

محاسبات عددی

جزوه درسی مهندس سلمانزاده (کارشناسی ارشد هوا فضا)

مقدمات ریاضی :

آنالیز عددی: حل مسائل پیچیده ریاضی با روشهای ساده محاسباتی و طرح و بررسی روشهایی جهت حل عددی این مسائل و بدست آوردن جوابهای عددی با داشتن یک سری اطلاعات اولیه (جوابهای تقریبی) .

مراحل حل مسئله :

- ۱- مدل سازی کردن یا فرمول کردن مسئله
 - ۲- ارائه یک روش عددی (الگوریتم) جهت حل مسئله
 - ۳- کد کردن الگوریتم به زبان برنامه نویسی .
- الگوریتم : راه حلی از مسئله است که اولاً "دقیق باشد ثانیاً" مراحل مختلف اجرای آن مشخص باشد .
- ثانیاً" شرط پایان داشته باشد
- محاسبات کامپیوتری :

$$2) = 2$$

۱- ریاضی : اعداد با طول نامتناهی

(

۲- محاسبات (عددی) : اعداد با طول متناهی
 ۲ # (۲)

نمایش عددی به صورت غیر شناور : floating point number

e

$$X = d(0.d_1 d_2 \dots d_k) b^e$$

مانتیس

$$D1 \# 0 < d_1 (b-1)$$

k = دقت

e نما (توان)

B= 2	b=15	b=8	b=16
decimat	octal	HYa	decimat binary

fe(x)

بصورت ممیز شناور

$$fe(x) = 0.$$

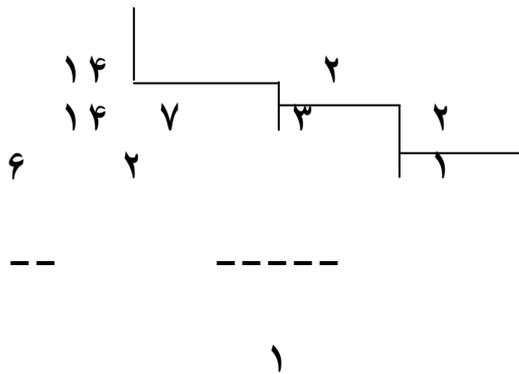
مثال : x= 14.128

$$14128 * 10$$

$$x = (14128)_{10} = 1 * 10^4 + 4 * 10^3 + 1 * 10^2 + 2 * 10^1 + 8 * 10^0$$

مثال : $10 = (14,4)_2 = (x)$

$$2(1110) = 10(14)$$



$$0.4 * 2 = 0.8 \quad 0$$

$$0.8 * 2 = 1.6 \quad 1$$

$$= 1,2 \quad 1 \quad (14,4)_{10} = (1110)_2$$

$$0.6 * 2 = 1.2 \quad 1$$

$$0.2 * 2 = 0.4 \quad 0$$

دقت ساده و مضاعف : single and double precision

یک بیت جهت علائم هفت بیت جهت نما

اگر دقت ساده باشد بیست و چهار بیت جهت ماننسیس

اگر دقت مضاعف باشد پنجاه و شش بیت جهت مانع
 مثال : $z=2.2$ $x=46.8609$ $y=46.8607$

بادقت $k=3$ single z ----- = ?

$x-y$ ----- = ----- = ?
 ۲, ۲ z
 ۴۶, ۸۶۰ - ۴۶, ۸۶۰

$x-y$ ----- = ----- = $k=2$ $k=6$ Double
 ۲, ۲ z ----- = -----
 ۴۶, ۸۶۰۹ - ۴۶, ۸۶۰۷
 = ۱۰*۱, ۱

$L^{-1} L^{-1}$

Under flow زیر زیر : $x=d(0.d_1d_2 \dots d_k)b^*b > (0.1) b^*b = b^*b = b$ e

$L-1$
 ----- > کوچکترین عدد که صفر نیست = $3=eps$
 $xl = b$

$|X| < X4$ -----> $X=0$

Over flow سر ریز :

e U

X $1 (0.d_1 d_2 \dots D_k) b * b < 1*b$

$x_u = b$

----- > بزرگترین عدد ممکن

u

if $|x| > x_u$ ---- > $x = inf$ بی نهایت

Round and chapping : رند کردن و قطع کردن

e
 $x = 0.d_1 d_2 \dots d_k$ رند و قطع کردن تا رقم k
 $b * b$

$f_{lc}(x) = d (0.d_1 d_2 \dots D_k) b * b$ e قطع کردن

$$F_{lr}(x) = \begin{cases} D (0.d_1 d_2 \dots d_k) b * b & \text{if } 0 < d_{k+1} < B/2 \\ D\{ (0.d_1 d_2 \dots d_k) + (0.0 0 \dots 1) \} B * B & \text{IF } B/2 < d_{k+1} < B-1 \end{cases} \quad e$$

 $k-1$
 $K+1$

$X=23.368$

$y=23.381$

$k=2$

شار

$$F1(x) = 0.23368 * 10^2$$

$$f1(y) = 0.23381 * 10^2$$

$$K=4 \quad f1c(x) = 0.2336 * 10^2$$

$$f1c(y) = 0.23 * 10^2$$

$$F1R(X) = 0.2334 * 10^2$$

$$F1R(Y) = 0.23 * 10^2$$

خطا
ERROR

Ea = Product Error (a) = AE (a) = |a - a| اگر a تقریبی از a باشد آنگاه

$$|a - a|$$

$$Ea = \text{Relative Error (a)} = RE (a) = \frac{|a - a|}{|a|}$$

مثال : عدد $\pi = 3,14$ را با مقدار تقریبی $\pi = 3,14$ نشان دهید

$$a = \frac{31428}{10000} = 3.1428 = 0.31428 * 10^2$$

$$Ea = |a - a| = |0.31428 * 10^2 - 0.31415 * 10^2|$$

$$a = \pi = 3,1415 = 0.31415 * 10^{-2} = 0.00013 * 10 = 0.13 * 10^{-3}$$

$$Ea = \frac{10 * 10^{-3}}{0.31415 * 10} = 0.413815 * 10^{-3}$$

نکته : همیشه در مسائل از خطای نسبی بیشتر استفاده می کنید زیرا :

$$E_{Na} = N \frac{|a-a|}{|a|} = N E_a$$

منشاء خطا در محاسبات عددی :

۱- خطای برش : بعلت تقریب یک مقدار با یک فرمول حاصل میگردد .

$$e = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\text{Error} = \varepsilon \frac{x^4}{n!}$$

$$\sin x = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

۲- خطای ماشین : ۱- رند کردن ۲- قطع کردن ۳- حذف ارقام با معنی .

۳- اشتباه : به علت غلط وارد کردن داده های اولیه به کامپیوتر ایجاد می شود .

۴ - خطای مقادیر اولیه : بعلت خطای موجود در وسائل اندازه گیری جهت محاسبه فرمول در آزمایشگاه می باشد محاسبه این خطا مقادیر محاسبه ریاضی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه می کنیم .

اعمال محاسباتی بر روی ممیزهای شناور :

$$fl(fl(x) + fl(y)) = x \oplus y \quad \# \quad x \oplus y$$

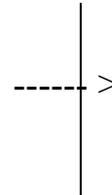
$$1.37 + 0.0269 = 0.137 * 10 + 0.269 * 10^{-1} \quad \text{مثال : } k=3$$

$$0,137 * 10 \text{ ----} > 0,137 * 10$$

$$0,269 * 10 \text{ ----} > 0,00269 * 10$$

$$\text{-----}$$

$$0,13969 * 10$$



رقم ٣

$$\text{Round ----} > 0.14 * 10$$

$$\text{Chap ----} > 0.139 * 10$$

ب (تفريق :)

$$f1 (f1 (x) - f1 (y)) = x \ominus y \# x-y$$

مثال : $3780 - 0.321 = 0.378 * 10^{-4} - 0.321$

$$0.378 * 10^4$$

$$10 * 0,0000321$$

$$\text{-----}$$

$$10 * 0,377679$$

$$\text{Round} \rightarrow 0.378 * 10^4$$

$$\text{Chap} \rightarrow 0.377 * 10^4$$

ج (ضرب :)

$$F1 (f1 (x) * f1 (y)) = x \Theta y \# x*y$$

مثال : $403000 * 0.697 = 0.403 * 10^6 * 0.197 * 10^{-1}$

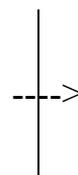
$$=$$

$$10 * 0,0197$$

$$10 * 0,403$$

$$\text{-----}$$

$$10 * 0,079391 = 10 * 0,79391$$



$$\text{round} \rightarrow 0.794 * 10^4$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ \text{۲} \\ 10 * 0.33812 = 0.33812 * 10 \end{array} \rightarrow \text{flc} (3.16 x) = 0.336 * 10$$

$$\begin{array}{r} 10 * 467 \\ 10 * 0.332 \\ 10 * 0.336 \\ \text{-----} \\ 0.004 * 10 = - 0.4 * 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} -۱ \\ - 0.4 * 10 \\ 0.338 * 10 \\ \text{-----} \end{array} \quad \begin{array}{r} +1 \\ - 0.004 * 10 \\ + 0.338 * 10 \\ \text{-----} \\ 0.334 * 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.334 * 10 \\ 467 * 10 \\ \text{-----} \\ ۱۰ * ۳۳ \end{array} \quad \begin{array}{r} ۳ \\ ۲ \end{array} \quad \text{جواب نهایی مقدار تقریبی}$$

$$\text{مقدار داده} \quad 2.75 (1.07) - 2.95 (1.07) + 3.16 (1.07) - 4.67 = -1.29738875$$

$$a = |a - \bar{a}| = |0.133 * 10 + 0.1297386675 * 10| = 0.03261325$$

$$a = \frac{Ea}{|a|} = \frac{0.03261325}{0.12738675 * 10} = 0.025137456$$

مثال : اعمال زیر را به روش قطع کردن با دقت $k = 5$ بدست آورید .

$$u = 0.428321$$

$$v = 95674 . 4$$

$$w = 0.111111 * 10^{-6}$$

مقدار تقریبی

مقدار واقعی

خطای مطلق

جاهای خالی تمرین هستند

خطای نسبی

$$0.10952 * 10$$

$$23/21$$

$$0.38098 * 10^{-4}$$

$$0.34782 * 10^{-4}$$

$$0.15555$$

$$19/9$$

$$0.55555 * 10^{-4}$$

$$0.35713 * 10^{-4}$$

$$(y \ominus x) \ominus w$$

$$0.47837 * 10$$

$$4.824748488$$

$$0.48488 * 10^{-4}$$

$$0.100$$

$$u \ominus v$$

تمرین : اعداد زیر را در نظر گرفته و اعمال زیر را برای آنها انجام داده میزان خط را برای آنها محاسبه کنید . =9

$$G = 0.4523 * 10^4$$

$$b = 0.2115 * 10^{-3}$$

$$c = 0.2583 * 10$$

$$ab / c \text{ (د)}$$

$$a/c \text{ (ج)}$$

$$a-b-c \text{ (ب)}$$

$$a+b+c \text{ (الف)}$$

ارقام با معنی : در نمایش اعشاری یک عدد اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۹ و همچنین صفر در صورتیکه برای نشان دادن یا برای پر کردن مکان ارقام حذف شده بکار می رود رقم با معنی خواهد بود .

<p>چهار رقم با معنی ۲۰۱۷ سه رقم با معنی ۰,۰۱۵۷</p>		<p>سه رقم ۱۰ * ۰,۱۵۶ ۶ رقم ۴ ۱۰ * ۰,۱۵۶۰ ۶ رقم ۵ ۱۰ * ۰,۱۵۶۰۰</p>
۱۵۶۰۰۰		

<p>۳۰,۰ →</p>	<p>یک رقم ۱۰ * ۰,۳ دو رقم ۱۰ * ۰,۳۰</p>		<p>سه رقم با معنی ۰,۶۳۲ * ۱۰ ۰ رقم ۴ ۱۰ * ۰,۰۶۵۸</p>
			<p>۰,۰۰۶۵۲ →</p>

ارقام با معنی صحیح: در صورتیکه عدد $\frac{2}{3}$ را با $x=0.66667$ و $y = 0.66699842593$ نمایش دهید تقریب دومی تعداد ارقام با معنی بیشتری دهد ولی دقت آن از تقریب اولی کمتر است چون تعداد زیادی از ارقام با معنی دومی در تقریب نقش ندارند یا به عبارتی ارقام با معنی صحیح اولی از دومی بیشتر است.

در نمایش تقریبی یک عدد رقمی را با معنی صحیح گویند که اگر از محل قرار گرفتن عدد به بعد روند کنیم خطای نصف واحد محل قرار گرفتن عدد کمتر می گردد در آنصورت عدد را رقم با معنی صحیح گویند اگر

$$E \cdot 10^{-n} \text{ دارای رقم با معنی صحیح باشد آنگاه خطای مطلق در } 0,5 * 10^{-n} \text{ کوچکتر خواهد بود.}$$

قضیه: اگر a تقریبی از a باشد و $|a-a| < 0,5 * 10^{-n}$ باشد آنگاه a دارای n رقم با معنی صحیح است و بالعکس اگر a تقریبی از a باشد و a دارای n رقم با معنی صحیح باشد آنگاه خطای مطلق به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} |a-a| &< 0,5 * 10^{-n} & X=0.66667 \\ x = 2/3 = 0.66668 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$Y = 0.66699842593$$

$$|x-x| = 10^{-5} \cdot 0.666\dots - 0.666671 = 0.000003333$$

$$|x-x| = 0.333 * 10^{-5} < 0.5 * 10^{-5}$$

پس x پنج رقم با معنی صحیح دارد.

$$|x-y| = |0.666\dots - 0.66699842593| = 0.0003317$$

$$|x-y| = 0.3317 * 10^{-3} < 0.5 * 10^{-3}$$

پس y ۳ رقم با معنی صحیح دارد.

• در صورتیکه یک عدد را تا n رقم روند کنیم خطای مطلق آن از $0,5 * 10^{-n}$ کوچکتر است

$$\pi = 3.141592654$$

با این دو عدد تقریب می زنیم

$$x = 22/7, \quad y = 355/113$$

$$X = 22/7 = 3.14159292$$

$$Y = 355/113 = 3.14159292$$

$$|x - \pi| = 0.00126449 < 0.5 * 10^{-2} \quad \text{پس } n \text{ دو رقم با معنی صحیح دارد.}$$

$$|y - \pi| = 0.000000266 = 0.266 * 10^{-6} < 0.5 * 10^{-6} \quad \text{پس } y \text{ شش رقم با معنی صحیح دارد.}$$

$$k=3 \rightarrow \sqrt{5} = 2.236 \quad \sqrt{5} = 2,236074978$$

$$E\sqrt{5} < 0,5 * 10^{-3} \quad \text{یعنی} \quad 2,236 - (0,5 * 10^{-3}) < \sqrt{5} < 2,236 + 0,5 * 10^{-3}$$

خطای مطلق ناشی از حذف ارقام با معنی روی اعمال محاسباتی : ۱. جمع و تفریق
۲. ضرب
۳. تقسیم

۱. جمع و تفریق : اگر $a = \bar{a} + E_a$ و $b = \bar{b} + E_b$ همچنین $\bar{a} + \bar{b}$ مقدار تقریبی $a + b$ باشد آنگاه

$$E_{a+b} < E_a + E_b, \quad E_{a-b} < E_a + E_b$$

$$E_{a+b} = |(\bar{a} + \bar{b}) - (a + b)| = |(a - \bar{a}) + (b - \bar{b})|$$

$$|x+y| < |x| + |y|$$

$$\text{-----} > |(a-\bar{a}) + (b-\bar{b})| < |(a-\bar{a})| + |(b-\bar{b})| \rightarrow Ea+b < Ea + Eb$$

مثال: اگر اعداد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ تا سه رقم اعشار در نظر بگیریم مطلوبست محاسبه $\sqrt{5}$ و $\sqrt{17}$ حداکثر خطای ترکیب شده.

$$\sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} = 2.236 + E \sqrt{5} \quad , \quad E \sqrt{5} < 0.2 * 10^{-3}$$

$$\sqrt{17} = 4.123 + E \sqrt{17} \quad \text{و} \quad E \sqrt{17} < 0.5 * 10^{-3}$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} = (2.236 + E \sqrt{5}) (\sqrt{17})$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} = 6.359 + E \sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$E \sqrt{5} \sqrt{17} < E \sqrt{5} + E \sqrt{17} < 0.5 * 10^{-3} + 0.5 * 10^{-3}$$

$$E \sqrt{5} \sqrt{17} < 1.0$$

$$6.359 * 1.0 < \sqrt{5} \sqrt{17} < 6.359 + 1.0$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} = 2.236 + E \sqrt{5}$$

$$\sqrt{17} = 4.123 + E \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} = (2,236 - 4,123) + \sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} = -1,887 + \sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} < \sqrt{5} + \sqrt{17} < 0,5 * 10 + 0,5 * 10$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} < 10 \rightarrow -1,887 - 10 < \sqrt{5} \sqrt{17} < -1,887 + 10$$

