

سرعت زاویه‌ای ی جسم دوار در چارچوب فضا

امیر آقامحمدی

چکیده—اگر معادله‌های اویلر برای حرکت جسم دوار را حل کنیم، مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای ی جسم در چارچوب دوار به دست می‌آیند. به دست آوردن مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در چارچوب فضا کار پیچیده‌تری است. یک راه حل کلی برای به دست آوردن سرعت زاویه‌ای در چارچوب فضا ارائه می‌شود. هر چند جوابی که به دست می‌آید یک جواب صوری است و به دست آوردن شکلی صریح آن هنوز پیچیده است. دوران آزاد جسم متقارن به عنوان مثال حل می‌شود.

۱ چارچوب دوار و معادله ی اویلر

در بسیاری از کتاب‌های درسی ی مکانیک بخشی تحت عنوان دوران جسم صلب یا عنوان‌هایی مشابه وجود دارد. در این بخش از کتاب معادله‌های اویلر به دست می‌آید و معمولاً با حل این معادله‌ها مسئله تمام می‌شود. ولی واقعاً با حل این معادله‌ها، مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای ی جسم در چارچوب دوار به دست می‌آیند. با این کار اطلاعاتی در مورد دوران جسم به دست می‌آیند ولی برای داشتن همه ی اطلاعات در مورد دوران جسم باید مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای ی جسم در چارچوب فضا به دست آیند. این کار معمولاً پیچیده است. گاهی آن‌ها را با استفاده از زوایای اویلر می‌توان به دست آورد. اما ما در این جا از روش دیگری استفاده می‌کنیم.

دو چارچوب S و S' که مبدأشان بر هم منطبق است را در نظر بگیرید. چارچوب S را چارچوب فضا و چارچوب S' را چارچوبی متحرک و چسبیده به جسم در نظر بگیرید. بردار مکان نقطه‌ای از جسم در چارچوب S را \mathbf{r} و در چارچوب S' ، \mathbf{r}' می‌گیریم. این دو توسط

ماتریس R به هم مربوط اند.

$$\mathbf{r} = R \mathbf{r}' \quad (1)$$

طول بردار مکان هر نقطه در دو چارچوب یکی است. پس

$$\tilde{\mathbf{r}}\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}'\mathbf{r}' = \tilde{\mathbf{r}}'\tilde{R}R\mathbf{r}', \Rightarrow \tilde{R}R = R\tilde{R} = \mathbb{1}, \quad (2)$$

که \tilde{R} ترانهاده R است. حالا ببینیم تغییرات زمانی \mathbf{r} بردار مکان در دو چارچوب چه گونه به هم مربوط اند.

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' + R\dot{\mathbf{r}}' \quad (3)$$

فرض کردیم چارچوب S' چسبیده به جسم است، پس $\dot{\mathbf{r}}' = 0$ و

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{R}\mathbf{r}' = \dot{R}\tilde{R}\mathbf{r} =: \mathcal{A}\mathbf{r}. \quad (4)$$

در این جا از $\mathbf{r}' = R^{-1}\mathbf{r} = \tilde{R}\mathbf{r}$ استفاده کرده ایم. با مشتق گیری از $R\tilde{R} = \mathbb{1}$ نتیجه می شود

$$\dot{R}\tilde{R} + R\dot{\tilde{R}} = 0. \quad (5)$$

با استفاده از این رابطه نشان می دهیم که $\mathcal{A} := \dot{R}\tilde{R}$ ماتریسی پادمتقارن است.

$$\tilde{\mathcal{A}} = R\dot{\tilde{R}} = R\dot{R} = -\dot{R}\tilde{R} = -\mathcal{A} \quad (6)$$

با تعریف $\omega_i = -\frac{1}{2}\sum_{jk}\epsilon_{ijk}A_{jk}$ ، ماتریس \mathcal{A} به شکل زیر در می آید

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

و

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathcal{A}\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (8)$$

در واقع اثر هر تبدیلی خطی پادمتقارن در سه بُعد معادل ضرب خارجی در یک بردار است. مشتق زمانی \mathbf{P} یک بردار دل خواه، $\mathbf{P} = R\mathbf{P}'$ ، در دو چارچوب S و S' با رابطه زیر به هم مربوط اند

$$\dot{\mathbf{P}} = R\dot{\mathbf{P}}' + \dot{R}\mathbf{P}'$$

$$\begin{aligned}
&= R\dot{\mathbf{P}}' + \dot{R}\tilde{R}R\mathbf{P}' = R\dot{\mathbf{P}}' + A\mathbf{P} \\
&= R\dot{\mathbf{P}}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \\
&= R\dot{\mathbf{P}}' + R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{P}' \\
&= R\left(\dot{\mathbf{P}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}'\right), \tag{9}
\end{aligned}$$

