پاسخ تشریحی توسط: مریم قرایی

۶۷.گزینه ۴ درست است.

نکته ۱ : $te^{-at}u(t) \xrightarrow{F} \dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$

نکته ۲ : $x(t-t_0) \xrightarrow{F} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

$$X(j\omega)=\frac{e^{j3\omega}}{(2+j\omega)}\overset{\text{نکته (۲)}}{=}e^{-j\omega(-3)}F\left\{te^{-at}u(t)\right\}\begin{cases}t_0=-3\\a=2\end{cases}$$

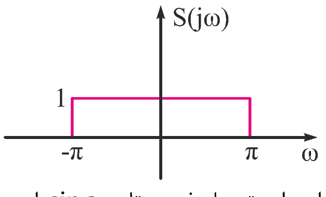
$$X(j\omega)\xrightarrow[\text{نکته (۱)}]{F^{-1}}(t+3)e^{-2(t+3)}u(t+3)$$

۶۸.گزینه ۳ درست است.

نکته ۱ : $x(t)*y(t) \xrightarrow{F} X(j\omega).Y(j\omega)$

نکته ۲ : $\delta(t) \xrightarrow{F} 1$

نکته ۳ : $\operatorname{sinc}(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} \xrightarrow{F}$



$S(j\omega)$ تنها یک نام دلخواه برای تبدیل فوریه تابع sinc است که خود در نظر گرفته‌ایم.

نکته ۴ : $:x(t)=A\delta(t)-\operatorname{sinc}(t)\xrightarrow{F}x(j\omega)=A-S(j\omega)\quad(1)$

$$X(t)*X(t)=X(t)\xrightarrow{F}X(j\omega)X(j\omega)=X(j\omega)\;\rightarrow\;X^2(j\omega)=X(j\omega)\quad(2)$$

(2) و (1) از $\left(A-S(j\omega)\right)^2=A-S(j\omega)$

$$A^2+S^2(j\omega)-2AS(j\omega)=A-S(j\omega)$$

نکته ۵: براساس شکل $S(j\omega)$ می‌دانیم که حاصل $S(j\omega)$ در خودش. خود $(S(j\omega))$ خواهد بود.

$$S^2(j\omega)=S(j\omega) \qquad (3)$$

لذا داریم:

$$A^2+S-2AS=A-S$$
$$A(A-2S)=(A-2S)$$
$$\rightarrow \quad A=1$$

۶۹. گزینه ۱ درست است.

$$x(n) \rightarrow X(e^{j\omega})=2+\cos\omega$$

نکته:

$$\cos\theta=\frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2} \qquad (1)$$

$$2+\cos\omega=2+\frac{e^{j\omega}}{2}+\frac{1}{2}e^{-j\omega} \qquad \text{از } (1)$$

$\downarrow$

تبدیل فوریه معکوس $\rightarrow x(n)$

نکته:

$$1 \xrightarrow{F^{-1}} \delta(n) \qquad (2)$$

نکته:

$$e^{-j\omega n_0} \xrightarrow{F^{-1}} \delta(n-n_0) \qquad (3)$$

مرحله اول) یافتن $x(n)$ از روی $X(j\omega)$

از روابط (2) و (3) به دست می‌آید:

$$X(e^{j\omega})=\underbrace{2}_{2\delta(n)}+\underbrace{\frac{e^{j\omega}}{2}}_{\frac{1}{2}\delta(n+1)}+\underbrace{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}_{\frac{1}{2}\delta(n-1)} \xrightarrow{F^{-1}} x(n)=2\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n+1)+\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

مرحله دوم) یافتن $X(z)$ از روی $x(n)$

$$x(n)=2\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n+1)+\frac{1}{2}\delta(n-1) \xrightarrow{Z} X(z)=2+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^{-1} \qquad (5) \qquad \text{از } (4)$$

$$\delta(n-n_0) \xrightarrow{Z} z^{-n_0} \qquad (4)$$

مرحله سوم) یافتن $Y(z)$ از روی $X(z)$

$$Y(z) \triangleq X(z^2) \xrightarrow{\text{از } 5} Y(z)=2+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^{-2} \qquad (6)$$