خطای ضرب: اگر $a = \bar{a} + E_a$, $b = \bar{b} + E_b$ باشد آنگاه

$$E a.b < \bar{a}E_b + \bar{b}E_a$$

$$E a.b = |(a.b) - (\bar{a} \bar{b})| = |(a + E_a)(\bar{b} + E_b) - \bar{a} \bar{b}|$$

$$= |\bar{a} \bar{b} + \bar{a} E_b + \bar{b} E_a + E_a E_b - \bar{a} \bar{b}|$$

صفر

$$\rightarrow E a.b < \bar{a} E_b + \bar{b} E_a$$

$$\sqrt{5} \sqrt{17} \quad K=3$$

$$\sqrt{5} = 2,236 + E \sqrt{5}$$

$$\sqrt{17} = 4,123 + E \sqrt{17}$$

□ □

$$\sqrt{5} * \sqrt{17} = (2,238 * 4,123) + \sqrt{E} \sqrt{5} \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} * \sqrt{17} = 9,219 + \sqrt{E} \sqrt{5} * \sqrt{17}$$

$$\sqrt{5} * \sqrt{17} = 9,219 + E \sqrt{5} * \sqrt{17} + ER \quad ER < 0,5 * 10 \quad -1$$

$$E_{TOT} = E \sqrt{5} * \sqrt{17} + ER < 2,236 E a + 4,123 E a + 0,5 * 10 \quad -3$$

$$E_{TOT} < (1 + 2,236 + 4,123) * 0,5 * 10 \quad -3$$

$$E_{TOT} < 3,68 * 10^{-3} \rightarrow 9,219 - 3,68 * 10^{-3} < \sqrt{5} * \sqrt{17} < 9,219 + 0,003 \quad -3$$

$$E_{a/b} < \frac{\bar{a}E_b + \bar{b}E_a}{\bar{b}} \quad \text{خطای مستقیم:} \quad (b)$$

مثال مطلوب محاسبه $\sqrt{5}$ و محاسبه حداکثر خطای ایجاد شده با دقت ۳ رقم .

$$A = \pi * 1/3 * \sqrt{5} = \pi * 1/3 * 1/5 \sqrt{5} = 0,2 \pi * 1/3 \sqrt{5}$$

$$X = \pi = 3,142 + E_{\pi} * e_{\pi} < 0,5 * 10^{-3}$$

$$Y = 1/3 = 0,333 + E_Y \quad \text{و} \quad E_{1/3} < 0,5 * 10^{-3}$$

$$Z_{\alpha/2} = 2.236 \quad \text{و} \quad \alpha < 0.05$$

$$A = 0.2 \{ 3.142 * 0.333 * 2.236 + E A \}$$

$$A = 0.2 * 3.142 * 0.333 * 2.236 + 0.2 E a$$

$$A = 0.467899099 + 0.2 E A$$

$$A = \frac{0.468 + E R + 0.2 E A}{E T O T}$$

$$E a * b * c < \bar{a} \bar{b} \bar{c} E c + \bar{a} \bar{c} \bar{b} E b + \bar{c} \bar{b} \bar{a} E a$$

$$T O T = E R + 0.2 E A < 0.5 * 10 + 0.2 \{ 3.142 * 0.333 \sqrt{E} + 3.142 + 0.333 * 2.236 E \}$$

$$E T O T < \{ 1 + 0.2 (3.142 * 0.333 + 3.142 * 2.236 + 2.236 * 0.333) * 0 E T O T < 0.001382$$

$$0.8 - 0.001382 < \pi / 3 \quad 5 < 0.468 + 0.001382 \quad \sqrt{\quad}$$

خطای توابع و فرمولها: اگر تابع $W = F (X_1 , X_2 , \dots , X_n)$ و همچنین $x_i = \bar{x}_i + E x_i$ باشد در آن صورت:

$$f (x_1 , x_2 , \dots , x_n) = f (\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 , \dots , \bar{x}_n) + E f$$

مقدار خطای حاصل به صورت زیر است.

$$E_f < g_f/g_{x1} E_{x1} + g_f/g_{x2} E_{x2} + \dots + g_f/g_{xn} E_{xn}$$

مثال : مطلوبست محاسبه حجم کره به شعاع $(x = 5/3)$ و محاسبه ماکزیمم خطای ایجاد شده در این محاسبات سه رقم اعشار .

$$V = 4/3 \pi R^3$$

$$X = 4/3 = 1.333 \cdot E_x, \quad E_x < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$Y = x \cdot 3.142 + E_y, \quad E_y < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$Z = R = 5/3 = 1.667 + E_z, \quad E_z < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$V = \overline{xyz} + E_v = (1.333)(3.142)(1.667) + E_v$$

$$= 19.40184942 + E_v, \quad E_x < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$= 19.402 + E_x + E_v$$

$$E_R + E_V < 0.5 \cdot 10^{-3} + yzE_x + xzE_y + 32xyE_z$$

$$E_T < 0.5 \cdot 10^{-3} \{ 1 + (3.142)(1.667) + (1.333)(1.667) + (1.333)(1.667) \cdot (3.142) \cdot 3 \}$$

$$E_{TOT} < 0.028 \quad 19.402 - 0.028 < V < 19.402 + 0.028$$

تمرین : تابع $F(X,Y,Z) = X Y Z$ بنابراین مقادیر زیر داده شده است حداکثر خطای ایجاد شده را بدست آورید
($K=4$)
 $X=5.4123$, $Y=1.5235$, $Z=1.0025$

تمرین : اعداد a,b,c تا سه رقم اعشار به ترتیب به صورت $a=4.701$, $b=0.8325$, $c=2.413$ میباشد
مقدار تقریبی و خطای حاصل از عبارتها زیر را بدست آورید . الف) ab/c ب) $1/ab$

$$1.621 - 0.0013 < ab/c < 1.621 + 0.0013$$

$$0.2557 - 0.0002 < 1/ab < 0.2557 + 0.0002$$

تمرین : مقدار x, y به صورت روبرو است $x = 123000 + \overset{\bar{}}{100} E_a$

$$Y = 62000 + \overset{\bar{}}{500} E_a$$

مقدار خطای مطلق $\log(x+y)$ را بدست آورید .

$$E_f < 0.008$$

تمرین : مطلوبست محاسبه مساحت دایره شعاع $(r=3.14)$ با دقت چهار .

حل معادلات غیر خطی یک متغیره :

۱- روش نصف کردن فاصله

-۴

۲
۵- روش Δ اتین

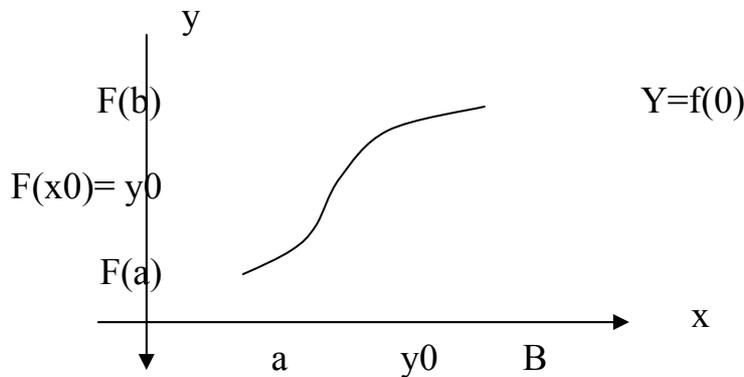
۲- روش تکرار ساده

۶- روش مولر

۳- روش نیوتن

۱- روش نصف کردن فاصله :

قضیه : اگر تابع f در بازه $\{ a, b \}$ پیوسته باشد آنگاه برای هر y بین $f(a)$ و $f(b)$ یک مقدار x_0 بین وجود است به قسمی که :



$$F(x_0) = y_0$$

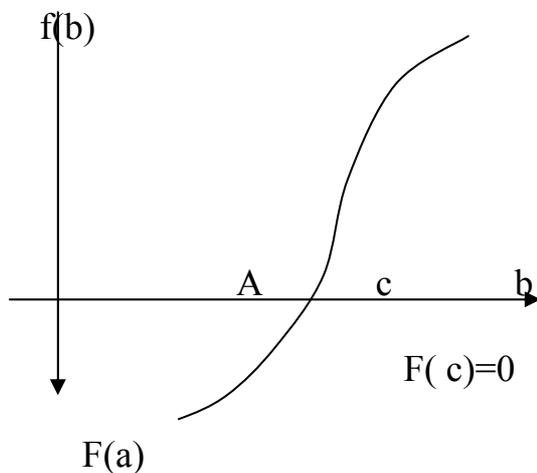
قضیه برتز انو - وارشیتراش

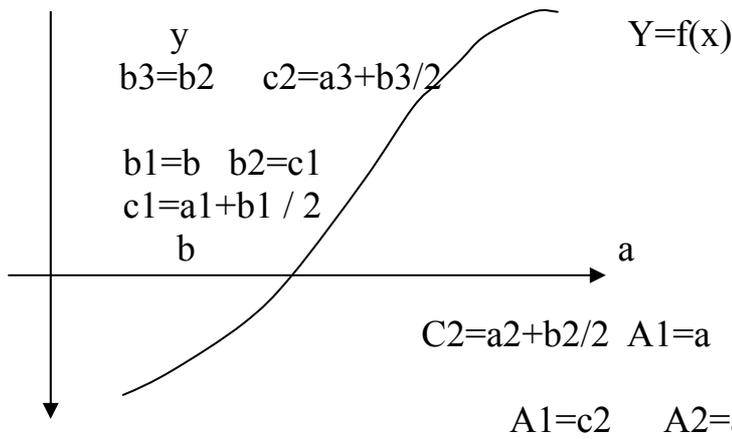
اگر f در بازه $\{ a, b \}$ پیوسته باشد و $f(a) f(b) < 0$ آنگاه یک مقدار c بین a, b موجود است به قسمی $F(c) = Q$ یا c ریشه تابع f خواهد بود .

۱) پیوستگی تابع f .

2) $f(a) f(b) < 0$

3) $c \in \{ a, b \}$ $f(c) = 0$





If $f(c_1) = 0$ Step 1 $a=a_1, b=b_1, c_1 = a_1+b_1/2$ ریشه است
 $C=c_1$

If $f(c_1) \neq 0$ $f(c_1) f(a_1) < 0 \rightarrow a_2 = a_1, b_2 = c_1$ or c_2
 $F(a_1) f(c_1) > 0 \rightarrow a_2 = c_1, b_2 = b_1$ or c

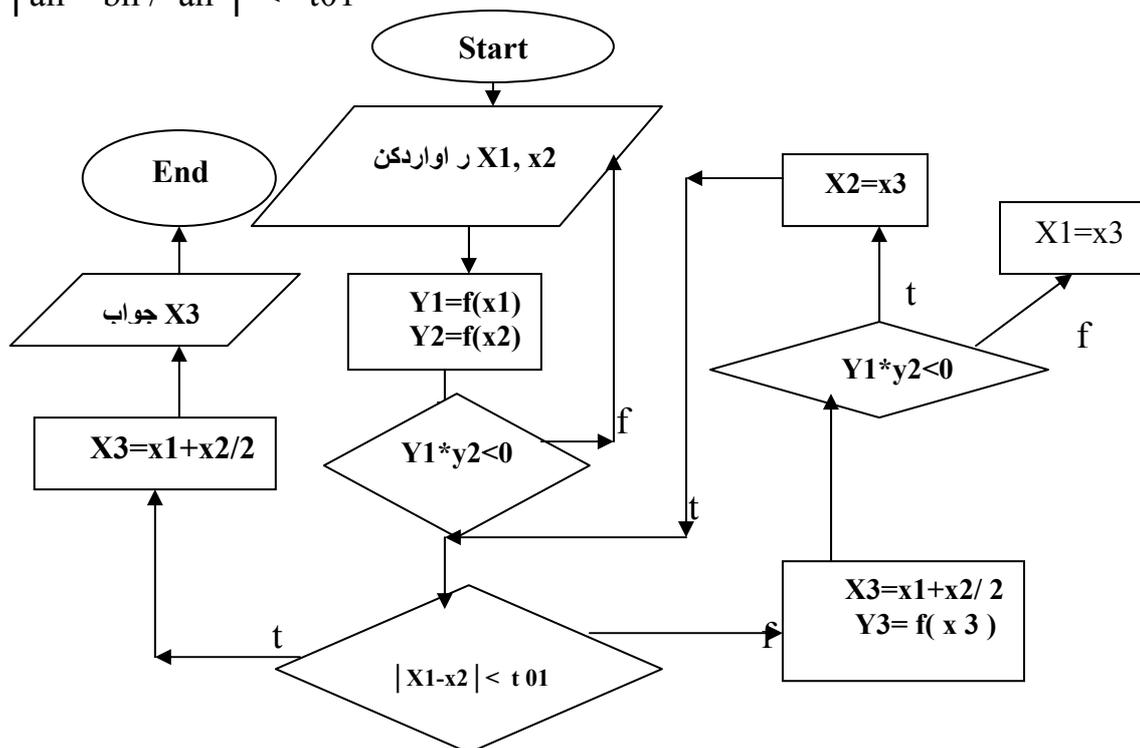
Step 2 $c_2 = a_2 + b_2 / 2$

شرط توقف :

$$|a_n - b_n / a_n| < t_01$$

$$|x_{n+1} - x_n| < t_01$$

$$|a_n - b_n| < t_01$$



t

مثال ریشه تابع $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10x - 10 = 0$ را با دقت ۱۰ بدست آورید.
 $ToI = 10^{-4}$

یک بار تغییر علامت می دهد پس ۱ ریشه مثبت
 $F(X) = X^3 + 4X^2 - 10X - 10 \rightarrow$
 ریشه $3 = 2 + 1$ دو بار تغییر علامت ۲ ریشه منفی
 $F(-X) = -X^3 + 4X^2 - 10X - 10 \rightarrow$

$f(1) = -5 < 0$ $a = 1$

$F(2) = 14 > 0$ $f(1)f(2) < 0$ $c \in \{1,2\}$ $b=2$

n	an	Bn	Cn = an+bn/2	F (cx)
۰	۱	2	۱,۵	۲,۳۷۵ +
۱	۱	1.5	۱,۲۵	1.7968
۲	۱,۲۵	۱,۵	۱,۳۷۵	۰,۱۶۲۱۰۲ +
۳	۱,۲۵	۱,۳۷۵	۱,۳۱۲۵	۰,۸۴۸۳۲
۴	۱,۳۱۲۵	۱,۳۷۵	
۹	۱,۳۶۳۳۲۸۱۲۵	۱,۳۶۳۳۲۸۱۲۵	۱,۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۰,۰۰۰۰۷۲ +
۱۳	۱,۳۶۹۹۹۰۲۳۵	۱,۳۶۵۲۳۴۳۷۵	۱,۳۶۵۱۱۲۳۰۵	۰,۰۰۹۴

• این روش برای ریشه مزدوج یا چندگانه مرتبه زوج کاربردی ندارد . چون تابع در نزدیکی این ریشه تغییر نمی دهد .

• روش مناسبی برای پیدا کردن ریشه مختلف نمی باشد .

قضیه محاسبه تعداد تکرارهای لازم جهت همگرایی روش B . S

اگر تابع F در بازه { a , b } پیوسته باشد و $f(a) f(b) < 0$ باشد روش b.s یک دنباله c_n

همگرا به $\{c\}$ تولید می کند به طوریکه $|c - c_n| < \frac{b-a}{2^n}$ مقدار تقریبی ریشه c می باشد.