که $\boldsymbol{\omega}'$ مؤلفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ در چارچوب S' را می‌دهد. در به دست آوردن نتیجه از $R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{P}' = R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}')$ استفاده کرده‌ایم. این معادله برای تکانه‌ی زاویه‌ای به صورت زیر در می‌آید¹

$$\begin{aligned}
N = \dot{\mathbf{L}} &= R\left(\dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}'\right) \\
N' &= \dot{\mathbf{L}}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{L}', \tag{10}
\end{aligned}$$

که N مؤلفه‌های گشتاور وارد به جسم در چارچوب S و N' مؤلفه‌های گشتاور وارد به جسم در چارچوب S' است. معادله‌ی اخیر معادله‌ی اوپلر است. اگر بتوانیم این معادله را حل کنیم مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در چارچوب چسبیده به جسم به دست می‌آیند. اما محاسبه‌ی مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در چارچوب S هنوز کار بسیار پیچیده‌ای است. دیدیم که اثر A روی هر بردار دل‌خواهی مثل \mathbf{P} به صورت $A\mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$ است. این رابطه را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
A\mathbf{P} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} = R\boldsymbol{\omega}' \times R\mathbf{P}' \\
&= R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}'). \tag{11}
\end{aligned}$$

ماتریس A' را با $\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}' := A'\mathbf{P}'$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

$$\begin{aligned}
A\mathbf{P} &= R(\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{P}') = RA'\mathbf{P}' \\
&= RA'\tilde{R}\mathbf{P}. \tag{12}
\end{aligned}$$

پس $A = RA'\tilde{R}$. با استفاده از تعریف $A = \dot{R}\tilde{R}$ ، A' را می‌توانیم بر حسب R به دست آوریم

¹ این نتیجه در مراجع ۱ تا ۳ با روش دیگری به دست آمده‌اند. رهیافت این مقاله به مسئله شبیه روش استفاده شده در مرجع ۴ است.

$$A' = \tilde{R}AR = \tilde{R}\dot{R} \quad \text{یا} \quad \dot{R} = RA'. \quad (13)$$

همان‌طور که دیدیم با حل معادله‌ی اویلر علی‌الاصول A' و به عبارتی A' به دست می‌آید. معادله‌ی (13) معادله‌ی تحولِ زمانی‌ی R است. با داشتن A' با حل این معادله علی‌الاصول ممکن است بتوانیم R و از آن‌جا ω یعنی مؤلفه‌های سرعتِ زاویه‌ای‌ی جسم در چارچوبِ فضا یعنی S ، را به دست آوریم. توجه کنید که معادله‌ی (13) یک معادله‌ی عمل‌گری است. وقتی که A' به زمان بستگی دارد، چون A' ماتریس است، علی‌الاصول A' در زمان‌های مختلف با هم جابه‌جا نمی‌شوند

$$[A'(t_1), A'(t_2)] \neq 0. \quad (14)$$

در دو حالت حل معادله‌ی (13) ساده است. وقتی که A' ثابت است. در این حالت جواب معادله‌ی (13) به سادگی به دست می‌آید

$$R(t) = R(0)e^{tA'}. \quad (15)$$

در حالتی خاصی هم که $[A'(t_1), A'(t_2)] = 0$ باشد باز هم حل معادله‌ی (13) ساده است. در واقع در این حالت نیز می‌توانیم با $A'(t)$ مثل یک عدد رفتار کنیم و جواب معادله عبارت است از

$$R(t) = R(0) \exp \left(\int_0^t A'(t') dt' \right). \quad (16)$$

اما در حالت کلی که A' تابع زمان است و در زمان‌های مختلف نمایش آن ماتریس‌هایی است که با هم جابه‌جا نمی‌شوند، جواب معادله‌ی (13) به صورت زیر می‌شود

$$R(t) = R(0) \text{Texp} \left(\int_0^t A'(t') dt' \right) \quad (17)$$

منظور از Texp عمل‌گرِ زمان مرتب است و نمادی برای خلاصه‌نویسی است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \text{Texp} \left(\int_0^t A'(t') dt' \right) &= \\ \sum_k \int_0^t dt'_1 \int_0^{t'_1} dt'_2 \cdots \int_0^{t'_k-1} dt'_k A'(t'_1) A'(t'_2) \cdots A'(t'_k) & \quad (18) \end{aligned}$$

