هندسهٔ تحلیلی در صفحه و مختصات قطبی ۱۰

هندسهٔ تحلیلی، که توسط رنه دکارت[1] ابداع شده است، مبحثی است که در آن، پس از معرفی دستگاه مختصات مناسبی، روشهای جبری برای حل مسائل هندسی به کار گرفته می‌شوند. حال تکنیکهای هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال را درهم آمیخته بررسی منحنیها در صفحه را ادامه می‌دهیم. در بخش ۱۰.۱ بحث را با نشان دادن اینکه چطور معادلهٔ یک منحنی در مختصات قائم ضمن انتقال یا دوران دستگاه مختصات تغییر می‌کند آغاز می‌کنیم. سپس در بخشهای ۱۰.۲ تا ۱۰.۴ سهمیها، بیضیها، و هذلولیها را به تفصیل بررسی می‌نماییم. این منحنیها در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی داشته، و همانطورکه دربخش ۱۰.۵ توضیح دادیم، هرکدام یک "مقطع مخروطی" است؛ یعنی، اشتراک یک مخروط مستدیر قائم مضاعف با یک صفحهٔ قاطع مناسب می‌باشد. مقاطع مخروطی مبحث دلخواه هندسه‌دانان یونان باستان بوده است. در واقع، آپولونیوس[2] اهل پرگا (۱۷۰ – ۲۵۵ ق.م.) مقاله‌ای در این باب نوشت که شامل 400 قضیه بود، و اصطلاحات سهمی، بیضی، و هذلولی از آن اوست. مقاطع مخروطی همه دارای معادلات درجهٔ دوم به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ هستند، و به عکس، نمودار هر چنین معادله یک مقطع مخروطی است جز چند حالت استثنایی که در بخش ۱۰.۶ توصیف شده‌اند.

در یک دستگاه مختصات دکارتی موضع نقطهٔ P با مختصات قائم آن مشخص می‌شود. این یعنی دو خط، یکی افقی و دیگری قائم، رسم می‌کنیم که در P متقاطع باشند. دستگاههای مختصات غیرقائم نیز وجود دارند، و یکی از مفیدترین آنها ***دستگاه مختصات قطبی*** است که در بخشهای ۱۰.۷ تا ۱۰.۱۰ بررسی شده است. در این دستگاه موضع نقطهٔ P با مختصات قطبی آن مشخص می‌شود، به این ترتیب که دایره‌ای و شعاع آن را نشان

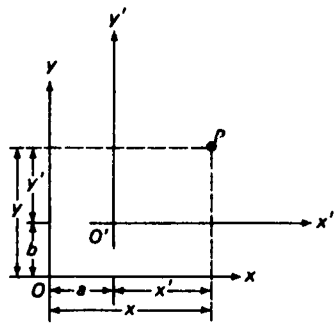
---

1. René Descartes
2. Apollonius

می‌دهیم که در P یکدیگر را قطع می‌کنند. خواهید دید که مختصات قطبی بخصوص برای نوشتن مقاطع مخروطی مفیدند.

۱۰.۱ انتقال و دوران محورها

شکل ۱ دستگاه مختصات دکارتی Oxy را نشان می‌دهد که *انتقال یافته است*؛ یعنی، کلاً بدون دوران طوری جابجا شده است که مبداء آن O موضع جدید $O' = (a, b)$ را اشغال کرده و بدین ترتیب دستگاه مختصات قائم دیگر $O'x'y'$ در همان صفحهٔ Oxy تولید شده است.



شکل ۱

حال نقطهٔ P در صفحه دو جفت مختصات دارد، جفت (x, y) در دستگاه xy "قدیم" و جفت (x', y') در دستگاه $x'y'$ "جدید". از شکل معلوم می‌شود که رابطهٔ بین این مختصات به صورت زیر است:

$$x = x' + a, \qquad y = y' + b, \tag{۱}$$

یا معادلاً

$$x' = x - a, \qquad y' = y - b. \tag{۱'}$$

معادلات (۱) و (۱') *معادلات انتقال* نام دارند.

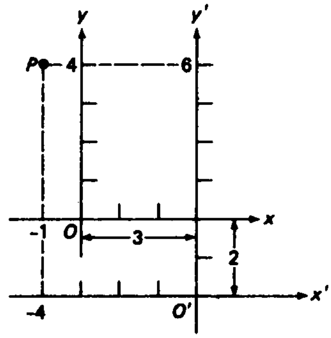
مثال ۱. فرض‌کنید مبداء دستگاه جدید $x'y'$ نقطهٔ $(a, b) = (3, -2)$ در دستگاه xy قدیم باشد. مختصات جدید نقطهٔ P به مختصات قدیم $x = -1, y = 4$ چیست؟

حل. از رابطهٔ (۱') به ازای $a = 3, b = -2$ معلوم می‌شود که

$$x' = x - 3, \qquad y' = y + 2.$$

لذا ، همانطور که شکل ۲ نشان داده ، مختصات جدید نقطهٔ P عبارتنداز

$$x' = -1 - 3 = -4, \qquad y' = 4 + 2 = 6.$$



شکل ۲

مثال ۲ . با انتقال محورها ، دستگاه مختصات x', y' را طوری بیابیدکه‌درآن معادلهٔ دایرهٔ

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

به

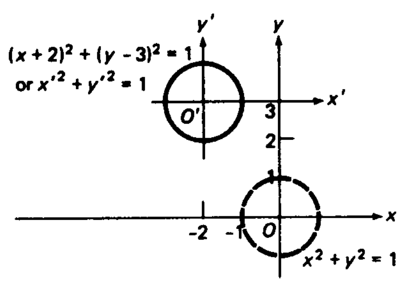
$$x'^2 + y'^2 = 1$$

ساده شود .

حل . واضح است که معادلات انتقال مربوطه عبارتنداز

$$x' = x + 2, \qquad y' = y - 3.$$

دستگاه $x'y'$ جدید حاصل انتقال دستگاه xy قدیم 2 واحد به چپ و 3 واحد به بالاست . انتظار این‌امرمی‌رفت ،چراکه $O'x'y'$ دستگاهی‌است‌که‌درآن‌دایرهٔ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به شعاع 1 و به مرکز نقطهٔ $(-2, 3)$ به دایرهٔ به شعاع 1 و مرکز مبداء تبدیل می‌شود (ر . ک . شکل ۳) . همچنین ،توجه کنید که همین انتقال‌دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ (منحنی‌منقطع)



شکل ۳

را درصورتی به دایرهٔ $(x+2)^2+(y-3)^2=1$ می‌برد که دستگاه xy ثابت نگهداشته‌شود.

دوران محورها. حال دوران‌های یک دستگاه مختصات نسبت به دیگری را درنظر می‌گیریم. شکل ۴ (آ) دستگاه مختصات قائم Oxy را نشان می‌دهد که حول مبداء O خود به اندازهٔ زاویهٔ θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران کرده، دستگاه مختصات قائم دیگر $Ox'y'$ را در همان صفحهٔ Oxy و همان مبداء O تولید می‌کند. حال نقطهٔ ثابت P در صفحه دو جفت مختصات دارد، جفت (x, y) در دستگاه xy قدیم وجفت (x', y') در دستگاه $x'y$ جدید. برای یافتن رابطهٔ بین این مختصات، فرض‌کنیم r طول پاره‌خط OP بوده، و α زاویهٔ بین OP و محور x' باشد که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود. پس زاویهٔ بین OP و محور x مساوی $\alpha + \theta$ است؛ درنتیجه،

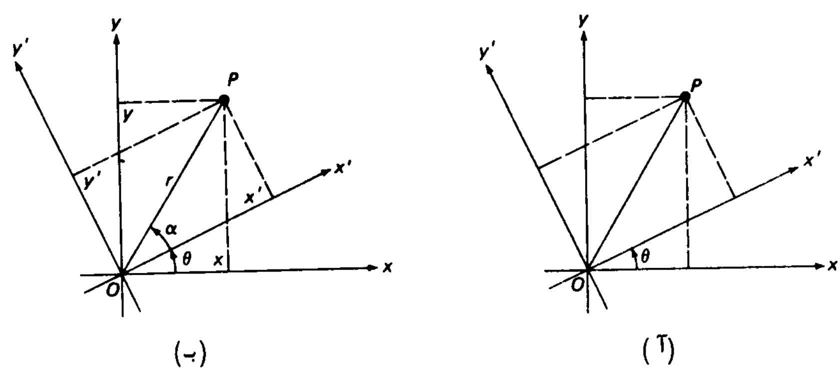
$$x = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha,$$
$$y = r\sin(\theta+\alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha.$$

اما

$$x' = r\cos\alpha, \qquad y' = r\sin\alpha$$

[ر.ک. شکل ۴ (ب)]؛ و درنتیجه، معادلات مربوط به x و y به صورت زیر ساده‌می‌شوند:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta,\\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{aligned} \tag{۲}$$



شکل ۴

معادلات (۲) مختصات قدیم x و y را برحسب مختصات جدید x' و y' بیان می‌کنند. معادلات نظیر که x' و y' را برحسب x و y بیان می‌کنند عبارتنداز

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta,\\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned} \tag{۲'}$$

روابط (۲') را می‌توان با حل جفت معادلات همزمان (۲) نسبت به x' و y به دست آورد ، ولی چنانچه درک شود که اگر دستگاه $Ox'y'$ با دستگاه Oxy زاویهٔ θ بسازد ، Oxy با $Ox'y'$ زاویهٔ $\theta-$ می‌سازد بسیار ساده‌تر است؛ درنتیجه ، می‌توان جفتهای (x, y) و (x', y') در (۲) را باهم عوض کرد مشروط بر اینکه θ نیز به $\theta-$ تغییر یابد . به عنوان تمرین ، تحقیق کنید که این در واقع (۲) را به (۲') و بالعکس تبدیل می‌کند . معادلات (۲) و (۲') *معادلات دوران* نام دارند .

مثال ۳ . فرض کنید P نقطهٔ $(1, 2)$ بوده ، و دستگاه xy به اندازهٔ زاویهٔ $30°$ درجهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخیده دستگاه جدید $x'y'$ را تولیدنماید . مختصات جدید P چه خواهند بود ؟

حل . از روابط (۲') به ازای $\theta = 30°$ معلوم می‌شود که

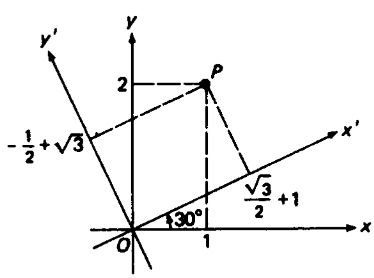
$$x' = x \cos 30° + y \sin 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{2} y,$$

$$y' = -x \sin 30° + y \cos 30° = -\frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{2} y.$$

با گذاردن $x = 1, y = 2$ در این معادلات ، معلوم می‌شودکه مختصات جدید نقطهٔ P عبارتنداز

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \qquad y' = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

(ر . ک . شکل ۵) .



شکل ۵

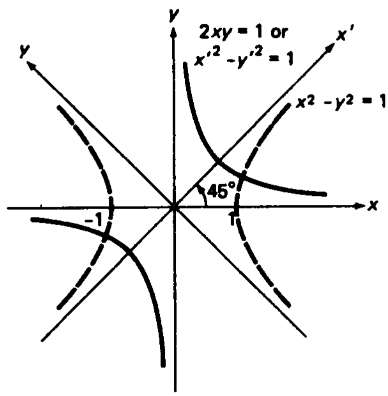
مثال ۴ . نشان دهید که معادلهٔ

$$2xy = 1$$

درصورتی به معادلهٔ

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

هذلولی یکه (ر.ک. صفحهٔ ۵۶۶) تبدیل می‌شود که دستگاه $x'y'$ از دوران دستگاه xy بــه اندازهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، مثل شکل ۶ ، به دست آمده باشد .



شکل ۶

حل   با اختیار $\theta = 45°$ در معادلات دوران (۲) ، به دست می‌آوریم

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

بنابراین ،

$$2xy = (x' - y')(x' + y') = x'^2 - y'^2,$$

درنتیجه ، $2xy = 1$ به $x'^2 - y'^2 = 1$ در دستگاه $x'y'$ تبدیل می‌شود . همچنین ، توجه کنید که همین دوران $45°$ هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ (نمودار منقطع در شکل) را درصورتی به هذلــولی $2xy = 1$ می‌برد که دستگاه xy ثابت گرفته شود .

نمودار $F(x, y) = 0$. فرض کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y باشد . (دراینجا ، مثل صفحهٔ ۶۵۳ ، نماد توابع دو متغیره را پیش‌بینی می‌کنیم .) منظور از نمودار معادلهٔ

$$F(x, y) = 0, \qquad (۳)$$

یعنی مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) در صفحهٔ xy که مختصاتش در (۳) صدق کنند . مثلا" ، اگر

$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ، نمودار (۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبداء است ، حال‌آنکه‌اگر $F(x, y) = y - f(x)$ ، نمودار (۳) نمودار تابع $y = f(x)$ می‌باشد . فرض کنیم G نمودار معادلهٔ (۳) و G' نمودار معادلهٔ

$$F(x - a, y - b) = 0 \tag{۳'}$$

باشد . در این صورت ،نقطهٔ (x, y) در (۳) صدق می‌کند اگر و فقط اگر نقطهٔ $(x + a, y + b)$ در (۳') صدق نماید . اما $(x + a, y + b)$ حاصل انتقال افقی (x, y) به اندازهٔ $|a|$ به راست اگر $a > 0$ و به چپ اگر $a < 0$ ، و انتقال قائم به اندازهٔ $|b|$ به بالا اگر $b > 0$ و به پایین اگر $b < 0$ است . بنابراین ، G' از G با همان انتقالها به دست می‌آید . مثلاً ، اگر دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ به اندازهٔ 2 واحد به چپ و 3 واحد به راست انتقال یابد ، همانطورکه قبلاً گفتیم ، دایرهٔ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به دست می‌آید (ر.ک. شکل ۳) .

آزمونهای تقارن. حال تقارنهای نمودار G معادلهٔ $F(x, y) = 0$ را درنظر می‌گیریم . فرض کنیم G نسبت به محور x متقارن باشد . این یعنی نقطهٔ (a, b) متعلق به G است اگروفقط اگر $(a, -b)$ نیز متعلق به G باشد ، یا معادلاً $F(a, b) = 0$ اگر و فقط اگر $F(a, -b) = 0$.به عبارت دیگر ، G نسبت به محور x **متقارن** است اگر و فقط اگر دو معادلهٔ $F(x, y) = 0$ و $F(x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین نحو ، G نسبت به محور y **متقارن** است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته‌باشند حال آنکه G نسبت به مبداء **متقارن** است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین ترتیب ، G نسبت به خط $y = x$ **متقارن** است اگر و فقط اگر معادلات $F(x, y) = 0$ و $F(y, x) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند .

مثال ۵. نمودار معادلهٔ

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1 \tag{۴}$$

نسبت به هیچیک از محورهای مختصات یا مبداء متقارن نیست .درواقع، ازتعویض x با $-x$ در (۴) معادلهٔ

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

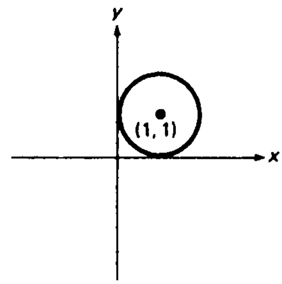
از تعویض y با $-y$ معادلهٔ

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1,$$

و از تعویض x با $-x$ و y با $-y$ معادلهٔ

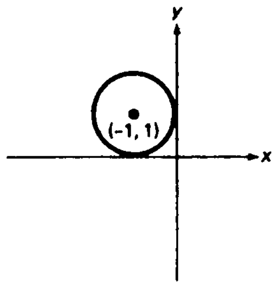
$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

نتیجه‌می‌شود ،که هیچیک‌از سه‌معادله مجموعه‌جواب (۴) را ندارد . مثلا" ، $x = 2, y = 1$ جواب معادلهٔ (۴) است ، ولی جواب سایر معادلات نیست . این امر که تمام چهار معادله مجموعه‌های جواب مختلف دارند فورا" از نمودارهای آنها در شکلهای ۷ (آ) تا ۷ (ت) معلوم می‌شود . نمودارها همه دایره به شعاع 1 هستند ، ولی مراکزشان در ربعهای مختلف



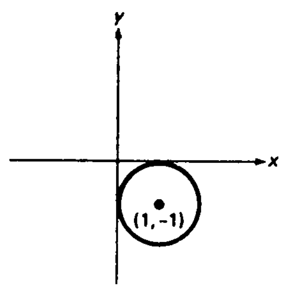
نمودار $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

(آ)



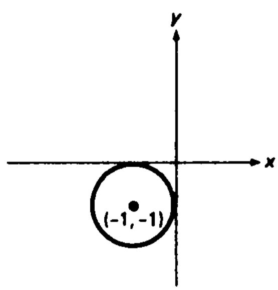
نمودار $(x+1)^2+(y-1)^2=1$

(ب)



نمودار $(x-1)^2+(y+1)^2=1$

(پ)



نمودار $(x+1)^2+(y+1)^2=1$

(ت)

شکل ۷

است . اما نمودار (۴) نسبت به خط $x = y$ متقارن است ، زیرا از تعویض x و y در (۴) معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود :

$$(y-1)^2+(x-1)^2=1,$$

که با (۴) معادل است ؛ و لذا ، همان مجموعه جواب را دارد . انتظار این تقارن می‌رفت ، زیرا (۴) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش بر خط $x = y$ قرار دارد .

معادلات متمایز می‌توانند مجموعه‌جواب‌یکسان‌داشته‌باشند .مثلا": معادلات $x + y = 0$ و $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2=0$ دقیقا" مجموعه جواب یکسان دارند و آن عبارت است از تمام نقاط خط $y = -x$. باید توجه داشت که گاهی معادلات با مجموعه جوابهای

مختلف جوابهای مشترک دارند. مثلاً، دو معادلهٔ اول مثال ۵ در جواب $x = 0, y = 1$ سهیم‌اند ولی سایرین نیستند. این را چگونه به‌طور هندسی توضیح می‌دهید؟

دو تقارن ممکن است سومی را ایجاب کند. مثلاً، یک نمودار متقارن نسبت به هر دو محور مختصات نسبت به مبداء متقارن است، و اگر نسبت به یک محور مختصات و مبداء متقارن باشد، نسبت به محور دیگر نیز چنین است (این احکام را تحقیق کنید).

مسائل

فرض کنید دستگاه xy با بردن مبداء آن به نقطهٔ داده شده انتقال یافته باشد. معادلات انتقال نظیر را بنویسید.

۱. $(0, 10)$ ۲. $(-5, 0)$ ۳. $(1, -2)$ ۴. $(-6, 4)$

مختصات قدیم مبداء جدید را پس از انتقال محورهای ذکر شده بیابید.

۵. $x' = x - 3, y' = y - 5$ ۶. $x' = x + 2, y' = y - 1$

۷. $x' = x, y' = y + 1$ ۸. $x' = x + 5, y' = y$

۹. فرض کنید دستگاه xy، 3 واحد به راست و 4 واحد به پایین انتقال یافته، و بدین وسیله دستگاه جدید $x'y'$ تولید شده باشد. فرض کنید $A = (1, 3)$، $B = (-3, 0)$، و $C = (-1, 4)$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند. مختصات قدیم A، B، و C چه هستند؟

مختصات جدید نقاط $A = (2, 1)$، $B = (-1, 3)$، و $C = (-2, 5)$ را پس از انتقال مبداء دستگاه xy به

۱۰. نقطهٔ A ۱۱. نقطهٔ B ۱۲. نقطهٔ C

پیدا نمایید.

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده باشد. انتقالی از محورها را بیابید که معادله را ساده کند، و سپس G را توصیف نمایید.

۱۳. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

۱۴. $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$

۱۵. $xy - x + 2y - 3 = 0$

۱۶. $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

فرض کنید دستگاه xy حول مبداء خود به اندازهٔ زاویهٔ داده شده (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) بچرخد. معادلات دوران نظیر را بنویسید.

۱۷. $90°$ ۱۸. $-30°$ ۱۹. $60°$ ۲۰. $135°$

مختصات جدید نقاط $A=(3,1)$ ، $B=(-1,5)$ ، و $C=(2,-3)$ را پس از دوران صفحهٔ xy حول مبداء خود به اندازهٔ زاویهٔ داده شده پیدا نمایید .

۲۱. 3π ۲۲. $-90°$ ۲۳. $\arctan \frac{5}{12}$ ۲۴. $210°$

۲۵. فرض کنید دستگاه xy حول مبداء خود به اندازهٔ $60°$ چرخیده ، و دستگاه $x'y'$ جدید تولید شده باشد . همچنین ، $A=(2\sqrt{3},-4)$ ، $B=(\sqrt{3},0)$ ، و $C=(0,-2\sqrt{3})$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند . مختصات قدیم A ، B ، و C چه هستند ؟

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده‌باشد . معادله را با دوران دستگاه xy به اندازهٔ $45°$ (در جهت خلاف عقربه‌های ساعت) ساده کرده ، و سپس G را توصیف نمایید .

۲۶. $3x^2-2xy+3y^2-8=0$

۲۷. $x^2+6xy+y^2-2=0$

۲۸. $x^2+2xy+y^2+x-y=0$

۲۹. فرض کنید بیضی $\frac{1}{2}x^2+y^2=1$ به اندازهٔ 3 واحد به چپ و 4 واحد به بالا انتقال یافته باشد . معادلهٔ بیضی جدید چیست ؟

۳۰. فرض کنید هذلولی $x^2-y^2=1$ به اندازهٔ 2 واحد به راست و 5 واحد به پایین انتقال یافته باشد . معادلهٔ هذلولی جدید چیست ؟

فرض کنید G نمودار معادلهٔ داده شده باشد . G از چهار تقارن مطرح شده در صفحهٔ ۹۲۸ کدامها را دارد ؟

۳۱. $x+y=1$ ۳۲. $xy=1$

۳۳. $|x|+|y|=1$ ۳۴. $(2-x)x^2-y^2=0$

۳۵. $x^2y+y-2x=0$ ۳۶. $x^2+2y^2=1$

هر تابع $y=f(x)$ را که نمودارش نسبت به

۳۷. محور x ۳۸. محور y

۳۹. مبداء ۴۰. خط $y=x$

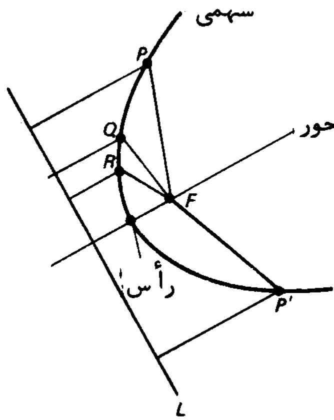
متقارن است توصیف نمایید .

۴۱. مختصات جدید نقاط $A=(5,5)$ ، $B=(2,-1)$ ، و $C=(12,-6)$ را پس از انتقال مبداء دستگاه xy به نقطهٔ B و دوران محورها به اندازهٔ زاویهٔ $\arctan \frac{3}{4}$ حول B پیدا نمایید .

۲۰۱۰ سهمیها

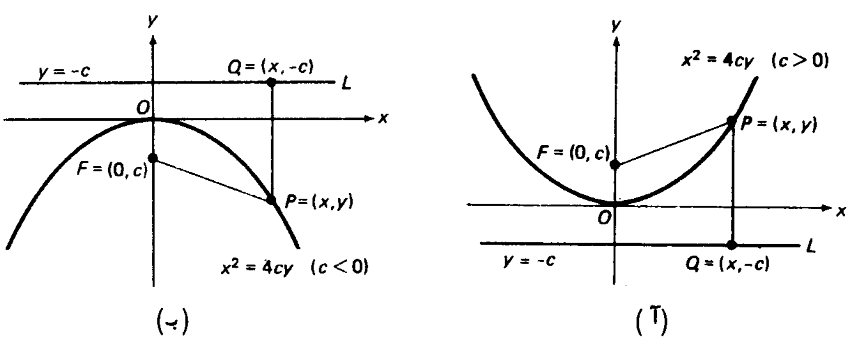
تعریف سهمی . بنابر تعریف ، *یک سهمی مجموعهٔ تمام نقاطی در صفحه است که از نقطهٔ ثابت F و خط ثابت L غیرشامل F متساوی‌الفاصله‌اند* . لذا ، مثلاً ، نقطهٔ P در شکل ۸ از

F و L به یک فاصله است، و این امر در مورد نقاط Q و R نیز درست است. نقطهٔ F کانون و خط L **هادی** سهمی نام دارد. واضح است که سهمی نسبت به خط مار بر F و عمود بر L متقارن می‌باشد (مواضع نقاط P و P' را در شکل مقایسه کنید) . این خط **محور تقارن**، یا فقط **محور**، سهمی نام داشته، و نقطهٔ منحصر به فرد برخورد آن با سهمی **رأس** سهمی نامیده می‌شود. توجه کنید که رأس در نیمه راه بین کانون F و هادی L قرار دارد.



شکل ۸

برای یافتن معادلهٔ سهمی، مختصات قائم x, y را در صفحهٔ سهمی درنظر گرفته و آن را در " موضع متعارف " ، با رأس در مبداء O و محور تقارن در امتداد محور y، قرار می‌دهیم. در این صورت، کانون F نقطهٔ $(0, c)$ از محور y ، و هادی L خط $y = -c$ است (درنتیجه، O در نیمه راه بین F و L قرار دارد) . اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۹ (آ) به **بالا** باز می‌شود، حال آنکه اگر $c < 0$ ، مثل شکل ۹ (ب) به **پایین** باز می‌گردد. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از سهمی بوده، و $Q = (x, -c)$ پای عمود وارد از P بر هادی L



شکل ۹

باشد . در این صورت ، طبق خاصیت معرف سهمی ،

$$|PF| = |PQ|,$$

که برحسب مختصات P و F به شکل زیر درمی‌آید :

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(y + c)^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2,$$

که به معادلهٔ

$$x^2 = 4cy, \qquad (۱)$$

یا اگر y را تابعی از x بگیریم ، به

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

ساده می‌شود . به عکس ، هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ چنان باشد که در (۱) صدق کند ،آنگاه با عکس‌کردن مراحل محاسبه ، درمی‌یابیم که $|PF| = |PQ|$. بنابراین ، (۱) معادلهٔ سهمی در موضع داده شده می‌باشد .

موضع متعارف دیگر سهمی آن‌است‌که رأسش را مثل قبل در مبداء گذارده ،ولی محور تقارنش را به جای محور y در امتداد محور x قرار دهیم . در این وضع کانون F نقطهٔ $(c, 0)$ از محور x ، و هادی L خط $x = -c$ می‌باشد . همان استدلال قبل نشان می‌دهدکه معادلهٔ سهمی در این وضع عبارت است از

$$y^2 = 4cx, \qquad (۲)$$

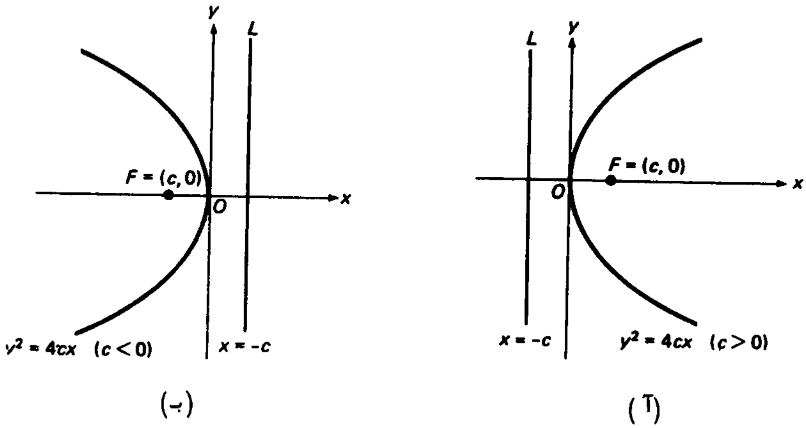
یا ، اگر x را تابع y بگیریم ،

$$x = \frac{y^2}{4c}$$

اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۱۰ (آ) به *راست* باز می‌شود ، حال آنکه اگر $c < 0$ ،مثل‌شکل ۱۰ (ب) به‌چپ باز خواهد شد . توجه کنید که هر یک از معادلات (۱) و (۲) را می‌توان‌از دیگری به‌وسیلهٔ تعویض متغیرهای x و y باهم به دست آورد .

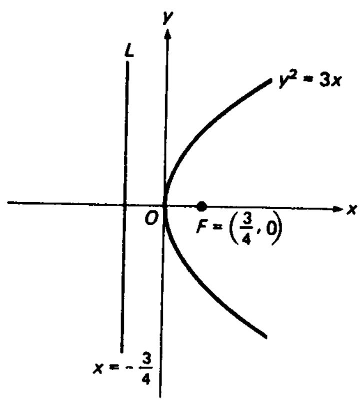
مثال ۱ . نمودار معادلهٔ $y^2 = 3x$ را بیابید .

حل . معادله به شکل (۲) به ازای $c = \frac{3}{4}$ است ؛ و درنتیجه ، نظیر سهمیی است که رأسش



شکل ۱۰

در مبداء و محور x محور تقارن آن می‌باشد (ر.ک. شکل ۱۱). سهمی به راست باز می‌شود (زیرا $c > 0$) ، کانون F آن در نقطهٔ $(\frac{3}{4}, 0)$ است ،وهادی‌اش خط $x = -\frac{3}{4}$ می‌باشد .