اثبات $|x_1 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2}$
 $|x_2 - \alpha| < \frac{b-a}{2^2}$ $2 = \frac{b-a}{2}$

$$|x_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^n}$$

مثال قبل $|c - c_n| < \frac{b-a}{2^n}$

$$|C - c_n| < 10^{-4} \rightarrow \frac{b-a}{2^n} < 10^{-4} \text{ or } \frac{b-a}{2} < 10^{-4}$$

$$-n \ln 2 < -4 \ln 10 \rightarrow n > 13.28 \quad n \sim 14$$

Iteration method

۲- روش تکرار ساده : (پیکارد)

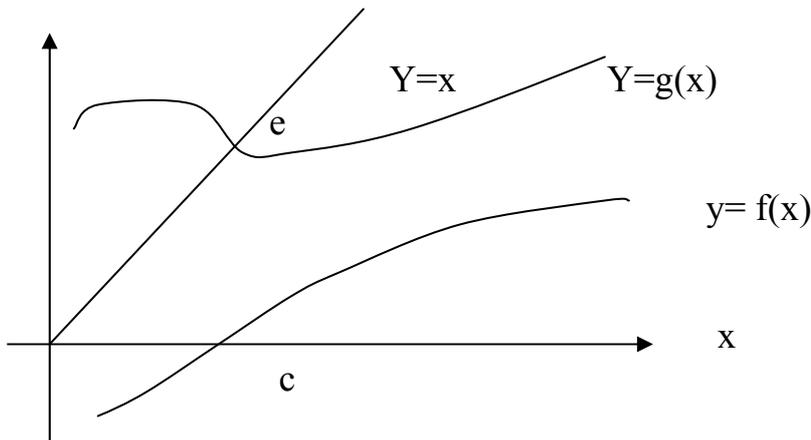
قضیه: اگر تابع f در بازه $\{a,b\}$ پیوسته باشد و این تابع را به صورت $x = g(x)$ بنویسیم بطوریکه برای X ها عضو a,b داشته باشیم : $g(x) \in \{a,b\}$ آنگاه تابع $g(x)$ دارای یک نقطه ثابت خواهد بود مشتق y موجود باشد و $|g'(x)| < 1$ باشد آن نقطه ای ثابت منحصر بفرد است.

$$F(x) = 0 \quad x = g(x) \rightarrow \begin{cases} y=x \\ Y=g(x) \end{cases}$$

$$x^2 + 10x - 8 = 0$$

۲

$$X = 8 - x / 10 \quad g(x)$$



اثبات : $\alpha = g(\alpha) \rightarrow f(\alpha) = 0$ ریشه است α

$$\alpha = G(\alpha) \rightarrow f(\alpha) = 0$$

$$g(x) = f(x) + x \rightarrow x = \alpha \rightarrow g(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \rightarrow f(\alpha) = 0$$

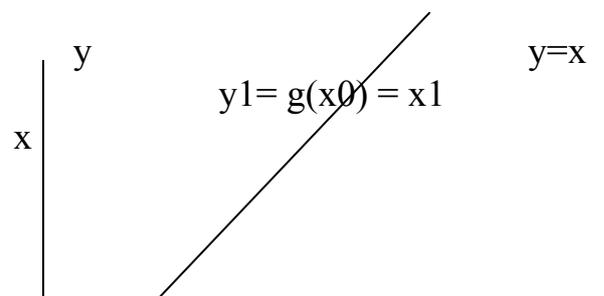
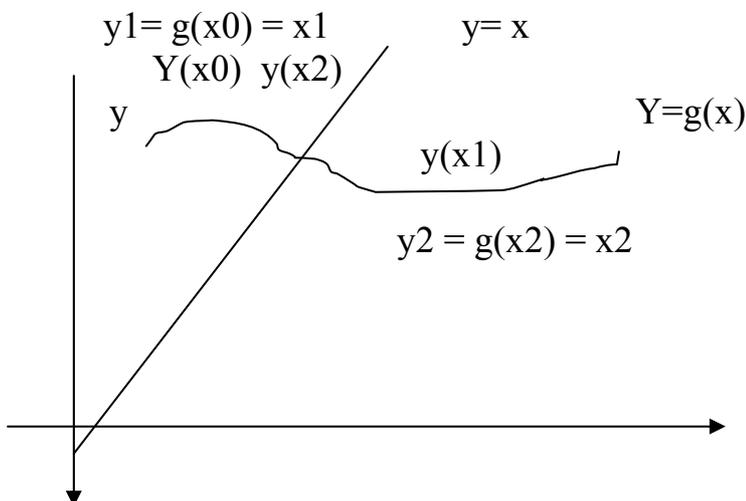
$$f(\alpha) = 0 \rightarrow \alpha = g(\alpha)$$

$$g(x) = f(x) + x$$

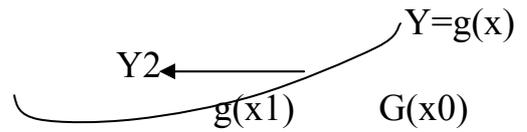
$$x = 0 \rightarrow x(\alpha) = f(\alpha) + \alpha \rightarrow g(\alpha) = \alpha$$

روش تکرار ساده: اگر تابع $f(x)$ در بازه $\{a, b\}$ پیوسته باشد و $f(\alpha) = 0$ باشد تحت شرایط مناسب الگوریتم $X_{n+1} = g(x_n)$ $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

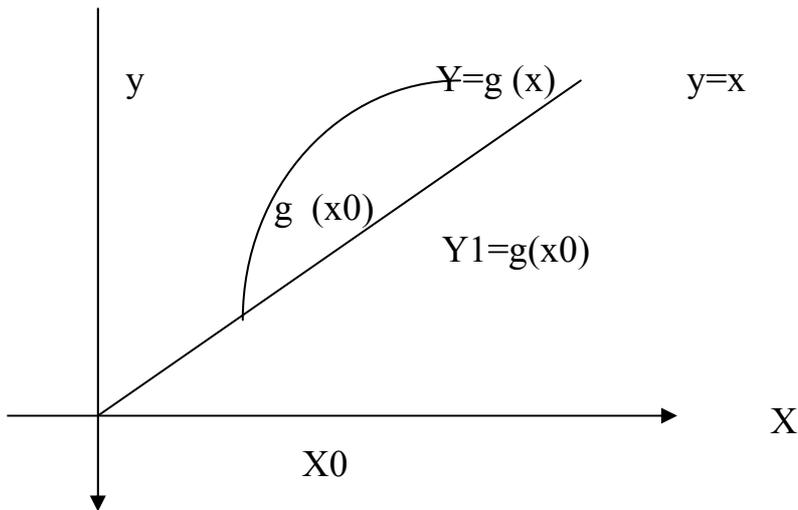
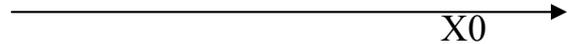
به سمت یک ریشه تابع $f(x)$ همگرا خواهد بود.



X0 همگرایی نوسانی



همگرایی یکنواخت



روش پیکارد :

- ۱- بررسی تابع $f(x)$
- ۲- بدست آوردن حالت‌های مختلف $g(x)$
- ۳- بررسی شرایط سازگاری
- ۴- محاسبه تابع با استفاده از فرمول $x_{n+1} = y(x_n)$

شرایط سازگاری :

$$x \in \{a, b\} \rightarrow g(x) \in \{a, b\} \quad -1$$

$$\forall x \in \{a, b\} : \{ \bar{g}(x) \} < 1 \quad -2$$

$$\bar{g}(x) < 1 \quad \text{اثبات} \rightarrow \cdot \quad X_{n+1} = g(x_n)$$

اگر α ریشه باشد :

$$X_{n+1} = \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$$

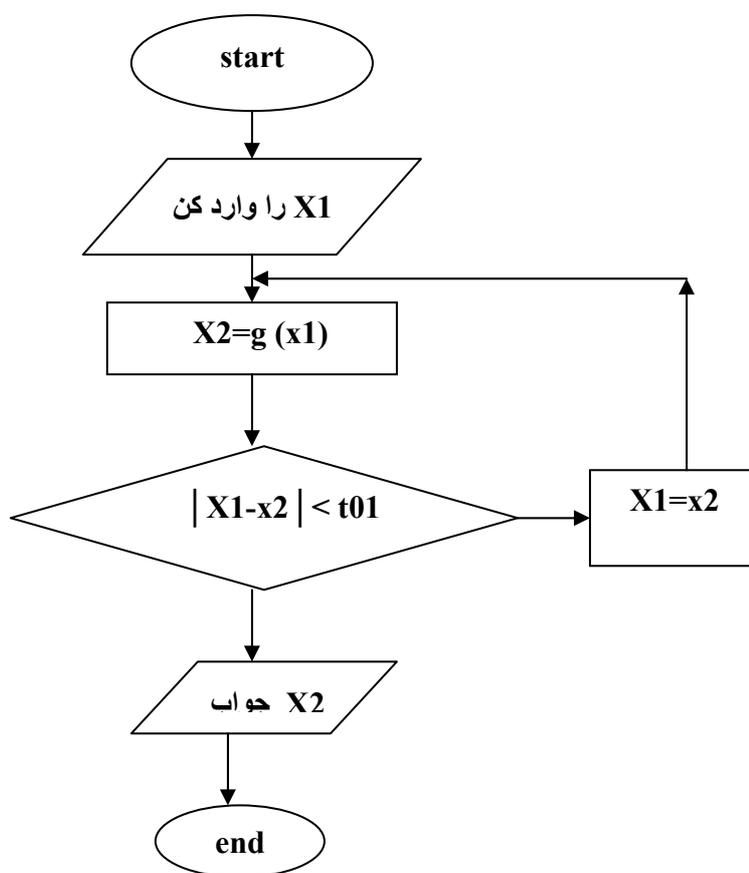
$$\bar{G}(x_n) = g(x_n) - g(\alpha) / x_n - \alpha \rightarrow g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha) \bar{g}(x_n) \quad x_{n+1} - \alpha = \bar{g}(x) (x_n - \alpha)$$

$$E_n = x_n - \alpha$$

$$E_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$$

پس همواره e_{n+1} کوچکتر از e_n می باشد چون همواره به سمت ریشه حرکت می کنیم .

$$\bar{G}(x) = e_{n+1} / e_n \rightarrow |\bar{g}(x)| < 1$$



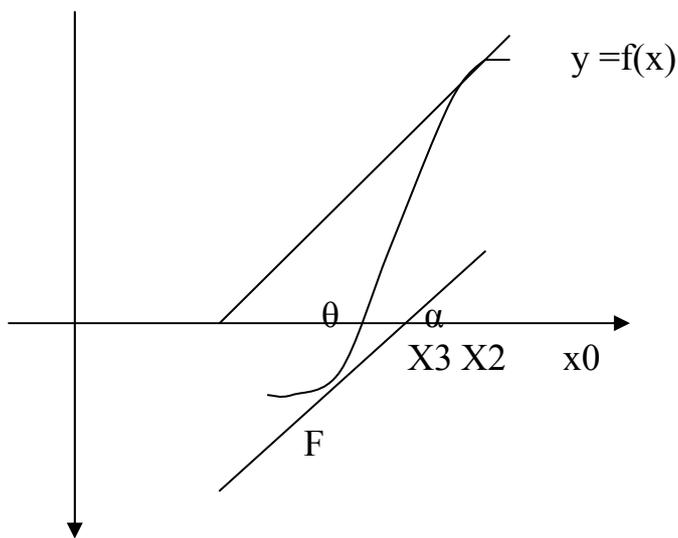
تمرین : روش B.S را جهت حل معادلات زیر استفاده کنید در ابتدا یک دامنه مناسب پیدا کنید . سپس ریشه را د محاسبه نمایید ۰,۰۰۵

$$1) e^{-x} - x - 2 = 0$$

$$2) 2e^{-x} - \sin x = 0$$

ج 1) 1.1462 , 1.8414

ج 2) 0.4210 , 3.04688



روش نیوتن . رابسون :

$$\tan \theta = f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$(x_0 - x_1) f'(x_0) = f(x_0) - f(x_1)$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n=0,1,2,3,4,\dots$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$|g'(x)| < 1 \quad \text{شرط همگرایی} \quad x_{n+1} = g(x_n)$$

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$g'(x_n) = 1 - \frac{f'(x_n) f(x_n) - f(x_n) f''(x_n)}{\{f'(x_n)\}^2} = \frac{f(x_n) f''(x_n)}{\{f'(x_n)\}^2}$$

$$\frac{f(x_n) - f(\alpha)}{\{f(x_n)\}^2} < 1$$

اگر α ریشه باشد $x_{n+1} = g(x_n)$

$\alpha = g(\alpha)$
 $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha)$
 انجام می دهیم تا جمله درجه دوم $x = \alpha$ سری تیلور در $x = \alpha$ را بر اساس بسط

$$G(x) = g(\alpha) + (x - \alpha)g'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} g''(s) \quad * \quad X < S < \alpha$$

$$G(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha) + \frac{1}{2} \{f''(x)\} = 0$$

$$x_{n+1} - \alpha = g(\alpha) + (x - \alpha)g'(s) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} g''(s) - g(\alpha)$$

$$x_{n+1} - \alpha = (x - \alpha)g'(s) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} g''(s)$$

$$x_{n+1} - \alpha = e_{n+1} \rightarrow x_n - \alpha = e_n$$

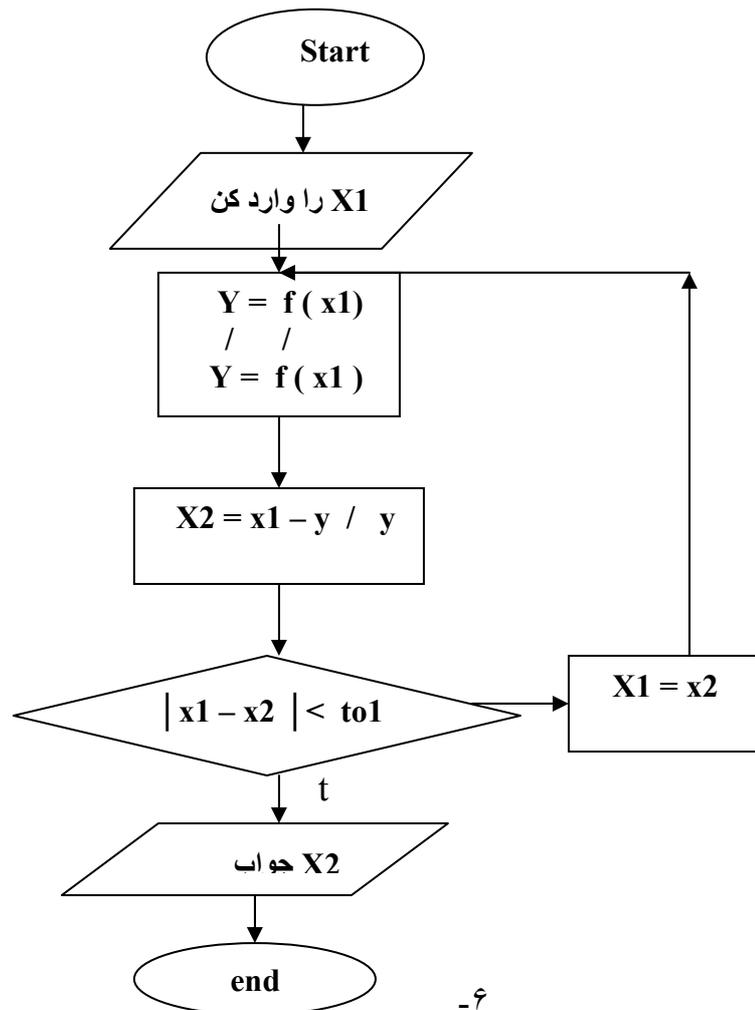
$$e_{n+1} = e_n + \frac{1}{2} g''(s) e_n^2 \quad y = ax \quad \text{رابطه بین اینها درجه دو است مانند}$$

مقدار اولیه تا حدودی باید به ریشه نزدیک باشد .

a

X1

x0



مثال : معادله زیر را به روش نیوتن با دقت ۱۰ حل کنید .
-۶

$$F(x) = x - \cos x$$

$$F(x) = 1 + \sin x \quad x_{n+1} = x_n - \frac{X_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$$

$$X_0 = 3 \rightarrow x_1 = \frac{3 - \cos 3}{1 + \sin 3}$$

n	Xn
0	3
1	۰.۴۹۶۵۵۸۲ -
۲	۲,۱۵۱۰۰۳۸
۳	۰,۶۸۹۶۶۲۷
۴	۰,۷۳۹۶۵۳۶
۵	۰,۷۳۹۰۸۵۲
۶	۰,۷۳۹۰۸۵۱

مثال: مطلوبست محاسبه $\sqrt[5]{5}$ با استفاده از روش نیوتن با تقریب 10^{-4}

n	xn
0	1
1	۱,۳۹۴۳۷
۲	۱,۲۹۲۳۶
۳	۱,۲۶۱۰۵
4	1.25851
۵	۱,۲۵۸۵۰

$$F(x) = x - 5 \rightarrow \sqrt[5]{x} = 5$$

$$F(x) = 7x \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - 5}{7x_n}$$

$$X_0 = 1$$

$$X_1 = 1 - \frac{1 - 5}{7} = 1.39437$$

روش نیوتن را برای معادله روبرو با دقت 10^{-3} بکار ببرید.