اگر بتوانیم این انتگرال زمان مرتب را بگیریم می‌توانیم ماتریس R که همه‌ی اطلاعات در مورد حرکت جسم دوار دارد را به دست آوریم. در ضمن در پی آن می‌توانیم ω یعنی مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در چارچوب فضا نیز را به دست آوریم. اما عملاً این جواب صوری است و کار زیادی نمی‌توانیم با آن انجام دهیم. در بخش بعد یک مثال ساده که دوران آزاد جسم متقارن است را بررسی می‌کنیم.

۲ مثال — دوران آزاد جسم متقارن

منظور از دوران آزاد، دوران جسم در غیاب گشتاور خارجی است. محورهای چارچوب S' را محورهای اصلی جسم می‌گیریم، به طوری که محور 3 محور تقارن جسم باشد. در این صورت معادله‌ی (10) برای جسم متقارن به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}'_1 + \omega'_2 \omega'_3 (I_3 - I_1) &= 0, \\ I_1 \dot{\omega}'_2 + \omega'_1 \omega'_3 (I_1 - I_3) &= 0, \\ I_3 \dot{\omega}'_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

I_i لختی دورانی جسم حول محور i است. از این معادلات نتیجه می‌شود که ω'_3 ثابت است و بردار ω' حول محور 3 با سرعت زاویه‌ای α می‌چرخد.

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= B \cos \alpha t, \\ \omega'_2 &= B \sin \alpha t, \\ \omega'_3 &= C, \end{aligned} \quad (20)$$

که B ، C مقادیر ثابتی هستند که از شرایط اولیه به دست می‌آیند و $\alpha = \frac{C(I_3 - I_1)}{I_1}$. ماتریس A' به شکلی زیر می‌شود

$$A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -C & B \sin \alpha t \\ C & 0 & -B \cos \alpha t \\ -B \sin \alpha t & B \cos \alpha t & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

A' تابعی از زمان است. دیدیم که حل مسئله به روش مستقیم برای وقتی که A' تابع زمان است پیچیده بود. اما هنوز می‌توانیم مسئله را با انتخاب چارچوب مناسب به شکلی ساده‌تری

حل کنیم. در چارچوب S'' که با سرعت زاویه‌ای $\alpha \hat{k}'$ به دور S' می‌چرخد، بردار سرعت زاویه‌ای ثابت است. مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای در این چارچوب عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}\omega_1'' &= B, \\ \omega_2'' &= 0, \\ \omega_3'' &= C.\end{aligned}\quad (22)$$

ماتریس تبدیلی که چارچوب S'' و S را به هم مربوط می‌کند $\mathcal{R} := RR_3$ است که R_3 عبارت است از

$$R_3 = \begin{pmatrix} \cos \alpha t & -\sin \alpha t & 0 \\ \sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (23)$$

اثر تبدیل R_3 روی هر بردار ثابت چرخاندن آن با سرعت زاویه‌ای α است. در ضمن به طور مستقیم هم می‌توانیم نشان دهیم که

$$\mathcal{A}_3 := \tilde{R}_3 \dot{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (24)$$

بباید معادله‌ی تحول زمانی \mathcal{R} را به دست آوریم

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{R}} &= \dot{R}R_3 + R\dot{R}_3 \\ &= RA'R_3 + RR_3\mathcal{A}_3 \\ &= RR_3(\tilde{R}_3 A' R_3 + \mathcal{A}_3) \\ &= \mathcal{R}(\bar{A} + \mathcal{A}_3).\end{aligned}\quad (25)$$

در این جا از (13,24) استفاده کرده‌ایم و

$$\bar{A} := \tilde{R}_3 A' R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -C & 0 \\ C & 0 & -B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}.\quad (26)$$

بنا بر این معادله‌ی تحول \mathcal{R} با A'' داده می‌شود که ماتریسی ثابت است

$$\dot{\mathcal{R}} = \mathcal{R}A'', \quad A'' := \bar{A} + \mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -C - \alpha & 0 \\ C + \alpha & 0 & -B \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}.\quad (27)$$

