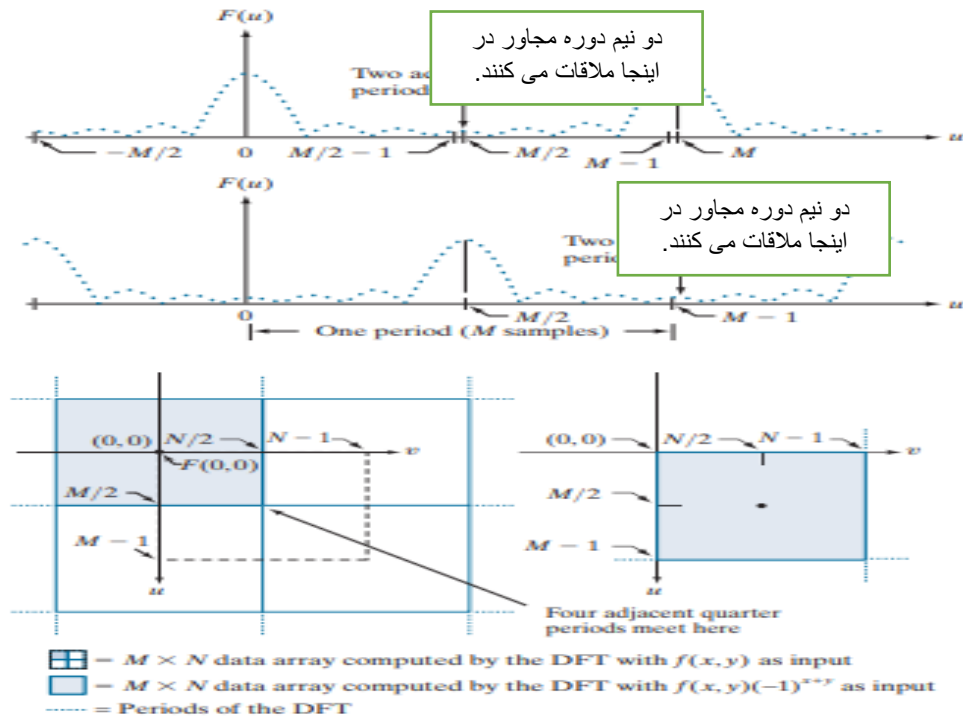
$$f(x)(-1)^x \Leftrightarrow F(u - M/2)$$

به این معنا که ضرب $f(x)$ در $(-1)^x$ داده ها را جابجا می کند به طوری که $F(u)$ بر روی بین $[0, M-1]$ که مطابق شکل ۴.۲۲ (b) است، در صورت تمایل متمرکز است. به در نمودار دو بعدی وضعیت به سختی ترسیم می شود، اما اصل همان است، همانطور که شکل ۴.۲۲ (c) نشان می دهد. به جای دو نیم دوره، اکنون چهار دوره چهارم در آن نقطه $(M/2, N/2)$ تشکیل می شود. همانطور که در مورد $D-1$ ، ما می خواهیم داده ها را طوری جابجا کنیم که $F(0, 0)$ در $(M/2, N/2)$ باشد. اجازه دادن در معادله (۴-۷۱) در نتیجه بیان می شود

$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2) \quad (4-76)$$

با استفاده از این معادله داده ها جابجا می شوند تا $F(0, 0)$ به مرکز مستطیل فرکانس (یعنی مستطیلی که با فاصله های $[0, M-1]$ و $[0, N-1]$ در فرکانس تعریف شده است، منتقل شود. دامنه).

شکل ۴.۲۲ (د) نتیجه را نشان می دهد. به خاطر داشته باشید که در همه بحث های ما ، مقادیر مختصات در دو حوزه فضایی و فرکانسی صحیح هستند. همانطور که در بخش ۲.۴ توضیح دادیم (شکل ۲.۱۹ را ببینید) ، اگر ، مانند مورد ما) ، منشاء تصویر یا تبدیل $N * M$ در $(0, 0)$ ، سپس مرکز آن تصویر یا تبدیل در کف $(M/2, N/2)$ طبقه $(N/2)$ است. این عبارت کاربردی است. برای مقادیر زوج و فرد M و N به عنوان مثال ، مرکز آرایه ای با اندازه $15 * 20$ در نقطه $(7, 10)$ قرار دارد. از آنجا که شروع به شمارش از 0 می کنیم ، اینها به ترتیب یازدهم و هشتمین نقطه در محورهای مختصات اول و دوم آرایه هستند.



شکل ۴.۲۲ در مرکز تبدیل فوریه. (الف) DFT یک بعدی D تعداد نامحدودی از دوره ها را نشان می دهد. (ب) تغییر DFT حاصل از ضرب $f(x)$ در $(-1)^x$ قبل از محاسبه $F(u)$ (ج) دو بعدی DFT تعداد نامحدود دوره را نشان می دهد. مساحت داخل مستطیل خطی آرایه داده $F(u, v)$ است که با آن به دست آمده است. معادل $(4-67)$ با یک تصویر $f(x, y)$ به عنوان ورودی. این آرایه شامل چهار دوره چهارم است. (د) آرایه جابجا شده با ضرب بدست می آید $f(x, y)$ توسط $(-1)^{x+y}$ قبل از محاسبه $F(u, v)$ در حال حاضر داده ها شامل یک دوره کامل ، با محوریت (مانند) در (ب) هستند.

ویژگی های اندازه گیری

یک نتیجه مهم از تجزیه و تحلیل عملکردی این است که هر تابع واقعی یا پیچیده ، $W(x, y)$ می تواند به عنوان مجموع یک قسمت زوج و فرد بیان شود ، که هر یک می تواند واقعی یا پیچیده باشد:

$$w(x, y) = w_e(x, y) + w_o(x, y) \quad (4-77)$$

که در آن قسمت‌های زوج و فرد به صورت تعریف شده است

$$w_e(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) + w(-x, -y)}{2} \quad (4-78)$$

$$w_o(x, y) \triangleq \frac{w(x, y) - w(-x, -y)}{2} \quad (4-79)$$

برای همه مقادیر معتبر x و y جایگزینی معادله (۴-۷۸) و (۴-۷۹) به معادله (۴-۷۷) الایزینگ $W(x, y) = W(x, y)$ را ارائه می دهد ، بنابراین اعتبار معادله اخیر را اثبات می کند. از تعاریف قبلی پیروی می کند که

$$w_e(x, y) = w_e(-x, -y) \quad (4-80)$$

و

$$w_o(x, y) = -w_o(-x, -y) \quad (4-81)$$

گفته می شود توابع زوج متقارن و توابع فرد نامتقارن هستند. از آنجا که همه شاخص ها در DFT و IDFT اعداد صحیح غیر منفی هستند ، هنگامی که از تقارن (ضد تقارن) صحبت می کنیم ، به تقارن (ضد تقارن) در مورد نقطه مرکزی یک دنباله اشاره می کنیم ، در این صورت تعاریف زوج و فرد تبدیل می شوند. :

$$w_e(x, y) = w_e(M - x, N - y) \quad (4-82)$$

$$w_o(x, y) = -w_o(M - x, N - y) \quad (4-83)$$

در چارچوب این بحث ، مکان عناصر در یک دنباله با اعداد صحیح مشخص می شود. بنابراین ، همان مشاهدات چند پاراگراف در مورد مراکز آرایه هایی با اندازه های زوج و فرد برای توالی ها قابل اجرا است. اما ، مفاهیم اعداد زوج/فرد و توابع زوج/فرد را اشتباه نگیرید.

برای $x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ and $y = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ طبق معمول ، M و N تعداد سطرها و ستون های یک آرایه دو بعدی هستند.

ما از تجزیه و تحلیل ریاضی ابتدایی می دانیم که حاصلضرب دو تابع زوج یا دو زوج است و حاصلضرب یک تابع زوج و فرد است. علاوه بر این ، تنها راهی که یک تابع گسسته می تواند فرد باشد این است که همه نمونه های آن به صفر برسند. این خواص منجر به نتیجه مهمی می شود که

$$\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} w_e(x, y) w_o(x, y) = 0 \quad (4-84)$$

برای هر دو عملکرد مجرد زوج و فرد w_e و w_o . به عبارت دیگر ، چون استدلال معادله (۴-۸۴) فرد است ، حاصل جمع ها ۰ است. توابع می توانند واقعی یا پیچیده باشند.

برای اینکه خود را متقاعد کنید که نمونه های یک تابع فرد برابر صفر است ، یک دوره از یک موج سینوسی ۱ بعدی را در مورد منشاء یا هر دوره زمانی دیگر شامل یک دوره.

مثال ۴.۱۰: توابع زوج و فرد.

اگرچه یکنواختی و غرابت به راحتی برای عملکردهای پیوسته تجسم می شوند ، این مفاهیم هنگام برخورد با توالی های مجزا چندان شهودی نیستند. تصاویر زیر به روشن شدن ایده های قبلی کمک می کند. دنباله ۱ بعدی را در نظر بگیرید

$$f = \{f(0), f(1), f(2), f(3)\} = \{2, 1, 1, 1\}$$

که در آن $M = 4$ برای آزمایش یکنواختی ، شرایط $f(x) = f(4-x)$ باید برای $x = 0, 1, 2, 3$ برآورده شود. یعنی ، ما نیاز داریم که

$$f(0) = f(4), \quad f(1) = f(3), \quad f(2) = f(2), \quad f(3) = f(1)$$

از آنجا که $f(x)$ خارج از محدوده مورد بررسی است و می تواند هر مقداری باشد ، مقدار $f(0)$ در تست یکنواختی در آزمون اهمیتی ندارد. ما می بینیم که سه شرط بعدی با مقادیر موجود در آرایه برآورده می شوند ، بنابراین ترتیب زوج است. در واقع ، ما نتیجه می گیریم که هر دنباله ۴ نقطه ای باید فرم داشته باشد

$$\{a, b, c, b\}$$

یعنی فقط دومین و آخرین نقاط باید در یک دنباله ۴ نقطه ای برابر باشند. به طور کلی ، وقتی M یک عدد زوج است ، یک توالی زوج $D-1$ دارای این ویژگی است که نقاط مکان های ۰ و $M/2$ دارای مقادیر دلخواه هستند. وقتی M فرد است ، نقطه اول یک دنباله زوج هنوز دلخواه است ، اما بقیه جفت هایی با مقادیر مساوی تشکیل می دهند.

دنباله های فرد دارای ویژگی جالبی هستند که عبارت اول آنها ، $w_{0,0}$ ، همیشه ۰ است ، حقیقتی که مستقیماً از معادله $(4-79)$ زیر دنبال می شود. دنباله ۱ بعدی را در نظر بگیرید

$$g = \{g(0), g(1), g(2), g(3)\} = \{0, -1, 0, 1\}$$

ما می توانیم تأیید کنیم که این یک دنباله غرابت است با توجه به اینکه شرایط موجود در دنباله شرایط $g(x) = -g(4-x)$ for $x = 1, 2, 3$ برآورده می کند. همه کاری که باید برای انجام دهیم $x=0$ برای بررسی وجود $g(0) = 0$. ما سایر اصطلاحات را با استفاده از تعریف بررسی می کنیم. به عنوان مثال ، $g(1) = -g(3)$ هر دنباله فرد ۴ نقطه ای دارای فرم است

$$\{0, -b, 0, b\}$$

به طور کلی ، وقتی M یک عدد زوج است ، یک دنباله فرد ۱ بعدی دارای این ویژگی است که نقاط مکان های ۰ و $M/2$ همیشه صفر هستند. وقتی M فرد است ، عبارت اول هنوز باید ۰ باشد ، اما اصطلاحات باقی مانده جفت هایی با ارزش مساوی اما علائم مخالف را تشکیل می دهند.

بحث قبلی نشان می دهد که زوج و فرد بودن توالی ها به طول دنباله ها نیز بستگی دارد. به عنوان مثال ، ما قبلاً نشان دادیم که دنباله $\{0, -1, 0, 1, 0\}$ فرد است. با این حال ، دنباله $\{0, -1, 0, 1, 0\}$ نه فرد و نه زوج است ، اگرچه ساختار "اساسی" فرد به نظر می رسد. این یک مسئله مهم در تفسیر نتایج DFT است. بعداً در این بخش نشان خواهیم داد که DFT های توابع زوج و فرد دارای ویژگی های بسیار مهمی هستند. بنابراین ، اغلب اینطور است که درک اینکه یک تابع فرد است یا حتی نقش کلیدی در توانایی ما در تفسیر نتایج تصویر بر اساس DFT ها دارد.

همان ملاحظات اساسی در $D-2$ وجود دارد. به عنوان مثال ، آرایه 6×6 $2-D$ با مرکز در محل $(3, 3)$ ، که در شکل ضخیم نشان داده شده است [به یاد داشته باشید ، شمارش را در $(0, 0)$ شروع می کنیم] ،

0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	-2	0	2	0
0	0	-1	0	1	0
0	0	0	0	0	0

عجیب است ، همانطور که می توانید با استفاده از معادله $(4-83)$ ثابت کنید. با این حال ، اضافه کردن یک سطر یا ستون دیگر از ۰ نتیجه ای خواهد داشت که نه فرد و نه زوج است. به طور کلی ، قرار دادن یک آرایه دو بعدی از ابعاد زوج در یک آرایه بزرگتر از صفرها ، همچنین دارای ابعاد مساوی ، تقارن آرایه کوچکتر را حفظ می کند ، مشروط بر اینکه مراکز همخوانی داشته باشند. به طور مشابه ، یک آرایه دو بعدی از ابعاد فرد را می توان بدون تأثیر بر تقارن در آرایه بزرگتری از صفرهای ابعاد فرد وارد کرد. توجه داشته باشید که ساختار داخلی آرایه قبلی یک هسته Sobel است (شکل ۳.۵۰ را ببینید). ما در مثال ۴.۱۵ به این هسته باز می گردیم ، جایی که آن را در یک آرایه بزرگتر از صفرها برای اهداف فیلتر جاسازی می کنیم.

مسلح به مفاهیم قبلی ، می توانیم تعدادی از ویژگیهای مهم متری DMT و عکس آن را مشخص کنیم. خاصیتی که اغلب مورد استفاده قرار می گیرد این است که تبدیل فوریه یک تابع واقعی $f(x, y)$ متقارن مزدوج است:

$$F^*(u, v) = F(-u, -v) \quad (4-85)$$

ما اعتبار این معادله را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$\begin{aligned} F^*(u, v) &= \left[\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \right]^* \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f^*(x, y) e^{j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi([-u]x/M + [-v]y/N)} \\ &= F(-u, -v) \end{aligned}$$

جایی که مرحله سوم از این واقعیت ناشی می شود که $f(x, y)$ واقعی است. از رویکردی مشابه می توان برای اثبات این نکته استفاده کرد که اگر $f(x, y)$ تخیلی باشد، تبدیل فوریه آن متقارن متقارن است. یعنی $F^*(-u, -v) = -F(u, v)$. جدول ۴.۱ تقارن ها و خواص مربوط به DFT را که در پردازش تصویر دیجیتال مفید هستند فهرست می کند. به یاد بیاورید که پیکانهای دوگانه جفت تبدیل فوریه را نشان می دهد. یعنی برای هر سطر در جدول، خواص سمت راست با تبدیل فوریه تابع دارای ویژگی های ذکر شده در سمت چپ، و برعکس، راضی می شوند. به عنوان مثال، ورودی ۵ می گوید: DFT یک تابع واقعی $f(x, y)$ ، که در آن (x, y) با $(-x, -y)$ جایگزین می شود، $F^*(u, v)$ ، مزدوج پیچیده است از $f(x, y)$ DFT برعکس $F^*(u, v)$ is $f(-x, -y)$ است.