$$f(x) = 3x + \sin x - e$$

$$F(x) = 3 + \cos x - e$$

$$X_{n+1} = x_n - \frac{3x_n + \sin x_n - e}{3 + \cos x_n - e}$$

$$X_0 = 0 \quad x_1 = 0 - \frac{0 + \sin - e}{3 + \sin - e} = 0.3333$$

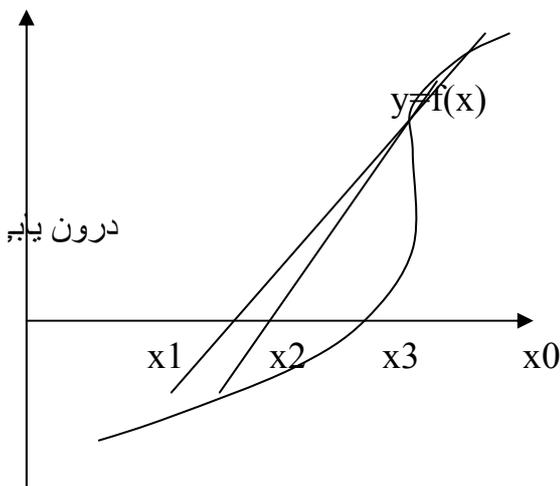
$$X_2 = 0.3333 - \frac{0.068418}{2.59934} = 0.363017$$

$$X_3 = 0.363017 - \frac{-0.279 * 10}{2.50226} = 0.365217$$

روش وتری یا سکانت (secant method)
(درون یاب خطی liner interpolation)

$$X_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

$$F(x_n) = \frac{F(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

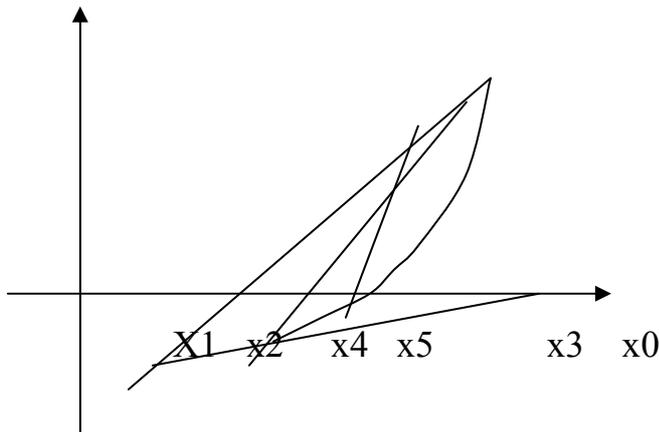


$$X_{n+1} = \frac{F(x_n)}{F(x_n) - f(x_{n-1})} (x_n - x_{n-1})$$

برای شروع این روش به دو مقدار نیاز داریم .

$$\frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(x_1)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F(x_1) f(x_0)} x_1$$



مثال : تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$ با $x_0 = 1$ و $x_1 = 2$ را به روش درون یابی وتری یا تلورانس

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{F(x_n) - f(x_n - 1)} \quad (x_n - x_{n-1}) \quad -3$$

10 حل کنید .

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F(x4)
0	1	2	1,57142	-4	3	1,36444 -
1	1,57142	2	1,70540	1,36444 -	3	0,29784 -
2	1,70540	2	1,72788	0,24784 -	3	0,0 -
3	1,72788	2	1,73140	0,03436 -	3	3936
4	1,73140	2	1,73144			0,00 -
						615

$$X_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F(x_1) - f(x_0)} \quad (x_1 - x_0)$$

حل به روش وتری :

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F(x2)
0	1	2	1,57142	-4	3	1,36444 -
1	2	1,57142	1,70540	3	1,36444 -	0,24879 -
2	1,57142	1,70540	1,73513	1,36444 -	0,24879 -	0,02920 -
3	1,70540	1,73512	1,73199	0,02920 -	0,02920 -	0,0005755 -
4	1,73513	1,73199	1,73205			
			-3			
			10			

مثال : یک گلوله ۲ گرمی به طور افقی شلیک میشود . و در لحظه معین به حداکثر سرعت خود می رسد . و پس از تدریج شروع به سقوط کردن می کند . در صورتیکه فرمول سرعت این گلوله به شکل

$$v = 30 \text{ m/s} \quad \text{با فرض} \quad v = (1.4 * 10^{-5} v^2 + 9.81 * 10^{-5} v - 1.15 * 10^{-3})$$

سرعت حداکثر را حساب کنید . (10) $f(v) = \frac{9.81 * 10^{-5} v^2 - (1.4 * 10^{-5} v - (1.115 * 10^{-3}) v}{1000}$

$V_0 = 30 \text{ m/s} \quad v_1 = 30.1$

$$V_{n+1} = v_n - \frac{F(v_n)}{F(v_n) - f(v_{n-1})} (v_n - v_{n-1})$$

N	X n	F (v)
۰	۳۰	۰,۰۱۹۶
۱	۳۰,۱	۰,۰۰۶۸
۲	۳۰,۱۵	۰,۰۰۶۴۸
۳	۳۸,۶۲	۰,۰۰۰۸۹۶ -
۴	۳۷,۶۴	۰,۰۰۰۰۹۰۹
۵	۳۷,۷۳۳	۰,۰۰۰۰۰۰۹۹۹
۶	۳۷,۷۳۴	۰,۰۰۰۰۰۰۰۱۸۴ -

جواب

→ $V = 37.734$

تمرین : نوشته ای نزدیک به $x = -0.5$ مربوط به $e - 3x = 0$ را به روش نیوتن با دقت ۱۰ حساب کنید

Ans : $x = -0.4589623$

۴

تمرین: ریشه تابع $f(x) = 1/2 + 1/4 x - x \sin x - 1/2 \cos 2x$ را با مقادیر اولیه $p_0 = \pi/2$ -۵
 حساب کنید با دقت ۱۰. $P_0 = 5$, $p_0 = 10$

Ans : $x = 1.89 = 5446$ $n = 21$

Ans = $x = 1.895493$ $n = 27$

Ans : $x = 1.895445$ $n = 22053$

تمرین: معادله $2 - x = \ln x$ دارای جوابی در نزدیکی $x = 1.5$ میباشد جواب این معادله را به روش سکانت -۵

دقت ۱۰ حساب کنید. $x_0 = 2$ $x_1 = -3$ $root = 1.5571456$

تمرین: معادله $x = 0.2 \sin x - 0.5 = 0$ دارای ریشه مثبت بین ۰,۲ و ۱ می باشد با به کار بردن روش درون یابی خطی مقدار تقریبی این ریشه را تا ۱۰ بدست آورید. -۷

Root = 0.6154682

تمرین: ثابت کنید خطای روش وتری به صورت زیر است : $e_{n+1} = \frac{1}{2} \frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)} e_n^2$

مثال: با استفاده از روش درون یابی خطی یکی از ریشه های تابع زیر را محاسبه کنید.

$F(x) = x^3 - \sin x + 4x^2 + 6x + 9$ $\sin x = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$
 $tol = 10^{-3}$

$$X_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - f(x_n - 1)} (x_n - x_{n-1})$$

n	X0	X1	X2	F(x0)	F(x1)	F(x2)
۱	۷	۸	۷,۵۸۸۵	۴۱,۶۸۳۸۸	-	۲۰,۷۹۸۲۵
۲	۷	۷,۵۸۹۵	۷,۱۱۶۴		۴۶۵,۴۷۸۸۳	۱,۸۳۴۷۹ -
۳	۷	۷,۱۱۷۶۴	۷,۱۱۲۶۸	۴۱,۶۸۳۸۸	۲,۷۹۸۲۵	۰,۱۵۱۴۱
۴	۷	۷,۱۱۲۶۸	۷,۱۱۳۰۹	۴۱,۶۸۳۸۸	۱,۸۳۴۷۹ -	-
۵	۷	۷,۱۱۳۰۹	۷,۱۱۳۰۶	۴۱,۶۸۳۸۸	۰,۱۵۱۴۱	۰,۰۰۱۲۵۷
۶	۷	۷,۱۱۳۰۶	۷,۱۱۳۰۶	۴۱,۶۸۳۸۸	۰,۰۱۲۵۷ -	۰,۰۰۱۰۴
			جواب		۰,۰۰۱۰۴	۰,۰۰۰۰۹

۲

روش Δ اتیکن :

همگرایی روش تکرار ساده درجه اول یا خطی می باشد $e_{n+1} = e x \bar{y}(\alpha)$

اگر α یک نقطه ثابت باشد و $y(\alpha) \neq 0$ آنگاه برای سه مقدار متوالی x_n , x_{n+1} , x_{n+2} داریم :

$$\frac{E_{n+1}}{E_n} = \bar{Y}(\alpha)$$

$$\frac{E_{n+1}}{e_n} = \frac{E_{n+2}}{e_{n+1}}$$

$$\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} = y(\alpha)$$

$$e_{n+1} = x_{n+1} - \alpha$$

$$e_n = x_n - \alpha$$

$$= x_{n+2} - \alpha$$

$$\frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha} = \frac{x_{n+2} - \alpha}{x_n - \alpha} = \frac{x_{n+2} - \alpha}{x_{n+1} - \alpha} = \frac{(x_{n+1} - x_n) - x_{n+2} + x_n}{2x_{n+1} + x_n}$$

$$x_{n+3} = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad \Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta(x_{n+1} - \Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n$$

$$= x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$$

$$X_{n+3} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{(\Delta^2 x_n)} \quad n=0,3,6,9,\dots$$

$$x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1)$$

توجه: در روش Δ اتیکن x_0 را میزنیم x_1 را از فرمول:

$$\text{سپس } x_3 \text{ را از فرمول } x_3 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} \text{ پس } x_4 = g(x_3) \text{ و } x_5 = g(x_4) \text{ و } x_6 \text{ را از}$$

فرمول بدست می آوریم .

ریشه منفی معادله $x + x - 2 = 0$ را با روش تکرار ساده و روش Δ اتیکن با $TOI = 10$ و $X_0 = -1$ و

$$X + X - 2 = 0 \rightarrow X = 2 - x \rightarrow x = \frac{2}{x} - 1 = y(x) \text{ حساب کنید .}$$

$$X_1 = y(x_0) = \frac{2}{x_0} - 1 = \frac{2}{-1} - 1 = -2.3333$$

$$E_n = \frac{|x_n - \alpha|}{|x_n + 2|} = + 0.5$$

n	Xn	En
0	1,5 -	0,5
1	2,3333 -	0,3333
2	1,8571 -	0,1429
3	2,0769 -	0,769
4	1,9630 -	0,370
	.	0,0003
	.	0,0001
11	2,0003 -	
12	1,9999 -	

راه دوم : Δ

$$X_0 = -1.5 \quad x_1 = g(x_0) = 2 / -1.5 - 1 = -2.3333$$

$$X_2 = g(x_1) = 2 / -2.3333 - 1 = -1.8571$$

$$X_3 = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)}{X_2 - 2x_1 + x_0} = -2.0303$$

$$X_4 = g(x_3) = \frac{2}{-2.0303} - 1 = -1.9851$$

$$X = g(x_4) = \frac{2}{-1.9851} - 1 = 1.20075$$

$$X_6 = (-2.0303) - \frac{(x_4 - x_3)}{X_5 - 2x_4 + x_2} = -2.0001$$

$$X_7 = y(x_6) = -2.000$$

$$X_8 = y(x_7) = -2.000$$

$$X_9 = x_6 - \frac{(x_7 - x_6)}{X_8 - 2x_7 + x_5} = -2.000$$

$$X^8 - 2x^2 + x^6$$

- ضرایب ۳ را از هم کم می کنیم تا تلورانس بدست آید .

n	Xn	Ex
۰	۱,۵ -	۰,۲
۳	۲,۰۳۰۳ -	۰,۰۳۰۳
۶	۲,۰۰۰۱ -	۰,۰۰۰۱
۹	۲,۰۰۰ -	۰,۰۰۰

مثال : اندازه های بحرانی برای یک راکتور هسته ای حل معادله بحرانی زیر می باشد فرض نوع ساده ای از معادله

بحرانی بصورت $\tan^{-1}(0.1x) = e^{9/2}$ می باشد جواب معادله از نظر فیزیکی وقتی معنی دار است

که کوچکترین مقدار مثبت x در بازه 6 و 7 باشد این معادله را با $TOI = 10$ پیدا کنید .

$$X = 10 \text{ ARCTAN}^{-1} \left(\frac{9}{2} E \right) = Y(X)$$

$$X^{n+1} = 10 \text{ ARCTAN}^{-1} \left(\frac{9}{2} E \right) \quad X^3 = 10 \arctan^{-1} \left(\frac{9}{2} e \right) -$$

n	xn
۰	۶
۳	۴,۱۷۹۸۲۰
۶	۵,۹۵۰۶۱۵
۹	۶,۶۵۹۲۳۷
۱۲	۶,۱۲۴۰۳
۱۵	۶,۷۱۴۹۷۹
۱۸	۶,۷۱۵۱۰۰
۲۱	۶,۷۱۵۱۰۶

$$\text{Roots} = 6.715106$$

$$f(x, y) = 0$$

حل دستگاه معادله غیر خطی :

$$G(x, y) = 0$$

حل اینگونه معادلات معمولاً "پیچیده است مگر آنکخ برای معادلات ساده بتوان از روش حل نیوتن استفاده کرد

اگر x_0, y_0 مقادیر تقریبی اولیه ریشه باشند $\Delta x, \Delta y$ نمو حرکت به سمت ریشه باشد آنگاه

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 + \Delta x_0 & x_2 &= x_1 + \Delta x_1 & x_n &= x_{n-1} + \Delta x_{n-1} \\ Y_1 &= y_0 + \Delta y_0 & y_2 &= y_1 + \Delta y_1 & y_n &= y_{n-1} + \Delta y_{n-1} \\ X_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \\ Y_{n+1} &= y_n + \Delta y_n \end{aligned}$$

تیلور توابع f, y

$$\begin{aligned} F(x, y) &= f(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0) = \frac{f(x_0, y_0)}{\Delta x_0} + \frac{y f(x_0, y_0)}{\Delta y_0} + \frac{Y f(x_0, y_0)}{\Delta x_0} + \dots = 0 \\ &\frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{y f(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{Yf(x_0, y_0)}{\Delta X} + \dots = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(x, y) &= y(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = y(x_0, y_0) + \frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{Yf(x_0, y_0)}{\Delta y} + \dots \\ &\frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta x} + \dots = 0 \end{aligned}$$

اگر از تفاضلات مرتبه دوم و بالاتر صرف نظر شود آنگاه:

$$\left(\begin{aligned} \frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{Yf(x_0, y_0)}{\Delta y} - f(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{y(x_0, y_0)}{\Delta x} + \frac{Yf(x_0, y_0)}{\Delta y} - y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right)$$

$$\frac{Yf(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad A11, \frac{yf(x_0, y_0)}{\Delta Y} = a_{12}$$

$$\frac{y(x_0, y_0)}{\Delta x} = a_{21}, \frac{Y(x_0, y_0)}{\Delta y} = a_{22}$$

$$a_{11} \Delta x_0 + a_{12} \Delta y_0 = -f(x_0, y_0)$$

$$\Delta x_0 = ? \quad \Delta y_0 = ?$$

$$a_{21} \Delta x_0 + a_{22} \Delta y_0 = -y(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \Delta x_0 \\ y_1 = y_0 + \Delta y_0 \end{cases}$$

• باید اختلاف x ها از تلورانس کمتر باشد .

• باید اختلاف y ها از تلورانس کمتر باشد .

مثال : دستگاه معادله زیر را به روش نیوتن با x_0, y_0 زیر با تلورانس 10^{-2} حل کنید .