مرحله چهارم) یافتن $y(n)$ از روی $Y(z)$

$$Y(z) \xrightarrow{Z^{-1}} y(n)=2\delta(n)+\frac{1}{2}\delta(n+2)+\frac{1}{2}\delta(n-2) \qquad \text{از } (6),(4)$$

مرحله پنجم) محاسبه عبارت خواسته شده

نکته: تابع $\delta(n-n_0)$ فقط در نقطه n_0 دارای مقدار بوده و اندازه آن 1 است. بنابراین عبارت روبرو فقط در سه مقدار $n\left\}\begin{matrix}0\\-2\\2\end{matrix}\right.$ دارای مقدار است.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2(n)$$

$$= y^2(0)+y^2(2)+y^2(-2) = 2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4.5$$

۷۰. گزینه ۴ درست است.

نکته ۱: $\begin{matrix} x(n) \to a_k \\ y(n) \to b_k \end{matrix} \Rightarrow x(n).y(n) \to d_k = \sum_{\ell=<N>} a_\ell b_{k-\ell}$

مرحله اول)

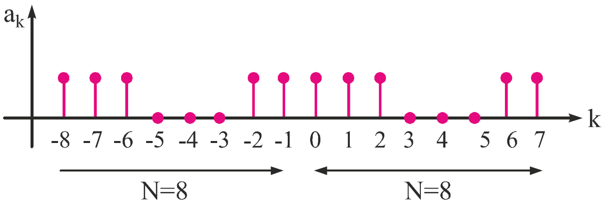
عبارت سؤال

نکته ۲: $y(n) = \left(x(n)\right)^2 = x(n).x(n)$

لذا $\rightarrow$ اگر $x(n) \rightarrow a_k \rightarrow y(x) \rightarrow \sum_{\ell=<N>} a_\ell a_{k-\ell} = y(n)$ ضریب‌های سری فوریه $= y[k]$

از نکته (۲) : $y[0] = \sum_{\ell=<8>} a_\ell a_{-\ell}$, $y[1] = \sum_{\ell=<8>} a_\ell a_{1-\ell}$

مرحله دوم) نمودار ضرایب را در یک دوره تناوب دیگر ادامه می‌دهیم:



مرحله سوم) محاسبه مقادیر خواسته شده

$$y[0] = \sum_{\ell=<8>} a_\ell a_{-\ell} = \underbrace{a_0}_{1} a_0 + \underbrace{a_1}_{1} a_{-1} + \underbrace{a_2}_{1} a_{-2} + \underbrace{a_3}_{0} a_{-3} + \underbrace{a_4}_{0} a_{-4} + \underbrace{a_5}_{0} a_{-5} + \underbrace{a_6}_{1} a_{-6} + \underbrace{a_7}_{1} a_{-7}$$

$$\boxed{=5}$$

$$y[1] = \sum_{\ell=<8>} a_\ell a_{1-\ell} = \underbrace{a_0}_{1} a_1 + \underbrace{a_1}_{1} a_0 + \underbrace{a_2}_{1} a_{-1} + \underbrace{a_3}_{0} a_{-2} + \underbrace{a_4}_{0} a_{-3} + \underbrace{a_5}_{0} a_{-4} + \underbrace{a_6}_{0} a_{-5} + \underbrace{a_7}_{1} a_{-6}$$

$$\boxed{=4}$$

۷۱. گزینه ۴ درست است.

گزینه ۱: با مثال نقض این گزینه رد می‌شود.

مثال $x(n)=a^n U[n]++b^n U[n] \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{1}{1-be^{-j\omega}}=\frac{2-ae^{-j\omega}-be^{-j\omega}}{\left(1-ae^{-j\omega}\right)\left(1-be^{-j\omega}\right)}$

$|a|,|b|<1$

این سیگنال، سمت راستی است اما دو قطب دارد.

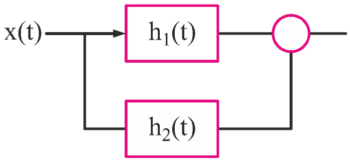
یا سیگنال $\sum_{k=1}^{\infty}\delta(n-2k)$ که یک سیگنال دست راستی است ولی بدون قطب است.