جدول ۴.۱ برخی از ویژگی های تقارن DFT دو بعدی و عکس آن. $R(u, v)$ و $i(u, v)$ واقعی و هستند. قسمت های موهومی از $F(u, v)$ ، به ترتیب. استفاده از کلمه پیچیده نشان می دهد که یک تابع دارای قسمت های واقعی و موهومی غیر صفر است.

	دامنه فرکانس	حوزه فضایی
1)	$F^*(u,v) = F(-u,-v)$	$f(x,y)$ واقعی \Rightarrow
2)	$F^*(-u,-v) = -F(u,v)$	f موهومی binary \Leftrightarrow
3)	$R(u,v)$ زوج (u,v) فرد	$f(x,y)$ واقعی \Rightarrow
4)	$R(u,v)$ فرد (u,v) زوج	f موهومی binary \Leftrightarrow
5)	$F^*(u,v)$ پیچیده	$f(-x,-y)$ واقعی \Rightarrow
6)	$F(-u,-v)$ پیچیده	$f(-x,-y)$ پیچیده \Rightarrow
7)	$F^*(-u,-v)$ پیچیده	$f^*(x,y)$ پیچیده \Rightarrow
8)	$F(u,v)$ حقیقی و زوج	$f(x,y)$ حقیقی و زوج \Rightarrow
9)	$F(u,v)$ موهومی و فرد	$f(x,y)$ حقیقی و فرد \Rightarrow
10)	$F(u,v)$ موهومی و زوج	$f(x,y)$ موهومی و زوج \Rightarrow
11)	$F(u,v)$ حقیقی و فرد	$f(x,y)$ موهومی و فرد \Rightarrow
12)	$F(u,v)$ پیچیده و زوج	$f(x,y)$ پیچیده و زوج \Rightarrow
13)	$F(u,v)$ پیچیده و فرد	$f(x,y)$ پیچیده و فرد \Rightarrow

^{۱۸} به یاد بیاورید که x, y, u و v متغیرهای گسسته (صحیح) هستند که x و u در محدوده $[0, M-1]$ ، y و v در محدوده $[0, N-1]$ هستند. گفتن یک تابع پیچیده به این معناست که قسمتهای واقعی و خیالی آن زوج هستند و به طور مشابه برای یک تابع پیچیده عجیب و غریب. مانند قبل، " \Leftrightarrow " نشان دهنده یک جفت تبدیل فوریه است.

مثال ۴.۱۱: تصاویر ۱ بعدی ویژگی ها در جدول ۴.۱

توالی های ۱ بعدی (توابع) و تبدیل آنها در جدول ۴.۲ نمونه های کوتاهی از خواص فهرست شده در جدول ۴.۱ هستند. به عنوان مثال ، در ویژگی ۳ می بینیم که یک تابع واقعی با عناصر $\{1, 2, 3, 4\}$ دارای تبدیل فوریه است که قسمت واقعی آن ، $\{10, -2, -2, -2\}$ زوج و قسمت موهومی آن است ، $\{0, 2, 0, -2\}$ است. خاصیت ۸ به ما می گوید که یک تابع زوج واقعی دارای دگرگونی است که واقعی و حتی یکسان است. ویژگی ۱۲ نشان می دهد که یک تابع حتی پیچیده دارای دگرگونی پیچیده و یکنواخت است. سایر لیست های جدول نیز به شیوه ای مشابه تجزیه و تحلیل شده است.

مثال ۴.۱۲: اثبات برخی از ویژگی های تقارن DFT از جدول ۴.۱

در این مثال ، ما چندین ویژگی در جدول ۴.۱ را اثبات می کنیم تا به شما در آشنایی با دستکاری این ویژگی های مهم کمک کرده و مبنایی برای حل برخی از مشکلات در انتهای فصل ایجاد کنید. با توجه به خواص سمت چپ ، فقط خواص سمت راست را اثبات می کنیم. برعکس به شیوه ای شبیه اثبات هایی که در اینجا ارائه می دهیم ثابت می شود.

ویژگی ۳ را در نظر بگیرید: به طور کلی ، بنابراین می توان آن را به عنوان مجموع یک بخش واقعی و موهومی بیان کرد: $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$ ، سپس $F^*(u, v) = R(u, v) - jI(u, v)$ همچنین

اما ، همانطور که قبلاً برای معادله (۴-۸۵) ، ثابت کردیم. اگر $f(x, y)$

واقعی باشد $F^*(u, v) = F(-u, -v)$ که بر اساس دو معادله قبلی به این معنی است که $R(u, v) = R(-u, -v)$

با توجه به تعاریف موجود در معادله (۴-۸۰) و (۴-۸۱) ، این ثابت می کند که R یک تابع

زوج است و من یک تابع فرد است.

بعد ، ما ویژگی ۸ را اثبات می کنیم اگر $f(x, y)$ واقعی باشد ، از ویژگی ۳ می دانیم که قسمت واقعی $F(u, v)$

(زوج است ، بنابراین برای اثبات ویژگی ۸ تنها باید نشان دهیم که اگر $f(x, y)$ واقعی است و حتی در آن صورت

بخش موهومی $F(u, v) = 0$ است (یعنی F واقعی است). مراحل به شرح زیر است:

جدول ۴.۲ نمونه های یک بعدی برخی از موارد مناسب

Property	$f(x)$	$F(u)$
3	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{(10+0j), (-2+2j), (-2+0j), (-2-2j)\}$
4	$\{1j, 2j, 3j, 4j\}$	$\{(0+2.5j), (.5-.5j), (0-.5j), (-.5-.5j)\}$
8	$\{2, 1, 1, 1\}$	$\{5, 1, 1, 1\}$
9	$\{0, -1, 0, 1\}$	$\{(0+0j), (0+2j), (0+0j), (0-2j)\}$
10	$\{2j, 1j, 1j, 1j\}$	$\{5j, j, j, j\}$
11	$\{0j, -1j, 0j, 1j\}$	$\{0, -2, 0, 2\}$
12	$\{(4+4j), (3+2j), (0+2j), (3+2j)\}$	$\{(10+10j), (4+2j), (-2+2j), (4+2j)\}$
13	$\{(0+0j), (1+1j), (0+0j), (-1-j)\}$	$\{(0+0j), (2-2j), (0+0j), (-2+2j)\}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(x, y)\} &= F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f_r(x, y)] e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)} \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [f_r(x, y)] e^{-j2\pi(ux/M)} e^{-j2\pi(vy/N)} \end{aligned}$$

ما می توانیم آخرین خط این عبارت را از نظر قسمتهای زوج و فرد گسترش دهیم

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\text{even}][\text{even} - \text{jodd}][\text{even} - \text{jodd}] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\text{even}][\text{even} \cdot \text{even} - 2j\text{even} \cdot \text{odd} - \text{odd} \cdot \text{odd}] \\ &= \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\text{even} \cdot \text{even}] - 2j \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\text{even} \cdot \text{odd}] - \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\text{even} \cdot \text{even}] \\ &= \text{real.} \end{aligned}$$

اولین قدم از معادله اوپلرناشی می شود و این واقعیت که \cos و \sin به ترتیب توابع زوج و فرد هستند. ما همچنین از ویژگی ۸ می دانیم که علاوه بر واقعی بودن، $f(x, y)$ یک تابع زوج است. تنها اصطلاح در خط قبل از آخرین شامل اجزای موهومی، عبارت دوم است که طبق معادل ۰ است. (۴-۸۴). بنابراین، اگر $f(x, y)$ واقعی و زوج باشد، $F(u, v)$ واقعی است. همانطور که قبلاً ذکر شد، $F(u, v)$ حتی به این دلیل است که $f(x, y)$ واقعی است. این اثبات را به پایان می رساند. در نهایت، ما اعتبار دارایی ۶ را نشان می دهیم. از تعریف DFT،

$$\mathfrak{F}\{f(-x, -y)\} = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(-x, -y) e^{-j2\pi(ux/M + vy/N)}$$

ما در اینجا تغییری در متغیر ایجاد نمی کنیم. ما $f(-x, -y)$ DFT را ارزیابی می کنیم، بنابراین به سادگی این تابع را مانند معادله دیگر وارد معادله می کنیم. به دلیل تناوب $f(-x, -y) = f(M-x, N-y)$ اگر اکنون $m = M-x$

و $n = N-y$ را تعریف کنیم، پس

$$\mathfrak{F}\{f(-x, -y)\} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{-j2\pi(u[M-m]/M + v[N-n]/N)}$$

برای اینکه خود را متقاعد کنید که جمع بندی ها صحیح است ، یک تغییر ۱ بعدی را امتحان کنید و چند عبارت را با دست بسط دهید. از آنجا که $\exp[-j2\pi(\text{integer})] = 1$ از آن نتیجه می گیرد

$$\Im\{f(-x, -y)\} = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) e^{j2\pi(mu/M + vn/N)} = F(-u, -v)$$

این اثبات را به پایان می رساند.

زاویه چهارگانه طیف و فاز

از آنجا که DFT دو بعدی به طور کلی پیچیده است ، می توان آن را به صورت قطبی بیان کرد:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= R(u, v) + jI(u, v) \\ &= |F(u, v)| e^{j\phi(u, v)} \end{aligned} \quad (4-86)$$

جایی که اندازه

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2} \quad (4-87)$$

زاویه فاز یا طیف فاز است. از بحث در بخش ۴.۲ یادآوری کنید که آرکتان باید با استفاده از یک تابع چهار ضلعی مثل تابع متان (atan2 تصویر ، واقعی) MATLAB محاسبه شود.

طیف فوریه (یا فرکانس) نامیده می شود و

$$\phi(u, v) = \arctan \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] \quad (4-88)$$

زاویه فاز یا طیف فاز است. از بحث در بخش ۴.۲ یادآوری کنید که آرکتان باید با استفاده از یک تابع چهار ضلعی مثل تابع متان (تصویر ، واقعی) MATLAB محاسبه شود.

در نهایت ، طیف قدرت به عنوان تعریف شده است

$$\begin{aligned} P(u, v) &= |F(u, v)|^2 \\ &= R^2(u, v) + I^2(u, v) \end{aligned} \quad (4-89)$$

مانند قبل ، R و I بخشهای واقعی و فرضی $F(u, v)$ هستند و همه محاسبات برای متغیرهای مجزا $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ and $v = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ، بنابراین $|F(u, v)|$, $\phi(u, v)$, and $P(u, v)$

آرایه هایی با اندازه $M * N$ هستند.

تبدیل فوریه یک تابع واقعی متقارن مزدوج است [معادله را ببینید. (۴-۸۵)] ، که نشان می دهد طیف حتی در مورد مبدا تقارن دارد:

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (4-90)$$

زاویه فاز تقارن عجیبی در مورد مبدا نشان می دهد

$$\phi(u, v) = -\phi(-u, -v) \quad (4-91)$$

تقریب می شود از معادله (۴-۶۷) که

$$F(0,0) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

که نشان می دهد مدت فرکانس صفر DFT متناسب با میانگین $f(x, y)$ است. به این معنا که،

$$\begin{aligned} F(0,0) &= MN \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) \\ &= MN \bar{f} \end{aligned} \quad (4-92)$$

جایی که f (a scalar) مقدار متوسط $f(x, y)$ را نشان می دهد. سپس،

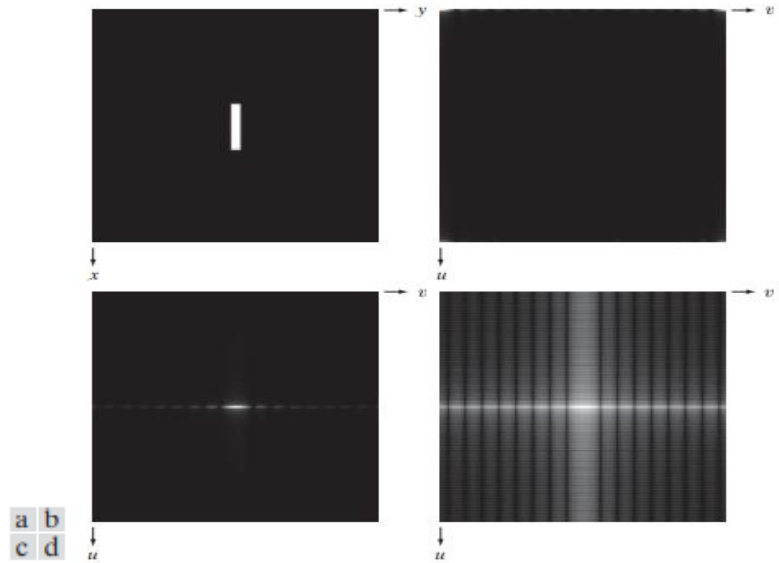
$$|F(0,0)| = MN |\bar{f}| \quad (4-93)$$

از آنجا که ثابت تناسب MN معمولاً بزرگ است، $F(0,0)$ معمولاً برابر است. بزرگترین جزء طیف با عاملی که می تواند چندین مرتبه بزرگتر از اصطلاحات دیگر باشد. از آنجا که اجزای فرکانسی u و v در مبدا صفر هستند، $F(0,0)$ گاهی اوقات جزء dc تبدیل نامیده می شود. این اصطلاح شناسی از مهندسی برق است، جایی که "dc" به معنای جریان مستقیم (یعنی جریان با فرکانس صفر) است.

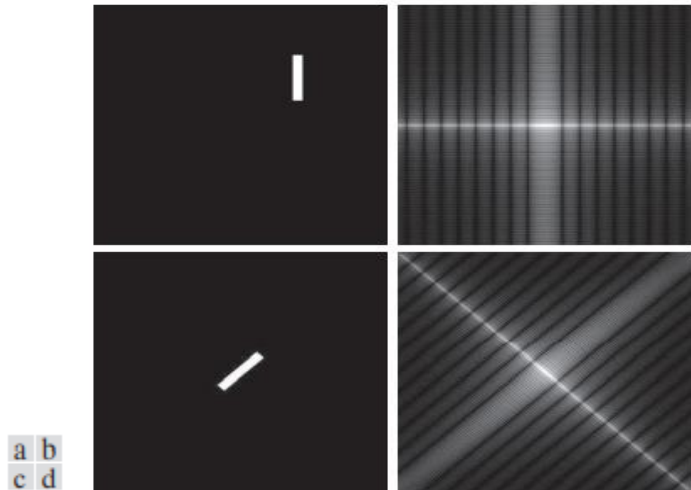
مثال ۴.۱۳: طیف یک مستطیل.