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2 + y^2 - 25 \\ Y(x,y) = x - y - z \end{cases} \quad F(x_0, y_0) = (3, 4)$$

$$\frac{6r}{6x} = 2x, \quad \frac{6f}{6y} = 2y$$

$$6f/6x = 2x, \quad 6f/6y = -2y$$

$$2x_0 \Delta x_0 + 2y_0 \Delta y_0 = -f(x_0, y_0)$$

$$2x_0 \Delta x_0 - 2y_0 \Delta y_0 = -y(x_0, y_0)$$

$$\begin{cases} 6\Delta x_0 + 8\Delta y_0 = -(0) \\ 6\Delta x_0 - 8\Delta y_0 = 14 \end{cases}$$

→

$$\Delta x_0 = 14 / 12 = 1.66667$$

$$\Delta y_0 = -14 / 12 = -1.66667$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = 4.66667$$

$$y_0 = y_0 + \Delta y_0 = 2.33333$$

$$2x_1 \Delta x_1 + 2y_1 \Delta y_1 = -f(x_1, y_1) - 0.38887$$

$$2x_1 \Delta x_1 - 2y_1 \Delta y_1 = -y(x_1, y_1) - 2.33335$$

$$\Delta x_1 = -0.16333, \quad \Delta y_1 = 0.17156$$

$$X_2 = x_1 + \Delta y_1 = 4.00334$$

$$Y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 3.004904$$

$$\begin{cases} 2x_2\Delta x_2 + 2y_2\Delta y_2 = -f(x_2, y_2) \\ 2x_2\Delta x_2 - 2y_2\Delta y_2 = -g(x_2, y_2) \end{cases}$$

$$\Delta x_2 = -0.00316, \quad \Delta y_2 = -0.004900$$

$$\begin{cases} x_3 = 4.000174 \\ y_3 = 3.000004 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 - x_2 < 10^{-2} \\ Y_3 - y_2 < 10^{-2} \end{cases}$$

تمرین : دستگاه معادله زیر را به روش نیوتن با دقت 10^{-4} بدست آورید .

$$X + y - 20x + 40 = x$$

$$Y + x - 20y + 20 = x$$

$$x = 2.436$$

$$y = 1.1888$$

$$x = 17.458$$

$$y = 2.092$$

$$X_0 = y_0 \neq 0$$

$$701 = 10$$

$$\begin{cases} \sin x - 4 \cos x = 0 \\ X = 0.64115 \end{cases}$$

تمرین : معادله روبرو مفروض است ریشه این معادله راه روش

تکرار ساده با دقت 10^{-4} بدست آورید . جواب معادله با روش Δ اتیکن با همان دقت حساب نمایید .
مثالهای پیکارد :

مثال : تابع $f(x) = x + x - 1$ را به روش تکرار ساده حل کنید .

$$x = 1 - x = y(x) \quad \text{بررسی شرط همگرایی}$$

$$X = y_1(x) = 1 - x$$

تابع را در بازه $\{0, 1\}$ قرار می دهیم

$$0 < x < 1 \rightarrow 0 < x < 1 \rightarrow 0 > -x > -1$$

$$1 > 1 - x > 0 \rightarrow 0 < y_1(x) < 1$$

صادق است

$$X=1 \rightarrow 1-31 < 1 \rightarrow 3 < 1 \quad \left| \bar{G}(x) \right| < 1 \rightarrow -3x = -\bar{g}(x) \quad \text{پس } g(x) \text{ واگرا خواهد بود.}$$

$$2: \quad x \sqrt{1-x} = g_2(x)$$

$$3: \quad g_3(x) = x \frac{2}{1+x} \quad 0 < x < 1 \rightarrow 0 < x < 1$$

$$1 < x+1 < 4$$

$$1 < \frac{1}{1+x} < 2 \rightarrow g_3(x) \in \{6,5,1\} \subset \{0,1\}$$

$$G_3(x) = \frac{-2x}{(1+x)^2}, \quad \bar{g}_3(0) = 0$$

$$\bar{g}_3(1) = -0.5 \rightarrow \text{پس این مقدار همگرا است. } \left| \bar{G}_3(x) \right| < 1$$

n	$G(x) = 1-x$	$G_2(x) = \sqrt{1-x}$	$G_3(x) = 2/(1+x)$
0	0,5	0,5	0,5
1	0,875	0,7937	0,8
2	0,3301	0,5909	0,6098
3	0,9640	0,7424	0,7290
4	0,1041	0,0363	0,6530
5	0,9989	0,7194	0,7011
6	0,0034		0,6705
7	1,000		0,6899
8	0,000	0,6819	0,6854
9	1,000	0,6816	0,6804
10	0,000	جواب	0,6836

	واگرا		۰,۶۸۱۵
--	-------	--	--------

عدد اول را حدس می زنیم . $x_0 = g_1(x_0) = 1 - x_0^2 = 1 - (0.5)^2 = 0.75$ 0.8828 0.8820

جواب

مثال : مقدار تابع $x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$ را با تلورانس ۱۰ حساب کنید .

n	Xn
۰	۱
۱	۱,۷۳۲۰
۲	۱,۹۳۱۸۲
۳	۱,۹۸۲۸۹
۴	۱,۹۹۵۷۲
۵	۱,۹۹۸۹۳
۶	۱,۹۹۹۷۳
۷	۱,۹۹۹۹۳
۸	۱,۹۹۹۹۹۸ ~ ۲

$$x_0 = \sqrt{2}$$

$$x_1 = \sqrt{x_0 + 2}$$

$$x_2 = \sqrt{x_1 + 2}$$

$$x_n + 1 = \sqrt{x_n + 2}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

-۵

تمرین : مقدار تابع a را با $TOI = 10$ حساب کنید .

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$A = 0.41421$ ANS

-۲

با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله $F(x) = e^{-3x}$ را در فاصله $\{0, 1\}$ با دقت ۱۰ حساب کنید .

$$e^{-3x} = 0 \rightarrow x = e / 3 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{e / 3}$$

n	xn
5	0,9033

n	Xn
0	0,5
1	0,7413
2	0,8364
3	0,87719
4	0,0,8952

مثال: با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله زیر را با مقدار اولیه ۱ و تلورانس ۱۰ بدست آورید -۴

$$F(x) = e^{-x} - \cos x$$

$$E - \cos x \equiv 0 \quad e^{-x} = \cos x \rightarrow x = \cos^{-1}(e^{-x})$$

$$X_{n+1} = \cos^{-1}(e^{-X_n})$$

n	Xn
۰	۱
۱	۱,۹۹۰۷
۲	۱,۲۶۲۹۷
۳	۱,۲۸۴۰۷
۴	۱,۲۹۰۲۲
۵	۱,۲۹۱۹۹
۶	۱,۲۹۲۹۹
۷	۱,۲۹۲۶۴
۸	۱,۲۹۲۶۸

تمرین: با استفاده از روش تکرار ساده ریشه معادله رویرو را -۴
 $f(x) = x^2 + 4xe^x + e^{2x}$
 بادقت ۱۰ بدست آورید .
 roots = -0.56714 = ans

ریشه یابی با نرم افزار مطلب :

Roots , solve

$$F(x) = y_0 + y_1x + y_2x^2 + \dots + y_Nx^N$$

$$F = \{ y_0, y_1, y_2, \dots, y_N \}$$

در یک معادله درجه ۴ پنج ضریب داریم .

$$f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 3$$

$$F = \{ 1 \quad \Theta \quad -1 \quad \Theta \quad 3 \}$$

$$F(X) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 3$$

$$\{ 1 \quad 2 \quad -7 \quad \Theta \quad 3 \}$$

: ROOTS

$$X = \text{roots} (f)$$

$$-3.7913 \quad , \quad 1.6180 \quad , \quad 0.7913 \quad , \quad -0.6180$$

: solve

solve (معادله مورد نظر)

$$F(x) = e^x (\sin x) + 25x + 10$$

$$Y = \text{solve} (\exp(x) .* \sin(x) + 25 .* x + 10 , x)$$

$$\gg -0.3897$$

* برای اسکالر

* برای رشته و بردار

$$Y = \left(\begin{array}{c} \text{solve} \left(x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 3x \right) \\ -3.7913, 1.6180, -0.6180 \end{array} \right)$$

$$\left[\begin{array}{l} F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 \\ G(x, y) = x - y - 7 \end{array} \right.$$

$$\gg e1 = x^2 + y^2 - 25$$

$$\gg e2 = x - y - 7$$

$$\gg \{x, y\} = \text{solve}(e1, e2, x, y)$$

$$X = \{4\} \{-4\} \{4\} \{-4\}$$

$$Y = \{3\} \{3\} \{-3\} \{-3\}$$

$$p_5 = ax^5 + bx^4 + cx^3 + \dots$$

تفاضلات محدود درون یابی و بیرون یابی

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon \quad f(x) = p_n(x) \quad \text{اگر } \epsilon < 0 \text{ آنگاه برای } f(x) \text{ داشته باشیم}$$

$P_n(x)$ را چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)$ گویند.
چند جمله ای های سری تیلور به عنوان درون یاب.

$$P_n(x) \sim f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)$$

$$\text{جمله های سری تیلور} \rightarrow r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

x

مثال: تابع $f(x) = e$ و $x_0 = 0$ را چند جمله ای سری تیلور تقریب بزنید.

$$P_0(x) = e = 1$$

$$P_0(x) = f(x_0) = P_1(x) = f(x_0) + (x - 0) f'(x)$$

$$P_1(x) = 1 + x$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$P_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

X	P0	P1	P2	P3	P4	P5	$F(x) = e^x$
-۲	۱	-۱	۱	۰,۳۳۳۳۳ -	۰,۳۳۳۳	۰,۰۶۶۶۷	۰,۱۳۳۳۴
-۱,۵	۱	۰,۵ -	۰,۶۲۵	۰,۰۶۲۵	۰,۲۷۳۴۴	۰,۲۱۰۱۶	۰,۲۲۳۱۳
-۰,۵	۱	۰,۵	۰,۶۲۵	۰,۶۰۴۱۷	۰,۶۰۶۶۷	۰,۶۰۶۵۱	۰,۶۶۶۵۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱,۵	۱	۲,۵	۳,۶۲۵	۴,۱۸۷۵	۴,۳۹۸۴۴	۴,۴۶۱۷۲	۴,۴۸۱۶۹
۲	۱	۳	۵	۶,۳۳۳۳	۷	۷,۲۶۶۶۷	۷,۳۸۹۰

پس با توجه به جدول با بزرگتر شدن عدد میزان خط نیز در سری تیلور رشد پیدا می کند پس سری تیلور جهت درون یابی مناسب نمی باشد .

تفاضل تقسیم شده نیوتن :

مقدار تابع $f(x)$ در چند نقطه ای x داده شده است لزومی ندارد x ها هم فاصله باشند یا ترتیب آنها منظم ولی آنها منظم باشد معتبر است .

X	F(x)
X0	F(x0)
X1	F(x1)
X2	F(x2)
X3	F(x3)

فرمول تفاضلات تقسیم شده نیوتن
فرمول لائرانژ

درون یابی فاصله نامساوی x ها

درون یابی پیشرو
درون یابی پس رو
درون یابی مرکزی

فاصله مساوی x ها

یک چند جمله ای درجه n بنام $p_n(x)$ تعریف می کنیم .

$$P_n(x) = y_0 + (x - x_0) y_1 + (x - x_0)(x - x_1) y_2 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) y_n$$

ضرایب y_1 را به شکلی تعیین می کنیم برای $n+1$ نقطه (x_i, f_i) و $i = 0, 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم
 $P_n(x) = f(x)$ در اینصورت $p_n(x)$ بنام چند جمله ای درون یاب تابع $f(x)$ نامیده می شود .

* بصورت استاندارد تعریف می کنیم :

X	f(x)	$f\{x_i, x_{i+1}\}$	$f\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}$	$f\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}\}$
X0	f0	$\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \quad (1)$		
			$f_2 - f_1 \quad (1)$	$F_0 \quad (2)$
				$F_1 - f_0 \quad (2)$
				(3)

$$\begin{array}{l}
 X_1 \quad f_1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} = f_1 \quad\quad\quad F_0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} \\
 \quad\quad\quad X_2 - x_1 \quad\quad\quad \quad\quad\quad \quad\quad\quad X_3 - x_0 \\
 \quad\quad\quad (1) \quad\quad\quad (2) \\
 x_2 \quad f_2 \quad\quad\quad f_2 \quad\quad\quad F_1 \\
 X_3 \quad f_3
 \end{array}$$

$$\text{تفاضل مرتبه اول در } x_0 \quad F \{ x_0, x_1 \} = \frac{F_1 - f_0}{X_1 - x_0} = f_0 \quad (1)$$

$$\text{تفاضل مرتبه اول در } x=1 \quad F \{ x_1, x_2 \} = \frac{f_2 - f_1}{X_2 - x_1} = f_1 \quad (1)$$

$$\text{تفاضل مرتبه دوم در نقطه } x_0 \quad F \{ x_0, x_1, x_2 \} = \frac{F \{ x_2 - x_1 \} - f \{ x_1, x_0 \}}{X_2 - x_0} = f_0 \quad (2)$$

$$F \{ x_t, x_s \} = \frac{F_s - f_t}{X_s - x_t} = \frac{f_t - f_s}{x_t - x_s} = f \{ x_s, x_t \}$$

$$\text{تفاضل مرتبه } n \text{ در نقطه } x=0 \quad F \{ x_0, x_1, \dots, x_n \} = \frac{f \{ x_1, x_2, \dots, x_n \} - f \{ x_0, x_1, \dots, x_n \}}{N-1} = f_0 \quad (n)$$

* در فرمول اصلی مقادیر زیر را جایگزین می کنیم :

$$X = x_0 \quad p_n(x_0) = y_0 = f_0 \quad y_0 = f_0$$

$$X = x_1 \rightarrow p_n(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0) y_1 = f_1 \quad f_0 + (x_1 - x_0) y_1 = f_1 \quad y_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}$$

$$X = x_2 \quad p_n(x_2) = y_0 + (x_2 - x_0) y_1 + (x_2 - x_1) y_2 \quad y_2 = f_0 \quad (2)$$

$$X = x_n \rightarrow p_n(x_n) \quad y_n = f_0 \quad (n)$$

$$P_n(x) = f_0 + (x - x_0) f_0 + (x - x_0)(x - x_1) f_0 + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f_0 \quad (n)$$

فرمول تفاضل تقسیم شده نیوتن در نقطه $x = x_0$

$$P_n(x) = f_i + (x - x_i) f_i^{(1)} + (x - x_i)(x - x_{i+1}) f_i^{(2)} + \dots + (x - x_i)(x - x_{i+n-1}) \dots (x_i - x_{i+n-1}) f_i$$

فرمول کلی تفاضل تقسیم شده نیوتن

مثال: چند جمله درجه دومی بنویسید که در برگزیده داده های جدول زیر در کلیه نقاط از $x_0 = 3.2$ تا $x_3 = 4.8$ باشد و با استفاده از این چند جمله ای مقدار f را حساب کنید.

X	F(x)
۳,۲	۲۲
۲,۷	۱۸
۱	۱۴,۲
۴,۸	۳۸,۲
۵,۶	۵۱,۷

X	f(x)	(۱) f _i	(۲) f _i	(۳) f _i
X ₀ 3.2	22	$\frac{18 - 22}{2.7 - 3.2} = 8.4$	$\frac{2.118 - 8.4}{1 - 3.2} = 2.858$	$\frac{2.012 - 2.856}{4.8 - 3.2} = -0.528$
x ₁ 2.7	۱۸	$\frac{14.2 - 18}{1 - 2.7} = ۲,۱۱۶$	$\frac{6.342 - 2.118}{4.8 - 2.7} = 2.012$	
x ₂ 1	۱۴,۲	$\frac{35.2 - 14.2}{4.8 - 1} = 6.342$		
x ₃ 4.8	۳۶,۲			0.0865

$$x_4 \quad 5.6 \quad 31.7 \frac{51.7 - 38.2}{5.6 - 4.8} = 16.750 \quad 2,263$$

$$P_3(x) = f_0 + (x-x_0) f_0^{(1)} + (x-x_0)(x-x_1) f_0^{(2)} + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) f_0^{(3)}$$

$$= 22 + (x-3.4)(8.4) + (x-3.4)(x-2.7)(2.856) + (x-3.2)(x-2.7)(x-1)(0.5)$$

مبداء $X = x_1$

$$P_3(x) = f_1 + (x-x_1) f_1^{(1)} + (x-x_1)(x-x_2) f_1^{(2)} + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) f_1^{(3)}$$

$$= 18 + (x-2.7)(2.118) + (x-2.7)(x-1)(2.012)$$

$$P_3(3) = 22 + (3-3.2)(8.4) + (3-3.2)(3-2.7)(2.856) + (3-3.2)(3-2.7)(3-1) = 2.021$$

- مثال : جدول تفاسل حدود را برای داده های زیر تشکیل داده و برای تقریب $f(0.15)$ از آن استفاده کنید .
- (الف) چند جمله ای درجه دوم که از سه نقطه اول می گذرد .
 - (ب) چند جمله ای درجه دومی که از سه نقطه آخر می گذرد .
 - (ج) چند جمله ای درجه سه ایی که از چهار نقطه اول بگذرد .
 - (د) چند جمله ای درجه سوم که از چهار نقطه آخر بگذرد .
 - (ه) بزرگترین مقدار چند جمله ای دو بود .