شکل ۱۱

معادلات به شکل متعارف . هر یک از معادلات (۱) و (۲) نمایش سهمیی است که رأسش در مبداء بوده و یکی از محورهای مختصات محور تقارن آن می‌باشد . فرض‌کنیم هر یک‌از سهمیها را با انتقال رأسش به نقطهٔ (a, b) انتقال داده باشیم . در این صورت ،معادلات (۱) و (۲) به

$$(x - a)^2 = 4c(y - b) \tag{۳}$$

و

$$(y - b)^2 = 4c(x - a) \tag{۴}$$

تبدیل می‌شوند (معادلهٔ ($4'$) ، صفحهٔ ۹۲۷ ، را به یاد آورید) . به بیان مشروح، (۳) معادلهٔ سهمی به رأس (a, b) ، فاصلهٔ کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $x = a$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به بالا و اگر $c < 0$ به پایین باز می‌شود ، حال آنکه (۴) معادلهٔ سهمی به رأس (a, b) ، فاصلهٔ کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $y = b$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به راست و اگر $c < 0$ به چپ باز می‌شود . این معادلات را **معادلات سهمی به شکل متعارف** می‌نامند . معادلات (۳) و (۴) در حالت خاص $a = b = 0$ به (۱) و (۲) تحویل می‌شوند .

مثال ۲ . نمودار معادلهٔ

$$x^2 - 2x + 8y + 9 = 0 \tag{۵}$$

را پیدا کنید .

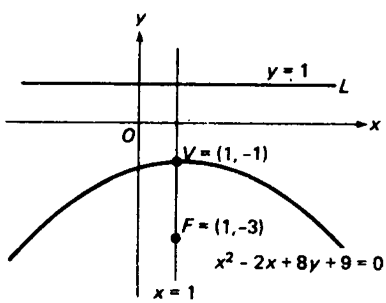
حل . با کامل کردن مربعها ، معلوم می‌شود که (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x - 1)^2 + 8(y + 1) = 0$$

یا

$$(x - 1)^2 = -8(y + 1),$$

که به شکل متعارف (۳) به ازای $a = 1, b = -1, c = -2$ است . این معادلهٔ سهمی به رأس $V = (1, -1)$ و محور $x = 1$ است (ر.ک. شکل ۱۲) . سهمی به پایین باز می‌شود (چون



شکل ۱۲

$c < 0$) ، کانونش $F = (1, -3)$ است ، و هادی‌اش L خط $y = 1$ می‌باشد . برای تعیین F و L از این استفاده کرده‌ایم که فاصلهٔ کانون تا هادی $2 = |c|$ است ؛ درنتیجه ، F ، 2 واحد زیر رأس V است ، حال آنکه L ، 2 واحد بالای V می‌باشد .

هر یک از معادلات (۳) و (۴) دارای این خاصیت است که نسبت به یکی از دو

متغیر x و y درجهٔ دوم و نسبت به دیگری خطی است و جمله‌ای شامل حاصل ضرب xy ندارد. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان با تقسیم بر ضریب جملهٔ درجهٔ دوم به یکی از صور زیر نوشت:

$$x^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (B \neq 0) \tag{۶}$$

یا

$$y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (A \neq 0) \tag{۷}$$

اما، مثل مثال ۲، هر یک از معادلات (۶) و (۷) را می‌توان با کامل کردن مربع به‌یکی‌از اشکال متعارف (۳) و (۴) درآورد؛ و لذا، نمودار هر معادله یک سهمی است که محورش موازی یکی از محورهای مختصات است. در واقع، با کامل کردن مربعها در (۶) و (۷)، معادلات معادل زیر به دست می‌آیند:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = -B\left(y + \frac{C}{B} - \frac{A^2}{4B}\right), \tag{۶'}$$

و

$$\left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = -A\left(x + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A}\right), \tag{۷'}$$

که (۶') به شکل (۳) و (۷') به شکل (۴) است. لذا، یک سهمی معادله‌ای به شکل (۶) یا (۷) دارد اگر و فقط اگر محورش با یکی از محورهای مختصات موازی باشد. درمثال بعد سهمیی با محور *مایل* درنظر می‌گیریم.

مثال ۳. معادلهٔ سهمیی را بیابید که نقطهٔ $(1, 1)$ کانون F و خط

$$x + y + 2 = 0 \tag{۸}$$

محور L آن باشد.

حل. نقطهٔ $P = (x, y)$ متعلق به سهمی است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x + y + 2|}{\sqrt{2}},$$

که در آن طرف چپ فاصلهٔ بین P و F است، و طرف‌راست فاصلهٔ بین P و خط (۸) است که به کمک قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۳۴، حساب می‌شود. با مربع کردن طرفین این معادله خواهیم داشت

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x + y + 2)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$2(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + 4(x + y) + 4$$

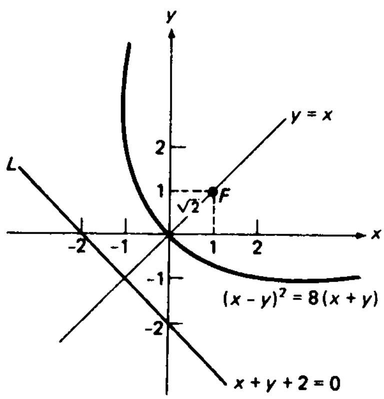
یا

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0, \tag{۹}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نیز نوشت:

$$(x - y)^2 = 8(x + y). \tag{۱۰}$$

توجه کنید که معادلهٔ (۹) به شکل (۶) یا (۷) نیست، و در واقع جمله‌ای شامل حاصل ضرب xy دارد. شکل ۱۳ سهمی مورد بحث را نشان می‌دهد، که مبداء رأس آن بوده و خط



شکل ۱۳

مایل $x = y$ محور آن می‌باشد. به زبان جبر، تقارن سهمی حول خط $x = y$ متناظر این امر است که معادلهٔ (۹) یا (۱۰) از تعویض متغیرهای x و y باهم تغییر نمی‌کند.

مثال ۴. از شکل ۱۳ برمی‌آید که سهمی (۱۰) حاصل دوران سهمی

$$y^2 = 4\sqrt{2}x \tag{۱۱}$$

حول رأس و به‌اندازهٔ زاویهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است. این مطلب را به طور جبری تحقیق کنید.

حل. با انتخاب $\theta = 45°$ در معادلات دوران (۲)، صفحهٔ ۹۲۴، مثل مثال ۴، صفحهٔ ۹۲۵، به دست می‌آوریم

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

با گذاردن این عبارات در (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y')\right]^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}(2x'),$$

یا معادلاً

$$y'^2 = 4\sqrt{2}x', \tag{۱۱'}$$

که همان معادلهٔ (۱۱) است جزآنکه x و y پریمدار شده‌اند. لذا، معادلهٔ (۱۰) به‌معادلهٔ (۱۱') در یک دستگاه $x'y'$ حاصل از دوران دستگاه xy به اندازهٔ زاویهٔ $45°$ درجهت خلاف عقربه‌های ساعت ساده شده است. بنابراین، دوران سهمی (۱۱) به اندازهٔ $45°$ خلاف عقربه‌های ساعت حول مبداء (رأس آن) آن را به سهمی (۱۰) خواهد برد.

خاصیت انعکاسی سهمی. یک خاصیت جالب سهمی، که کاربردهای عملی بسیار دارد، *خاصیت انعکاسی* است. فرض کنیم T خط مماس در هر نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از سهمی

$$y^2 = 4cx \qquad (c > 0), \tag{۱۲}$$

با کانون $F = (c, 0)$ بوده، و Q نقطهٔ تقاطع T با محور x باشد [ر.ک. شکل ۱۴ (آ)].
با مشتقگیری از (۱۲) نسبت به x، به دست می‌آوریم

$$2y\frac{dy}{dx} = 4c$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{y}.$$

لذا، اگر $y_0 \neq 0$، مماس T خطی به معادلهٔ

$$y - y_0 = \frac{2c}{y_0}(x - x_0),$$

یا معادلاً

$$yy_0 = 2c(x - x_0) + y_0^2 = 2c(x - x_0) + 4cx_0,$$

است، که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$yy_0 = 2c(x + x_0).$$

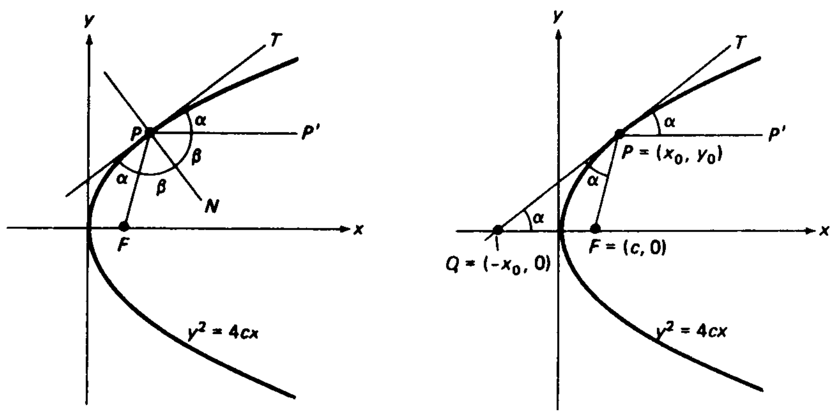
بنابراین، T دارای قطع x ی برابر $-x_0$ است؛ یعنی، $Q = (-x_0, 0)$ و

$$|FQ| = x_0 + c$$

(ر.ک. شکل) . اما

$$|FP| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + 4cx_0} = \sqrt{(x_0 + c)^2} = x_0 + c,$$

درنتیجه، $|FP| = |FQ|$. لذا، مثلث FPQ متساوی‌الساقین با دو زاویهٔ مساوی‌در P و Q است[1] . پس نتیجه می‌شود که زاویهٔ بین T و PF مساوی زاویهٔ بین T و محور x است، که خود مساوی زاویهٔ بین T و PP' می‌باشد که PP' خط مار بر P موازی محور x خواهد بود (ر. ک. شکل ۱۴ (آ) ، که در آن این زاویه با α نموده می‌شود) . به بیان معادل، اگر خط قائم بر سهمی در نقطهٔ P باشد، زاویه بین N و PF مساوی زاویهٔ بین N و PP' است . (ر. ک. شکل ۱۴ (ب) ، که در آن این زاویه با β نموده می‌شود) .



(ب) (آ)

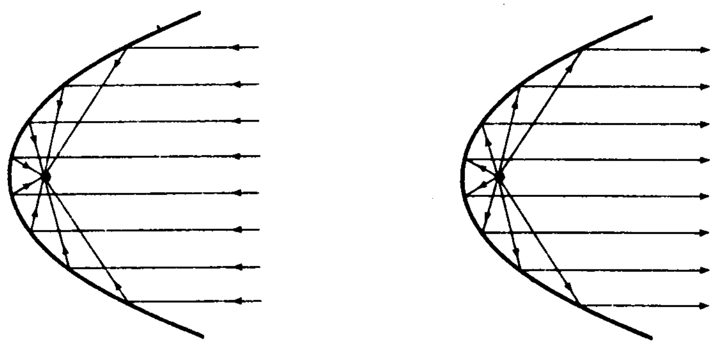
شکل ۱۴

حال فرض‌کنیم S یک آینهٔ سهموی باشد؛ یعنی، آینه‌ای به شکل سطح حاصل از دوران یک سهمی حول محور تقارن خود (یک سهمی‌گون دوار) . از نکات فوق و قانون انعکاس اثبات شده در مثال ۶، صفحهٔ ۳۳۱، که علاوه‌بر صفحه برای یک سطح خمیدهٔ هموار نیز برقرار است، معلوم می‌شود که اشعهٔ صادر شده از یک منبع نقطه‌ای نور واقع در

---

۱ . در اینجا تلویحاً " فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس P بر محور x (محور سهمی)واقع نیست؛ اگر چنین باشد، پاره‌خط FP نیز بر محور x واقع بوده و با مماس T که اینک قائم است زاویهٔ $90°$ می‌سازد (چرا؟) . ضمن گذشتن از این مطلب ذکر می‌کنیم که هر سهمی محورهایش را در زوایای قائمه قطع می‌کند .

کانون S (کانون سهمی مولد) پس از بازگشت از S به صورت موازی درمی‌آیند ، واین‌امر در شکل ۱۵ (آ) نموده شده است . به این دلیل است که از آینه‌های سهموی درچراغهای جلو اتومبیل ، نورافکنها ، وآنتنهای رادار ، و غیره استفاده می‌شود . با همین استدلال " در جهت عکس " ، می‌بینیم که یک دسته شعاع نور موازی پس از برخورد با یک آینهٔ سهموی در یک نقطه از محور تقارن آن ، مثل شکل ۱۵ (ب) ، جمع می‌شوند . به این‌دلیل، سعی می‌کنند با رنج بسیار آینه‌های سهموی را بدقت ساخته و در تلسکوپهای انعکاسی به کار برند .



(ب) (آ)

شکل ۱۵

سهمیها نقش مهمی در حل مسائل مکانیک در صفحه و فضا دارند . بخصوص، یک پرتابه که فقط تحت اثر ثقل باشد مسیر سهموی می‌پیماید (ر.ک. مثال ۱ ، صفحهٔ ۱۱۰۴)، و کابل یک پل معلق درصورتی که وزن جاده توزیع یکنواخت داشته باشد شکل یک سهمی خواهد داشت (ر.ک. مثال ۶ ، صفحهٔ ۱۱۱۱) .

مسائل

معادلهٔ سهمی را درصورتی به شکل متعارف بنویسید که

۱. به بالا باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{1}{4}$ باشد

۲. به پایین باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 8 باشد

۳. به چپ باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 5 باشد

۴. به راست باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصلهٔ کانون تاهادی‌اش $\frac{7}{2}$ باشد

۵. به پایین باز شود ، رأسش $(1, -2)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 9 باشد .

۶. به بالا باز شود ، رأسش$(-3,4)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{3}{2}$ باشد

۷. به راست باز شود ، رأسش$(7, 6)$ و فاصلهٔ کانون تا هادی‌اش $\frac{11}{4}$ باشد

۸. به چپ باز شود ، رأسش$(-5, -10)$ و فاصلهٔ کانون تا رأسش 3 باشد

معادلهٔ سهمی با کانون و هادی داده شده را بیابید .

۹. $(7, 2), x - 5 = 0$

۱۰. $(4, 3), y + 1 = 0$

۱۱. $(-8, 1), y - 2 = 0$

۱۲. $(5, -3), x - 4 = 0$

۱۳. $(2, -1), x - y - 1 = 0$

۱۴. $(0, 0), x + 2y - 3 = 0$

سهمی به معادلهٔ داده شده را رسم کرده ، رأس V ، کانون F ، و هادی L آن را بیابید .