شکل ۴.۲۳ (الف) تصویری از یک مستطیل و شکل ۴.۲۳ (ب) طیف آن را نشان می دهد، که مقادیر آن در محدوده $[0, 255]$ مقیاس بندی شده و به شکل تصویر نمایش داده شده است. منشاء هر دو حوزه مکانی و فرکانسی در بالا سمت چپ است. این کنوانسیون سیستم مختصات راست دست است که در شکل ۲.۱۹ تعریف شده است. دو مورد در شکل ۴.۲۳ (ب) آشکار است. همانطور که انتظار می رفت، ناحیه اطراف مبدأ تبدیل دارای بالاترین مقادیر است (و بنابراین در تصویر روشن تر به نظر می رسد). با این حال، توجه داشته باشید که چهار گوشه طیف دارای مقادیر یکسانی هستند. دلیل آن ویژگی تناوبی است که در قسمت قبل مورد بحث قرار گرفت. برای متمرکز کردن طیف، ما به سادگی تصویر را در $(a)^{x+y} (-1)^{x+y}$ ضرب می کنیم، قبل از محاسبه DFT، همانطور که در رابطه نشان داده شده است. (۴-۷۶). شکل ۴.۲۳ (ج) نتیجه را نشان می دهد، که به وضوح قابل تصور است (به تقارن در مورد نقطه مرکزی توجه کنید). از آنجا که اصطلاح dc بر مقادیر طیف غالب است، محدوده دینامیکی شدت های دیگر در تصویر نمایش داده شده فشرده می شود. برای آشکار ساختن این جزئیات، ما از تبدیل ورود تعریف شده در معادله استفاده کردیم. (۳-۴) با $c = 1$ شکل ۴.۲۳ (d) نمایش $\log(1 + |F(u,v)|)$ را نشان می دهد. افزایش تفسیر جزئیات مشهود است. بیشتر طیف های نشان داده شده در این فصل و فصل های بعدی به این ترتیب مقیاس بندی می شوند.

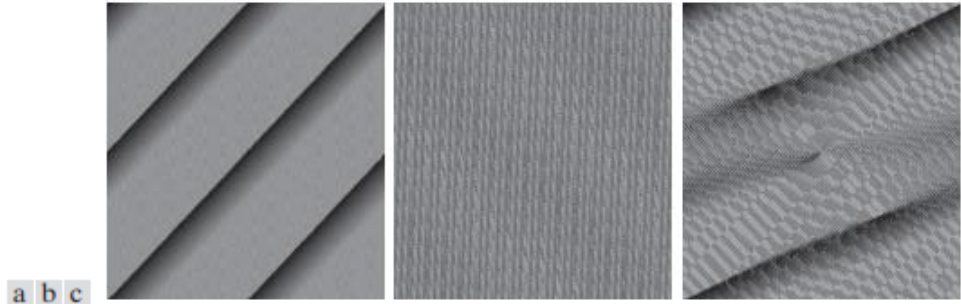
برگرفته از معادله (۴-۷۲) و (۴-۷۳) است. که طیف نسبت به تبدیل تصویر حساس نیست (مقدار مطلق عبارت نمایی ۱ است)، اما با همان زاویه یک تصویر چرخشی می چرخد. شکل ۴.۲۴ این ویژگی ها را نشان می دهد. طیف شکل ۴.۲۴ (b) با طیف شکل ۴.۲۳ (d) یکسان است.



شکل ۴.۲۳ (الف) تصویر (ب) طیف ، مناطق کوچک و روشن را در چهار گوشه نشان می دهد (برای دیدن آنها باید با دقت نگاه کنید). (ج) طیف مرکز (د) نتیجه پس از تبدیل سیاهه‌های مربوط. عبورهای صفر از طیف در جهت عمودی نزدیکتر هستند زیرا مستطیل (a) طولانی تر در آن جهت است. کنوانسیون مختصات دست راست که در کتاب استفاده می شود ، منشاء حوزه های مکانی و فرکانسی را در بالا سمت چپ قرار می دهد (شکل ۲.۱۹ را ببینید).



شکل ۴.۲۴ (الف) مستطیل شکل ۴.۲۳ (الف) تبدیل شده است. (ب) طیف مربوطه. (ج) مستطیل چرخان. (د) طیف مربوطه. طیف مستطیل تبدیل شده با طیف تصویر اصلی در شکل ۴.۲۳ (a) یکسان است.



شکل ۴.۲۵ تصاویر زاویه فاز از (الف) متمرکز ، (ب) تبدیل شده ، و (ج) مستطیل های چرخان واضح است که تصاویر در شکل ها نشان داده شده است. ۴.۲۳ (a) و ۴.۲۴ (a) متفاوت هستند بنابراین ، اگر طیف فوریه آنها یکسان باشد ، بر اساس معادله (۴-۸۶) ، زاویه فاز آنها باید متفاوت باشد. شکل ۴.۲۵ این را تأیید می کند. شکل های ۴.۲۵ (a) و (b) آرایه های زاویه فاز (به صورت تصاویر نشان داده شده) از DFT های شکل ها هستند. ۴.۲۳ (الف) و ۴.۲۴ (الف). به عدم شباهت بین تصاویر فاز توجه کنید ، علیرغم این واقعیت که تنها تفاوت بین تصاویر مربوط به آنها تبدیل ساده است. به طور کلی ، تجزیه و تحلیل بصری تصاویر با زاویه فاز اطلاعات شهودی کمی به دست می دهد. به عنوان مثال ، به دلیل جهت ۴۵ درجه آن ، می توان به طور شهودی انتظار داشت که زاویه فاز در شکل ۴.۲۵ (a) باید به جای تصویر در شکل ۴.۲۳ (a) با تصویر چرخیده در شکل ۴.۲۴ (c) مطابقت داشته باشد. (در واقع ، همانطور که شکل ۴.۲۵ (ج) نشان می دهد ، زاویه فاز تصویر چرخانده دارای جهت گیری قوی است که بسیار کمتر از ۴۵ درجه است.

اجزای طیف DFT دامنه سینوسی ها را که با هم ترکیب می شوند ، تصویری را تعیین می کند. در هر فرکانس معین در DFT تصویر ، دامنه بزرگ دلالت بر برجستگی بیشتر سینوسی از آن فرکانس در تصویر دارد. برعکس ، یک دامنه کوچک نشان می دهد که مقدار کمی از آن سینوئید در تصویر وجود دارد. اگرچه ، همانطور که شکل ۴.۲۵ نشان می دهد ، سهم اجزای فاز کمتر شهودی است ، اما به همان اندازه مهم است. فاز اندازه گیری جابجایی سینوسهای مختلف با توجه به منشا آنها است. بنابراین ، در حالی که اندازه ۲ DFT بعدی یک آرایه است که اجزای آن شدت تصویر را تعیین می کند ، فاز مربوطه آرایه ای از زوایا است که بسیاری از اطلاعات مربوط به محل قرارگیری اجسام قابل تشخیص در تصویر را حمل می کند. مثال زیر این ایده ها را با جزئیات بیشتری نشان می دهد.

مثال ۴.۱۴: مشارکت طیف و زاویه فاز در شکل گیری تصویر.

شکل ۴.۲۶ (ب) به عنوان یک تصویر آرایه زاویه فاز ، $F(u, v)$ ، از DFT شکل ۴.۲۶ (a) را نشان می دهد که با استفاده از معادله محاسبه شده است. (۴-۸۸). اگرچه هیچ جزئیاتی در این آرایه وجود ندارد که ما را با تجزیه و تحلیل تصویری همراهی کند و آن را با ساختار تصویر مربوطه مرتبط سازد ، اما اطلاعات موجود در این آرایه در

تعیین ویژگی های شکل تصویر بسیار مهم است. برای نشان دادن این موضوع ، ما تصویر پسر را فقط با استفاده از زاویه فاز آن بازسازی کردیم. بازسازی شامل محاسبه DFT معکوس معادله است. (۴-۸۶) با استفاده از $F(u, v)$ ، اما تنظیم $F(u, v) = 1$ شکل ۴.۲۶ (c) نتیجه را نشان می دهد (نتیجه اصلی کنتراست بسیار کمتری نسبت به آنچه نشان داده شد داشت ؛ برای بیرون آوردن جزئیات در این بحث مهم است ، ما نتیجه را با استفاده از معیارهای (۲-۳۱) و (۲-۳۲) مقیاس بندی کردیم ، و سپس آن را با استفاده از هموارسازی هیستوگرام افزایش دادیم. با این حال ، حتی پس از افزایش ، آشکار است که بسیاری از اطلاعات شدت از بین رفته است (به یاد داشته باشید ، این اطلاعات توسط طیف منتقل می شوند ، که ما در بازسازی از آنها استفاده نکردیم). با این حال ، ویژگی های شکل در ۴.۲۶ (ج) بدون شک از شکل ۴.۲۶ (الف) است. این به وضوح اهمیت زاویه فاز را در تعیین ویژگی های شکل در یک تصویر نشان می دهد.

شکل ۴.۲۶ (d) با محاسبه معادله معکوس DFT بدست آمده است. (۴-۸۶) ، اما فقط از طیف استفاده می شود. این بدان معناست که عبارت نمایی را روی ۱ تنظیم می کند ، که به نوبه خود به معنی تنظیم زاویه فاز بر روی ۰ است. نتیجه غیر منتظره نیست. این فقط شامل اطلاعات شدید است ، و اصطلاح dc غالب ترین است. هیچ اطلاعات شکل در تصویر وجود ندارد زیرا فاز روی صفر تنظیم شده است.

در نهایت ، شکل ها. ۴.۲۶ (e) و (f) باز هم تسلط فاز را در تعیین محتوای ویژگی فضایی یک تصویر نشان می دهد. شکل ۴.۲۶ (e) با محاسبه DFT معکوس معادله به دست آمد. (۴-۸۶) با استفاده از طیف مستطیل شکل ۴.۲۳ (a) و زاویه فاز از تصویر پسر. ویژگیهای پسر به وضوح بر این نتیجه غالب است. برعکس ، مستطیل بر شکل ۴.۲۶ (f) غالب است ، که با استفاده از طیف تصویر پسر و زاویه فاز مستطیل محاسبه شده است.



شکل ۴.۲۶ (الف) تصویر پسر. (ب) زاویه فاز. (ج) تصویر پسر فقط با استفاده از زاویه فاز آن بازسازی شده است (همه ویژگی های شکل وجود دارد، اما اطلاعات شدت وجود ندارد زیرا طیف در بازسازی استفاده نشده است). (د) بازسازی تصویر پسر تنها با استفاده از طیف آن. (ه) تصویر پسر با استفاده از زاویه فاز و طیف مستطیل در شکل ۴.۲۳ (الف) بازسازی شده است. (و) تصویر مستطیلی با استفاده از فاز آن و طیف تصویر پسر بازسازی شده است

نظریه کانولوشن گسسته ۲ بعدی

گسترش معادله (۴-۴۸) به دو متغیر در عبارت زیر برای $D-2$ نتیجه می شود
کانولوشن دایره ای:

$$(f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x-m, y-n) \quad (4-94)$$

برای $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ and $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$ همانطور که در معادله (۴-۴۸)، معادله (۴-۹۴)

یک دوره از دنباله متناوب دو بعدی را ارائه می دهد. قضیه کانولوشن دوبعدی به دست می آید

$$(f \star h)(x, y) \Leftrightarrow (F \bullet H)(u, v) \quad (4-95)$$

و برعکس

$$(f \bullet h)(x, y) \Leftrightarrow \frac{1}{MN} (F \star H)(u, v) \quad (4-96)$$

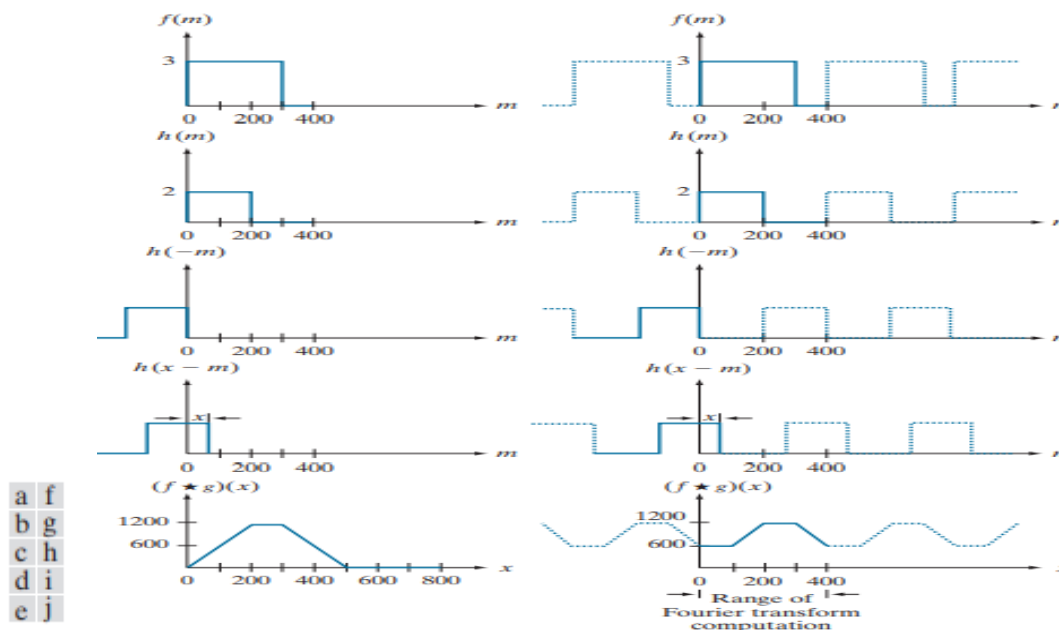
جایی که F و H به ترتیب تبدیل فوریه f و h هستند که با استفاده از معادله (۴-۶۷) بدست می آیند. مانند قبل، پیکان دوگانه نشان می دهد که سمت چپ و راست عبارات یک جفت تبدیل فوریه را تشکیل می دهند. علاقه

ما به بقیه این فصل در معادله (۴-۹۵)، است. که بیان می کند که تبدیل فوریه از پیچیدگی فضایی f و h ، حاصل تبدیل آنها است.