گزینه ۲: سیگنال $e^{-j\omega n}$ تنها در صورتی تناوب است که $\frac{\omega}{\pi}$ عددی گویا شود. پس لزوماً متناوب نیست اما این دلیل نمی‌شود که تبدیل فوریه نداشته باشد. چون در صورتی که $\frac{\omega}{\pi}$ عددی گویا شود، تبدیل فوریه خواهد داشت.

گزینه ۳: با موازی کردن دو سیستم. تابع تبدیل آن‌ها با هم جمع می‌شود. بنابراین آوردن مثال نقض بسیار راحت است.

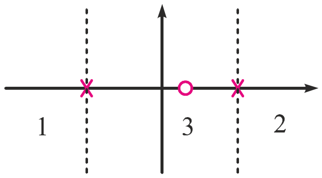
$$\begin{array}{l} h_1(t)=h(t) \\ h_2(t)=-h(t) \end{array} \rightarrow h_{\text{کل}}(t)=h_1(t)+h_2(t)=0$$

پاسخ این سیستم به هر نوع ورودی برابر صفر است ←



از خروجی نمی‌توان به ورودی برگشت ← سیستم معکوس‌ناپذیر است.

گزینه ۴: منظور از دو قطب متمایز، دو قطب حقیقی متمایز است. چون قطب‌ها مزدوج، یکسان فرض می‌شوند. لذا با داشتن دو قطب حقیقی متفاوت و یک صفر می‌توان سه ناحیه همگرایی برای سیستم تعریف کرد.

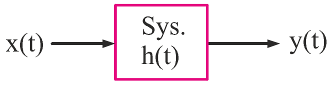


توجه: گزینه ۱، ۲ و ۴ می‌بایست به صورت واضح‌تر بیان می‌شد تا تشخیص پاسخ سؤال راحت‌تر شود. استفاده از قیدهایی مثل حتماً و قیدهای منفی‌کننده درک سؤال را با مشکل مواجه می‌کند. به این نوع قیدها دقت کنید.

۷۲. گزینه ۱ درست است.

راه حل ساده این‌گونه سؤالات آن است که سعی کنید آن‌ها را به فرم‌های استاندارد شناخته شده درآورید.

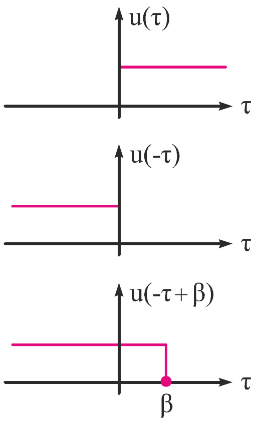
نکته ۱:



$x(t)*h(t)=y(t)$

باید بتوانید سیگنال خروجی را به صورت کانولوشن سیگنال ورودی در تابع تبدیل بنویسید. چون انتگرال یادآور رابطه کانولوشن است.

نکته ۲:



$$\text{(سیستم ۱)}\quad y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)g(\alpha-t)d\alpha$$

به کمک نکته ۲ ↓

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)\underbrace{g(\alpha-t)u(-\alpha+t)}_{h(t)=g(-t)u(t)}d\alpha$$

چون رابطه کانولوشن حاصل شده سیستم هم خطی و هم تغییرناپذیر با زمان است.

$$\to \quad x(t)*h(t)$$

$$u(t)=x(t)*\big(g(-t)u(t)\big)$$

$$\text{(سیستم ۲)}\quad y(t)=\int_{-\infty}^{t} f(\alpha)\underbrace{x(t-\alpha)}d\alpha$$

$$\text{از نکته ۲} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)\underbrace{\overbrace{x(t-\alpha)u(-\alpha+t)}d\alpha}_{x(t)u(t)}$$

رابطه $x(t)$ با $y(t)$ به صورت $\to \quad y(t)=x(t)u(t)*f(t)$

کانولوشن نیست ← پس سیستم LTI نیست.

۷۳. گزینه ۲ درست است.

نیازی به حل ریاضی این سؤال نیست. تنها کافی است از یکی از ویژگی‌های سیستم LTI بهره ببرید.

ویژگی سیستم LTI: به دلیل خطی بودن سیستم، تمام فرکانس‌های موجود در طیف سیگنال خروجی بایستی در سیگنال ورودی هم باشد.