۱۵. $y^2 = 8x$

۱۶. $x^2 = 6y$

۱۷. $x^2 = -4y$

۱۸. $y^2 = -5x$

۱۹. $(y + 1)^2 = -6(x + 2)$

۲۰. $(x - \frac{1}{2})^2 = -8(y + 3)$

۲۱. $(x + 4)^2 = 2(y - 3)$

۲۲. $(y - 2)^2 = 10x$

۲۳. $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

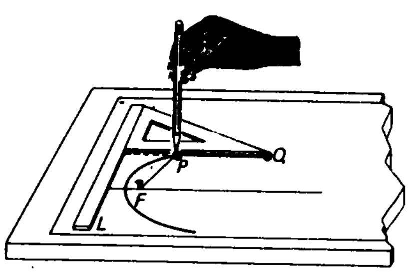
۲۴. $y^2 - 8x + 8y = 0$

۲۵. $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$

۲۶. $x^2 - 2x + 12y + 25 = 0$

۲۷. $x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = 0$

۲۸. یک سهمی به کانون F و هادی L را می‌توان به صورت زیر ساخت :
به یک تخته رسم خط‌کشی وصل کنید که یک طرفش در امتداد L باشد ، و ضلع کوتاه یک گونیا را به خط‌کش بچسبانید . در رأس مقابل Q مثلث یک سر قطعه‌ای از نخ به طول ضلع بلند مثلث را بسته و سر دیگر آن را در F محکم نمایید . مثلث را در امتداد خط‌کش بلغزانید ضمن آنکه ، مثل شکل ۱۶ ، نخ را به‌وسیلهٔ یک مدادکشیده نگهداشته‌اید . در این صورت ، نقطهٔ P مداد بخشی از یک سهمی را رسم خواهد کرد .

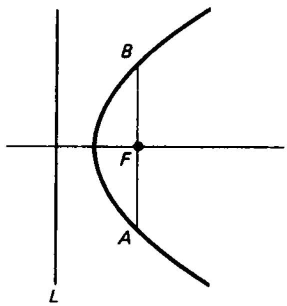


ساختن سهمی

شکل ۱۶

توضیح دهید چرا این ساختن کار می‌کند .

۲۹ . پاره‌خطی که دو انتهایش بر یک سهمی است وتر آن سهمی نام دارد ، و وتر ماربر کانون F عمود بر محور و موازی هادی L *راست وتر کانونی* نامیده می‌شود (این در شکل ۱۷ وتر AB است) .



شکل ۱۷

نشان دهید که طول راست وتر کانونی دوبرابر فاصلهٔ F تا L است .

۳۰ . نشان دهید که دایره به‌قطر راست وتر کانونی یک‌سهمی بر هادی سهمی مماس‌است .

۳۱ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = ct^2, \qquad y = 2ct \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad \text{(یک)}$$

سهمی است . در جهت منحنی بحث کنید .

۳۲ . نشان‌دهید که مماس بر سهمی (یک) در یک نقطه به پارامتر t خط $x - ty + ct^2 = 0$ است .

۳۳ . مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ را بیابید که رأس یک‌انتهای آنها باشد .

۳۴ . سهمی $y^2 = 4cx \ (c > 0)$ را به رأس $V = (0, 0)$ و کانون $F = (c, 0)$ در نظر بگیرید . نشان دهید نقطهٔ $A = (a, 0)$ واقع بر محور سهمی درصورتی از هر نقطهٔ دیگرسهمی به V نزدیکتر است که $0 < a \leq 2c$ ، ولی در صورتی به نقطه‌ای از سهمی غیر از V نزدیکتر است که $a > 2c$. (بخصوص، کانون F از هر نقطهٔ دیگر سهمی به V نزدیکتر است .)

نقاط‌اشتراک خط‌و سهمی داده شده را (درصورت وجود) بیابید .

✓ ۳۵ . $3x - 2y + 6 = 0, y^2 = 6x$

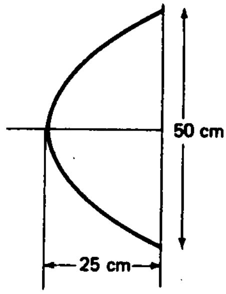
✓ ۳۶ . $x + y - 3 = 0, x^2 = 4y$

۳۷. $x + 6y + 6 = 0,\ x^2 = -18y$

۳۸. $3x + 4y - 12 = 0,\ y^2 = -9x$

۳۹. با دوران محورها، نشان دهید که نمودار معادلهٔ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ بخشی از یک سهمی است. رأس V، کانون F، و هادی L این سهمی را پیدا کنید.

۴۰. مقطع عرضی یک آینهٔ سهموی در شکل ۱۸ نموده شده است. منبع نوردرچه فاصله‌ای از رأس آن قرار گیرد تا اشعهٔ منعکس شده موازی باشند؟



شکل ۱۸

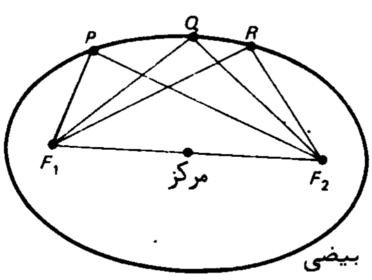
۴۱. دو خط مار بر نقطهٔ $(2, 9)$ و مماس بر سهمی $y^2 = 36x$ را بیابید.

۴۲. مماس بر سهمی $x^2 = 16y$ و عمود بر خط $2x + 4y + 7 = 0$ را بیابید.

۴۳. مماس بر سهمی $y^2 = 12x$ و موازی خط $3x - 2y + 30 = 0$ را بیابید. فاصلهٔ بین مماس و خط چقدر است؟

۳.۱۰ بیضیها

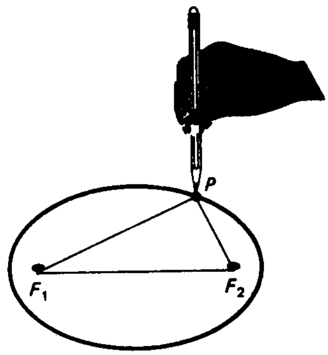
تعریف بیضی. بنابرتعریف، **بیضی** *مجموعهٔ تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان تا دو نقطهٔ ثابت F_1 و F_2 ثابت باشد*. لذا، مثلاً، در شکل ۱۹ مجموع فواصل نقطهٔ P تا دو نقطهٔ F_1 و F_2 همان مجموع نظیر به نقطهٔ Q یا نقطهٔ R می‌باشد. نقاط F_1 و F_2



شکل ۱۹

کانونهای بیضی نام داشته، و نقطهٔ میانی پاره‌خط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز بیضی خوانده می‌شود.

این تعریف ما را به ساختن سادهٔ یک بیضی هدایت می‌کند. فرض کنید دو پونز در F_1 و F_2 یک صفحهٔ کاغذ فروکرده، و مثل شکل ۲۰ یک حلقه نخ در آنها قرار داده‌باشیم. (طبیعی است که طول نخ نمی‌تواند از دوبرابر فاصلهٔ بین پونزها کمتر باشد.) حال اگر



ساختن یک بیضی

شکل ۲۰

مدادی را داخل حلقه کرده و با کشیده نگهداشتن نخ آن را حرکت دهیم، نقطهٔ P مداد یک‌بیضی به‌کانونهای F_1 و F_2 رسم خواهدکرد. به‌این دلیل است که مجموع $|PF_1| + |PF_2|$ به ازای هر موضع P، مساوی طول نخ منهای فاصلهٔ بین کانونها می‌باشد. اگر کانونها بر هم منطبق باشند، بیضی به دایره تبدیل خواهد شد.

برای یافتن معادلهٔ بیضی، در صفحهٔ آن مختصات قائم x و y را اختیار کرده‌وآن را در " موضع متعارف " قرار می‌دهیم به این ترتیب که، مثل شکل ۲۱ (آ)، مرکزش مبداء O و کانونهایش در امتداد محور x باشند. در این صورت، کانونها عبارتنداز نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ که به فاصلهٔ $2c$ $(c > 0)$ از هم قرار دارند. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از بیضی بوده، و $2a$ مجموع ثابت فواصل P از کانونها باشد. در این صورت، $a > c$ جز در حالت حدی $a = c$ که در آن بیضی به پاره‌خط‌واصل بین کانونها " تباه می‌شود ". بنابر خاصیت معرف بیضی،

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

که به شکل زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

یا ، برحسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 ،

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

که به شکل زیر ساده می‌شود :

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

با مجذور کردن مجدد طرفین ، معلوم می‌شود که

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

و درنتیجه ،

$$x^2(a^2-c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{1}$$

با گرفتن ثابت مثبت b به صورت زیر

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

یا ، معادلاً ،

$$a^2 = b^2 + c^2, \tag{2}$$

رابطهٔ (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

که به نوبهٔ خود ، پس از تقسیم بر a^2b^2 ، خواهد شد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

به عکس ، هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود ، آنگاه در صورتی که مراحل این محاسبات را بدقت عکس کنیم خواهیم داشت $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ (شرح مطلب را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . بنابراین ، (۳) معادلهٔ بیضی در موضع متعارف است .

محورهای اطول و اقصر. چون معادلهٔ (۳) در صورت تعویض x با $-x$ و y با $-y$ تغییر نمی‌کند ، هر دو محور مختصات محورهای تقارن بیضی (۳) می‌باشند . به طور کلی ، هر بیضی دو محور تقارن دارد ، یکی خط مار بر کانونهای F_1 و F_2 و دیگری عمود منصف پاره‌خط F_1F_2 . یک بیضی دو وتر از محورهای تقارن خود جدا می‌کند . وتر بزرگتر را *محور اطول* و وتر کوچکتر *محور اقصر* بیضی نام دارد . بیضی (۳) دارای قطعهای x ، $(\pm a, 0)$

و قطعهای y، $(0, \pm b)$ بوده، وچون $a > b$، به‌خاطر فرمول (۲)، وتر واصل بین‌نقاط $(\pm a, 0)$ از وتر واصل بین نقاط $(0, \pm b)$ بزرگتر است. لذا، محور اطول این بیضی در امتداد محور x و محور اقصر آن در امتداد محور y می‌باشد [ر.ک. شکل ۲۱ (آ)]. نقاط انتهایی محور اطول، که دراین حالت‌قطعهای x، $(\pm a, 0)$ اند، رئوس بیضی نام‌دارند. کانونهای بیضی در نقاط $(\pm c, 0)$ می‌باشند، که

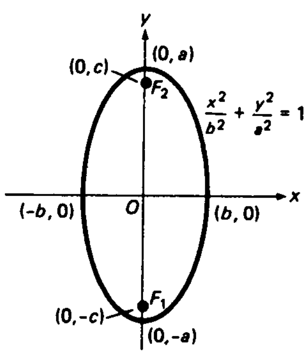
$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

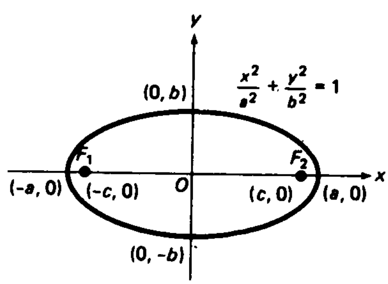
و این را می‌توان با حل معادلهٔ (۲) نسبت به c به دست آورد.

اگر در معادلهٔ (۳) x و y را باهم عوض‌کنیم، بیضی دیگر

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (۴)$$

را به دست می‌آوریم که آن را نیز در موضع متعارف می‌گویند. بیضی (۴) دارای قطعهای x، $(\pm b, 0)$ و قطعهای y، $(0, \pm a)$ اســـت که $a > b$. لذا، در اینجا محور اطول در امتداد محور y بوده، و نقاط‌انتهایی‌اش (رئوس) عبارتنداز $(0, \pm a)$، ولی محور اقصر با نقاط‌انتهایی $(\pm b, 0)$ در امتداد محور x می‌باشد [ر.ک. شکل ۲۱ (ب)]. بنابراین، کانونهای بیضی (۴) نقاط $(0, \pm c)$ می‌باشند، که مجدداً c مساوی $\sqrt{a^2 - b^2}$ می‌باشد.





شکل ۲۱

فرمول (۲) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. نقاط $(0, 0)$، $(0, b)$، و $(c, 0)$ درشکل ۲۱ (آ)، یا نقاط $(0, 0)$، $(b, 0)$، و $(0, c)$ در شکل ۲۱ (ب)، رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. این مثلث به طول ضلعهای b و c بوده، و وترش به طول a است زیرا هر نقطهٔ انتهایی محور اقصر یک بیضی در فاصلهٔ a تا کانونها قرار دارد (چرا؟). بنابراین، طبق قضیهٔ

فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$. چون a نصف طول محور اطول بوده و b نصف طول محور اقصر است ،دو طول a و b را معمولا" نیم محور *اطول* و نیم محور *اقصر* می‌نامند .

مثال ۱ . نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ را بیابید .

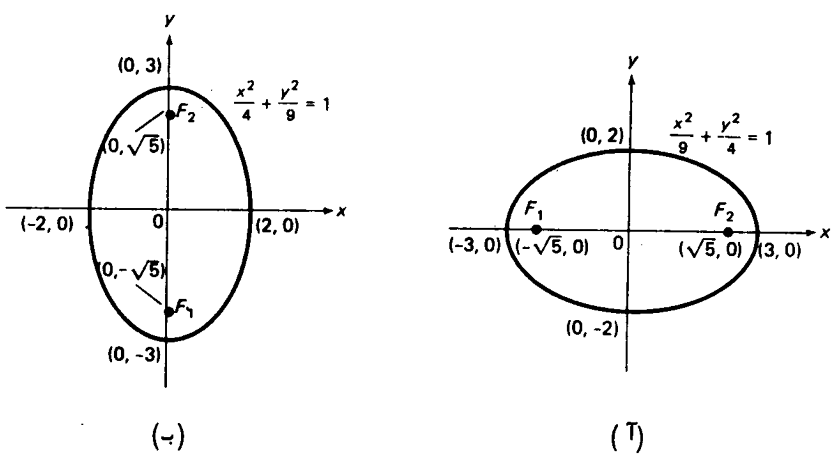
حل . معادله به شکل (۳) است که در آن $a = 3$ ، $b = 2$ ، و

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

بنابراین ، نمودارش یک بیضی به مرکز مبداء است که محور اطولش افقی با نقاط انتهایی $(\pm 3, 0)$ ، محور اقصرش قائم با نقاط انتهایی $(0, \pm 2)$ ، کانونهایش عبارتنداز $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$, $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$ بر محور x [ر.ک. شکل ۲۲ (آ)] .

مثال ۲ . نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ را بیابید .

حل . معادله به شکل (۴) است با همان مقادیر a ، b ، و c مثال ۱ . لذا ، نمودارش بیضی است به‌مرکز مبداء که دارای محور اطول قائم با نقاط‌انتهایی $(0, \pm 3)$ ،محوراقصر افقی با نقاط‌انتهایی $(\pm 2, 0)$ ، و کانونهای $F_1 = (0, -\sqrt{5})$, $F_2 = (0, \sqrt{5})$ بر محور y [ر.ک. شکل ۲۲ (ب)] .