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{R}(0)e^{t\mathcal{A}''}, \Rightarrow R(t) = R(0)R_3(0)e^{t\mathcal{A}''}\tilde{R}_3(t) \quad (28)$$

با انتخاب $R(0) = \mathbb{1}$

$$R(t) = e^{t\mathcal{A}''} \begin{pmatrix} \cos \alpha t & \sin \alpha t & 0 \\ -\sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

بالاخره $\omega(t)$ را با استفاده از $\omega = R\omega'$ می‌توانیم به دست آوریم

$$\omega = e^{t\mathcal{A}''} \begin{pmatrix} \cos \alpha t & \sin \alpha t & 0 \\ -\sin \alpha t & \cos \alpha t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \cos \alpha t \\ B \sin \alpha t \\ C \end{pmatrix} = e^{t\mathcal{A}''} \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ C \end{pmatrix}. \quad (30)$$

برای محاسبه‌ی صریح ω لازم است $e^{t\mathcal{A}''}$ را به دست آوریم. اگر ماتریس قطری‌کننده‌ی

\mathcal{A}'' را U بگیریم

$$\mathcal{A}''_D := U^\dagger \mathcal{A}'' U, \quad U = \frac{1}{Y\sqrt{2}} \begin{pmatrix} iX & B\sqrt{2} & -iX \\ Y & 0 & Y \\ -iB & X\sqrt{2} & iB \end{pmatrix} \quad (31)$$

که $X := C + \alpha$ ، $Y := \sqrt{(C + \alpha)^2 + B^2}$. مقادیر ویژه‌ی \mathcal{A}'' یا در واقع اعضای قطر \mathcal{A}''_D

$\pm iY$ و صفر هستند، یعنی

$$\mathcal{A}''_D = \begin{pmatrix} iY & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -iY \end{pmatrix}. \quad (32)$$

در این صورت

$$\begin{aligned} e^{t\mathcal{A}''} &= \sum_k \frac{(t\mathcal{A}'')^k}{k!} \\ &= U \sum_k \frac{(tU^\dagger \mathcal{A}'' U)^k}{k!} U^\dagger \\ &= U \sum_k \frac{(t\mathcal{A}''_D)^k}{k!} U^\dagger \end{aligned}$$

$$= U \begin{pmatrix} e^{itY} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-itY} \end{pmatrix} U^\dagger, \quad (33)$$

که با محاسبه‌ی مستقیم منجر می‌شود به

$$e^{tA''} = \frac{1}{Y^2} \begin{pmatrix} X^2 \cos(Yt) + B^2 & -XY \sin(Yt) & XB(1 - \cos(Yt)) \\ XY \sin(Yt) & Y^2 \cos(Yt) & -YB \sin(Yt) \\ XB(1 - \cos(Yt)) & YB \sin(Yt) & X^2 + B^2 \cos(Yt) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

با جاگذاری در $\omega = R\omega'$ ، مؤلفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای $\omega(t)$ در چارچوب ثابت در فضا به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \omega_x(t) &= -\frac{2B\alpha(C + \alpha)}{(C + \alpha)^2 + B^2} \sin^2(t\sqrt{(C + \alpha)^2 + B^2}/2) + B, \\ \omega_y(t) &= \frac{B\alpha}{\sqrt{(C + \alpha)^2 + B^2}} \sin(t\sqrt{(C + \alpha)^2 + B^2}), \\ \omega_z(t) &= \frac{2B^2\alpha}{(C + \alpha)^2 + B^2} \sin^2(t\sqrt{(C + \alpha)^2 + B^2}/2) + C. \end{aligned} \quad (35)$$

ثابت‌های C و B را، که به ثابت‌های اولیه مربوط اند، می‌توانیم بر حسب مؤلفه‌های سرعت زاویه‌ای اولیه‌ی جسم در چارچوب فضا بنویسیم.

$$B = \omega_x(0), \quad C = \omega_z(0). \quad (36)$$

و $\alpha = \frac{(I_3 - I_1)\omega_z(0)}{I_1}$. بنا بر این ω بردار سرعت زاویه‌ای بر حسب وضعیت آغازین به دست می‌آید.

- [1] Landau, L.D., Lifshitz E. M., *Mechanics*, 3rd edition, Pergamon Press.
- [2] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 3rd edition, Addison-Wesley.
- [3] Symon, K. R., *Mechanics*, 4th edition, Addison-Wesley.
- [4] Arnold V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd edition, Springer-Verlag.