← کافیست، فرکانس‌های سیگنال خروجی را پیدا کرده، به دنبال آن‌ها در گزینه‌ها بگردیم.

$$g(t)=\cos(2\pi.50t)=\cos(100\pi t)=\frac{e^{j(100\pi)t}+e^{-j(100\pi)t}}{2} \quad\to\quad \begin{cases}\omega_1=100\pi\\ \omega_2=-100\pi\end{cases}$$

گزینه ۱) دوره تناوب $=0.01$ ← فرکانس پایه $\omega_0=200\pi=\dfrac{2\pi}{\cancel{T}_{0.01}}$ ← در بسط سری فوریه شامل فرکانس‌های $\pm k\omega_0$ است

که مسلماً شامل $\pm100\pi$ نیست، چون هیچ k عدد صحیحی وجود ندارد که $200\pi k$ را برابر $\pm100\pi$ کند.

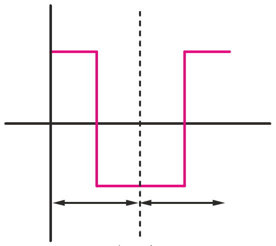
گزینه ۲) دوره تناوب $=0.04$ ← فرکانس پایه $50\pi=\dfrac{2\pi}{T}=\omega_0$ ← در بسط سری فوریه، فرکانس‌های $\pm50\pi k$ وجود دارد

و با $k=2$ ← $\pm100\pi$ ✓ را خواهیم داشت.

گزینه ۳) دوره تناوب $=0.04$ ← فرکانس پایه $50\pi=\dfrac{2\pi}{T}=\omega_0$ ← سیگنال کسینوسی با فرکانس 50π ← تنها دو مؤلفه $\pm50\pi$ دارد ← شامل $\pm100\pi$ نیست.

گزینه ۴) دوره تناوب $=0.04 \leftarrow$ فرکانس پایه $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=50\,\pi \leftarrow$ ظاهراً این دو مؤلفه $\pm100\pi$ را داراست ولی دقت داشته باشید که این سیگنال تقارن نیم‌موج دارد k هارمونیک زوج ندارد و فقط هارمونیک‌های فرد دارد.
(زوج k) (فرد k)

$\leftarrow \pm100\,\pi$ را ندارد



۷۴.گزینه ۳ درست است.

نکته ۱: $x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$

لذا : $y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)\delta(t-4k)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)\delta(\tau-4k)\right]h(t-\tau)d\tau$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta\Big(\tau-\underbrace{4k}_{t_0}\Big).h(t-\tau)d\tau}_{A}\left(1+k^2\right)$$

نکته ۲: $h(t)\delta(t-t_0)=h(t_0)\delta(t-t_0)$

به کمک نکته ۲، انتگرال A را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$A=h(t-4k)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cancel{\delta(\tau-4k)dz}}_{1}=h(t-4k)$$

نکته ۳: $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau)d\tau=1$

$$\rightarrow\ y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)h(t-4k)$$

عبارت سؤال $y(2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(1+k^2\right)h(2-4k) \qquad (4)$

از شکل داده شده می‌دانیم که $-4\le t\le 6 \leftarrow$ لذا $-4\le 2-4k\le 6$

$$\rightarrow\ -6\le -4k\le 4\ \rightarrow\ -1\le k\le 1.5\ \rightarrow\ k\begin{cases}-1\\0\\1\end{cases}$$ گسسته

عبارت 4 به صورت روبرو خلاصه می‌شود:

$$y(2)=2\underbrace{h(\cancel{+6})}_{0}+\underbrace{h(\cancel{2})}_{4}+\underbrace{2\overset{2}{h(\cancel{-2})}}_{4}=\boxed{8}$$

۷۵.گزینه ۴ درست است.