شکل ۲۲

معادلات به شکل متعارف. معادلات (۳) و (۴) نمایش بیضیهایی هستند به مرکز مبداء

که محورهای مختصات محورهای تقارن آن می‌باشند . معادلات کلبتر

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \tag{۵}$$

و

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \tag{۶}$$

نمایش بیضیهایی هستند که از حیث اندازه و شکل مانند بیضیهای (۳) و (۴) بوده ولی مرکزشان نقطهٔ (x_0, y_0) است و محورهایشان موازی محورهای مختصات می‌باشند . به طور مشروح ، رابطهٔ (۵) معادلهٔ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط افقی $y=y_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط قائم $x=x_0$ ، حال آنکه رابطهٔ (۶) معادلهٔ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط قائم $x=x_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط افقی $y=y_0$. در هر دو حالت ، محور اطول به طول $2a$ و محور اقصر به طول $2b$ می‌باشد . این معادلات را *معادلات* بیضی به *شکل متعارف* می‌نامند . طبیعی است که روابط (۵) و (۶) در حالت خاص $x_0=y_0=0$ به روابط (۳) و (۴) تحویل می‌شوند .

مثال ۳ . نمودار معادلهٔ

$$x^2+4y^2+4x-8y+7=0 \tag{۷}$$

را بیابید .

حل . با کامل کردن مربعات ، (۷) را به صورت زیر می‌نویسیم :

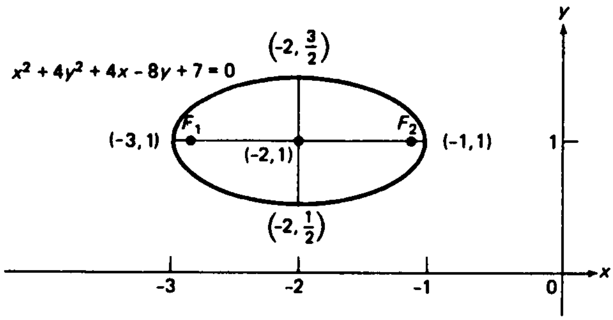
$$(x+2)^2+4(y-1)^2=1$$

یا ، معادلاً ،

$$(x+2)^2+\frac{(y-1)^2}{(\frac{1}{2})^2}=1,$$

که به شکل متعارف (۵) به ازای $x_0=-2,\ y_0=1,\ a=1,\ b=\frac{1}{2}$ است . نمودار این معادله یک بیضی به مرکز $(-2, 1)$ است که محور اطولش افقی و محور اقصرش قائم می‌باشد (ر . ک . شکل ۲۳) نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر عبارتند از $(-2\pm 1, 1)$ و $(-2, 1\pm\frac{1}{2})$ ، یعنی ، $(-3, 1), (-1, 1)$ و $(-2, \frac{3}{2}), (-2, \frac{1}{2})$. به‌علاوه ، چون فاصلهٔ هر کانون تا مرکز مساوی است با $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ، کانونها عبارتند از $F_1=(-2-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ و

$F_2 = (-2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$.



شکل ۲۳

هر یک از معادلات (۵) و (۶) دارای خواص زیر است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجهٔ دو بوده و جملهٔ شامل حاصل ضرب xy را ندارد، و به‌علاوه ضرایب x^2 و y^2 متحدالعلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2، به شکل زیر نوشت:

$$x^2 + ky^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (k > 0) \tag{۸}$$

اما، درست مثل مثال ۳، می‌توان معادلهٔ (۸) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۵) و (۶) درآورد؛ و لذا، صرف نظر از بعضی حالات استثنایی، نمودار (۸) یک‌بیضی است که محورهایش موازی محورهای مختصات‌اند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + k\left(y + \frac{B}{2k}\right)^2 = D, \tag{۸'}$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$، نمودار (۸′)، و درنتیجه (۸)، تنها نقطهٔ $(-A/2, -B/2k)$ است، ولی اگر $D < 0$، نقاطی مانند (x, y) وجود ندارند که در (۸) صادق باشند؛ یعنی، نمودار (۸) " تهی " می‌باشد. اینها حالاتی استثنایی‌اند که در بالا ذکر شد. اما، اگر $D > 0$، می‌توان (۸′) را به شکل معادل زیر نوشت:

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} + \frac{[y + (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1,$$

که معادلهٔ یک بیضی به مرکز $(-A/2, -B/2k)$ می‌باشد . اگر $k > 1$ ، بیضی دارای محور اطول افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور اقصر قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است ، ولی اگر $k < 1$ ، دارای محور اطول قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ و محور اقصر افقی به طول $2\sqrt{D}$ می‌باشد . اگر $k = 1$ ، بیضی به دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{D}$ تحویل‌می‌شود ، و در این صورت این بحث به تحلیل‌معادلهٔ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ تبدیل می‌شود که قبلاً" در صفحات ۳۹ تا ۴۰ صورت گرفت . لذا ، خلاصه کرده می‌گوییم یک بیضی دارای معادلهٔ (۸) است اگـر و فقـط اگر محورهایش موازی محورهای مختصات باشد .

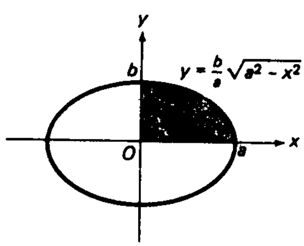
مثال ۴ . مساحت A محصور به‌یک‌بیضی با نیم‌محور اطول a و نیم‌محور اقصر b را پیدا کنید.

حل . با فرض اینکه بیضی نمودار معادلهٔ $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است خـللی بـه کلیت وارد نمی‌شود . با فرض $y \geq 0$ و حل این معادله نسبت به y معلوم می‌شود که

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \leq x \leq a).$$

بنابر تقارن ، A چهار برابر مساحت بین این منحنی و محور x در ربع اول است (مساحت سایه‌دار شکل ۲۴) . بنابراین ، به کمک مثال ۲ ، صفحهٔ ۶۲۵ ،

$$A = 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\left(\frac{1}{4}\pi a^2\right) = \pi ab.$$



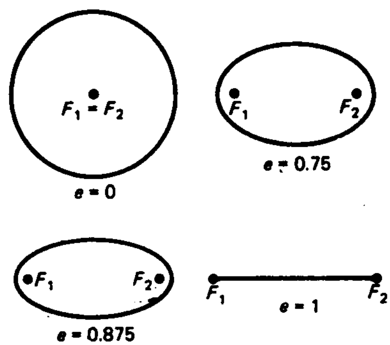
شکل ۲۴

توجه کنید که اگر $a = b$ ، A به مساحت πa^2 داخل یک دایره به شعاع a تحویل می‌شود .

خروج از مرکز بیضی . شکل یک بیضی را می‌توان به راحتی با عددی بین 0 و 1 ، یعنی

$$e = \frac{c}{a}$$

توصیف کرد (این عدد را با پایهٔ لگاریتم طبیعی خلط نکنید) . این عدد ، به‌نام خروج از مرکز ، نسبت فاصلهٔ بین دو کانون به طول محور اطول است ، و درجهٔ " بیضوی "بیضی را می‌سنجد . اگر e نزدیک 0 باشد ، بیضی تقریبا " مستدیر است ، ولی اگر e نزدیک 1 باشد ، بیضی خیلی باریک شده و " به شکل سیگار برگ " درمی‌آید . با گرفتن دایره به شعاع a و پاره‌خط به طول $2a$ به عنوان حالات حدی بیضی ، مقادیر $e = 0$ و $e = 1$ را نیز مجاز می‌گیریم (اگر $e = 0$ ، کانونها یکی می‌شوند ، و اگر $e = 1$ ، به فاصلهٔ $2a$ ازهم قرار می‌گیرند) . در شکل ۲۵ نحوهٔ بستگی شکل یک بیضی با خروج از مرکز e خود را نشان می‌دهد



بیضیها با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۲۵

که در آن محور اطول در تمام حالات به یک طول بوده و کانونها F_1 و F_2 می‌باشند .

مثال ۵ . خروج از مرکز بیضی شکل ۲۲ (آ) چقدر است ؟

حل . در اینجا $a = 3$ و $c = \sqrt{5}$ ؛ درنتیجه ، خروج از مرکز عبارت است از

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745.$$

بیضی شکل ۲۲ (ب) همین خروج از مرکز را دارد .

مثال ۶ . معادلهٔ بیضی را بیابید که نیم محور اطولش 4 و خروج از مرکزش $\frac{1}{2}$ بوده و مرکزش مبداء و محور اطولش افقی باشد .

حل . داریم $a = 4$ و

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

لذا ، $b^2 = 12$ و بیضی معادله‌ای به شکل زیر دارد :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

خاصیت انعکاسی بیضی . بیضی ، مانند سهمی ، *خاصیت انعکاسی* جالبی دارد . فرض‌کنیم T خط مماس در نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (۹)$$

به کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ بوده ، و Q_1 و Q_2 نقاط اشتراک T با عمودهای مرسوم از F_1 و F_2 بر T باشند[ر.ک . شکل ۲۶ (آ)] . با مشتقگیری از (۹) نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

لذا ، اگر $y_0 \neq 0$ ، مماس T خطی است به معادلهٔ

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

یا

$$b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0.$$

اما

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2, \qquad (۱۰)$$

زیرا P بر بیضی واقع است؛ درنتیجه ، معادلهٔ T به شکل زیر تحویل می‌شود :

$$b^2x_0x + a^2y_0y - a^2b^2 = 0, \qquad (۱۱)$$

یا ، معادلاً ،

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1. \qquad (۱۱')$$

حال فرمول زیر را ثابت می‌کنیم:

$$\frac{|F_1Q_1|}{|F_1P|} = \frac{|F_2Q_2|}{|F_2P|}, \qquad (۱۲)$$

که نشان می‌دهد که مثلثهای قائم‌الزاویهٔ F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند[1]. در واقع، به کمک (۱۱) و قضیهٔ ۱۰، صفحهٔ ۵۵، می‌توان (۱۲) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}\,\sqrt{(x_0+c)^2 + y_0^2}} = \frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2}\,\sqrt{(x_0-c)^2 + y_0^2}},$$

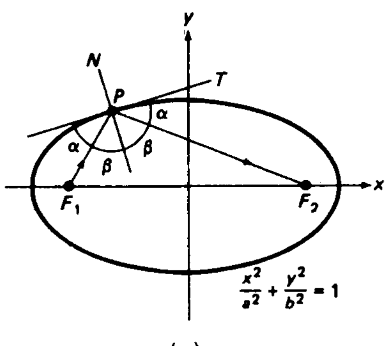
یا، معادلاً،

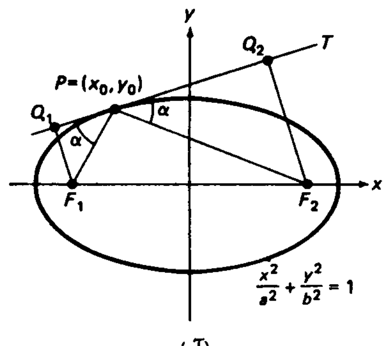
$$\frac{(x_0^2c^2 + a^4) + 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) + 2cx_0} = \frac{(x_0^2c^2 + a^4) - 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) - 2cx_0},$$

که به رابطهٔ $a^2(x_0^2 + c^2 + y_0^2) = x_0^2c^2 + a^4$ یا

$$(a^2 - c^2)x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (۱۲')$$

ساده می‌شود. چون $a^2 - c^2 = b^2$، (۱۲') با (۱۰) معادل است، و این امر برقراری (۱۲') و درنتیجه، (۱۲) را به ثبوت می‌رساند. چون مثلثهای F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند، زاویهٔ بین T و PF_1 مساوی زاویهٔ بین T و PF_2 است (ر.ک. شکل ۲۶ (آ)، که درآن این





شکل ۲۶

---

۱. در اینجا تلویحاً فرض می‌کنیم نقطهٔ تماس P بر محور اطول واقع نباشد؛ هرگاه چنین باشد، آنگاه پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 نیز بر محور اطول واقع بوده، و با مماس T، که اینک قائم است (چرا؟)، زاویهٔ $90°$ می‌سازند. توجه کنید که یک بیضی هر دو محورش را در زوایای قائمه قطع می‌کند، زیرا اگر T بر محور اقصر واقع باشد افقی و درصورتی که بر محور اطول واقع باشد قائم می‌باشد.

زاویه با α نموده شده است) . به بیان معادل ، اگر N خط قائم به بیضی در نقطهٔ P باشد ، زاویهٔ بین N و PF_1 مساوی زاویهٔ بین N و PF_2 است (ر.ک. شکل ۲۶ (ب) ، که در آن این زاویه با β نموده شده است) .

از این نکات و قانون انعکاس ثابت شده در مثال ۶ ، صفحهٔ ۳۳۱ ، معلوم می‌شود که هرگاه S آینه‌ای به شکل سطح حاصل از دوران یک بیضی حول محور اطولش باشد ، آنگاه اشعهٔ خارج شده از یک منبع نقطه‌ای نور یا صوت واقع در یکی از کانونهای S پس از انعکاس از S همه در کانون دیگر جمع می‌شوند (مثلا" ، اشعه‌ای که در شکل ۲۶ (ب) F_1 را ترک می‌کنند به F_2 وارد می‌شوند) . اطاقهایی ساخته شده‌اند که شکل نیمهٔ بالایی این‌گونه سطوح را دارند . در یک چنین اطاق ، که " تالار نجوا " نام دارد ، صحبت آهسته در یک کانون را می‌توان در کانون دیگر ، ولی نه در نقاط دیگر ، بوضوح شنید .

بیضیها نقشی کلیدی در مسائل حرکت مداری دارند . مثلا" ، زمین در مداری بیضوی با خروج از مرکز کوچک که خورشید در یکی از کانونهای آن است حول خورشید می‌گردد . ما حرکت مداری را در بخش ۵.۱۲ به تفصیل بررسی خواهیم کرد .

مسائل

معادلهٔ بیضی را درصورتی به شکل متعارف بنویسید که

۱. رئوس $(\pm 4, 0)$ و کانونها $(\pm 3, 0)$ باشند

۲. رئوس $(0, \pm 10)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند

۳. نقاط انتهایی محورها $(2, 4), (10, 4), (6, 1), (6, 7)$ باشند

۴. مرکز $(-1, 1)$ ، یکی از کانونها $(-1, 3)$ ، و نیم محور اطول 5 باشد .

۵. مرکز $(2, -2)$ ، یکی از کانونها $(2, 1)$ ، و نیم محور اقصر 6 باشد .

۶. مرکز $(-3, 2)$ ، یک رأس $(0, 2)$ ، و یک کانون $(-5, 2)$ باشد .

۷. مبداء مرکز بوده و دو نقطهٔ $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(1, -1)$ بر بیضی واقع باشند .