به طور مشابه، DFT معکوس محصول (u, v) $(F \bullet H)$ بازده $(f \star h)(x)$ را دارد. معادله (۴-۹۵) پایه و اساس فیلترینگ خطی در حوزه فرکانس است و همانطور که در بخش ۴.۷ توضیح خواهیم داد، اساس همه تکنیک های فیلترینگ مورد بحث در این فصل است. همانطور که از فصل ۳ به خاطر می آورید، پیچیدگی فضایی پایه و اساس فیلترینگ فضایی است، بنابراین معادله (۴-۹۵) همان پیوندی است که معادلات بین فیلترینگ فضایی و حوزه فرکانسی را مشخص می کند، همانطور که قبلاً چندین بار اشاره کردیم. در نهایت، ما به نتایج تجمع در حوزه فضایی علاقه داریم، جایی که تصاویر را تجزیه و تحلیل می کنیم. با این حال، قضیه کانولوشن به ما می گوید که ما دو روش برای محاسبه کانولوشن فضایی دو تابع داریم. ما می توانیم آن را مستقیماً در حوزه فضایی با معادله (۳-۳۵)، انجام دهیم. با استفاده از روش توصیف شده در بخش ۳.۴ یا، مطابق با معادله (۴-۹۵)، ما می توانیم تبدیل فوریه هر تابع را محاسبه کنیم، تبدیل ها را ضرب کرده و تبدیل معکوس فوریه را محاسبه کنیم. از آنجا که ما با کمیت های گسسته سروکار داریم، محاسبه تبدیل فوریه با استفاده از الگوریتم DFT انجام می شود. این به طور خودکار بر متناوب بودن دلالت دارد، به این معنی که وقتی ما تبدیل فوریه معکوس حاصل از دو تبدیل را بدست می آوریم، یک کانولوشن دایره ای (یعنی متناوب) به دست می آوریم که یک دوره آن توسط معادله (۴-۹۴) داده می شود. سوال این است: در چه شرایطی رویکرد فضایی مستقیم و روش تبدیل فوریه معکوس نتیجه یکسانی خواهد داشت؟ ما ابتدا با نگاهی به یک مثال ۱ بعدی و سپس بسط نتایج به دو متغیر، به پاسخ می رسیم. ستون سمت چپ شکل ۴.۲۷ پیوند دو تابع f و h را با استفاده از معادل $D-1$ معادله (۳-۳۵)، پیاده سازی می کند. که چون دو تابع اندازه یکسانی دارند، به صورت زیر نوشته می شود

$$(f \star h)(x) = \sum_{m=0}^{399} f(x)h(x-m)$$

از توضیحات ما در مورد شکلها یادآوری کنید. ۳.۲۹ و ۳.۳۰ که روش شامل (۱) چرخش (چرخاندن) h به میزان ۱۸۰ درجه سانتیگراد است، [شکل ۴.۲۷ (ج) را ببینید]، (۲) تبدیل عملکرد به دست آمده به مقدار $[x]$ شکل [۴.۲۷ (d)] و (۳) برای هر مقدار x تبدیل، کل محاسبه محصولات را در سمت راست معادله محاسبه می کند. از نظر شکل ۴.۲۷، این بدان معناست که عملکرد در شکل ۴.۲۷ (a) را با تابع شکل ۴.۲۷ (d) برای هر مقدار x ضرب کنید. جابجایی x در تمام مقادیر مورد نیاز برای کشیدن کامل h در عرض f قرار دارد. شکل ۴.۲۷ (e) تجمع این دو عملکرد را نشان می دهد. همانطور که می دانید، کانولوشن تابعی از متغیر جابجایی x است و محدوده x مورد نیاز در این مثال برای کشیدن کامل h از f از ۰ تا ۷۹۹ است.



شکل ۴.۲۷ ستون سمت چپ: کانولوشن فضایی با معادله (۳-۳۵)، محاسبه می شود. با استفاده از رویکرد مورد بحث در بخش ۳.۴. ستون راست: جمع دایره ای. خط جامد در (j) نتیجه ای است که با استفاده از DFT یا معادله (۴-۴۸) آن به دست می آوریم. این با استفاده از لایه گذاری صفر می توان نتیجه اشتباه را برطرف کرد. اگر از DFT و قضیه کانولوشن برای به دست آوردن نتیجه ای مشابه در ستون سمت چپ شکل ۴.۲۷ استفاده کنیم، باید دوره تناوبی را که در عبارت DFT به ارث رسیده است در نظر بگیریم. این معادل پیچاندن دو تابع متناوب در شکل است. ۴.۲۷ (f) و (g) یعنی همانطور که معادله (۴-۴۶) و (۴-۴۷) نشان می دهد، عملکردهایی که تغییرات آنها به صورت متناوب دلالت دارد. روش کانولوشن همان است که ما در مورد آن صحبت کردیم، اما این دو عملکرد در حال حاضر متناوب هستند. ادامه این دو عملکرد مانند پاراگراف قبلی نتیجه را در شکل ۴.۲۷ (j) به دست می آورد، که بدیهی است نادرست است. از آنجا که ما دو تابع متناوب را در حال تطبیق هستیم، خود کانولوشن متناوب است. نزدیکی دوره ها در شکل ۴.۲۷ به گونه ای است که با یکدیگر تداخل ایجاد می کنند که معمولاً به آن خطای دور زدن گفته می شود. با توجه به قضیه کانولوشن، اگر DFT دو تابع ۴۰۰ نقطه ای f و h را محاسبه می کردیم، دو تبدیل را ضرب می کردیم و سپس DFT معکوس را محاسبه می کردیم، بخش اشتباه ۴۰۰ نقطه ای از کانولوشن دوره های را بدست می آوریم. در شکل ۴.۲۷ (j) بصورت یک خط جامد نشان داده شده است (به یاد داشته باشید که محدوده DFT، $u = 0, 1, 2, \dots, M-1$ است). این نیز نتیجه ای است که در صورت استفاده از معادله (۴-۴۸) به دست می آوریم. [معادله D-۱ معادله (۴-۹۴)] برای محاسبه یک دوره از کانولوشن دایره ای. خوشبختانه، راه حل مشکل خطای فراگیر ساده است. دو تابع $f(x)$ و $h(x)$ را که به ترتیب از نمونه های A و B تشکیل شده اند در نظر بگیرید. می توان نشان داد (بریگهام [۱۹۸۸]) که اگر صرفاً را به هر دو تابع اضافه کنیم تا طول آنها یکسان باشد، با P نشان داده می شود، با انتخاب

$$P \geq A + B - 1 \quad (4-97)$$

در مثال ما ، هر تابع ۴۰۰ امتیاز دارد ، بنابراین حداقل مقداری که می توانیم از آن استفاده کنیم ۹۹۹۹ است که به این معنی است که ۳۹۹ صفر را به لبه انتهایی هر تابع اضافه می کنیم. این روش همانطور که در بخش ۳.۴ بحث کردیم ، پر کردن صفر نامیده می شود. به عنوان یک تمرین ، باید خود را متقاعد کنید که اگر دوره های توابع در شکل ۱ ۴.۲۷ (f) و (g) باشد.

با افزودن حداقل ۳۹۹ صفر به هر دوره افزایش یافت ، در نتیجه یک دور متناوب ایجاد می شود که در آن هر دوره با نتیجه صحیح شکل ۴.۲۷ (e) یکسان است. استفاده از DFT از طریق قضیه کانولوشن منجر به عملکرد مکانی ۷۹۹ نقطه ای مشابه شکل ۴.۲۷ (e) می شود. بنابراین ، نتیجه گیری این است که برای به دست آوردن همان نتیجه کانولوشنی بین نمایش مستقیم " رویکرد معادله کانولوشن در فصل ۳ و روش "DFT" ، توابع در مورد دوم باید قبل از محاسبه تغییرات خود ، پر شوند. تجسم یک مثال مشابه در D-۲ دشوارتر است ، اما در مورد خطای دور زدن و نیاز به افزودن صفر به توابع به یک نتیجه می رسیم. بگذارید $f(x, y)$ و $h(x, y)$ به ترتیب دو آرایه تصویر با اندازه های $A * B$ و $C * D$ پیکسل باشند. از خطای محاصره در کانولوشن دایره ای آنها می توان اجتناب کرد.

$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A-1 \text{ and } 0 \leq y \leq B-1 \\ 0 & A \leq x \leq P \text{ or } B \leq y \leq Q \end{cases} \quad (4-98)$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \leq x \leq C-1 \text{ and } 0 \leq y \leq D-1 \\ 0 & C \leq x \leq P \text{ or } D \leq y \leq Q \end{cases} \quad (4-99)$$

$$P \geq A + C - 1 \quad (4-100)$$

$$Q \geq B + D - 1 \quad (4-101)$$

اندازه های پد شده نتیجه $P * Q$ است. اگر هر دو آرایه از یک اندازه باشند ، $M * N$ ، پس ما نیاز داریم که $P \geq 2M - 1$ and $Q \geq 2N - 1$ به عنوان یک قاعده ، الگوریتم های DFT تمایل دارند سریعتر اجرا شوند با آرایه هایی از اندازه یکسان ، بنابراین خوب است که P و Q را به عنوان کوچکترین اعداد صحیح که معادلات قبلی را برآورده می کنند ، انتخاب کنید. اگر اندازه دو آرایه یکسان باشد ، این بدان معناست که P و Q به صورت زیر انتخاب شده اند:

$$P = 2M \quad (4-102)$$

$$Q = 2N \quad (4-103)$$

شکل ۴.۳۱ در بخش بعدی، اثرات خطای همپوشانی را بر روی تصاویر نشان می‌دهد. دو تابع در شکل‌ها ۴.۲۷ (a) و (b) به راحتی قبل از پایان بازه نمونه برداری صفر می‌شوند. اگر یک یا هر دو توابع در انتهای فاصله صفر نباشند، هنگامی که صفرها به تابع اضافه می‌شوند، یک ناپیوستگی ایجاد می‌شود تا خطای دور خط حذف شود. این شبیه به ضرب یک تابع در یک جعبه است، که در حوزه فرکانس به معنای پیچیدگی تبدیل اصلی با یک تابع sinc است (مثال ۴.۱ را ببینید). این به نوبه خود نشت فرکانسی ایجاد می‌کند که ناشی از اجزای فرکانس بالای عملکرد سینک است. نشت یک اثر مسدود کننده بر روی تصاویر ایجاد می‌کند. اگرچه نشتی هرگز به طور کامل برطرف نمی‌شود، اما می‌توان با ضرب تابع نمونه برداری شده در یک تابع دیگر که در هر دو انتهای رکورد نمونه برداری شده، هموار به صفر نزدیک می‌شود، به طور قابل توجهی کاهش داد. این ایده برای تضعیف تغییرات شدید (و در نتیجه اجزای فرکانس بالا) جعبه است. این رویکرد، که به آن پنجره یا آپودایز می‌گویند، در هنگام بازسازی تصویر (مانند تعریف با کیفیت بالا) ملاحظات مهمی است. گرافیک) مورد نظر است.

خلاصه ای از خواص تبدیل دو بعدی چهارگانه

جدول ۴.۳ تعاریف اصلی DFT معرفی شده در این فصل را خلاصه می‌کند. ما در مورد ویژگی تفکیک پذیری در بخش ۴.۱۱ بحث خواهیم کرد، جایی که ما همچنین نحوه بدست آوردن DFT معکوس با استفاده از الگوریتم تبدیل جلو را نشان می‌دهیم. همبستگی به تفصیل در فصل ۱۲ مورد بحث قرار می‌گیرد.

جدول ۴.۴ برخی از جفت های مهم DFT را خلاصه می‌کند. اگرچه تمرکز ما بر توابع گسسته است، دو ورودی آخر جدول عبارتند از جفت های تبدیل فوریه که فقط برای متغیرهای پیوسته قابل استخراج هستند (به استفاده از یادداشت متغیر پیوسته توجه کنید). ما آنها را در اینجا شامل می‌شویم زیرا با تفسیر مناسب، در پردازش تصویر دیجیتال کاملاً مفید هستند. از جفت تمایز می‌توان برای بدست آوردن معادل دامنه فرکانسی لاپلاسیایی تعریف شده در معادله استفاده کرد. (۳-۵۰) (به مسئله ۴.۵۲ مراجعه کنید). جفت گاوسی در بخش ۴.۷ مورد بحث قرار گرفته است. جداول ۴.۱، ۴.۳ و ۴.۴ خلاصه ای از خواص مفید هنگام کار با DFT را ارائه می‌دهد. بسیاری از این ویژگیها عناصر کلیدی در توسعه مواد در بقیه این فصل هستند و برخی از آنها در فصلهای بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

جدول ۴.۳ خلاصه ای از تعاریف DFT و عبارات مربوطه.

	نام	عبارات
1)	تبدیل فوریه گسسته (DFT) از $f(x, y)$	$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$
2)	تبدیل فوریه معکوس (IDFT) از $F(u, v)$	$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$
3)	طیف	$ F(u, v) = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2} \quad R = \text{Real}(F); I = \text{Imag}(F)$
4)	زاویه ی فاز	$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$
5)	بازنمایی قطبی	$F(u, v) = F(u, v) e^{j\phi(u, v)}$
6)	طیف قدرت	$P(u, v) = F(u, v) ^2$
7)	مقدار متوسط	$\bar{f} = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) = \frac{1}{MN} F(0, 0)$
8)	دوره ای k_1 و k_2 اعداد صحیح هستند	$F(u, v) = F(u + k_1 M, v) = F(u, v + k_2 N)$ $= F(u + k_1, v + k_2 N)$ $f(x, y) = f(x + k_1 M, y) = f(x, y + k_2 N)$ $= f(x + k_1, y + k_2 N)$
9)	کانولوشن	$(f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) h(x - m, y - n)$
10)	همبستگی	$(f \star h)(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f^*(m, n) h(x + m, y + n)$
11)	تفکیک پذیری	<p>DFT دو بعدی را می توان با محاسبه تبدیل های 1-D DFT در امتداد سطرها (ستون ها) تصویر محاسبه کرد. توسط 1-D در امتداد ستون (ردیف) نتیجه تبدیل می شود. به بخش 4/11 مراجعه کنید.</p>
12)	بدست آوردن IDFT با استفاده از الگوریتم DFT	$MNf^*(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$ <p>این معادله نشان می دهد که ورودی $F^*(u, v)$ در یک الگوریتم که تبدیل جلو (سمت راست معادله بالا) را محاسبه می کند ، $MNf^*(x, y)$ را بدست می آورد (۰). گرفتن مزدوج پیچیده و تقسیم بر MN معکوس مطلوب را می دهد. به بخش 4/11 مراجعه کنید.</p>

جدول ۴.۴ خلاصه ای از جفت های DFT عبارات بسته در ۱۲ و ۱۳ فقط برای متغیرهای پیوسته معتبر هستند. آنها می توانند با متغیرهای گسسته با نمونه برداری از عبارات پیوسته مورد استفاده قرار گیرند