X	F(x)
0,5	1,0025
0,2 -	1,3940
0,7	1,0084
0,1	1,221
0,0	1,1884

x	F(x)	(1) f _i	(2) f _i	(3) F _i	(4) F _i
X ₀ 0.5	1.0025	1.3940-1.0025			

			$\frac{-0.2 - 0.5}{-0.5593}$			
X1	-0.2	1.3940		0.6545		
			- 0.4284		- 0.3545	
X2	0.7	1.0084		۰,۷۹۶۷		۰,۲۲۹۴ -
	0.5		۰,۱۸۹۴ -		۰,۲۳۹۶ -	
X3	0.1	۱,۲۲۱		۰,۶۷۶۴		
			۰,۶۶۳ -			
X4	0.0	۱,۱۸۸۴				

$$P_2(x) = f_0 + (x-x_0)f_0^{(1)} + (x-x_0)(x-x_1)f_0^{(2)} \quad I=0$$

$$P_2(x) = 1.0025 + (x-0.5)(-0.5593) + (x-0.5)(x+0.2)(0.545)$$

$$P_2(x) = 0.66 + 5x - 0.7587x + 1.2157$$

$$\xrightarrow{I=2} p_2(x) = f_2 + (x-x_2)f_2^{(1)} + (x-x_2)(x-x_3)f_2^{(2)}$$

$$P_2(x) = 0.6764x - 0.73064x + 1.61453$$

$$=0 \quad p_3(x) = p_2(x) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)f_0 = p_2(x) + (x-0.5)(x+0.2)(x-0.7)(-0.35)$$

$$P_3(x) = f_1 + (x-x_1)f_1^{(1)} + (x-x_1)(x-x_2)f_1^{(1)} + (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f_1^{(1)} \quad I=1$$

معادله درجه ۴ $P_3(x) =$

$$I=0 \quad P_4(x) = p_3(x) + (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)f_4 = p_3(x) + (x-0.5)(x+0.2)(x-0.7)$$

$$F(0.15) = p_2(0.15) = f_2 + (x-x_2)f_2^{(1)} + (x-x_2)(x-x_3)f_2^{(2)}$$

$$P_2(0.15) = 1.0990$$

متفاوت محدود finite difference : وقتی فاصله x در جدول تفاضل یکسان باشد از روش اختلاف استفاده
 ۱. تفاضل پیشرو (forward difference) :

$$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$$

$$\Delta f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i = f_{i+2} - f_{i+1} - f_{i+1} + f_i = f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i$$

$$\Delta f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$$

$D f_i = f_i - f_{i-1}$: (password difference) تفاضل پس رو

$$D F_i = D f_i - D F_{i+1} = (f_i - f_{i-1}) - (f_{i-1} - f_{i-2}) = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$$

$$D f_i = D f_i - D f_{i-1}$$

$s f_i = f_{i+1} - f_{i-1}$: (center different) تفاضل مرکزی

$$S f_i = s f_{i+1} - s f_{i-1} = (f_{i+2} - f_i) - (f_i - f_{i-2}) = f_{i+2} - 2f_i + f_{i-2}$$

فرمول تفاضل پیشرو نیوتن : (NFF)
 طول گام $h = x_{i+1} - x_i$
 $s = \frac{x - x_i}{n}$

$$P_n(x) = f_0 + \binom{(1)}{X-x_0} f_0 + \binom{(2)}{(x-x_0)(x-x_1)} f_0 + \dots + \binom{(n)}{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})} f_0$$

$$X - x_0 = sh$$

$$\binom{(1)}{x_1 - f_0} \Delta f_x$$

$$F_0 = \frac{X_1 - x_0}{h}$$

$$(x - x_0)(x - x_1) = \frac{(x - x_0)(x - x_0 + x_0 - x_1)}{sh \cdot sh - sh} = sh(sh - h) = s(s - 1)h$$

$$F_0 = \frac{f_1 - f_0}{X_2 - x_0} = \frac{\Delta f_0 / n}{2h} = \frac{\Delta f_0}{2h}$$

$$P_n(x) = f_0 + s \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{N!} \Delta^n f_0$$

$$P_n(x) = f_i + s \Delta f_i + \frac{S(s-1)}{2!} \Delta^2 f_i + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_i + \dots + \frac{s(s-1)(s-2)\dots(s-n+1)}{N!} \Delta^n f_i$$

نکته : $\{k\} = \frac{S!}{(s-k)! k!} = \frac{s(s-1)\dots(s-k+1)}{k!}$, $\{0\} = 1$

$$(a+b)^N = \{0\} a^N + \{1\} a^{N-1} b + \{2\} a^{N-2} b^2 + \dots$$

$$P_n(x) = f_i + \{1\} \Delta f_i + \{2\} \Delta^2 f_i + \dots + \{n\} \Delta^n f_i$$

توجه : فرمول NFF برای نقاط (درون یابی نقاط) روی جدول بکار می رود . همچنین XI را نزدیکترین X در نظر می گیریم .

مثال : جدول زیر مفروض می باشد مطلوبست محاسبه الگوریتم 2.15 : $\log(2.15) = ?$

x	$F_i = \tan(x_i)$	ΔF_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
$X_0 = 2.15$	0.30303	$X_1 - X_0 = 0.8139$				

X1	2.2	۰,۳۴۲۴۲		۰,۰۰۳۶ -			
X2	2.4	۰,۳۸۲۱	0.3779	۰,۰۰۳۰۳ -	۰,۰۰۰۵۷		
X3	2.6	۰,۴۱۴۹۷	۰,۳۷۷۶	-	۰,۰۰۰۴۶	۰,۰۰۰۱۱ -	۰,۰۰۰ -
X4	2.8	۰,۴۴۷۱۶	۰,۳۲۱۹	۰,۰۰۲۰۵۷	۰,۰۰۰۳۴	۰,۰۰۰۱۲ -	
X5	3	۰,۴۷۷۱۲	۰,۲۹۹۶	۰,۰۰۲۲۳ -			

$$I = 1$$

$$H = 0.2, \quad \frac{x - x_i}{H} = \frac{2.15 - 2.2}{0.2} = -0.25$$

$$P_4(2.15) = f_0 + s \Delta f + \frac{S(S-1)}{2!} \Delta^2 f + \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f + \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} \Delta^4 f$$

$$P_4(2.17) = 0.30103 + (-0.25)(0.04136) + \frac{(-0.25)(-0.25-1)}{2} (-0.0036)$$

$$+ \frac{(-0.25)(-0.25-1)(-0.25-2)}{6} (0.00057) + \frac{(-0.25)(-0.25-1)(-0.25-2)(-0.25-3)}{24} * (-0.0001)$$

$$P_4(2.13) = 0.332485$$

$$\log(2.15) = 0.3324384 \quad \text{ماشین حساب}$$

تمرین: رابطه y را بر حسب x در محدوده ۶۰ تا ۱۶۰ با استفاده از داده های جدول زیر بدست آورید.

x	۶۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۶۰
y	۰	۲۷	۴۱	۷۴

$$\text{Ans : } y = 1.0282 x^2 - 0.00425 x^3 + 1.766 * 10^{-5} x^4 + (-50)$$

تمرین : برای داده های زیر جدول اختلاف محدود را تشکیل داده و مقدار تابع را با استفاده از روش نیوتن دار تابع درجه ۱ و دو حساب کنید .

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8
P	1	1.16	1.64	2.44	3.56

فرمول درون یابی پس رو نیوتن :
 Newton's Backward formula

در صورتیکه نقطه مورد نظر در جدول در انتهای آن باشد ناگزیر از فرمول پس رو استفاده می کنیم .

$$P_n(x) = f_0 + (x-x_0) f_0^{(1)} + (x-x_0)(x-x_1) f_0^{(2)} + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) f_0^{(n)}$$

$$S = \frac{x-x_j}{h}$$

$$I=0$$

$$X-x_0 = sh$$

$$F_0 = \frac{F_1 - f_0}{x - x_0} = \frac{vf_1}{h}$$

$$(x-x_0)(x-x_1) = sh(x - \frac{x_0+x_1}{2}) = sh(sh+h) = s(s+1)h$$

$$F_0 = \frac{v^2 f_2}{2h^2}$$

$$P_n(x) = f_0 + s Df_1 + \frac{S(s+1)}{2!} D^2 f_1 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} D^3 f_1 + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{N!} D^n f_n$$

x	f	Df	$\frac{v}{h} Df$	$\frac{v^2}{h^2} D^2 f$
X0	F0			
X1	F1	Vf1	$\frac{v}{h} vf_1$	$\frac{v^2}{h^2} Df_1$
X2	F2	vf2	$\frac{v}{h} vf_2$	$\frac{v^2}{h^2} Df_2$
X3	F3	Vf3	$\frac{v}{h} vf_3$	

$$P_n(x) = f_n + s \frac{v}{h} Df_n + \frac{S(s+1)}{2!} \frac{v^2}{h^2} D^2 f_n + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{N!} \frac{v^n}{h^n} D^n f_n$$

توجه : جدول تفاضل پیش رو و پس رو از لحاظ مقدار با هم فرقی ندارد و فقط از لحاظ نامگذاری فرق دارند .

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0$$

$$\rightarrow \Delta f_0 = v f_1$$

$$V f_1 = f_1 - f_0$$

x	f	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
X0	F0	ΔF_0	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
X1	F1	ΔF_1	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$
X2	F2	Δf_1	Δf_1	
X3	F3			

$$P_n(x) = f_n + s \Delta f_{n-1} + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_{n-2} + \dots + \frac{s(s+1)\dots(s+n-1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$P_n(x) = f_n + \{1\} \Delta f_{n+1} + \{2\} \Delta^2 f_{n-2} + \dots + \{n\} \Delta^n f_0$$

با استفاده از جدول زیر مقدار الگوریتم 2.a را حساب کنید . $\log(2.a) = ?$

x	F(x)=log(x)	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
X0 2	0,30103	0,04132				
X1 2.2	0,34242	0,01779	0,0036 -	0,00057		
X2 2.4	0,38021	0,03776	0,00303 -	0,00046	0,00011 -	
X3 2.6	0,41497	0,03219	0,00257 -	0,00034	0,00012 -	0,00001 -
X4 2.8	0,44716	0,02996	0,0022 -			
X5 3	0,47712					

$$P_5(x) = f_5 + s \Delta f_4 + \frac{s(s+1)}{2!} \Delta^2 f_3 + \frac{s(s+1)(s+2)}{3!} \Delta^3 f_2 + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{4!} \Delta^4 f_1 + \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}{5!} \Delta^5 f_0$$

$$P_5(2.2) = 0.47712 + (-0.5)(0.02996) + \frac{(-0.5)(-0.5+1)}{2} (-0.0022) \dots = 0.46239871$$

$$\log(2.4) = 0.461397997$$

فرمول درون یابی مرکزی نیوتن : Newtons central formula

N c f

در ابتدا مقادیر x را به شکل زیر نامگذاری می کنیم .

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_1 &= x_0 + h \\ X_2 &= x_0 - h \\ X_3 &= x_0 + 2h \\ X_4 &= x_0 - 2h \end{aligned}$$

حال این مقادیر را در فرمول تفاضل نیوتن جایگزین می کنیم . خواهید داشت :

$$P_n(x) = f_0 + s \Delta f_1 + \frac{S(S+1)}{2!} \Delta^2 f_1 + \frac{s(S+1)(S-1)}{3!} \Delta^3 f_1 + \dots$$

$\Delta f = f_1 - f_0$

$$S^{1/2} f^{1/2} = \Delta f \quad \rightarrow \quad s^{1/2} = \Delta$$

$$S^{1/2} f^{1/2} = f_1 - f_0$$

$$P_n(x) = f_0 + s \Delta f_1 + \frac{S(S+1)}{2!} \Delta^2 f_1 + \dots$$

حال فرمول تفاضل تقسیم نیوتن را برای نقاط زیر می زنیم .

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_1 &= x_0 - h \\ X_2 &= x_0 + h \end{aligned}$$

$$p_n(x) = f_0 + s f_1 - \frac{1}{2} + \frac{s(s-1)}{2!} s f_1 + \dots$$

$$\begin{aligned} X_3 &= x_0 - 2h \\ X_4 &= x_0 + 2h \end{aligned}$$

در مرحله بعد فرمولهای ۱ و ۲ را با هم جمع می کنیم .

$$P_n(x) = f_0 + \frac{S(s f^{1/2} + s f^{-1/2})}{2} + \frac{s^2}{2!} \frac{s(s-1)}{3!} \left((s f^{3/2} + s f^{-3/2}) \right) + \frac{S(s-1)}{2!} s^4 f^{-2} + \dots$$

* در صورتیکه n فرد باشد جمله آخر فرمول نوشته نمی شود. و اگر n زوج باشد می نویسیم.
 مثال: با توجه به جدول زیر مقدار f(1.5) را با بزرگترین درجه بیان کنید.

x	F(x)	ΔF_i	$\Delta^2 F_i$	$\Delta^3 F_i$	$\Delta^4 F_i$
X2 1	۰,۷۶۵۱۹۷۷	۰,۴۵۱۱۱۷ -			
X1 1.3	۰,۶۲۰۰۸۶۰	۰,۱۶۴۶۸۳۸ -	۰,۰۱۹۵۷۲۱ -		
۱,۵				۰,۰۱۰۶۷۲۳	
X0 1.6	۰,۴۵۵۴۰۲۲	۰,۱۷۳۷۸۳۶ -	۰,۰۸۸۹۹۶ -	۰,۰۱۱۰۲۷۱	۰,۰۰۰۳۵۴۸
X1 1,9	۰,۲۸۱۸۱۸۶	۰,۱۷۱۴۷۳۶ -	۰,۰۰۲۱۲۷۳		
X2 2.2	۰,۱۱۰۳۶۲۳				

$$f(x) = f_0 + s \frac{\Delta f_0 + \Delta f_{-1}}{2} + \frac{s^2}{2!} \Delta f_{-1} + \frac{s(s-1)}{3!} \left(\frac{\Delta^2 f_{-1} + \Delta^2 f_{-2}}{2} \right) + \frac{s^2(s-1)}{4!} \Delta^3 f_{-2}$$

$$s = \frac{x - x_0}{N} = \frac{1.5 - 1.6}{0.3} = -0.33$$

$$s) = 0.4559 + (-0.33) \left(\frac{-0.1646838 - 0.1735816}{2} \right) + \frac{(-0.33)^2}{2} (-0.0088998)$$

$$= \frac{(-0.33)(0.33-1)}{6} + \frac{(0.006723 + 0.0110271)}{2} + \frac{(-0.33)(-0.33-1)}{24} (0.0003548) = 0.5676091$$

تمرین : با استفاده از فرمول NCF مقدار F(12.2) را از جدول زیر بدست آورید . سری 7

۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
۲۳۹۶۷	۲۸۰۶۰	۳۱۷۸۸	۳۵۲۰۹	۳۸۳۶۸
(12.2) = 0.32495			ANS	

چند جمله ای درون یاب گرانشی : برای درون یابی فواصل نامساوی علاوه بر روش تفاضل روش دیگری بنام گرانشه وجود دارد . در ابتدا یک چند جمله ای درجه N را از n+1 نقطه به صورت زیر عبور می دهیم .

$$f(x) = (x - x_1) * (x - x_1) * \dots * (x - x_n) a_0 + (x - x_0) (x - x_2) (x - x_n) a_1 + (x - x_0) (x - x_1) (x - x_3) \dots (x - x_n) a_2 + \dots + (x - x_0) (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) a_n$$

حال مقادیر a را طوری تعیین می کنیم که برای n+1 نقطه (xi , fi) مقدار fi و مقدار چند جمله ای

$$p_n(x_i) = f_i$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

د رونیاب یکسان باشد به عبارتی :

$$X = x_0 \rightarrow p_n(x_0) = \frac{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}{F_0} \quad a_0 = f_0$$

$$A_0 = \frac{f_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)}$$

$$X = x_1 \quad p_n(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}{F_1} \quad a_1 = \frac{f_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}$$

$$Y_n = \frac{f_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}$$

حال مقادیر پارامتر a را در فرمول جایگذاری می کنیم .