۸. کانونها $(1, \pm 3)$ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد .

۹. تمام نقاطی از بیضی

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

را بیابید که قدرمطلق طولهایشان 3 باشد .

۱۰. نشان دهید که بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ مشمول ناحیهٔ مستطیلی $-a \le x \le a$ ، $-b \le y \le b$ است .

بیضی به معادلهٔ داده‌شده را رسم کرده، و مرکز، کانونها، و نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر آن را مشخص نمایید.

۱۱. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

۱۲. $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$

۱۳. $\frac{(x-2)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{9}=1$

۱۴. $\frac{(x+3)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{64}=1$

۱۵. $3x^2+y^2=2$

۱۶. $9x^2+25y^2=25$

۱۷. $16x^2+25y^2-64x-100y-236=0$

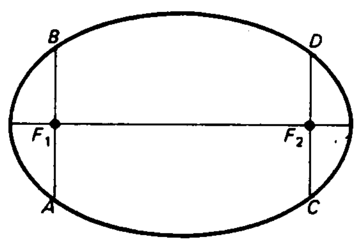
۱۸. $4x^2+y^2+8x-6y-3=0$

۱۹. $2x^2+2xy+2y^2-1=0$

۲۰. $9x^2+4y^2+36x=0$

۲۱. معادلهٔ بیضی را بیابید که نیم محور اطول آن 1 و کانونهایش $F_1=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}),\ F_2=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ باشند.

۲۲. پاره‌خطی که دونقطهٔ انتهایی اش روی یک بیضی باشد یک وتر بیضی نامیده می‌شود و وتر مار بر کانون F_1 یا F_2 و عمود بر محور اطول *راست وتر کانونی* نام دارد (در شکل ۲۷، این وتر AB یا CD است). نشان دهید که راست وتر کانونی به‌طول $2b^2/a$ است، که در آن a نیم محور اطول و b نیم محور اقصر بیضی می‌باشد.



شکل ۲۷

۲۳. نقاطی از بیضی $x^2+5y^2=20$ را بیابید که خط‌واصل بین آنها و کانونها بر هم عمود باشند.

۲۴. به ازای چه مقادیری از ثابت c، نمودار معادلهٔ $x^2+2y^2-6x+4y=c$ یک بیضی است؟ یک نقطه است؟ تهی است؟

۲۵. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x=x_0+a\cos t,\quad y=y_0+b\sin t \qquad (0\le t\le 2\pi) \qquad \text{(یک)}$$

بیضی است (فرض کنید $a > 0, b > 0$) .

نقاط اشتراک خط و بیضی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

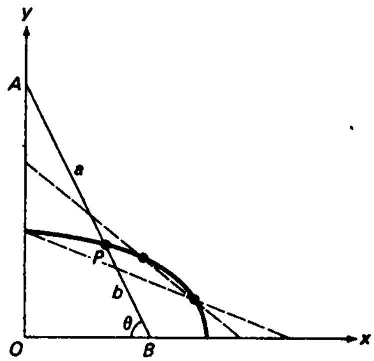
۲۶. $x + 2y - 7 = 0, x^2 + 4y^2 = 25$

۲۷. $3x + 10y - 25 = 0, 4x^2 + 25y^2 = 100$

۲۸. $3x - 4y - 24 = 0, 9x^2 + 16y^2 = 144$

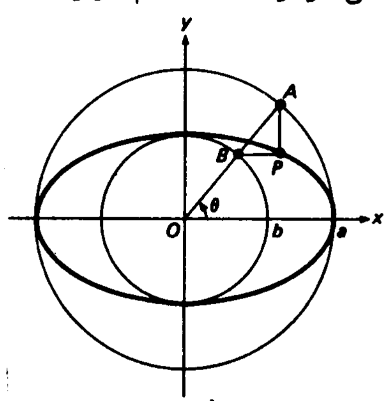
۲۹. $x + y - 2 = 0, 2x^2 + y^2 = 3$

۳۰. نشان دهید که وقتی یک‌نردبان از روی دیوار به پایین سر می‌خورد ،هر نقطهٔ ثابت P از آن غیراز نقاط انتهایی‌اش یکچهارم یک‌بیضی را طی می‌کند . (ر.ک.شکل۲۸، که در آن AB نردبان ، a فاصلهٔ بین A و P ، و b فاصلهٔ بین P و B می‌باشد .)



شکل ۲۸

۳۱. فرض کنید A نقطهٔ متغیری از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به‌شعاع a بوده ، و B نقطهٔ برخورد شعاع OA از این دایره با دایرهٔ متحدالمرکز $x^2 + y^2 = b^2$ به شعاع b باشد ، و P نقطهٔ برخورد خط افقی مار بر B با خط قائم ماربر A طبق شکل ۲۹ باشد ، که در



شکل ۲۹

eccentricity = خروج از مرکز Asymptote: مجانب ، vertices = رئوس

Foci = کانون ، خط مجانب center = مرکز

Focus = کانون

θ زاویهٔ بین OA و محور x است. نشان دهید که وقتی A دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ را بپیماید، نقطهٔ P بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را می‌پیماید.

خروج از مرکز بیضی با نیم‌محورهای داده شده را بیابید.

۳۲. $13, 5$ ۳۳. $17, 15$

۳۴. $25, 7$ ۳۵. $53, 28$

۳۶. مساحت محصور به بیضی

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

را بیابید.

۳۷. مستطیلی بیابید با بیشترین مساحت که در بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ محاط شده و دو ضلعش موازی محور اطول باشند.

در بین مماسهای بر بیضی $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 1$ آنهایی را بیابید که

۳۸. بر خط $2x - 2y - 3 = 0$ عمود باشند.

۳۹. از نقطهٔ $(\frac{10}{3}, \frac{5}{3})$ خارج بیضی بگذرند.

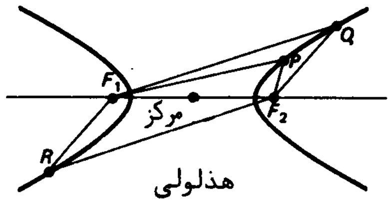
۴۰. نشان دهید که حاصل ضرب فواصل بین کانونهای F_1, F_2 از بیضی و هر مماس بر بیضی مساوی مجذور نیم محور اقصر است.

۴۱. نزدیکترین نقطه به خورشید در مدار حول آن را حضیض خورشیدی، و دورترین نقطه به خورشید را اوج خورشیدی می‌نامند. زمین در یک مدار بیضوی که خورشید در یکی از کانونهای آن است حرکت می‌کند به طوری که فاصلهٔ بین آن تا خورشید در حضیض 147.1 میلیون کیلومتر و در اوج 152.1 میلیون کیلومتر است. خروج از مرکز تقریبی مدار زمین چقدر است؟

۴.۱۰ هذلولیها

تعریف هذلولی. بنابر تعریف، *یک هذلولی مجموعهٔ تمام نقاطی در صفحه است که تفاضل فواصلشان تا نقاط ثابت F_1 و F_2 ثابت باشد.* (فرض است که همواره فاصلهٔ کوچکتر از فاصلهٔ بزرگتر کم می‌شود؛ درنتیجه، ثابت مربوطه مثبت است.) لذا، مثلاً، درشکل ۳۰ تفاضل بین فواصل P تا نقاط F_1 و F_2، به نام *کانونهای هذلولی*، همان تفاضل نظیر در مورد نقطهٔ O یا نقطهٔ R می‌باشد. توجه کنید که هذلولی از دو قسمت مجزا، به‌نام *شاخه* تشکیل شده است. بر یکی از شاخه‌ها (شاخهٔ راست در شکل) هر نقطه از هذلولی به F_2 نزدیکتر است تا F_1، حال آنکه بر شاخهٔ دیگر (شاخهٔ چپ در شکل) هر نقطه به F_1

نزدیکتر است تا F_2 . نقطهٔ میانی پاره‌خط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز هذلولی نام دارد . هذلولی مانند سهمی (ولی به خلاف بیضی) ، یک منحنی *بی‌کران* است؛ یعنی ، نقاطی بر منحنی وجوددارند که بدلخواه دور می‌باشند .



شکل ۳۰

برای یافتن معادلهٔ هذلولی ، در صفحهٔ آن مختصات قائم x و y معرفی کرده وآن را در " موضع متعارف " که مرکزش در مبداء O و کانونهایش در امتداد محور x واقع باشند قرار می‌دهیم . در این صورت ، کانونها نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ ، به‌فاصلهٔ $2c$ جدا از هم$(c > 0)$ ،خواهندبود . فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از هذلولی بوده، و $2a$ مقدار ثابت تفاضل بین فواصل P تا کانونها باشد . بنابر خاصیت معرف هذلولی ،

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

اگر P به F_2 تا F_1 نزدیکتر باشد ، یا

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

اگر P به F_1 تا F_2 نزدیکتر باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$|PF_1| = \pm 2a + |PF_2|,$$

که برحسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می‌آوریم

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

که به

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

ساده می‌شود . اگر طرفین را مجددا" به توان دو برسانیم ، درخواهیم یافت که

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

و لذا ،

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (1)$$

برای ساده‌کردن بیشتر (۱) ، ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF_1| < |F_1F_2| + |PF_2| = 2c + |PF_2|,$$
$$|PF_2| < |F_1F_2| + |PF_1| = 2c + |PF_1|,$$

زیرا طول یک ضلع مثلث F_1PF_2 از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است. بنابراین،

$$2c > |PF_1| - |PF_2|, \qquad 2c > |PF_2| - |PF_1|,$$

که نامساوی

$$c > a$$

را ایجاب می‌کند ، زیرا یکی‌از تفاضلهای سمت راست مساوی $2a$ است. با معرفی‌ثابت مثبت b که

$$b^2 = c^2 - a^2, \tag{۲}$$

می‌توان (۱) را به شکل زیر نوشت:

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

که خود ، پس‌از تقسیم طرفین بر a^2b^2 ، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۳}$$

به‌عکس، هرگاه نقطهٔ $P = (x, y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود ، آنگاه ، با عکس‌کردن مراحل‌این‌محاسبات‌بدقت ، معلوم می‌شودکه $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ (ذکرجزئیات‌را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم) . بنابراین ، (۳) معادلهٔ هذلولی در موضع متعارف است .

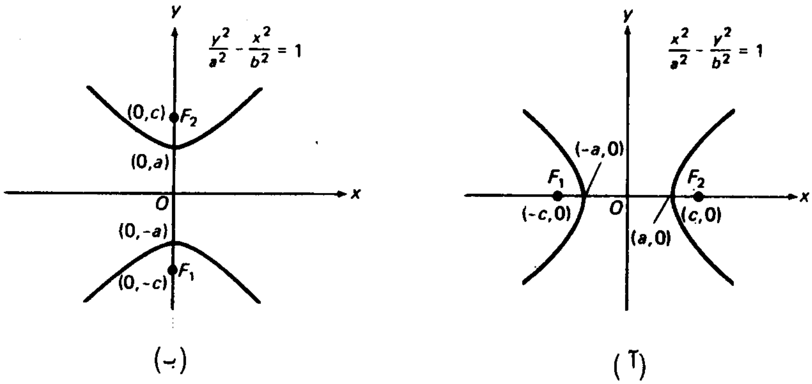
محورهای‌متقاطع‌ومزدوج. چون‌معادلهٔ (۳) دراثرتعویض x با $-x$ یا y با $-y$ تغییرنمی‌کند ، هر دو محور مختصات محور تقارن هذلولی (۳) هستند . به‌طورکلی ، هر هذلولی دو محور تقارن دارد ، خط مار بر کانونهای F_1 و F_2 و عمودمنصف پاره‌خط F_1F_2 . هذلولی خط مار بر کانونهایش را در دو نقطه به نام رأس، قطع کرده ، و پاره خط‌واصل‌بین رئوس محور متقاطع نام دارد . برای هذلولی (۳) رئوس عبارتنداز نقاط $(\pm a, 0)$ و محور متقاطع افقی است[ر.ک. شکل ۳۱ (آ)] . کانونهای هذلولی در نقاط $(\pm c, 0)$ قرار دارند ، که‌در آن

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

و این را می‌توان با حل (۲) نسبت به c به دست آورد . از تعویض x و y در معادلهٔ (۳) هذلولی دیگر

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{۴}$$

به دست می‌آید ، که آن را نیز دروضع متعارف‌می‌نامیم . این هذلولی دارای رئوس$(0, \pm a)$ و کانونهای$(0, \pm c)$ بر محور y اند ، و محور متقاطع آن قائم است [ر.ک . شکل ۳۱ (ب)] .



شکل ۳۱

مثال ۱ . نمودار معادلهٔ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ را بیابید .

حل . نمودار به شکل (۳) با $a = 4$ ، $b = 3$ ، و

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

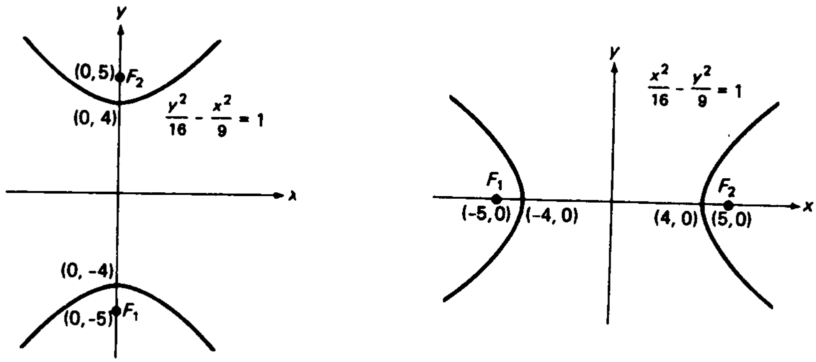
است . بنابراین ، نمودار آن یک هذلولی به مرکز مبداء ، رأسهای $(\pm 4, 0)$ ، و کانونهای $(\pm 5, 0)$ بر محور x بوده ، و محور متقاطع افقی می‌باشد [ر.ک . شکل ۳۲ (آ)] .

مثال ۲ . نمودار معادلهٔ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ را پیدا نمایید .

حل . معادله به شکل (۴) است که درآن a ، b ، و c همان مقادیر مثال ۱ را دارند . بنابراین ، نمودارش هذلولی است که مرکزش مبداء ، رأسهایش $(0, \pm 4)$ ، کانونهایش $(0, \pm 5)$ بر محور y بوده ، و محور متقاطعش قائم می‌باشد [ر.ک . شکل ۳۲ (ب)] .