نام	DFT Pairs
1) خواص تقارن	See Table 4.1
2) خطی بودن	$af_1(x, y) + bf_2(x, y) \Leftrightarrow aF_1(u, v) + bF_2(u, v)$
3) ترجمه (عمومی)	$f(x, y)e^{j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$ $f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v)e^{-j2\pi(u_0x/M + v_0y/N)}$
4) ترجمه به مرکز مستطیل فرکانس ، (،)	$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$ $f(x - M/2, y - N/2) \Leftrightarrow F(u, v)(-1)^{x+y}$
5) چرخش	$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \tan^{-1}(y/x) \quad \omega = \sqrt{u^2 + v^2} \quad \varphi = \tan^{-1}(v/u)$
6) قضیه کانولوشن	$f \star h(x, y) \Leftrightarrow (F \star H)(u, v)$ $(f \star h)(x, y) \Leftrightarrow (1/MN)[(F \star H)(u, v)]$
7) قضیه همبستگی	$(f \star h)(x, y) \Leftrightarrow (F \star H)(u, v)$ $(f \star h)(x, y) \Leftrightarrow (1/MN)[(F \star H)(u, v)]$
8) تکانه گسسته	$\delta(x, y) \Leftrightarrow 1$ $1 \Leftrightarrow MN\delta(u, v)$
9) مستطیل	$\text{rec}[a, b] \Leftrightarrow ab \frac{\sin(\pi ua)}{(\pi ua)} \frac{\sin(\pi vb)}{(\pi vb)} e^{-j\pi(ua + vb)}$
10) سینوس	$\sin(2\pi u_0x/M + 2\pi v_0y/N) \Leftrightarrow \frac{jMN}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) - \delta(u - u_0, v - v_0)]$
11) کسینوس	$\cos(2\pi u_0x/M + 2\pi v_0y/N) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(u + u_0, v + v_0) + \delta(u - u_0, v - v_0)]$
زوجهای تبدیل فوریه زیر فقط برای متغیرهای پیوسته مشتق می شوند ، که قبلاً با متغیرهای فضایی t و z و برای متغیرهای فرکانس با n و m نشان داده شده اند. از این نتایج می توان برای نمونه گیری از فرم های پیوسته برای کارهای DFT استفاده کرد.	
12) نامتمایز (عبارات سمت راست فرض می کنند که $f(\pm\infty, \pm\infty) = 0$.	$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(t, z) \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$ $\frac{\partial^m f(t, z)}{\partial t^m} \Leftrightarrow (j2\pi\mu)^m F(\mu, \nu); \quad \frac{\partial^n f(t, z)}{\partial z^n} \Leftrightarrow (j2\pi\nu)^n F(\mu, \nu)$
13) گوسی	$A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(t^2+z^2)} \Leftrightarrow Ae^{-(\mu^2 + \nu^2)/2\sigma^2} \quad (A \text{ is a constant})$

۴.۷ مبانی فیلترینگ در حوزه فرکانس

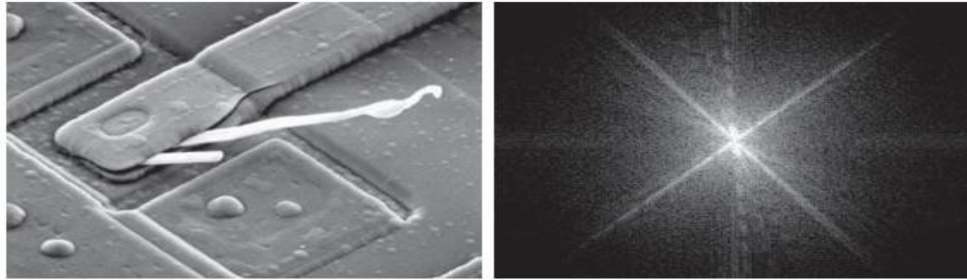
در این بخش، ما زمینه را برای همه روشهای فیلترینگ مورد بحث در بقیه فصل قرار می دهیم.

ویژگی های اضافی دامنه فرکانس

ما با مشاهده در معادله (۴-۶۷) شروع می کنیم. که هر عبارت $F(u, v)$ شامل تمام مقادیر $f(x, y)$ است که با مقادیر اصطلاحات نمایی تغییر یافته است. بنابراین، به استثنای موارد پیش پا افتاده، معمولاً نمی توان بین اجزای خاص یک تصویر و تغییر آن ارتباط مستقیم برقرار کرد. با این حال، برخی از اظهارات کلی در مورد رابطه بین اجزای فرکانس تبدیل فوریه و ویژگی های فضایی یک تصویر قابل بیان است. به عنوان مثال، از آنجا که فرکانس مستقیماً با میزان تغییرات فضایی ارتباط دارد، ارتباط دادن فرکانس ها در تبدیل فوریه با الگوهای تغییرات شدت در تصویر به طور شهودی دشوار نیست. در بخش ۴.۶ نشان دادیم که کندترین فرکانس متغیر متفاوت متناسب با شدت متوسط تصویر است. همانطور که از مبدأ تبدیل فاصله می گیریم، فرکانسهای پایین مربوط به اجزای شدت یک تصویر است که به آرامی متغیر است. به عنوان مثال، در تصویری از یک اتاق، این ممکن است به تغییرات شدت هموار در دیوارها و کف پاسخ دهد. با دورتر شدن از مبدأ، فرکانس های بالاتر شروع به مطابقت با تغییرات سریعتر و سریعتر در تصویر می کنند. اینها لبه های اجسام و سایر اجزای یک تصویر هستند که با تغییرات شدید ناگهانی مشخص می شوند. تکنیک های فیلترینگ در حوزه فرکانس مبتنی بر تغییر تبدیل فوریه برای دستیابی به یک هدف خاص و سپس محاسبه DFT معکوس است تا ما را به حوزه فضایی بازگرداند، همانطور که در بخش ۲.۶ معرفی شده است. تقریب می شود از معادله (۴-۸۷) که دو جزء از تبدیل که ما به آن دسترسی داریم، اندازه تبدیل (طیف) و زاویه فاز هستند. در بخش ۴.۶ آموختیم که تجزیه و تحلیل بصری جزء فاز به طور کلی چندان مفید نیست. طیف، با این حال، دستورالعمل های مفیدی را در مورد ویژگی های شدت ناخالص تصویری که طیف از آن ایجاد شده است، ارائه می دهد. برای مثال، شکل ۴.۲۸ (a) را در نظر بگیرید، که یک تصویر میکروسکوپ الکترونی روبشی از یک مدار مجتمع است که تقریباً ۲۵۰۰ بار ثبت شده است.

گذشته از ساختار جالب خود دستگاه، ما در این تصویر به دو ویژگی اصلی اشاره می کنیم: لبه های محکم که تقریباً ۴۵ درجه پوند اجرا می کنند و دو برجستگی سفید رنگ اکسیدی ناشی از خرابی ناشی از حرارت. طیف فوریه در شکل ۴.۲۸ (ب) اجزای برجسته را در امتداد $45^* * 45$ جهت نشان می دهد که با لبه هایی که ذکر شد مطابقت دارد. با نگاهی دقیق به محور عمودی شکل ۴.۲۸ (ب)، یک جزء عمودی از تغییر را می بینیم که خارج از محور است، کمی به سمت چپ این جزء توسط لبه های برآمدگی اکسید ایجاد شده است. توجه کنید که چگونه زاویه جزء فرکانس نسبت به محور عمودی با شیب (نسبت به محور افقی تصویر) عنصر سفید بلند مطابقت دارد. همچنین به صفرهای جزء فرکانس عمودی، مربوط به دهانه عمودی باریک برجستگی های اکسید توجه

کنید. اینها معمولاً مربوط به انواع ارتباطاتی است که می توانیم به طور کلی بین حوزه های فراوانی و فضایی ایجاد کنیم. همانطور که بعداً در این فصل نشان خواهیم داد ، حتی این نوع ارتباطات ناخالص ، همراه با روابطی که قبلاً بین محتوای فرکانس و میزان تغییر سطوح شدت در تصویر ذکر شد ، می تواند به نتایج بسیار مفیدی منجر شود. ما در بخش ۴.۸ اثرات تغییر دامنه های فرکانسی مختلف را در تغییر شکل ۴.۲۸ (الف) نشان خواهیم داد.



a b

شکل ۴.۲۸ (الف) تصویر SEM از یک مدار مجتمع آسیب دیده. (ب) طیف فوریه از (الف). (تصویر اصلی از دکتر J. M. Hudak ، موسسه بروکهاوس برای تحقیقات مواد ، دانشگاه مک مستر ، همیلتون ، انتاریو ، کانادا گرفته شده است.)

مبانی فیلتر کردن دامنه فرکانس

فیلتر کردن در حوزه فرکانس شامل تغییر تبدیل فوریه یک تصویر و سپس محاسبه تبدیل معکوس برای بدست آوردن بازنمایی حوزه فضایی نتیجه پردازش شده است. بنابراین ، با توجه به یک تصویر دیجیتالی (پرسیده) ، $f(x, y)$ ، با اندازه پیکسل $P * Q$ ، معادله فیلترینگ اصلی که ما به آن علاقه داریم به شکل زیر است:

$$g(x, y) = \text{Real}\{\mathcal{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]\} \quad (4-104)$$

جایی که \mathcal{F}^{-1} IDFT است ، $F(u, v)$ DFT تصویر ورودی است ، $f(x, y)$ ، $H(u, v)$ یک تابع تبدیل فیلتر است (که ما اغلب آن را فقط فیلتر یا عملکرد فیلتر می نامیم) ، و $g(x, y)$ تصویر فیلتر شده (خروجی) است. توابع F ، H و g آرایه هایی با اندازه $P * Q$ هستند ، همان تصویر ورودی پرسیده. محصول $H(u, v)F(u, v)$ (با استفاده از ضرب عنصری شکل می گیرد ، همانطور که در بخش ۲.۶ تعریف شده است. تابع تبدیل فیلتر تبدیل تصویر ورودی را تغییر می دهد تا خروجی پردازش شده $g(x, y)$ را به دست آورد. وظیفه تعیین $H(u, v)$ (با استفاده از توابع متقارن در مرکز آنها به میزان قابل توجهی ساده شده است ، که مستلزم آن است که $F(u, v)$ نیز در مرکز قرار گیرد. همانطور که در بخش ۴.۶ توضیح داده شد ، این امر با ضرب تصویر ورودی در $(-1)^{x+y}$ قبل از محاسبه تبدیل آن انجام می شود.^{۱۹}

^{۱۹} برخی از پیاده سازی های نرم افزاری DFT دو بعدی (به عنوان مثال ، MATLAB تغییر شکل را متمرکز نمی کند. این بدان معناست که توابع فیلتر باید مطابق با فرمت داده مشابه تبدیل غیرمرکز (یعنی با منبع در بالا سمت چپ) مطابقت داشته باشند. نتیجه خالص این است که توابع انتقال فیلتر تولید و

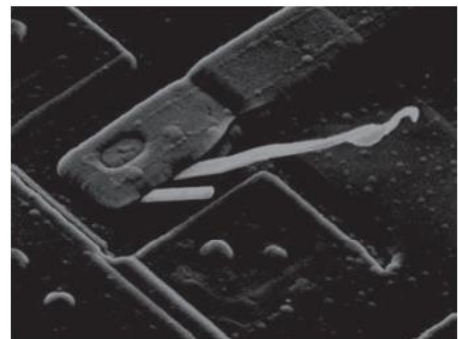
ما در حال حاضر در موقعیتی هستیم که فیلترینگ را با جزئیات در نظر بگیریم. یکی از ساده ترین توابع تبدیل فیلتر که می توانیم بسازیم ، یک تابع $H(u, v)$ است که در مرکز تبدیل (مرکز) 0 و در جاهای دیگر 1 است. این فیلتر اصطلاح dc را رد می کند و هنگامی که ما محصول $F(u, v)H(u, v)$ را تشکیل می دهیم ، تمام اصطلاحات دیگر $F(u, v)$ را رد می کند (بدون تغییر). ما از ویژگی 7 در جدول 4.3 می دانیم که اصطلاح dc مسئول متوسط شدت یک تصویر است ، بنابراین صفر قرار دادن آن شدت متوسط تصویر خروجی را به صفر می رساند. شکل 4.29 نتیجه این عملیات را با استفاده از معادله نشان می دهد. ($4-104$). همانطور که انتظار می رفت ، تصویر بسیار تیره تر شد. به طور متوسط صفر دلالت بر وجود شدت های منفی دارد. بنابراین ، اگرچه این اصل را نشان می دهد ، شکل 4.29 نمایشی واقعی از اصل نیست ، زیرا همه شدت های منفی توسط صفحه نمایش بریده شده (روی 0 تنظیم شده است).

همانطور که قبلاً اشاره شد ، فرکانسهای پایین در تبدیل به اجزای متغیر با شدت متغیر در تصویر مربوط می شود ، مانند دیوارهای یک اتاق یا آسمان بدون ابر در یک فضای باز. از سوی دیگر ، فرکانس های بالا ناشی از تغییرات شدید در شدت ، مانند لبه ها و نویز است. بنابراین ، ما انتظار داریم که یک عملکرد $H(u, v)$ که فرکانس های بالا را در حین عبور از فرکانس های پایین تضعیف می کند (که فیلتر پایین گذر نامیده می شود ، همانطور که قبلاً ذکر شد) باعث تار شدن تصویر شود ، در حالی که یک فیلتر با ویژگی مخالف (که یک بالاگذر نامیده می شود). فیلتر) باعث افزایش جزئیات می شود ، اما باعث کاهش کنتراست در تصویر می شود. شکل 4.30 این اثرات را نشان می دهد. به عنوان مثال ، ستون اول این تصویر یک عملکرد تبدیل فیلتر پایین گذر و تصویر فیلتر مربوطه را نشان می دهد. ستون دوم نتایج مشابهی را برای یک فیلتر بالاگذر نشان می دهد. به شباهت بین شکل ها توجه کنید. 4.30 (e) و شکل 4.29 . دلیل این امر این است که عملکرد فیلتر بالاگذر نشان داده شده است اصطلاح dc را حذف می کند ، و در نتیجه همان اثر اساسی ایجاد شده در شکل 4.29 را نشان می دهد. همانطور که در ستون سوم نشان داده شده است ، افزودن یک عدد ثابت کوچک به فیلتر تأثیری در وضوح تصویر ندارد ، اما از حذف اصطلاح dc جلوگیری می کند و بنابراین باعث حفظ تنالیده می شود. معادله ($4-104$) شامل محصول دو تابع در حوزه فرکانس است که با قضیه کانولوشن ، متضمن انحراف در حوزه فضایی است. ما از بحث در بخش 4.6 می دانیم که اگر توابع مورد نظر پر نشده باشند ، می توانیم انتظار خطای دور زدن را داشته باشیم. شکل 4.31 نشان می دهد که هنگام اعمال معادله ($4-104$) چه اتفاقی می افتد.