نکته ۱: ترکیب سری دو سیستم معادل ترکیب کانولوشن توابع تبدیل آن‌هاست.

$$1\ \text{سیستم}: z(n)=\frac{1}{2}x(n-1)+2x(n)$$

پاسخ فربه سیستم (1)

$$\text{if}\quad x(n)=\delta(n)\ \rightarrow\ h_1(n)=\frac{1}{2}\delta(n-1)+2\delta(n)$$

$\downarrow$ تبدیل Z (به کمک نکته ۲)

$$H_1(z)=\frac{1}{2}z^{-1}+2$$

$$2\ \text{سیستم}: h_2(n)=\left(\frac{-1}{2}\right)^n U(n)\ \xrightarrow{Z}\ H_2(z)=\frac{1}{1-\left(\frac{-1}{2}\right)z^{-1}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

(به کمک نکته ۳)

$$\text{سیستم‌های سری}\quad h(n)=h(n)*h_2(n)\ \xrightarrow{Z}\ H(z)=H_1(z).H_2(z)$$

$$H(z)=\left(2+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\right)=\frac{1+\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\boxed{\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+1}$$

نکته ۲: $\delta(n-n_0)\ \xrightarrow{Z}\ z^{-n_0}$

نکته ۳: $x(n)*y(n)\ \xrightarrow{Z}\ X(z).Y(z)$

۷۶.گزینه ۲ درست است.

نکته ۱: خروجی هر سیستم علّی، فقط به مقدار کنونی و قبلی ورودی بستگی دارد.

نکته ۲: برای سیستم LTI زمان گسسته علّی داریم: $h(n)=0\quad ;\quad n<0$

نکته ۳: سیستم پایدار $\leftarrow$ سیستم کراندار $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$

نکته ۴: پاسخ ضربه به صورت تفاضل پاسخ‌های پله نوشته می‌شود $\leftarrow$ به خاطر مسئله پایداری

$$h(x)=S(n)-S(n-1)$$

$$\text{(سؤال)}\ S(n)=\delta(n)+ah(n-1)\ \xrightarrow{\text{از }(4)}\ h(n)+S(n-1)=\delta(n)+h(n-1)\qquad(5)$$

$$n=-1\ \rightarrow\ S(-1)=\underbrace{\delta(0-1)}_{0}+\underbrace{ah(-2)}_{0\ \text{علّی}}\ \rightarrow\ S(-1)=0\qquad(6)$$

$$\text{از }(5)\text{ و }(6)\ \rightarrow\ h(0)+\underbrace{S(-1)}_{0}=\underbrace{\delta(0)}_{1}+\underbrace{ah(-1)}_{0\ \text{علّی}}\ \rightarrow\ h(0)=\boxed{1}$$

$$\begin{cases}\text{if}\quad n\neq 0\ \rightarrow\ S(n)=ah(n-1)\qquad(7)\ \text{از صورت سؤال}\\ \text{از }(4)\text{ و }(7)\quad h(n)=ah(n-1)-ah(n-2)=a\big(h(n-1)-h(n-2)\big)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ h(\infty)=a\big(h(\infty)-h(\infty)\big)\ \rightarrow\ \boxed{h(\infty)=0}$$

۷۷. پاسخ درست در گزینه‌ها نیست.

$$x(n)\ \rightarrow\ X(j\omega)\ ,\ X(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

$$y(n)=x(2n+1)\ \rightarrow\ Y(j\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n+1)e^{-j\omega n}\ \rightarrow\ \text{تغییر متغیر}\ m=2n+1\ \rightarrow\ n=\frac{m-1}{2}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\omega\left(\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\right)}\qquad n\Big|_{-\infty}^{\infty}\ \rightarrow\ m\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{\frac{j\omega}{2}}.e^{-\frac{j\omega}{2}m}=e^{\frac{j\omega}{2}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)e^{-j\left(\frac{\omega}{2}\right)m}=e^{\frac{j\omega}{2}}X\left(\frac{j\omega}{2}\right)$$

پاسخ در گزینه‌ها موجود نیست!

۷۸. گزینه ۲ درست است.

$$H(z)=\frac{z^3}{z^2-\frac{5}{2}z+1}$$

چون درجه صورت از مخرج بیش‌تر است، در صورت $z\rightarrow\infty$، $H(z)$ کراندار نخواهد بود بنابراین علّی نمی‌باشد. در واقع یک سیستم LTI زمان گسسته علّی است، اگر و تنها اگر:

۱ـ ROC خارج بیرونی‌ترین قطب باشد ۲ـ با $H(z)$ به صورت نسبت دو چند جمله‌ای از z، درجه صورت از مخرج بزرگ‌تر نباشد.

طبق مبحث ۱۰ـ۷ـ۱ از کتاب سیگنال‌ها و سیستم‌ها اوپنهایم، ویلسکی و نواب