منظور از محور مزدوج یک هذلولی یعنی پاره‌خطی به طول $2b$ که بر محور متقاطع عمود بوده و همان نقطهٔ میانی ، یعنی مرکز هذلولی ، را داشته باشد . لذا ، در مثال ۱ ، محور مزدوج پاره‌خط قائم بین نقاط$(0, -3)$ و $(0, 3)$ است ، حال آنکه در مثال ۲پاره خط افقی بین نقاط $(-3, 0)$ و $(3, 0)$ می‌باشد . این محورها شبیه محورهای اطول و اقصر بیضی‌اند . اما محور اطول یک بیضی همیشه از محور اقصر آن بزرگتر است $(a > b)$ ، ولی

اندازه‌های نسبی محورهای متقاطع و مزدوج یک هذلولی تحت قیدی نیستنـــد؛ یعنی می‌توانیم داشته‌باشیم $a < b$ ، $a = b$ ،یا $a > b$. این به‌خاطرآن‌است که شرط $a^2 = b^2 + c^2$



(ب)   (آ)

شکل ۳۲

برای بیضی با شرط $c^2 = a^2 + b^2$ برای هذلولی تعویض می‌شود؛ درنتیجه، با تعییـــن a (در خاصیت معرف هذلولی) باز هم b را برای گرفتن هر مقدار آزاد می‌گذارد.

مجانبهای یک هذلولی . حال نشان می‌دهیم یک هذلولی دو *مجانب* دارد . برای‌این کار، معادلهٔ $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ را نسبت به y حل کرده ، توابع زیر را به‌دست‌می‌آوریم :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{۵}$$

و

$$y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{۵'}$$

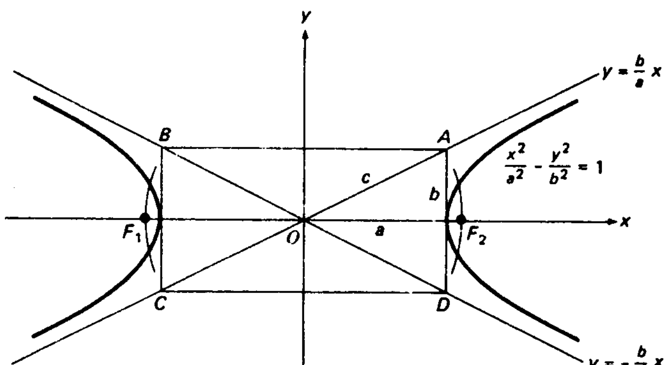
هر یک از این توابع فقط به‌ازای $-a \leq x$ یا $x \geq a$ تعریف‌می‌شود؛ و در واقع ، (۵)نمایش بخشی از هذلولی است که در نیمصفحهٔ بالایی $y \geq 0$ قرار دارد ، ولی (′۵)نمایش‌بخش واقع از آن در نیمصفحهٔ‌پایینی $y \leq 0$ می‌باشد .خط $y = (b/a)x$ یک مجانب مایل‌هذلولی (۳) است . برای مشاهدهٔ این امر ، فرض‌کنیم $P = (x, y)$ یک نقطهٔ متغیر از بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد . پس x و y هر دو مثبت بوده و فاصلهٔ $d(x)$ بین P و نقطه‌ای از خط $y = (b/a)x$ با همان مختص x مساوی است با

$$d(x) = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$
$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

اما

$$\lim_{x\to\infty} d(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0,$$

و درنتیجه، نمودار (۵)، وقتی $x \to \infty$ ، به خط $y = (b/a)x$ نزدیک می‌شود؛ یعنی، خط مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد. با استدلالی مشابه‌می‌توان نشان داد که $y = (b/a)x$ مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع سوم واقع است. پس، چون انعکاس نسبت به محور x هذلولی (۳) را به خودش و خط $y = (b/a)x$ را به‌خط $y = -(b/a)x$ می‌برد، خط $y = -(b/a)x$ مجانب‌بخشهایی‌ازهذلولی‌است که‌در ربعهای دوم‌وچهارم قرار دارند. همهٔ این نکات از شکل ۳۳ واضح است.



ساختن مجانبها و کانونهای یک هذلولی

شکل ۳۳

خلاصه کنیم، هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ خطوط

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

را به عنوان مجانب دارد. به عنوان تمرین، نشان دهید که مجانبهای هذلولی $(y^2/a^2)-(x^2/b^2)=1$ ، با محور متقاطع قائم، عبارتنداز خطوط $y = \pm(a/b)x$.

برای ساختن مجانبهای هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ راه ساده‌ای وجود دارد.

یک مستطیل مرکزی، یعنی مستطیل $ABCD$ نموده شده در شکل ۳۳، با دو ضلع واقع برخطوط $x = \pm a$ ودوضلع واقع برخطوط $y = \pm b$ رسم می‌کنیم. دراین صورت، مجانبها خطوط حاصل ازادامهٔ اقطارمستطیل می‌باشند. توجه کنید که نیم قطر OAی مستطیل به طول است، زیرا $c = \sqrt{a^2 + b^2}$؛ درنتیجه، دونقطهٔ برخورد دایره به‌شعاع $|OA|$ با محور x عبارتنداز کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$، و این در شکل با دو قوس از این دایره نموده‌شده است. همچنین، توجه کنید که مجانبها عبارتنداز نمودار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

که فرقش با معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذلولی در این است که در طرف راست به جای 1، 0 داریم.

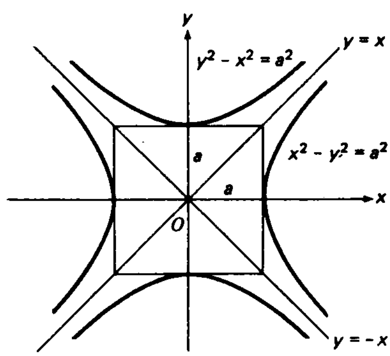
مثال ۳. هرگاه محورهای متقاطع و مزدوج متساوی‌الطول باشند، آنگاه در معادلهٔ (۳) یا (۴) $a = b$، و یک *هذلولی متساوی‌الاضلاع*

$$x^2 - y^2 = a^2$$

یا

$$y^2 - x^2 = a^2$$

با مجانبهای $y = \pm x$ به دست می‌آوریم (ر.ک. شکل ۳۴). در این حالت، مجانبها برهم عمود بوده، و مستطیل مرکزی مربع می‌باشد. ما قبلاً" به یک هذلولی متساوی —



هذلولیهای متساوی‌الاضلاع

شکل ۳۴

الاضلاع، یعنی هذلولی یکهٔ

$$x^2 - y^2 = 1,$$

که در صفحهٔ ۵۶۶ در رابطه با توابع هذلولوی مطـرح شد ، برخورده‌ایم .

معادلات به شکل متعارف . معادلات (۳) و (۴) نمایش هذلولیهایی‌هستند که مرکزشان مبداء بوده و محورهای مختصات آنها محورهای تقارن هستند . معادلات کلیتر

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (۶)$$

و

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1 \qquad (۷)$$

هذلولیهایی را نمایش‌می‌دهند که همان‌اندازه و شکل هذلولیهای(۳) و (۴)را دارند ، ولی به مرکز (x_0, y_0) بوده‌و محورهایشان درامتداد خطوطی موازی محورهای‌مختصات‌می‌باشند . به طور مشروح ، (۶) معادلهٔ یک هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش‌درامتداد خط افقی $y = y_0$ و محور مزدوجش در امتداد خط قائم $x = x_0$ است ، ولی (۷) معادلهٔ هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش در امتداد خط قائم $x = x_0$ و محـور مزدوجش در امتداد خط افقی $y = y_0$ می‌باشد . در هر دو حال ، محور متقاطع آن به‌طول $2a$ و محور مزدوجش به طول $2b$ می‌باشد . این معادلات ***معادلات یک هذلـولی به شکـل متعارف*** می‌باشند. طبیعی است که (۶)و (۷) در حالت خالص $x_0 = y_0 = 0$ به (۳)و (۴) تحویل می‌شوند .

مثال ۴ . نمودار معادلهٔ

$$x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0 \qquad (۸)$$

را بیابید .

حل . با کامل کردن مربعها ، معلوم می‌شود که (۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

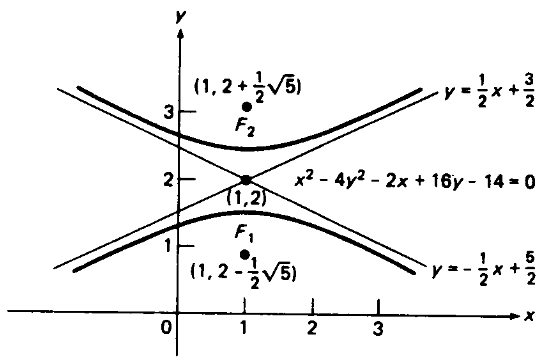
$$(x-1)^2 - 4(y-2)^2 + 1 = 0,$$

یا ، معادلا" ،

$$\frac{(y-2)^2}{(\frac{1}{2})^2} - (x-1)^2 = 1,$$

که به شکل متعارف (۷) به ازای $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ a = \frac{1}{2},\ b = 1$ اسـت . نمـودار ایـن

معادله یک هذلولی به مرکز $(1,2)$ با محور متقاطع قائم است (ر.ک. شکل ۳۵). نقاط انتهایی محور متقاطع عبارتند از $(1, 2-\frac{1}{2})$ و $(1, 2+\frac{1}{2})$، یعنی $(1, \frac{3}{2})$ و $(1, \frac{5}{2})$. همچنین چون فاصلهٔ هر کانون تا مرکز مساوی $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ است، کانونها عبارتند از $F_1 = (1, 2-\frac{1}{2}\sqrt{5})$ و $F_2 = (1, 2+\frac{1}{2}\sqrt{5})$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجانبها خطوط $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ و $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ به شیب $\pm\frac{1}{2}$ اند که، طبق شکل، در نقطهٔ $(1,2)$ هم را قطع می‌کنند.



شکل ۳۵

هر یک از معادلات (۶) و (۷) از خاصیت زیر برخوردار است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجهٔ دو است، هیچ جمله‌اش شامل حاصل‌ضرب xy نیست، و به علاوه ضرایب x^2 و y^2 (به خلاف بیضی صفحات ۹۴۷ تا ۹۴۸، که هم‌علامت بودند) مختلف‌العلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2، به شکل زیر نوشت:

$$x^2 - ky^2 + Ax + By + C = 0 \qquad (k > 0) \tag{۹}$$

اما، مثل مثال ۴، می‌توان (۹) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۶) و (۷) درآورد؛ و درنتیجه، جدا از حالت استثنایی، نمودار (۹) هذلولیی است که محورهایش با محورهای مختصات موازی می‌باشند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۹) را به صورت زیر نوشت:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - k\left(y - \frac{B}{2k}\right)^2 = D, \tag{۹'}$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$ ، نمودار (۹′) ، و درنتیجه (۹) ، یک جفت خط زیر است:

$$y - \frac{B}{2k} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\left(x + \frac{A}{2}\right),$$

که در نقطهٔ $(-A/2, B/2k)$ متقاطعند ، و این همان حالت استثنایی فوق می‌باشد. اما اگر $D \neq 0$ ، (۹′) را می‌توان ، بسته به علامت D ، به یکی از اشکال زیر نوشت:

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} - \frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1 \qquad (D > 0)$$

یا

$$\frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{|D|/k})^2} - \frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{|D|})^2} = 1 \qquad (D < 0),$$

که معادلهٔ یک هذلولی به مرکز $(-A/2, B/2k)$ می‌باشد . اگر $D > 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور مزدوج قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است ، ولی اگر $D < 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع قائم به طول $2\sqrt{|D|}$ و محور مزدوج افقی به طول $2\sqrt{|D|/k}$ می‌باشد . لذا ، به طور خلاصه ، یک هذلولی دارای معادلهٔ (۹) است اگر و فقط اگر محورهایش موازی محورهای مختصات باشند .

البته ، هذلولیهایی وجود دارند که معادلاتشان جملاتی شامل xy دارند . مثلاً ، نمودار معادلهٔ $2xy = 1$ هذلولیی است‌که از دوران هذلولی متساوی‌الاضلاع $x^2 - y^2 = 1$ به اندازهٔ $45°$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به دست می‌آید (ر.ک. مثال ۴ ، صفحهٔ ۹۲۵) .

خروج از مرکز هذلولی . درست مثل حالت بیضی ، شکل یک هذلولی را می‌توان با عدد

$$e = \frac{c}{a},$$

به نام خروج از مرکز ، به راحتی توصیف کرد ، ولی e در اینجا می‌تواند مقادیر بزرگتر از 1 اختیار کند ، زیرا $c > a$.

مثال ۵ . خروج از مرکز هذلولی شکل ۳۲ چقدر است؟

حل . در اینجا $a = 4$ و $c = 5$ ؛ درنتیجه ، خروج از مرکز مساوی است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

هذلولی، مانند بیضی، نقش مهمی در بررسی حرکت مداری ایفا می‌کند. حدس می‌زنند که تعدادی از ستاره‌های دنباله‌دار مدارهای هذلولوی دارند، بدین معنی‌که‌یکبار ظاهر شده و سپس منظومهٔ شمسی را برای همیشه ترک می‌کنند[1]. در سال ۱۹۱۱، ارنست روترفورد، توانست وجود هستهٔ‌اتم را با تحلیل رفتار ذرات‌آلفا که به مدارهای هذلولوی منحرف می‌شوند با ورقه‌های نازک فلزی ثابت کند. ما قبلاً در صفحهٔ ۵۶۶ نقش هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ را در تعریف توابع هذلولوی توضیح داریم. در مسائل ۴۳ و ۴۴، استفاده از هذلولیها برای یافتن برد مورد بحث قرار گرفته است.

مسائل

معادلهٔ هذلولی را به شکل متعارف بنویسید به طوری که

۱. رئوس $(\pm 3, 0)$ و کانونها $(\pm 4, 0)$ باشند.

۲. رئوس $(0, \pm 2)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند.

۳. نقاط انتهایی محور متقاطع $(5, 2)$، $(-7, 2)$ ونقاط انتهایی محورمزدوج $(-1, -3)$، $(-1, 7)$ باشند.

۴. مرکز $(3, 1)$، یکی از کانونها $(9, 1)$، و محور متقاطع به طول 8 باشد.

۵. مرکز $(-2, 0)$، یکی از کانونها $(-2, 4)$، و محور مزدوج به طول 4 باشد.

۶. مرکز $(2, -1)$، یکی از کانونها $(-4, -1)$، و یکی از رئوس $(7, -1)$ باشد.

۷. مبداء مرکز بوده و دو نقطهٔ $(8, \sqrt{8})$، $(6, -1)$ بر هذلولی واقع باشند.

۸. کانونها $(\pm 10, 0)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{4}{3}x$ باشند.

۹. رئوس $(0, \pm 24)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{12}{5}x$ باشند.

۱۰. کانونها $(\pm 7, 0)$ و خروج از مرکز $\frac{7}{5}$ باشد.

۱۱. مبداء مرکز و خروج از مرکز $\sqrt{2}$ بوده، و نقطهٔ $(-5, 3)$ بر هذلولی واقع باشد.

۱۲. مبداء مرکز و مجانبها $y = \pm \frac{2}{3}x$ بوده، و نقطهٔ $(\frac{9}{2}, -1)$ بر هذلولی واقع باشد.