$$P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} \frac{f_0}{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)} + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} \frac{f_1}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})} + \dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} \frac{f_n}{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}$$

$$\sum_{i=0}^n x_i = x + x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\prod_{i=0}^n x_i = x_0, x_1, \dots$$

$$i=0$$

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}$$

$$i=0 \quad j=0 \quad x_i - x_j$$

توابع مبنا : base function

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \text{تابع مبنای درجه اول در نقطه } x_0$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \text{تابع مبنای درجه اول در نقطه } x_1$$

$$l_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad \text{تابع مبنای درجه دوم در نقطه } x_0$$

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

$$= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k)$$

میان ترم محاسبات ۳ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۲۰ - ۱۷
 ۶ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۱ - ۸ چهارشنبه
 از اول تا انتهای میان یابی

$$L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

یکشنبه : ۸ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۴ - ۱۶ چهارشنبه ۶ . ۱۰ . ۸۵ ساعت ۱۱ - ۸
 مثال : چند جمله ای بنگراژه را برای توابع زیر بدست آورید و از روی آن $f(2)$ را بدست آورید .

x	F(x)
X0 1	۲,۲
X1 1.2	۳,۵
X2 2.5	۴۴
X3 4	۶,۸

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$J \neq 1$$

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 l_k(x) f_k$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 0}}^3 \frac{x-x_i}{x_0-x_i} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_0(2) = \frac{(2-1.5)(2-2.5)(2-4)}{(1-1.5)(1-2.5)(1-4)} = -0.2222$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^3 \frac{x-x_i}{x_1-x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = 0.8 \quad L_1(2)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^3 \frac{x-x_i}{x_2-x_i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = 0.4444 \quad L_2(2)$$

$$\prod_{i=0}^3 \frac{x-x_i}{x-x_i} = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$l_3(x) = \prod_{i=0}^2 \frac{x - x_i}{x_3 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = 0.02222x^3 - 0.2222x^2 + 0.8x - 0.8 \rightarrow l_3(2) = 0.115555$$

$$P_3(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + l_2(x)f_2 + l_3(x)f_3 = (-0.02222)(2.2) + (0.8)(3.3) + (0.4444)(4.4) + (-0.02222)(0.8) \rightarrow p_3(2) = 4.115555$$

$$k(a) = \frac{\int_a^{\pi/2} \sin x \, dx}{\int_a^{\pi/2} \sin x \, dx} \quad \text{مثال: یک انتگرال مربوط به انتگرال کامل با فرمول}$$

$$\{1 - (\sin a) \sin x - y/2\}$$

تعریف می شود از یک جدول مقادیر انتگرال به شکل زیر است $k(2)=1.5727$, $k(1) = 1.5409$

چند جمله ای درجه دوم $K(3) = 1.5451$ با استفاده از تقریبی از $k(3.5)$ را بدست آورید .

$$P_2(x) = \sum_{k=0}^2 L_k(x) f_k =$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \rightarrow L_0(3.5) = 0.8333$$

$$I=0$$

$$I \neq 0$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \rightarrow L_1(3.5) = 1.04167$$

$$I=0$$

$$I \neq 1$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \rightarrow L_2(3.5) = -0.125$$

$$I=0$$

$$I \neq 2$$

$$P_2(x) = L_0(x)k_0 + L_1(x)k_1 + L_2(x)k_2$$

$$= 0.8333 * 1.5709 + 1.04167 * 1.5424 + (-0.125) = 1.5751 \rightarrow$$

$$\rightarrow p_2(3.5) = 1.54225$$

تمرین یک چند جمله ای درجه سوم که از چهار نقطه جدول زیر می گذرد را با استفاده از روش گرانژ بدست آور و از روی آن $f(3)$ را حساب کنید .

$$P3(x) = 20.21 \rightarrow \text{ans}$$

X	F(x)
۳,۲	۲۲,۰
۲,۷	۱۷,۸
۱,۰	۱۴,۲
۴,۸	۳۶,۳
۵,۶	۵۱,۷

تمرین : مقدار چند جمله ای درون یاب گرانژه را برای داده های زیر یافت و با استفاده از آن مقدار تقریبی

مشتق تابع ۰,۲۵ را حساب کنید . $f(0.25) ?$

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
F(x)	0.09938	0.19887	0.29552	0.38992	0.47993

$$F(0.25) = 0.97125 \quad \text{ans}$$

تمرین : مقدار f بر حسب x, y به صورت زیر جدول بندی شده است .

X / y	۲۰	۵۰	۱۰۰
۶۰	۱۶۰	۱۵۶	۱۴۷
۸۰	۱۶۸	۱۶۵	۱۵۷
۱۰۰	۱۷۶	۱۷۴	۱۶۷
۱۲۰	۱۹۵	۱۸۲	۱۷۶
۱۴۰	۲۰۳	۲۰۱	۱۹۶

الف) مقدار $f(80, y)$ را محاسبه کنید .

ب) مقدار f را $x=105, y=75$ بدست آورید .

توجه : از میانمایی درجه دو در جهت x, y استفاده کنید .

$$F(80, y) = ? \quad f(106, 75) = 172.86 \quad \text{ans}$$

$$\text{ans } p(80, y) = 168 - 0.1(y-20) - 0.00075(y-20)(y-50)$$

قضیه نیوتن

$$X_0 = 80$$

Y	f(x,y)	f(1)	f(2)
۲۰	۱۶۸		
۵۰	۱۶۲		
۱۰۰	۱۵۷		

$$p(8), y) = \quad \text{تابع بر حسب } x, y$$

$$P(100, y)$$

$$P(120, y)$$

$$p(80, 75) = \text{عدد ۱}$$

$$p(100, 75) = \text{عدد ۲}$$

$$p(120, 75) = \text{عدد ۳}$$

x	f(x, 75)	
۸۰	عدد ۱	\rightarrow $X=105$
۱۰۰	عدد ۲	
۱۲۰	عدد ۳	

$$P(x, 75) = p(105, 75)$$

محاسبه خطای درون یابی : اگر $p_n(x)$ چند جمله ای درون یاب $f(x)$ باشد آنگاه :
 $P_n(x) \sim f(x)$

در صورتیکه تفاوت آنها را با s نشان دهیم خواهیم داشت .

$$P_n(x) - f(x) = s(x)$$

$$P_n(x) - f(x) - s(x) = 0$$

حال s را به شکل زیر تعریف می کنیم :

$$S(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) g(x)$$

$$P_n(x) - f(x) - (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_n) g(x) = 0$$

برای محاسبه $g(x)$ از یک تابع کمکی $w(t)$ به شکل زیر استفاده می کنیم .

$$W(t) = p_n(x) - f(x) - (t-x_0)(t-x_1) \dots (t-x_n) g(x) \quad *$$

$W(t)$ در نقاط $x_0, \dots, x_1, \dots, x_n$ برابر صفر می گردد . پس $n+1$

_ طبق تعریف در نقطه $t=x$ معادله * برابر با صفر خواهد شد پس $t=x$ نزدیک ریشه است پس در کا

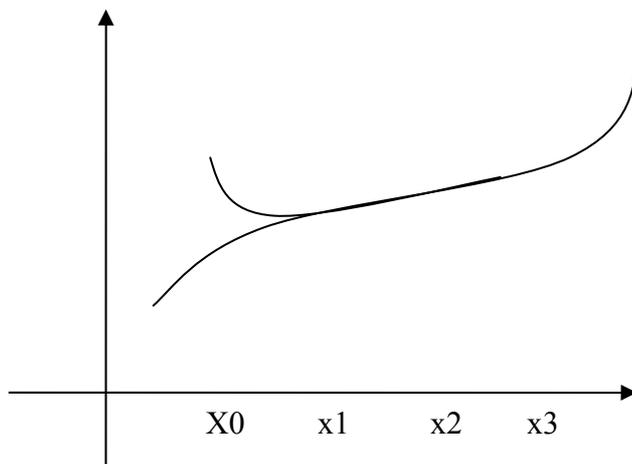
$W(t)$ و $n+2$ ریشه دارد . اگر $w(t)$ پیوسته باشد آنگاه $\bar{w}(t)$ در فاصله هر دو ریشه یک بار تغییر علا
 می دهد پس $\bar{w}(t)$ تعداد $n+1$ ریشه دارد $w(t)$ نیز n ریشه دارد $w(t)$ تعداد $n-1$ ریشه دارد .
 /// //

$N+1$
 $W(t)$ تعداد ریشه دارد این ریشه ها را حساب می کنیم .

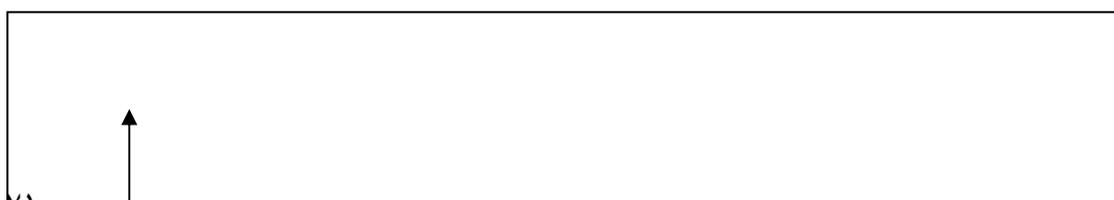
$$W(t) = \frac{D}{Dt^{N+1}} \{ f(t) - f_n(t) - (t-x_0)(t-x_1)\dots(t-x_n)g(x) \} = 0$$

اگر ریشه را $t=s$ نامگذاری کنیم .

۳. بدون در نظر گرفتن نقطه ای ابتدا یا انتها از سه نقطه ای باقیمانده یک تابع درجه دوم عبور می دهیم .



۴. بدون در نظر گرفتن نقاط ابتدا و انتها از دو نقطه ای باقیمانده یک خط راست عبور می دهیم .



توجه: سه انتگرال و روش آخر باز است

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b pn(x)dx + \int_a^b \delta(x)dx$$

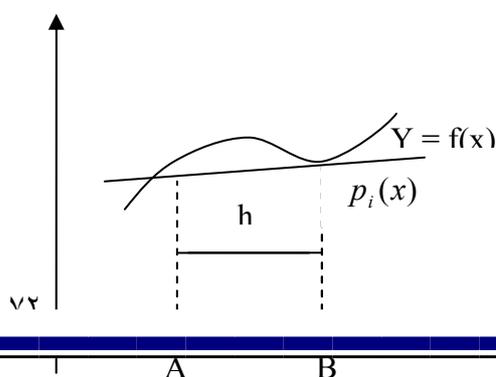
برای درون یابی در این فصل از فرمول درون پیشرو نیوتن nff استفاده می گردد.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[f. + s\Delta f. + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f + \dots + \frac{s(s-1)\dots(s-n+1)}{n!} n f. \right] dx$$

+

$$\int_a^b \frac{(s-1)\dots(s-n)}{(n+1)} h \frac{n+1}{(n+1)} f \frac{(n+1)}{(n+1)} (\varepsilon) dx$$

* روش انتگرال گیری عددی زوزنقه ای. اگر بازه ی a تا b را به یک قسمت تقسیم نمودار زوزنقه ای حاصل یک چند جمله ای درجه یاول عبور دهیم خواهیم داشت.

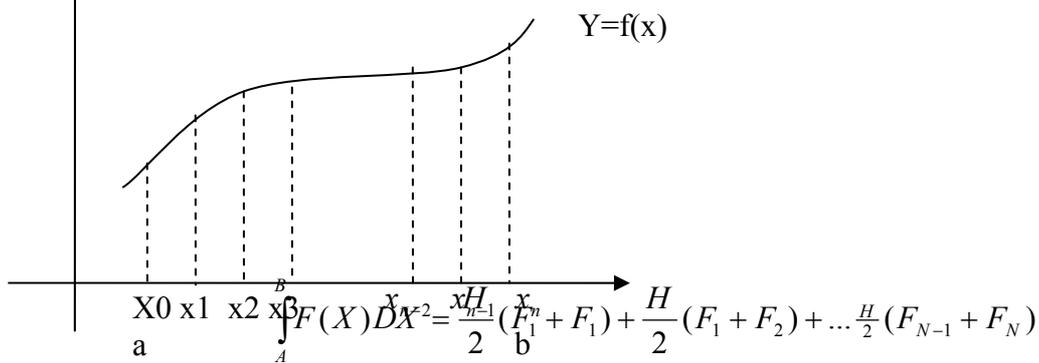


$$\int_A^B FWDX = \int_A^B P_I(X)DX = \int_0^1 (F_{0+\Delta} F_0)HDS = \left[F_0 S_0 + \frac{S^2}{2} (F_1 - F_0) \right] XH \Big|_0^1$$

$$= \frac{H}{2} (F_0 + F_1)$$

$$\text{LOCAL ERROR} = \int_A^B \delta XDX = \int_0^1 \frac{S(S-1)}{21} F''(\epsilon)HDS = H^3 \left[\frac{S^3}{6} - \frac{S^2}{4} \right] F''(\epsilon) =$$

* اگر فاصله ی a تا b را به n قسمت نموده باز هر دو نقطه ای متوالی یک خط راست عبور دهیم آنگاه خواهیم.



$$= \frac{H}{2} (F_0 + 2F_1 + 2F_2 + \dots + 2F_{N-1} + F_N)$$

$$\int_A^B F(X)DX = \frac{B-A}{2N} (F_0 + 2F_1 + 2F_2 + \dots + 2F_{N-1} + F_N)$$

$$\text{GLABAL ERROR} : -\frac{H^3}{12} F''(\epsilon_1) + (-\frac{H^3}{12} F''(\epsilon)) \dots -\frac{H^3}{12} F''(\epsilon_N)$$

$$= -\frac{H^3}{12} [F''(\epsilon_1) + F''(\epsilon_2) + \dots + F''(\epsilon_N)]$$

$$NF''(\epsilon) = X_0 \epsilon < X_N X_{I-1} < \epsilon < X_I$$

$$\text{Global error} : -\frac{h^3}{12}nf(\Sigma) = -\frac{b-a}{12}h^2f(\Sigma) = \delta(h^2)$$

مثال: برای تابع $f(x) = e^x$ طبق جدول زیر در فاصله ی $x=1.8$ تا $x=3.4$ انتگرال گیری نمایید.

x	f(x)	X	f(x)
1.6	4.953	2.8	16.445
1.8	6.050	3.0	20.088
2.0	7.389	3.2	24.533
2.2	9.025	3.4	29.964
2.4	11.823	3.6	36.598
2.6	13.464	3.8	44.701

$$\int_{1.8}^{3.4} f(x)dx = \frac{h}{2}[f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \dots + 2f_6 + f_7]$$

$$= \frac{0.2}{2}[6.050 + 2(7.389 + 9.025 + 11.023\dots) + 29.964] = 23.9944$$

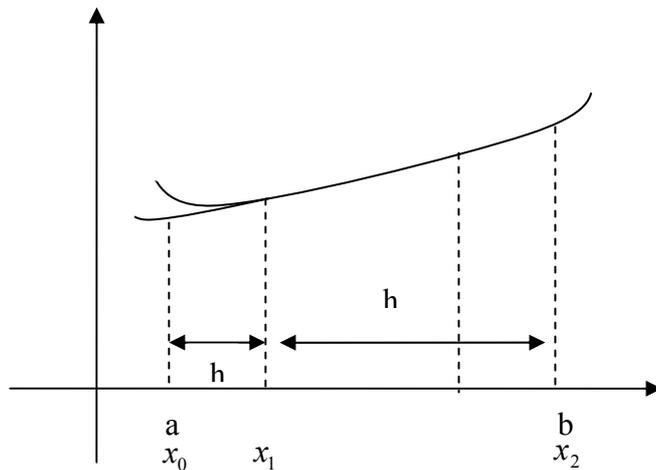
$$\text{Error} = -\frac{b-a}{12}h^2f(\Sigma) = -\frac{3.4-1.8}{12}(0.2)^2 \begin{cases} *e^{1.8} = -0.0323 \\ *e^{2.4} = -0.1296 \end{cases}$$

$$0.0323 \text{Error} < 0.1296$$

$$\int_{1.8}^{3.4} e^x dx = e^{3.4} - e^{1.8} = 23.9144$$

$$\text{Error} = 23.9144 - 23.9944 = 0.08 \Rightarrow 0.0323 < 0.08 < 0.1298$$

روش انتگرال گیری سیمپسون $1/3$ ه ی a تا b را به قسمت مساوی تقسیم نموده و از سه نقطه ای بدست آورده یک تابع درجه ۵ در هم عبور دهیم خواهیم داشت.