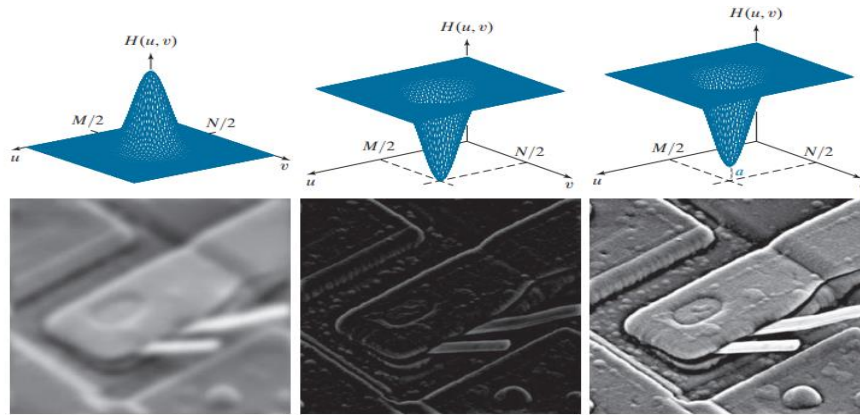
بدون بالشتک. شکل 4.31 (الف) یک تصویر ساده را نشان می دهد ، و شکل 4.31 (ب) نتیجه فیلتر کردن گذرگاه پایین با فیلتر پایین گذر گاوسی از شکل نشان داده شده در شکل 4.30 (الف) است. همانطور که انتظار می رفت ، تصویر تار است. با این حال ، تار شدن یکنواخت نیست. لبه سفید بالا تار است ، اما کناره ها اینطور نیستند.

نمایش آنها مشکل تر است. ما در بحث های خود از متمرکزسازی برای کمک به تجسم استفاده می کنیم ، که در ایجاد درک واضح مفاهیم فیلتر بسیار مهم است. به شرط حفظ قوام می توان از هر دو روش در عمل استفاده کرد.

مطابق معادله (۴-۹۸) و (۴-۹۹) ، تصویر ورودی را با صفر قرار دهید. قبل از اعمال معادله. (۴-۱۰۴) منجر به تصویر فیلتر شده در شکل ۴.۳۱ (ج) شد. این نتیجه همانطور که انتظار می رفت ، با یک خط تیره یکنواخت ناشی از پر کردن صفر (برای توضیح این اثر به شکل ۳.۳۳ مراجعه کنید). شکل ۴.۳۲ دلیل اختلاف بین شکل ها ۴.۳۱ (ب) و (ج) را نشان می دهد. ناحیه خط کشی شده در شکل ۴.۳۲ (a) مربوط به تصویر شکل ۴.۳۱ (a) است. کپی های دیگر تصویر به دلیل تناوب ضمنی تصویر (و تبدیل آن) به طور ضمنی هنگام استفاده از DFT است ، همانطور که در بخش ۴.۶ توضیح داده شده است. تصور کنید تصویری فضایی از فیلتر تار (یعنی کرنل فضایی مربوطه) با این تصویر پیچیده می شود. هنگامی که هسته در بالای تصویر خط کشی متمرکز شود ، بخشی از تصویر و همچنین قسمتی از پایین تصویر متناوب بلافاصله بالای آن را شامل می شود. هنگامی که یک منطقه تاریک و روشن در زیر فیلتر قرار می گیرد ، نتیجه خروجی خاکستری میانی و تار می شود. با این حال ، هنگامی که هسته در سمت راست بالای تصویر متمرکز شود ، فقط مناطق نوری در تصویر و ناحیه راست آن را شامل می شود. از آنجا که میانگین یک مقدار ثابت همان مقدار است ، فیلترینگ هیچ تاثیری در این زمینه نخواهد داشت و نتیجه را در شکل ۴.۳۱ (ب) نشان می دهد. مانند تصویر ۴.۳۲ (ب) نشان می دهد که تصویر را با ۰ صفر می کند. ترکیب هسته تار با "موزایک" شکل ۴.۳۲ (ب) نتیجه صحیح را در شکل ۴.۳۱ (ج) نشان می دهد. از این مثال می بینید که عدم قرار دادن تصویر قبل از فیلتر کردن می تواند منجر به نتایج غیر منتظره شود.



شکل ۴.۲۹ نتیجه فیلتر کردن تصویر در شکل ۴.۲۸ (a) با عملکرد تبدیل فیلتر که عبارت صفر dc ، $F(P/2, Q/2)$ در مرکز تبدیل فوریه ، در حالی که همه شرایط تبدیل دیگر بدون تغییر باقی می ماند



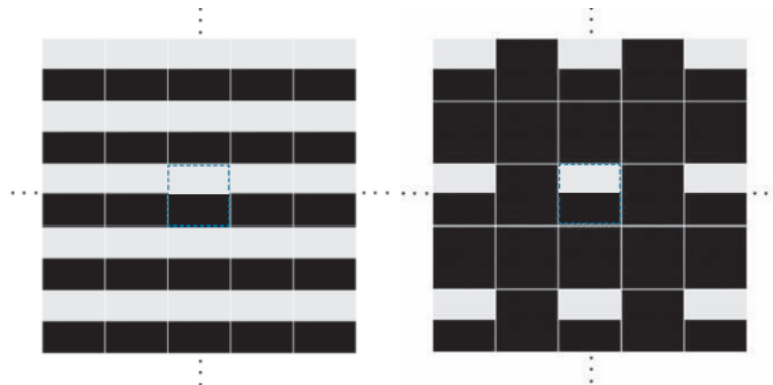
a b c
d e f

تصویر ۴.۳۰ ردیف بالا: توابع تبدیل فیلتر دامنه فرکانس (الف) یک فیلتر پایین گذر ، (ب) یک فیلتر بالا گذر ، و (ج) یک فیلتر بالاگذر افست. ردیف پایین: تصاویر فیلتر متناظر که با استفاده از معادله به دست آمده اند. (۴-۱۰۴). جبران در $a = 0.85$ و ارتفاع $H(u, v)$ است. (f) را با شکل ۴.۲۸ (a) مقایسه کنید.



a b c

شکل ۴.۳۱ (الف) یک تصویر ساده. (ب) نتیجه تار شدن با یک فیلتر گذرگاه گاوسی بدون لایه گذاری. (ج) نتیجه تصفیه پایین گذر با روکش صفر. لبه های عمودی (b) و (c) را مقایسه کنید.



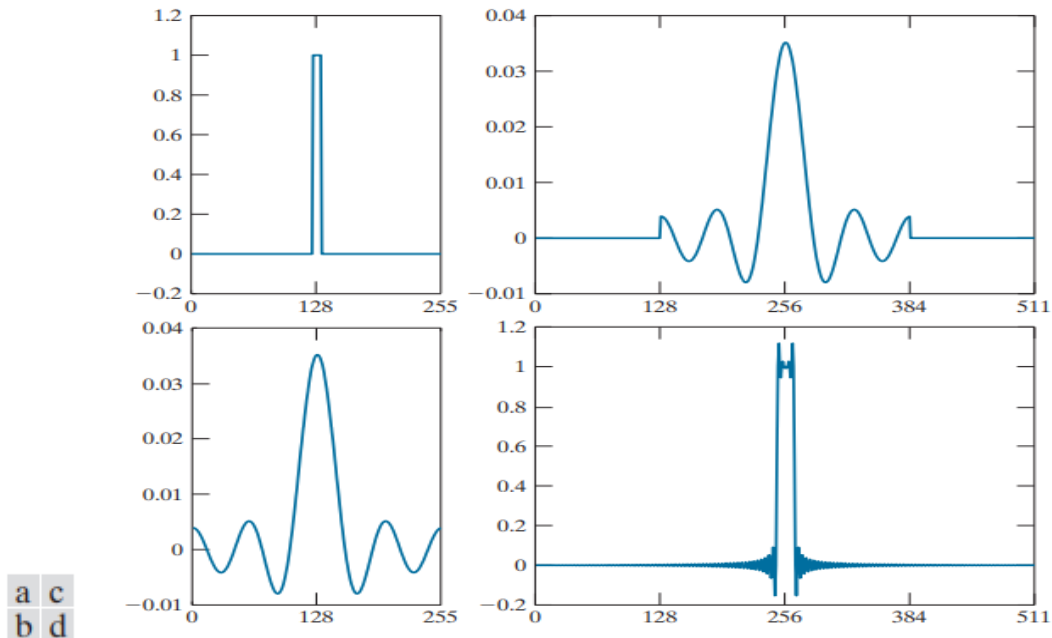
a b

شکل ۴.۳۲ (الف) تناوب تصویر بدون پر کردن تصویر. (ب) متناوب پس از پر کردن با ۰ (سیاه). مناطق بریده شده در مرکز با تصویر شکل ۴.۳۱ (الف) مطابقت دارد. هنگام استفاده از DFT، تناوب ذاتی است. (خطوط سفید نازک در هر دو تصویر برای وضوح روی هم قرار گرفته اند؛ آنها بخشی از داده ها نیستند.)

تا اینجا، بحث بر روی پر کردن تصویر ورودی متمرکز شده است. با این حال، معادل (۴-۱۰۴) همچنین شامل یک عملکرد تبدیل فیلتر است که می تواند در حوزه فضایی یا حوزه فرکانس مشخص شود. اما پر کردن در حوزه فضایی انجام می شود، که سوال مهمی را در مورد رابطه بین روکش فضایی و عملکردهای فیلتری که به طور مستقیم در حوزه فرکانس مشخص شده است، مطرح می کند.

منطقی است که به این نتیجه برسیم که نحوه مدیریت پر کردن یک تابع تبدیل دامنه فرکانسی این است که تابع را در اندازه یک تصویر غیر پیاده شده بسازیم، IDFT تابع را بدست آوریم تا نمای فضایی مربوطه را بدست آوریم، پد آن نمایش در حوزه فضایی، و سپس DFT آن را برای بازگشت به حوزه فرکانس محاسبه کنید. مثال ۱ بعدی در شکل ۴.۳۳ مشکلات این روش را نشان می دهد.

شکل ۴.۳۳ (الف) عملکرد یک بعدی تبدیل ایده آل فیلتر پایین گذر ایده آل در حوزه فرکانس را نشان می دهد. تابع واقعی است و حتی تقارن دارد، بنابراین از ویژگی ۸ در جدول ۴.۱ می دانیم که IDFT آن نیز واقعی و متقارن خواهد بود. شکل ۴.۳۳ (ب) نتیجه ضرب عناصر تابع تبدیل در $(-1)^u$ و محاسبه IDFT آن برای بدست آوردن هسته فیلتر فضایی مربوطه را نشان می دهد. نتیجه در شکل ۴.۳۳ (ب) نشان داده شده است. در این تصویر مشخص است که افراط و تفریط این عملکرد مکانی صفر نیست. همانطور که شکل ۴.۳۳ (c) نشان می دهد، تابع Zero-padding دو ناپیوستگی ایجاد می کند. برای بازگشت به حوزه فرکانس، DFT رو به جلو تابع فضایی و پر شده را محاسبه می کنیم. همانطور که در شکل ۴.۳۳ (d) نشان داده شده است، ناپیوستگی ها در عملکرد لایه گذاری باعث زنگ زدن در دامنه فرکانسی آن می شود.



شکل ۴.۳۳ (الف) عملکرد تبدیل فیلتر در حوزه فرکانس (مرکز) مشخص شده است. (ب) نمایش فضایی (هسته فیلتر) که با محاسبه (a) IDFT بدست می آید. (ج) نتیجه پر کردن (ب) تا دو برابر طول آن (به ناپیوستگی ها توجه کنید). (د) فیلتر مربوطه در حوزه فرکانسی که با محاسبه (c) DFT بدست می آید. به زنگ ناشی از ناپیوستگی های (ج) توجه کنید. قسمت (ب) تصویر زیر (a)، و (د) زیر (c) است.

نتایج قبلی به ما می گوید که ما نمی توانیم نمایش فضایی یک تابع تبدیل دامنه فرکانسی را به منظور اجتناب از خطای دور زدن، قرار دهیم. هدف ما این است که بدون نیاز به مسائل مربوط به کوتاه کردن، با اشکال فیلتر مشخص در حوزه فرکانس کار کنیم. یک گزینه دیگر این است که تصاویر را پد کرده و سپس عملکرد تبدیل فیلتر مورد نظر را مستقیماً در حوزه فرکانس ایجاد کنید، این عملکرد هم اندازه تصاویر پد شده است (به یاد داشته باشید که هنگام استفاده از DFT اندازه و عملکردهای تبدیل فیلتر باید یک اندازه باشند) به البته، این امر منجر به خطای دور زدن می شود زیرا از هیچ پد برای عملکرد تبدیل فیلتر استفاده نمی شود، اما این خطا به طور قابل توجهی با جداسازی ارائه شده با پر کردن تصویر کاهش می یابد و ترجیح داده می شود تا زنگ زدن. عملکردهای تبدیل هموار (مانند عملکردهای شکل ۴.۳۰) حتی کمتر مشکل دارند. بنابراین، به طور خاص، رویکردی که در این فصل دنبال خواهیم کرد این است که تصاویر را در اندازه $P * Q$ قرار دهیم و توابع تبدیل فیلتر با همان ابعاد را مستقیماً در حوزه فرکانس ایجاد کنیم. همانطور که قبلاً توضیح داده شد، P و Q توسط معادلات (۴-۱۰۰) و (۴-۱۰۱) داده شده است.

این بخش را با تجزیه و تحلیل زاویه فاز تصاویر فیلتر شده به پایان می بریم. ما می توانیم DFT را بر اساس قسمت‌های واقعی و موهومی آن بیان کنیم: $F(u, v) = R(u, v) + jI(u, v)$ سپس معادله (۴-۱۰۴) تبدیل می شود

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[H(u, v)R(u, v) + jH(u, v)I(u, v)] \quad (4-105)$$

زاویه فاز به عنوان مستطیل نسبت نسبت‌های موهومی و واقعی یک عدد مختلط محاسبه می شود [به معادله مراجعه کنید. (۴-۸۸)]. از آنجا که $H(u, v)$ هر دو R و I را ضرب می کند، وقتی این نسبت ایجاد شود، لغو می شود. فیلترهایی که بر قسمت‌های واقعی و موهومی به طور یکسان تأثیر می گذارند و بنابراین بر زاویه فاز تأثیری ندارند، به طور مناسب فیلترهای تغییر مرحله صفر فاز نامیده می شوند. اینها تنها انواع فیلترهایی هستند که در این فصل مورد بررسی قرار گرفته اند. اهمیت زاویه فاز در تعیین ساختار فضایی یک تصویر به وضوح در شکل ۴.۲۶ نشان داده شده است. بنابراین، نباید تعجب کرد که حتی تغییرات کوچک در زاویه فاز می تواند تأثیرات چشمگیر (و معمولاً نامطلوب) بر خروجی فیلتر شده داشته باشد.