$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x = a \Rightarrow s = 0$$

$$x = b \Rightarrow s = 2$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b p_4(x) dx = \int_a^b (f_0 + s \Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0) h ds$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + f_1 + f_2)$$

$$\text{Local Error} : \int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)}{3!} h^3 f^{(3)}(\Sigma) ds = 0$$

$$\text{Local Error} : \int_0^2 \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} h^4 f^{(4)}(\Sigma) ds = -\frac{h^2}{90} f^{(4)}(\Sigma)$$

$$x_0 < \Sigma < x_2$$

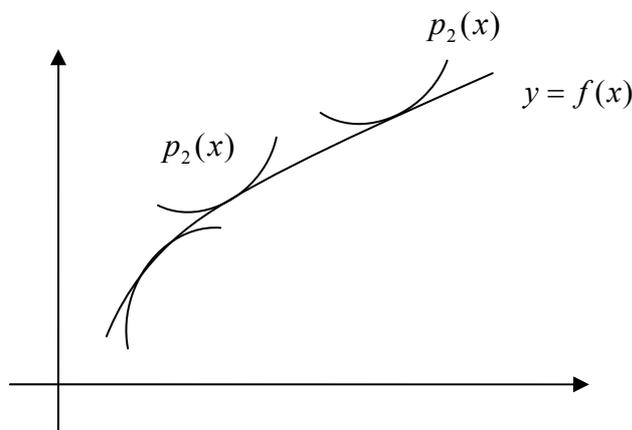
حال اگر فاصله ی a تا b را به n قسمت زوج تقسیم نموده
 و از سه نقطه متوالی یک تابع درجه ی دوم عبور دهیم
 خواهیم داشت:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

$$Error = \frac{h^2}{90} \left[f^{(4)}(\Sigma) + f^{(4)}(\Sigma) + f^{(4)}\left(\Sigma_{\frac{n}{2}}\right) \right]$$

$$\frac{n}{2} f^{(4)}(\Sigma) x < \Sigma < x_n$$

$$Error = -\frac{h^2}{90} * \frac{h}{2} f^{(4)}(\Sigma) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\Sigma)$$



$$f^{(n+1)}(\Sigma) \neq 0 \rightarrow g(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

مقدار $g(x)$ را در فرمول زیر جایگزین می کنیم .

$$s(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) \frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

در صورتیکه از یک تابع درجه ۳ برای درون یابی استفاده می کنیم میزان خطا درجه ی ۴ خواهد شد . واگر از یک درجه ی ۴ درون

یابی استفاده کنیم اگر $n-1$ استفاده کنیم
خطا n می شود.

خطای فرمول پیشرو :
(

$$x - x = sh$$

$$x - x_1 = ((x - x_0) + (x_0 - x_1))sh - h = (x_1 - x_0 + x_0 - x_1)h(s - 1)$$

$$x - x_l = S(s - 1)(s - l)h$$

جایگزینی

$$S(x) = S(s - 1)(s - l) \dots (s - n) - h^n \frac{f^{(n+1)}(\Sigma)}{(n+1)}$$

جدول اختلاف محدود را برای $f(x) = \sin x$ تشکیل بازه
 $\sin 0.8$ را حساب کنید

$$x = 0 \times 1(0.4)1.7$$

و مقدار خطا را محاسبه کنید

X	$(x) = \sin x$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
0, 1	0.09983			
0, 5	0.0757			
		0.47943		0.37960
1, 9	0.04797		0.78333	0.3539
				-0.12367
1, 3		-0.15123		-0.02846
				0.96356
				0.18023
1, 7	0.99466	0.02810		

$$p_2(x) = s + \frac{s(s-1)}{s} f.$$

$$s = \frac{0.8 - 0.1}{0.4} = 1.75$$

$$p_2(x) = 0.09983 + (1.75)(0.37960) + \frac{1.75(1.75-1)}{4}(-0.0757)$$

$$s(x) = \frac{s(s-1)(s-4)}{3!} h^3 f^3(\Sigma) \quad 0.1 < \Sigma < 0.9$$

$$s(x) = \frac{(1.75)(1.75-1)(1.75+4)}{6} (0.4)^3 (-\cos(0.1)) = 3.48 \times 10^{-3}$$

$$s(x) = \frac{(1.75)(1.75-1)(1.75-2)}{6} (0.4)(-\cos(0.9)) = 2.78 \times 10^{-3}$$

$$2.18 \times 10^{-3} < S(0.8) < 3.48 \times 10^{-3}$$

$$2.6 \times 10^{-3}$$

$$Error = 0.71445 - 0.7173609 = 0.0029 = 2.9 \times 10^{-3}$$

مثال: طول فاصله ی h را در یک جدول بانقاط
تساوی الافاصله برای تابع $f(x) = \sqrt{x}$ بین ۱ و ۲
چنان تعیین کنید که درون یابی با چند جمله
ای درجه دوم خطای کمتر از $s \times 15^{-8}$ داشته است.

$$S(x) = \frac{S(s-1)(s-2)}{3!} h^3(\Sigma) < s \times 15^{-8}$$

$$f^b(\Sigma) = ?$$

$$f^2(x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{1}{4}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, f^3(x) = \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$$

⇒

$$f'''(1) = \frac{3}{8}$$

$$f'''(2) = 0.066$$

$$|f'''(\Sigma)| < \frac{3}{8}$$

$$1 < \Sigma < 2$$

$$f(s) = s^5 - 3s^2 - 2s \rightarrow f'(s) = 3s^2 - 6s - 2 = 0 \rightarrow \begin{aligned} s &= 1.574s \\ s &= 0.42ss \end{aligned}$$

$$\frac{0.42ss(0.42ss-1)(0.42ss-2)}{6} \times h^3 \times \frac{3}{6} < s \times 15^{-8} \Rightarrow h < 0.128$$

$$n = \frac{b-a}{h} \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{l-1}{n} < 0.0128 \Rightarrow h > 78.12 \Rightarrow n \approx 79$$

تمرین: تابع $y = \text{Sin}x$ بر بازه $[1,3]$ مغروض است این بازه را حداقل به چند زیر بازه با طول مساوی تقسیم نیم بطوریکه اگر $f(x)$ در یکی این بازه ها توسط یک تابع خطی شود خطای درون یابی کمتر از 10^{-4} گردد ؟
 شاید درست نباشد $uns: n \geq 100$

تمرین . برای داده های جدول زیر جدول اختلاف حدود را تشکیل داده و مقدار تابع را با استفاده از روش های زیر در $x=0.s$

الف) NFF با بزرگترین درجه
 ب) NBF با بزرگترین درجه
 ج) NCF با بزرگترین درجه
 د) درصد خطای هر مرحله را حساب کنید.

N	۰,۲	۰,۴	۰,۶	۰,۸
P	۱	۱,۶۴	۲,۴۴	۳,۲۶

رال گیری عددی

انواع انتگرال عددی :
 باز : در این نوع انتگرال گیری اگر ابتدا و انتهی در چند جمله نباشد انتگرال گیری باز است .

بسته : اگر نقاط ابتدا یا انتهای انتگرال در چند جمله ای درون یاب جهت انتگرال گیری موجود می باشند . انتگرال را بسته گویند . اگر تابع $F(X)$ را با یک چند جمله ای درجه n $P_n(x)$ تقریب بزنیم .

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b p_n(x)dx$$

شکل انتگرال گیری باز و بسته :

۱: انتگرال گیری برای فواصل مساوی یا

انتگرال گیری $N \cot \cdot \cos$

الف: روش ذوزنعه ای

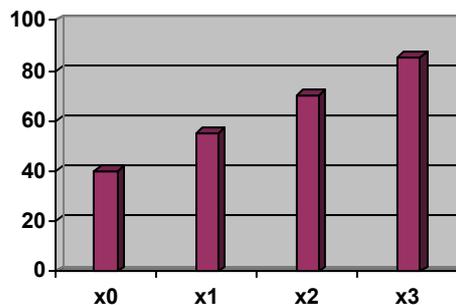
ب: روش سیمیون $\frac{1}{3}$

ج: روش سیمیون $\frac{3}{8}$

۲. انتگرال گیری برای فواصل نامساوی

تخمین تابع $f(x)$ بین x_0 تا x_3 چهار حالت وجود دارد .

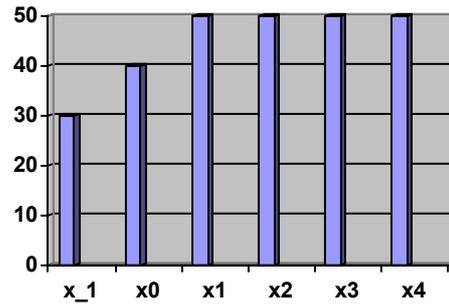
۱. از چهار نقطه ی بدست آمده یک تابع درجه سوم عبور و از آن انتگرال می گیریم



۲. با در نظر گرفتن یک نقطه قبل از X و یک

تابع درجه S عبور دهیم سپس از آن

انتگرال می گیریم .



توجه: روش سمپسون $\frac{1}{3}$ برای فواصل زوج جواب می دهد همچنین خطای این روش برای توابع تا درجه ی ۳ خطای آن صفر است.

$$n=4 \text{ با استفاده از } \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

$$x_0=0 \rightarrow x_1=0.25 \text{ و } x_2=0.5 \text{ و } x_3=0.75 \text{ و } x_4=1.0$$

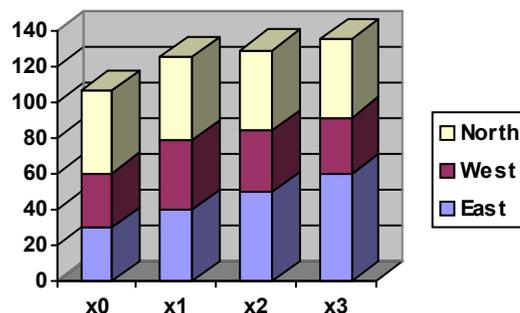
$$\int_b^a \frac{dx}{1+x^4} = \frac{n}{3} [f_0 + 4f_1 + 4f_2 + 4f_3 + f_4] = \frac{0.25}{3} \left[1 + \frac{4}{1+(0.25)^4} + \dots + \frac{4}{1+1^4} \right] = 0.7854$$

روش سمپسون $\frac{3}{8}$: اگر فاصله ی a تا b را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده و از ۴ نقطه ی بدست آمده یک تابع درجه سوم عبور دهیم خواهیم داشت:

$$s = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x = x_0 \rightarrow s = 0$$

$$x = x_3 \rightarrow s = 3$$

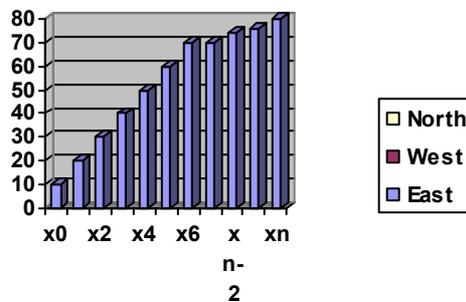


$$\int_a^b f(x) dx \int_a^b p_3(x) dx = \int_a^b (f_0 + s\Delta f_0 + \frac{s(s-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{3(s-1)(s-2)}{3!} \Delta^3 f_0) h ds$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \frac{3h}{8} (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3)$$

$$\text{local error} : \int_a^b \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{4!} h^4 f^{(4)}(\xi) h ds = -\frac{3h^2}{80} f^{(4)}(\xi) x_0 \langle \xi \rangle x_3$$

در فاصله a تا b را به n قسمت مضرب ۳ تقسیم می‌کنیم و از هر ۴ نقطه‌ی متوالی یک تابع درجه سوم را عبور می‌دهیم و خواهیم داشت :



$$\int_a^b F(X) DX = \frac{3}{8} h (f_0 + 3f_1 + 3f_2 + 2f_3 + 3f_5 + 2f_6 + \dots + 3f_{n-2} + 3f_{n-1} + f_n)$$

$$\text{global error} = -\frac{b-a}{80} h^4 f^{(4)}(\xi)$$

روش سیمپون $\frac{3}{8}$ فقط برای فواصل ضریب ۳ جواب می‌دهد همچنین مقدار خطای آن برای توابع تا درجه ۳ صفر است مقدار $\int_a^b f(x) dx$ را حساب کنید

x	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	
$f(x)$	0.339	0.137	-5.66	-0.231	-0.328	-0.341	-0.277	-0.1

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{6.5-3}{0.5} = 7$$

$$\int_3^{6.5} f(x)dx = \int_3^5 f(x)dx + \int_5^{6.5} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) + (f_4 + 3f_5)$$

$$\Rightarrow \int_3^{6.5} f(x)dx = \frac{0.5}{3}[0.339 + 4(0.137) + 2(0.137) + 2(-0.066) + 4(-0.231) + (-0.328)]$$

$$+ \frac{0.3 \times 0.5}{8}[-0.328 + 3(-0.341) + (3(-0.277) - 0.154)] - 0 = -0.4593$$

فرمول های انتگرال گیری نیوتن کوتر بسته :
 $h=1$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f_0 + f_1) - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$
 $h=2$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{95} f^{(4)}(\xi)$$
 $h=3$

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{3h}{8}(f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3) - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi)$$
 $h=4$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{2h}{45}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) - \frac{8h^7}{945} f^{(6)}(\xi)$$
 $h=5$

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx = \frac{sh}{288}(19f_0 + 25f_1 + 50f_2 + 75f_3 + 50f_4 + 19f_5) - \frac{275h^7}{12096} f^{(6)}(\xi)$$

$l=6$

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx = \frac{h}{140}(41f_0 + 216f_1 + 27f_2 + 274f_3 + 27f_4 + 216f_5 + 41f_6) - \frac{9h^9}{140} f^{(8)}(\xi)$$

انتگرال گیری دوگانه : توجه در این روش
 انتگرال گیری معمولا یکی از متغیرها را
 ثابت نگه داشته و به صورت عددی (یکی از
 روش های عددی) برای متغیر دیگر انتگرال

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy \quad \text{گیری}$$

می کنیم سپس اعداد به دست آمده را برای
 متغیر دیگر انتگرال گیری می کنیم .
 مثال برای تابع $f(x,y)$ که مقادیر آن در جدول

$$\int_5^8 \int_2^6 f(x,y) dy dx \quad \text{داده شده است}$$

را حساب کنید

x \ y	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.5	0.99	1.524	2.045	3.549	3.031
2	1.568	2.348	3.177	3.943	4.672
2.5	2.52	3.8	5.044	6.241	7.379
3	9.09	6.136	8.122	10.03	11.841

$$= 0.2 \Rightarrow \int_{1.5}^3 f(x, 0.2) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{0.5}{2} (0.99 + 2(1.568) + 2(2.52) + 4.09)$$

$$y = 0.3 \Rightarrow \int_{1.5}^3 f(x, 0.3) dx = \frac{h}{2} (f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3) = \frac{0.5}{2} [1.524 + 2(2.348) + 2(3.8) + 6.136]$$

$$y = 0.4 \Rightarrow \int_{1.5}^3 f(x, 0.4) dx = 6.6522$$

$$y = 0.5 \Rightarrow \int_{1.5}^3 f(x, 0.5) dx = 8.2368$$

$$\int_{1.5}^3 \int_{0.2}^{0.6} f(x, y) dy = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{0.1}{3} (3.314 + 4(5.007) + 2(6.6522) + 4(8.02368) + 9.7435) = 2.6446$$

$$y = 0.6 \Rightarrow \int_{1.5}^3 f(x, 0.6) dx = 9.1435$$

تمرین : مقدار $\int_0^{0.7} \int_{0.2}^{0.6} f^x \sin y dy dx$ را حساب کنید .
الف : با استفاده از روش ذوزنعه ای در هر

دو جهت $\Delta x = \Delta y = 0.1$ y.X

ب: باغ استفاده از روش سیمپون در هر دو

جهت $\Delta x = \Delta y = 0.1$

تمرین : تابع تعریف شده ای با $f(x) = \int_0^x \sin x^2 dx$

برای مقادیر متساوی فاصله ی X با طول ۰,۱

را در جدول بندی در صورتیکه درون یابی

درجه سوم برای محاسبه f(x) به ازای $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ را

انجام دهیم ماکزیمم و مینیمم خطا را بدست آورید

تمرین : مقدار h را در انتگرال سیمپون $\frac{1}{3}$

جهت $\int_0^1 l_n(x) dx$ طوری مشخص کنید که مقدار حداکثر

خطای ایجاد شده کمتر از ۰,۰۰۵ باشد

$n = 4$

$h(0.0523)$

www.maghaleh.net

.Copyright © 2005 Computer Center Of maghaleh[dat]net All rights reserved
|Please send your comments to: webmaster@maghaleh.net

پایان