شکل های ۴.۳۴ (b) و (c) تأثیر تغییر آرایه زاویه فاز DFT شکل ۴.۳۴ (a) را نشان می دهد (اصطلاح $F(u, v)$ در هر دو حالت تغییر نکرده است). شکل ۴.۳۴ (b) با ضرب زاویه فاز، $F(u, v)$ ، در معادله بدست آمده است. (۴-۸۶) توسط ۱- و محاسبه IDFT نتیجه خالص بازتاب هر پیکسل در تصویر در مورد هر دو محور مختصات است. شکل ۴.۳۴ (ج) با ضرب مدت فاز در ۰.۲۵ و محاسبه IDFT به دست آمد. حتی تغییر مقیاس باعث می شود تصویر تقریباً غیرقابل تشخیص باشد. این دو نتیجه مزیت استفاده از فیلترهای حوزه فرکانس را نشان می دهد که زاویه فاز را تغییر نمی دهند.

خلاصه مراحل برای فیلترینگ در حوزه فرکانس

فرایند فیلترینگ در حوزه فرکانس را می توان به شرح زیر خلاصه کرد:

۱. با توجه به یک تصویر ورودی $f(x, y)$ به اندازه $M * N$ ، اندازه های بالایی P و Q را بدست آورید

با استفاده از معادلات (۴-۱۰۲) و (۴-۱۰۳)؛ یعنی $P = 2M$ و $Q = 2N$

۲. با استفاده از پد صفر، آینه یا تکرار، یک $f_p(x, y)$ با اندازه $P * Q$ با اندازه $P * Q$ شکل دهید (برای مقایسه روشهای پر کردن به شکل ۳.۳۹ مراجعه کنید).^{۲۰}

۳. $f_p(x, y)$ by $(-1)^{x+y}$ ضرب کنید تا تبدیل فوریه را بر روی مستطیل فرکانس $P * Q$ متمرکز کنید.

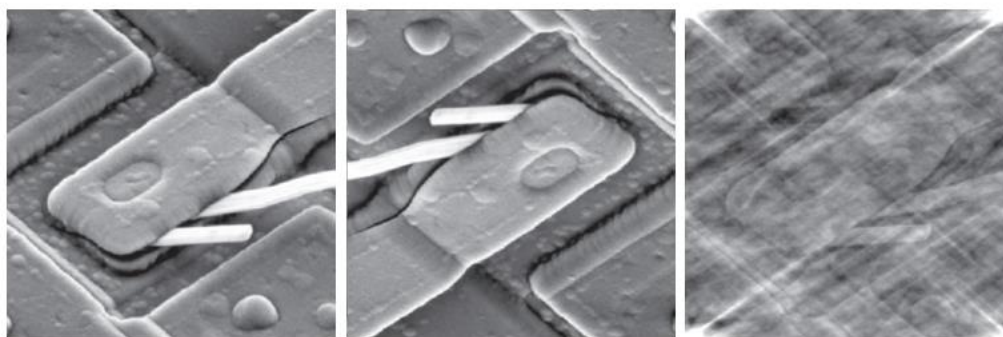
۴. DFT، $F(u, v)$ ، تصویر مرحله ۳ را محاسبه کنید.

^{۲۰} گاهی اوقات هنگام انجام آزمایش های "سریع" برای بدست آوردن ایده عملکرد فیلتر، یا هنگام تلاش برای تعیین روابط کمی بین ویژگی های فضایی و تاثیر آنها بر اجزای حوزه فرکانس، به ویژه در نوار و فیلتر، از پر کردن صرف نظر می کنیم، که بعداً در بخش ۴.۱۰ توضیح داده شد. در فصل ۵

۵. یک تابع تبدیل فیلتر واقعی، متقارن، $H(u, v)$ ، با اندازه $P * Q$ با مرکز $(P/2, Q/2)$ بسازید.
 ۶. با استفاده از ضرب عنصری، محصول $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$ را تشکیل دهید. یعنی

$G(i, k) = H(i, k)F(i, k)$ for $i = 0, 1, 2, \dots, M - 1$ and $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.
 ۷. با محاسبه DFT $G(u, v)$ تصویر فیلتر شده (به اندازه $P * Q$ بدست آورید:

$$g_p(x, y) = (\text{real}[\mathcal{F}^{-1}\{G(u, v)\}])(-1)^{x+y}$$

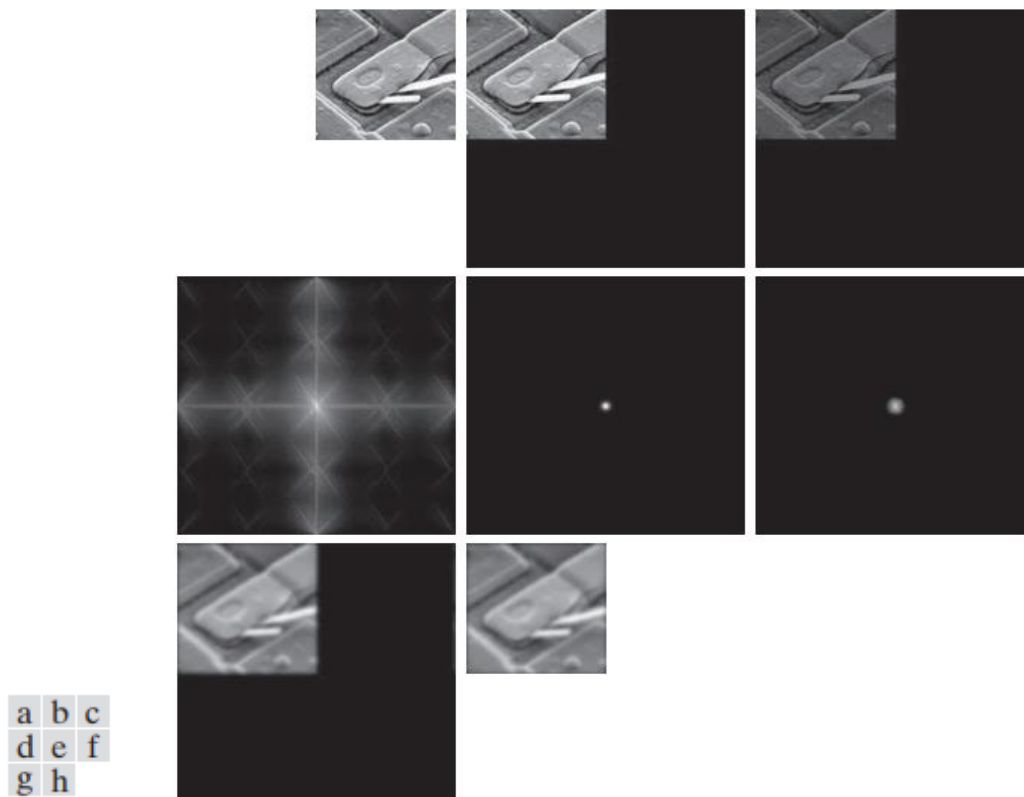


a b c

شکل ۴.۳۴ (الف) تصویر اصلی. (ب) تصویری که از ضرب زاویه فاز در -1 در معادله بدست می آید. (۴-۸۶) و محاسبه (ج) IDFT حاصل ضرب زاویه فاز در 0.25 و محاسبه IDFT مقدار تبدیل، $F(u, v)$ ، مورد استفاده در (b) و (c) یکسان بود.

۸. با استخراج ناحیه $M * N$ از بالا، ربع چهارم سمت چپ $g_p(x, y)$ نتیجه نهایی نهایی، $g(x, y)$ ، با اندازه تصویر ورودی را بدست آورید.

ما در مورد ساخت عملکردهای تبدیل فیلتر (مرحله ۵) در بخشهای بعدی این فصل بحث خواهیم کرد. از نظر تئوری، IDFT در مرحله ۷ باید واقعی باشد زیرا $f(x, y)$ واقعی و $H(u, v)$ واقعی و متقارن است. با این حال، اصطلاحات پیچیده انگلی در IDFT ناشی از نادرستی محاسباتی غیر معمول نیستند. با در نظر گرفتن بخش واقعی نتیجه، مراقب آن باشید. ضرب در $(-1)^{x+y}$ ضرب در این مرحله را در مرحله ۳ لغو می کند.



شکل ۴.۳۵ (الف) یک $M * N$ تصویر ، f ، (ب) تصویر پر شده ، fp اندازه $P * Q$ (ج) نتیجه ضرب fp در $(-1)^{x+y}$ ، طیف F تابع ، H ، اندازه $P * Q$ (و) طیف محصول HF (g) تصویر gp ، قسمت واقعی HF IDFT ، ضرب شده توسط $(-1)^{x+y}$ (ح) نتیجه نهایی ، g ، با استخراج اولین سطرهای M و ستون های gp به دست می آید. شکل ۴.۳۵ مراحل قبلی را با استفاده از پد صفر نشان می دهد. افسانه تصویر منبع هر تصویر را توضیح می دهد. در صورت بزرگ شدن ، شکل ۴.۳۵ (ج) نقاط سیاه رنگی را نشان می دهد که در تصویر چیده شده اند زیرا شدت منفی ناشی از ضرب $(-1)^{x+y}$ در صفحه ۰ در صفحه بریده می شود. در شکل ۴.۳۵ (ح) حاشیه تاریک مشخصه تصاویر با فیلتر پایین گذر که با استفاده از پد صفر به دست آمده است توجه کنید.

پاسخگویی بین فیلترینگ در حوزه های فضایی و فرکانسی

همانطور که چندین بار قبلاً ذکر شد ، ارتباط بین فیلترینگ در حوزه های فضایی و فرکانسی ، قضیه کانولوشن است. قبلاً در این بخش ، ما فیلترینگ را در حوزه فرکانس به عنوان محصول عنصری عملکرد تبدیل فیلتر ، H (u, v) و $F(u, v)$ ، تبدیل فوریه تصویر ورودی تعریف کردیم. با توجه به $H(u, v)$ ، فرض کنید که می خواهیم هسته معادل آن را در حوزه فضایی پیدا کنیم. اگر $f(x, y) = \delta(x, y)$ را بگذاریم ، از جدول ۴.۴ به دست می آید که $F(u, v) = 1$. از معادله (۴-۱۰۴) ، خروجی فیلتر شده $\mathcal{F}^{-1}\{H(u, v)\}$ است. این عبارت به عنوان تبدیل معکوس از تابع تبدیل فیلتر دامنه فرکانس ، که هسته مربوطه در حوزه فضایی است.

برعکس ، از یک تحلیل مشابه و قضیه کانولوشن چنین نتیجه می شود که با توجه به یک هسته فیلتر فضایی ، ما با در نظر گرفتن تبدیل فوریه پیشرو از هسته ، نمایانگر حوزه فرکانسی آن هستیم. بنابراین ، دو فیلتر یک جفت تبدیل فوریه را تشکیل می دهند:

$$h(x,y) \Leftrightarrow H(u,v) \quad (4-106)$$

جایی که $h(x,y)$ هسته فضایی است. از آنجا که این هسته را می توان از پاسخ یک فیلتر حوزه فرکانس به یک ضربه بدست آورد ، گاهی اوقات $h(x,y)$ را پاسخ ضربه $H(u,v)$ می نامند. همچنین ، زیرا همه مقادیر در یک پیاده سازی مجزا از معادله (۴-۱۰۶) متناهی هستند ، چنین فیلترهایی را فیلترهای پاسخ ضربه محدود (FIR) می نامند. اینها تنها انواع فیلترهای فضایی خطی هستند که در این کتاب در نظر گرفته شده اند. ما در مورد کانولوشن فضایی در بخش ۳.۴ و اجرای آن در معادله (۳-۳۵) ، بحث کردیم. که شامل پیچیدن توابع در اندازه های مختلف بود. هنگامی که ما از DFT برای محاسبه تغییراتی که در قضیه کانولوشن استفاده می شود ، استفاده می کنیم ، دلالت بر این دارد که ما توابع متناوب با همان اندازه را در حال پیچیدن هستیم ، همانطور که در شکل ۴.۲۷ توضیح داده شده است. برای به همین دلیل ، همانطور که قبلاً توضیح داده شد ، معادله (۴-۹۴) به عنوان کانولوشن دایره ای نامیده می شود.

هنگامی که سرعت محاسبه ، هزینه و اندازه پارامترهای مهمی هستند ، تغییرات فضایی با استفاده از معادله (۳-۳۵) انجام می شود. برای هسته های کوچک که از سخت افزار و/یا نرم افزار سخت افزار استفاده می کنند ، مناسب است ، همانطور که در بخش ۴.۱ توضیح داده شده است. با این حال ، هنگام کار با ماشینهای عمومی ، روشهای حوزه فرکانسی که در آنها DFT با استفاده از الگوریتم تبدیل سریع فوریه (FFT) محاسبه می شود ، بسته به اندازه هسته های مورد استفاده ، صدها برابر سریعتر از استفاده از کانولوشن فضایی است. در شکل ۴.۲ مشاهده کردید. FFT و مزایای محاسباتی آن را در بخش ۴.۱۱ بحث خواهیم کرد.

مفاهیم فیلتر در حوزه فرکانس بصری تر هستند و طراحی فیلتر اغلب در آنجا آسان تر است. یکی از راههای استفاده از خواص هر دو حوزه ، تعیین فیلتر در حوزه فرکانس ، محاسبه IDFT آن و سپس استفاده از خواص هسته فضایی اندازه کامل به عنوان راهنمای ساخت هسته های کوچکتر است. این مورد در ادامه نشان داده می شود (در نظر داشته باشید که تبدیل فوریه و عکس آن فرایندهای خطی هستند (به مسأله ۴.۲۴ مراجعه کنید) ، بنابراین بحث به فیلترهای خطی محدود می شود). در مثال ۴.۱۵ ، ما عکس را نشان می دهیم ، که در آن یک هسته فضایی داده شده است ، و نمایش دامنه فرکانس در اندازه کامل آن را بدست می آوریم. این روش برای تجزیه و تحلیل رفتار هسته های فضایی کوچک در حوزه فرکانس مفید است.

فیلترهای حوزه فرکانس را می توان به عنوان راهنما برای تعیین ضرایب برخی از هسته های کوچکی که در فصل ۳ مورد بحث قرار گرفتیم ، مورد استفاده قرار داد. فیلترهای مبتنی بر عملکردهای گوس از اهمیت ویژه ای برخوردارند ، زیرا همانطور که در جدول ۴.۴ ذکر شده است ، هر دو تبدیل فوریه جلو و معکوس یک تابع گوسی

توابع واقعی گاوسی هستند. ما برای نشان دادن اصول اساسی، بحث را به ۱ بعدی محدود می‌کنیم. توابع تبدیل گاوسی دو بعدی بعداً در این فصل مورد بحث قرار می‌گیرد.

اجازه دهید $H(u)$ تابع تبدیل گاوسی دامنه فرکانس $D-1$ را نشان دهد

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma^2} \quad (4-107)$$

که در آن S انحراف استاندارد منحنی گاوسی است. هسته در فضایی دامنه با استفاده از DFT معکوس $H(u)$ بدست می‌آید (به مسئله ۴.۴۸ مراجعه کنید):

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma A e^{-2\pi^2\sigma^2 x^2} \quad (4-108)$$

این دو معادله به دو دلیل مهم هستند: (۱) آنها یک جفت تبدیل فوریه هستند که هر دو جزء آن گاوسی و واقعی هستند. این امر تجزیه و تحلیل را تسهیل می‌کند زیرا لازم نیست که به اعداد مختلط توجه داشته باشیم. علاوه بر این، منحنی‌های گاوسی بصری هستند و به راحتی قابل دستکاری هستند. (۲) عملکردها متقابلاً رفتار می‌کنند.

وقتی $H(u)$ دارای پروفایل وسیع (مقدار بزرگ S) است، $h(x)$ مشخصات باریکی دارد و برعکس. در واقع، با نزدیک شدن S به بی‌نهایت، $H(u)$ به یک عملکرد ثابت و $h(x)$ به سمت یک انگیزه، که به معنی فیلتر نکردن در هر دو حوزه است، گرایش دارد.

در شکل ۴.۳۶ (الف) و (ب) نمودارهایی از یک تابع تبدیل فیلتر پایین‌گذر گاوس در حوزه فرکانس و عملکرد مربوطه در حوزه فضایی نشان داده شده است. فرض کنید ما می‌خواهیم از شکل $h(x)$ در شکل ۴.۳۶ (b) به عنوان راهنمایی برای تعیین ضرایب یک هسته کوچک در حوزه فضایی استفاده کنیم. ویژگی اصلی عملکرد در شکل ۴.۳۶ (b) این است که همه مقادیر آن مثبت هستند. بنابراین، نتیجه می‌گیریم که می‌توانیم با استفاده از یک هسته با همه ضرایب مثبت (مانند بخش ۳.۵)، فیلترینگ پایین‌گذر را در حوزه فضایی پیاده‌سازی کنیم. برای مرجع، شکل ۴.۳۶ (ب) نیز دو مورد از هسته‌های مورد بحث در آن قسمت را نشان می‌دهد. به رابطه متقابل بین عرض توابع گاوسی توجه کنید، همانطور که در پاراگراف قبل مورد بحث قرار گرفت. هرچه عملکرد دامنه فرکانس محدودتر باشد، فرکانس‌های پایین را بیشتر تضعیف می‌کند و در نتیجه تار شدن آن افزایش می‌یابد. در حوزه فضایی، این بدان معناست که برای افزایش تار شدن باید از هسته بزرگتری استفاده کرد، همانطور که در مثال ۳.۱۱ نشان دادیم.

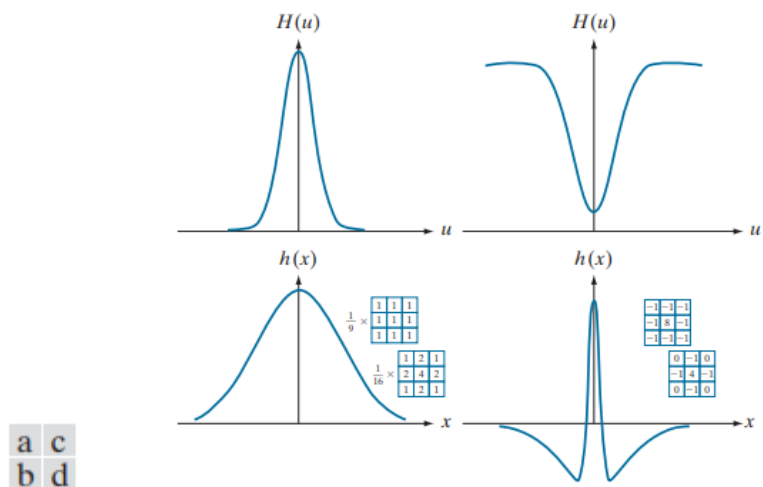
همانطور که در بخش ۳.۷ می‌دانید، ما می‌توانیم با تفریق یک تابع پایین‌گذر از یک ثابت، یک فیلتر بالا‌گذر را از یک فیلتر پایین‌گذر بسازیم. ما با توابع گاوس کار می‌کنیم، می‌توانیم با استفاده از به اصطلاح تفاوت گاوسی‌ها، که شامل دو تابع پایین‌گذر است، کمی کنترل بیشتری روی شکل تابع فیلتر داشته باشیم. در حوزه فرکانس، این می‌شود

$$H(u) = Ae^{-u^2/2\sigma_1^2} - Be^{-u^2/2\sigma_2^2} \quad (4-109)$$

با $A \geq B$ و $\sigma_1 > \sigma_2$. تابع مربوطه در حوزه فضایی است

$$h(x) = \sqrt{2\pi}\sigma_1 Ae^{-2\pi^2\sigma_1^2 x^2} - \sqrt{2\pi}\sigma_2 Be^{-2\pi^2\sigma_2^2 x^2} \quad (4-110)$$

شکل ۴.۳۶ (ج) و (د) نمودارهای این دو معادله را نشان می دهد. ما مجدداً به دریافت مجدد اعتبار اشاره می کنیم ، اما مهمترین ویژگی در اینجا این است که $h(x)$ دارای یک مرکز مثبت با عبارات منفی در هر دو طرف است. هسته های کوچک نشان داده شده در شکل ۴.۳۶ (د)، که ما در فصل ۳ برای تیز کردن استفاده کردیم ، این ویژگی را "ضبط" می کند و بنابراین توضیح می دهد که چگونه می توان از دانش فیلترینگ حوزه فرکانسی به عنوان مبنایی برای انتخاب ضرایب هسته فضایی استفاده کرد. به اگرچه ما تلاش های قابل توجهی را برای رسیدن به اینجا انجام داده ایم ، اما مطمئن باشید که درک واقعی فیلتر در حوزه فرکانس بدون بنیادی که به تازگی ایجاد کرده ایم غیرممکن است. در عمل ، حوزه فرکانس را می توان به عنوان "آزمایشگاه" در نظر گرفت که در آن ما از مطابقت بین محتوای فرکانسی و ظاهر تصویر استفاده می کنیم. همانطور که بارها در این فصل نشان داده می شود ، برخی از وظایفی که به طور استثنایی دشوار خواهد بود به طور مستقیم در حوزه فضایی ، در حوزه فرکانس بی اهمیت می شوند. هنگامی که یک تابع تبدیل فیلتر خاص را از طریق آزمایش در حوزه فرکانس انتخاب کردیم ، می توانیم فیلتر را مستقیماً در آن حوزه با استفاده از FFT پیاده کنیم ، یا می توانیم IDFT از تابع تبدیل را برای بدست آوردن تابع دامنه فضایی معادل بگیریم. همانطور که در شکل ۴.۳۶ نشان دادیم ، یک رویکرد مشخص کردن یک هسته فضایی کوچک است که تلاش می کند "ماهیت" عملکرد کامل فیلتر را در حوزه فضایی به تصویر بکشد. یک رویکرد رسمی تر این است که یک فیلتر دیجیتالی دو بعدی را با استفاده از تقریب های مبتنی بر معیارهای ریاضی یا آماری طراحی کنیم ، همانطور که در بخش ۳.۷ بحث کردیم.

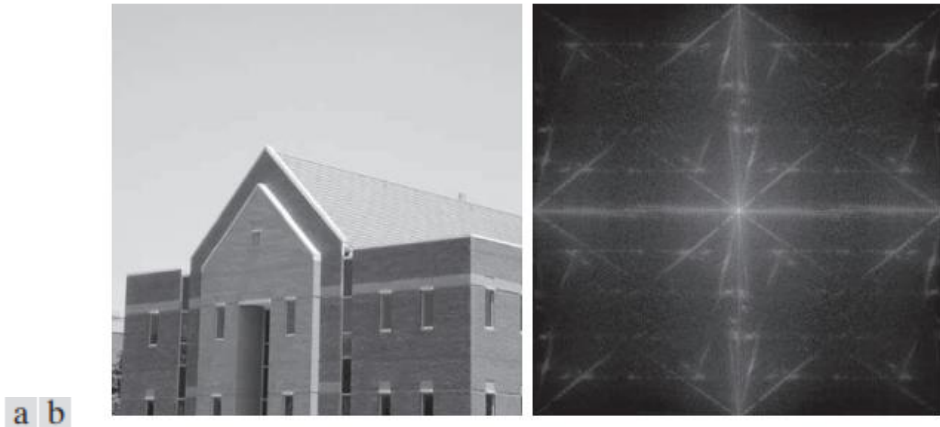


شکل ۴.۳۶ (الف) یک عملکرد تبدیل یک طرفه گاوسی گاوسی در حوزه فرکانس. (ب) هسته مربوطه در حوزه فضایی. (ج) عملکرد تبدیل دهنده گوس در حوزه فرکانس. (د) هسته مربوطه. کوچک هسته های دو بعدی نشان داده شده هسته هایی هستند که ما در فصل ۳ از آنها استفاده کردیم.

مثال ۴.۱۵: بدست آوردن یک تابع تبدیل دامنه فرکانسی از یک هسته فضایی.

در این مثال، ما با یک هسته فضایی شروع می کنیم و نحوه تولید تابع تبدیل فیلتر مربوطه در حوزه فرکانس را نشان می دهیم. سپس، نتایج فیلترهای بدست آمده با استفاده از حوزه فرکانس و تکنیک های فضایی را مقایسه می کنیم. این نوع تجزیه و تحلیل زمانی مفید است که فرد بخواهد عملکرد یک هسته معین را با یک یا چند نامزد "کامل" در حوزه فرکانس مقایسه کند یا درک عمیق تری در مورد عملکرد یک هسته در حوزه فضایی داشته باشد. برای ساده نگه داشتن مسائل، ما از هسته 3×3 Sobel \square عمودی از شکل ۳.۵۰ (e) استفاده می کنیم. شکل ۴.۳۷ (الف) تصویری 600×600 پیکسل، $f(x, y)$ ، که ما مایل به فیلتر کردن آن هستیم، و شکل ۴.۳۷ (ب) طیف آن را نشان می دهد.

شکل ۴.۳۸ (a) هسته Sobel، $h(x, y)$ را نشان می دهد (نمودار چشم انداز در زیر توضیح داده شده است). از آنجا که تصویر ورودی دارای اندازه 600×600 پیکسل است و اندازه هسته 3×3 است، با توجه به معادلات $(4-100)$ و $(4-101)$ ، با پر کردن f و h با صفرها به اندازه 602×602 پیکسل، از خطای فراگیر در حوزه فرکانس جلوگیری می کنیم. در نگاه اول، به نظر می رسد که هسته Sobel تقارن عجیب و غریبی از خود نشان می دهد. با این حال، عنصر اول آن ۰ نیست، همانطور که توسط معادله مورد نیاز است. $(4-81)$. برای تبدیل هسته به کوچکترین اندازه ای که معادله $(4-83)$ ، را برآورده می کند. باید یک سطر و ستون اصلی ۰ به آن اضافه کنیم، که آن را به آرایه ای با اندازه 4×4 تبدیل می کند. ما می توانیم این آرایه را در یک آرایه بزرگتر از صفرها جاسازی کنیم و همچنان تقارن فرد آن را حفظ کنیم اگر همانطور که در مثال ۴.۱۰ توضیح داده شده است، آرایه بزرگتر دارای ابعاد زوج است (مانند هسته 4×4) و مرکز آنها منطبق است. نظرات قبلی جنبه مهمی از تولید فیلتر است. اگر تقارن فرد را نسبت به آرایه پر شده در تشکیل $h_p(x, y)$ حفظ کنیم، از ویژگی ۹ در جدول ۴.۱ می دانیم که $H(u, v)$ کاملاً موهومی خواهد بود. همانطور که در انتهای این مثال نشان می دهیم، این نتایج مشابهی با فیلتر کردن فضایی تصویر با استفاده از هسته اصلی $h(x, y)$ دارد. اگر تقارن حفظ نمی شد، دیگر نتایج یکسان نبود.



شکل ۴.۳۷ (الف) تصویر یک ساختمان ، و (ب) طیف فوریه آن.

روش مورد استفاده برای تولید $H(u, v)$ عبارت است از: (۱) ضرب $hp(x, y)$ در $(-1)^{x+y}$ به منظور متمرکز شدن فیلتر دامنه فرکانس ؛ (۲) DFT رو به جلو را در (۱) محاسبه کنید تا $H(u, v)$ تولید شود. (۳) قسمت واقعی $H(u, v)$ را روی \cdot تنظیم کنید تا قسمتهای واقعی انگلی را در نظر بگیرید (ما می دانیم که H باید کاملاً تخیلی باشد زیرا hp واقعی و فرد است) ؛ و (۴) نتیجه را در $(-1)^{u+v}$ ضرب کنید. این مرحله آخر ضرب $H(u, v)$ را با $(-1)^{u+v}$ معکوس می کند ، که ضمنی است وقتی $h(x, y)$ به صورت دستی در مرکز $hp(x, y)$ قرار می گیرد. شکل ۴.۳۸ (a) نمودار چشم انداز $H(u, v)$ ، و شکل ۴.۳۸ (b) $H(u, v)$ را به عنوان یک تصویر نشان می دهد. به نامتقارن بودن این تصویر در مورد مرکز آن توجه کنید ، نتیجه $H(u, v)$ فرد است. تابع $H(u, v)$ به عنوان هر تابع تبدیل فیلتر دامنه فرکانس دیگر استفاده می شود. شکل ۴.۳۸ (ج) نتیجه استفاده از تابع تبدیل فیلتر است که برای فیلتر کردن تصویر در شکل ۴.۳۷ (الف) در حوزه فرکانس بدست آمده است ، با استفاده از روش فیلتر گام به گام که قبلاً توضیح داده شد. همانطور که از یک فیلتر مشتق انتظار می رود ، لبه ها افزایش یافته و تمام مناطق با شدت ثابت به صفر کاهش می یابد (رنگ خاکستری به دلیل مقیاس بندی برای نمایش است). شکل ۴.۳۸ (d) نتیجه فیلتر کردن یک تصویر در حوزه فضایی با هسته $Sobel h(x, y)$ ، با استفاده از روشی که در بخش ۳.۶ مورد بحث قرار گرفته است را نشان می دهد. نتایج یکسان است.

۴.۸ تصویر هموار با استفاده از فیلترهای دامنه فرکانس پایین گذر

باقیمانده این فصل به روشهای مختلف فیلترینگ در حوزه فرکانس می پردازد ، که با فیلترهای پایین گذر شروع می شود. لبه ها و سایر تغییرات شدید (مانند نویز) در یک تصویر به میزان قابل توجهی در فرکانس بالای تبدیل فوریه آن کمک می کند. بنابراین ، هموارسازی (محو شدن) در حوزه فرکانس با تضعیف فرکانس بالا حاصل می شود. یعنی با فیلترینگ پایین گذر. در این بخش ، ما سه نوع فیلتر پایین گذر را در نظر می گیریم: ایده آل ، باترورث و گاوسین. این سه دسته طیف وسیعی از فیلترینگ بسیار تیز (ایده آل) تا بسیار هموار (گوسی) را پوشش