هذلولی به معادلهٔ داده شده را رسم کرده، و مرکز، کانونها، نقاط انتهایی محور متقاطع، و مجانبها را مشخص نمایید.

---

۱. *این با رفتار ستاره‌های دنباله‌دار در مدارهای بیضوی که متناوباً به حضیض باز می‌گردند تفاوت دارد (ظهور ستارهٔ دنباله‌دار هالی 27 بار ثبت شده است). تعیین اینکه مدار یک ستاره هذلولی یا یک بیضی بسیار کشیده است اغلب مشکل است. مدارهای سهموی دست کم در تئوری، حالت دیگری است.*

۱۳. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

۱۴. $\dfrac{y^2}{36}-\dfrac{x^2}{25}=1$

۱۵. $\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{(x+2)^2}{4}=1$

۱۶. $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{(y-3)^2}{16}=1$

۱۷. $3x^2-y^2=4$

۱۸. $2y^2-5x^2=10$

۱۹. $2x^2-y^2+4x-2y+17=0$

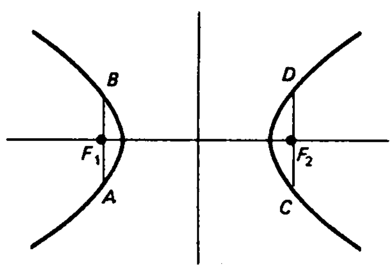
۲۰. $9x^2-16y^2-90x+32y+65=0$

۲۱. $81x^2-25y^2-324x-50y-1726=0$

۲۲. $9x^2-4y^2+16y=0$

۲۳. کانونهای هذلولی $2xy=1$ را یافته (ر.ک. شکل ۶، صفحهٔ ۹۲۶)، و معادله‌اش را از خاصیت معرف هذلولی نتیجه بگیرید.

۲۴. هر پاره خط که نقاط انتهایی‌اش بر یک هذلولی واقع باشند یک وتر هذلولی نام دارد، و وتر مار بر F_1 یا F_2 و عمود بر محور متقاطع ***راست وتر کانونی*** نامیده می‌شود (در شکل ۳۶، این وتر AB یا CD است).



شکل ۳۶

نشان دهید که طول راست وتر کانونی $2b^2/a$ است، که در آن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است.

۲۵. نقاطی از هذلولی $3y^2-x^2=12$ را بیابید که خطوط واصل بین آنها و کانونها برهم عمود باشند.

۲۶. به ازای چه مقادیری از ثابت c، نمودار معادلهٔ $x^2-y^2+6x-2y=c$ یک هذلولی با محور متقاطع افقی است؟ یک هذلولی با محور متقاطع قائم است؟ یک جفت خط متقاطع است؟

۲۷. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x=x_0+a\cosh t,\quad y=y_0+b\sinh t\quad(-\infty<t<\infty)\qquad\text{(یک)}$$

شاخهٔ راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخهٔ چپ آن است اگر $a < 0$. معادلات پارامتری شاخه‌های یک هذلولی با محور متقاطع قائم را بنویسید .

نقاط اشتراک خط و هذلولی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

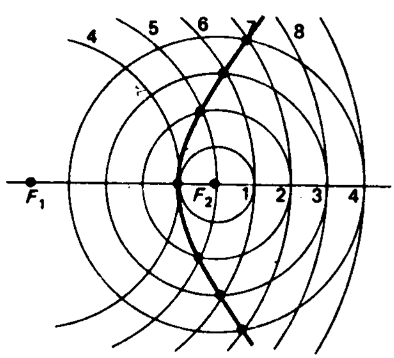
۲۸ . $2x - y - 10 = 0, x^2 - 4y^2 = 20$

۲۹ . $4x - 3y - 16 = 0, 16x^2 - 25y^2 = 400$

۳۰ . $2x + y + 1 = 0, 4x^2 - 9y^2 = 36$

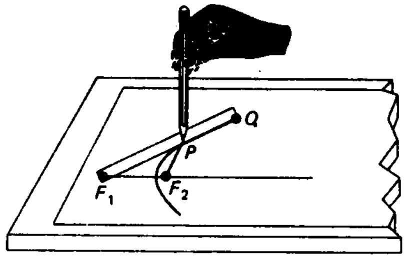
۳۱ . $3x - y - 2 = 0, 2x^2 - y^2 = 1$

۳۲ . شکل ۳۷ خانواده‌ای از قوسهای مستدیر متحدالمرکز به مرکز F_1 و یک خانواده‌ازدوایر متحدالمرکز به مرکز F_2 را نشان می‌دهد . قوسها و دوایر با شعاعهایشان برچسب خورده‌اند . توضیح دهید چرا نقاط توپر شکل بر یک هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 قرار دارند .



شکل ۳۷

۳۳ . هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 را می‌توان به صورت زیر رسم کرد :
یک طرف خط‌کشی را به یک تخته رسم در F_1 طوری می‌چسبانیم که بتواند حول F_1 دوران کند . در انتهای دیگر Q خط‌کش یک نخ به طول s که از طول r خط‌کش کوچکتر است می‌بندیم ، و سر دیگر نخ را در F_2 محکم می‌کنیم . درحالی که نخ را با یک مداد کشیده نگهداشته‌ایم ، خط‌کش را مثل شکل ۳۸ حول F_1 می‌چرخانیم . در این صورت ، نقطهٔ P مداد بخشی از یک هذلولی را خواهد پیمود . توضیح دهید چرا این رسم موجه است .



رسم یک هذلولی

شکل ۳۸

۳۴. گوییم هذلولیهای

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

باهم مزدوج اند. نشان دهید که هذلولیهای مزدوج مجانبهای یکسان دارند.

۳۵. خروج از مرکز هذلولیی را بیابید که محور متقاطع آن در هر یک‌از کانونهای‌هذلولی مزدوجش زاویهٔ $60°$ را دربردارد.

۳۶. نشان دهید که فاصلهٔ هر یک از کانونهای هذلولی $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ تا هریک‌از مجانبها مساوی b است.

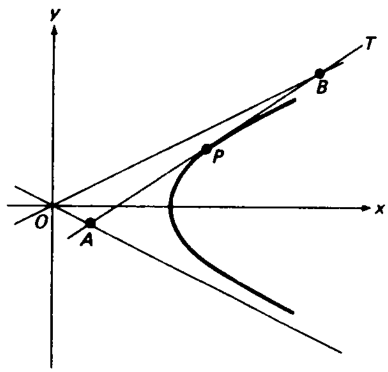
۳۷. هذلولی با خروج‌از مرکز 2 بیابیدکه کانونهایش باکانونهای‌بیضی $9x^2+25y^2=225$ یکی باشند.

۳۸. فرض کنید T خط مماس در نقطهٔ $P=(x_0,y_0)$ از هذلولی $(x^2/a^2)-(y^2/b^2)=1$ باشد. نشان دهید که T خطی است به معادلهٔ

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1. \qquad \text{(دو)}$$

۳۹. دو خط مار بر نقطهٔ $(-1,7)$ و مماس بر هذلولی $x^2-y^2=16$ را بیابید.

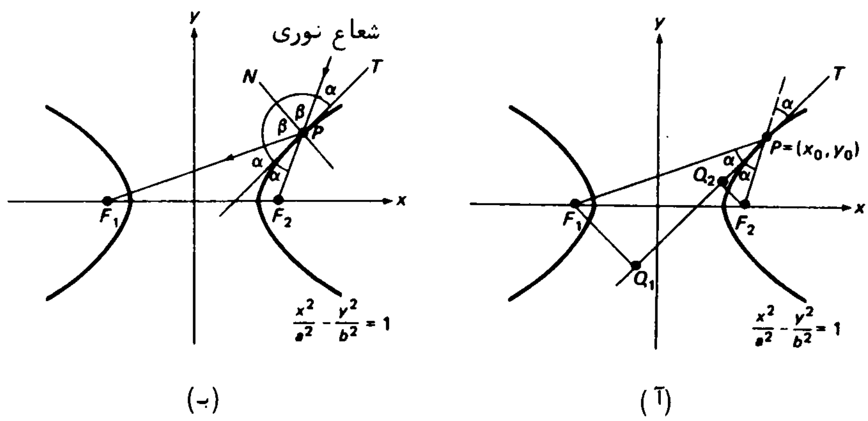
۴۰. فرض کنید T مماس بر یک هذلولی در نقطهٔ P بوده، و A و B نقاط برخورد T با مجانبهای هذلولی باشند (ر.ک. شکل ۳۹، که درآن مجانبها در O متقاطع‌اند). نشان دهید که نقطهٔ تماس P نقطهٔ میانی پاره‌خط AB است،و نیز مثلث OAB به ازای هر موضع از P مساحت ab را دارد.



شکل ۳۹

۴۱. فرض کنید T خط مماس در نقطهٔ $P = (x_0, y_0)$ از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ باشد. نشان دهید T زاویهٔ بین پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 که P را ، مثل شکل ۴۰ (آ) ، به کانونهای F_1 و F_2 وصل می‌کنند نصف می‌کند .

۴۲. نشان دهید که یک شعاع نوری که به سمت کانون یک آینهٔ هذلولوی می‌رود پس از انعکاس از کانون دیگر عبور خواهد کرد ؛ شکل ۴۰ (ب) .



شکل ۴۰

۴۳. سه نگهبان در امتداد یک جادهٔ مستقیم که به یک دپو ختم می‌شود به‌فاصلهٔ **1 km** از هم کشیک می‌دهند . در لحظه‌ای که آنها مکالمهٔ تلفنی سه راه دارند انفجاری رخ می‌دهد ، و نزدیکترین نگهبان به دپو صدای آن را **1 sec** قبل از نگهبان وسطی و **3 sec** قبل از دورترین نگهبان می‌شنود . با این فرض که سرعت صوت $\frac{1}{3}$ **km/sec** است ، دو

محل ممکن انفجار را پیدا نمایید.

۴۴. دو ایستگاه رادیویی که در نقاط A و B در امتداد یک خط مستقیم ساحلی از شمال به جنوب قرار دارند علایمی را همزمان می‌فرستند. ایستگاه A در 540 km شمال ایستگاه B قرار دارد. فرض کنید علامتی که از A فرستاده می‌شود توسط یک کشتی در 600 میکروثانیه (یعنی، 600×10^{-6} sec) قبل از علامت B دریافت شود. اگر کشتی به غرب برود، چه فاصله‌ای تا ساحل دارد؟ اگر به غرب نقطهٔ ساحلی که 90 km جنوب A است برود چقدر؟ (سرعت علایم رادیویی مساوی سرعت نور و حدود 300,000 km/sec یا معادل 300 متر بر میکروثانیه است.)

۵.۱۰ مقاطع مخروطی

سهمی، بیضی، و هذلولی، به دلیلی که عنقریب توضیح می‌دهیم، ***مقاطع مخروطی*** نام دارند. به یاد آورید که سهمی برحسب "خاصیت کانون ـ هادی" خود تعریف شد؛ یعنی، به صورت مجموعهٔ تمام نقاطی که فاصله‌شان تا نقطهٔ ثابتی به نام کانون و خط ثابتی به نام هادی ثابت است. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، بیضی و هذلولی نیز خاصیت کانون ـ هادی دارند که مستلزم خروج از مرکز e است. این امر به ما توان یک کاسه کردن سه مقطع مخروطی را می‌دهد، که در آن خروج از مرکز سهمی 1 گرفته خواهد شد.

بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{۱}$$

به کانونهای $F_1=(-c,0), F_2=(c,0)$ و خروج از مرکز

$$e=\frac{c}{a} \qquad (0<e<1),$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن

$$c^2=a^2-b^2.$$

فواصل نقطهٔ متغیر $P=(x,y)$ بیضی تا کانونها عبارتند از

$$|PF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

و

$$|PF_2|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بنابراین ،

$$|PF_1| = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2},$$

درنتیجه ،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو ،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

اما $0 < e < 1$ و $-a \le x \le a$ ؛ و درنتیجه ،

$$|PF_1| = a + ex, \qquad |PF_2| = a - ex. \tag{۲}$$

توجه کنید که

$$|PF_1| + |PF_2| = (a + ex) + (a - ex) = 2a,$$

که همان خاصیت معرف بیضی است که در صفحهٔ ۹۴۳ داده شده است .

محاسبات مشابه برای هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{۳}$$

با کانونهای $F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0)$ و خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \qquad (e > 1),$$

که در آن

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

نتیجه می‌دهد که

$$|PF_1| = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{x^2\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 - b^2}$$
$$= \sqrt{x^2\frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2}$$

بنابراین ، مثل حالت بیضی ،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

هرگاه P بر شاخهٔ راست هذلولی واقع باشد، آنگاه $x \geq a$ و (به یاد آورید که $e > 1$)،

$$|PF_1| = a + ex, \qquad |PF_2| = -a + ex \tag{۴}$$

ولی هرگاه P بر شاخهٔ چپ قرار داشته باشد، آنگاه $x \leq -a$ و

$$|PF_1| = -a - ex, \qquad |PF_2| = a - ex. \tag{۴'}$$

توجه کنید که، در حالت اول،

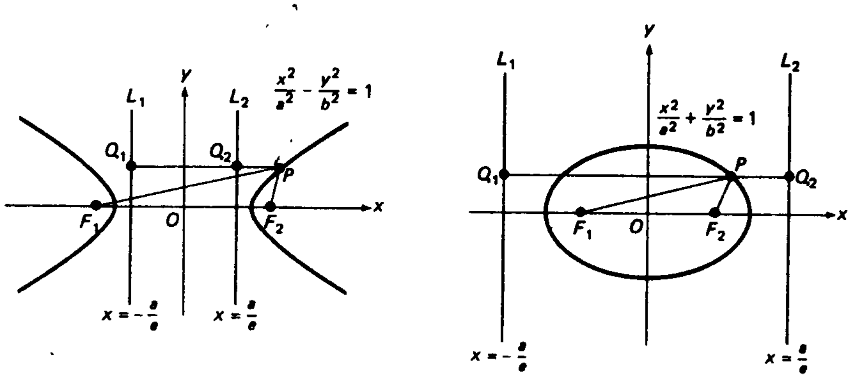
$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

و، در حالت دوم،

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

و این درست مثل صفحهٔ ۹۵۷ است.

هادیهای بیضی و هذلولی. حال به تعریف *هادیهای* بیضی (۱) یا هذلولی (۳) به‌صورت خطوط قائم L_1 و L_2 به ترتیب به معادلات $x = -a/e = -a^2/c$ و $x = a/e = a^2/c$ می‌پردازیم (توجه کنید که L_1 و L_2 به فاصله $h = 2a/e = 2a^2/c$ از هم قرار دارند). شکل ۴۱ (آ) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به بیضی (۱) نشان می‌دهند؛ چون برای بیضی $0 < e < 1$ داریم $a/e > a$؛ درنتیجه، L_2 سمت راست رأس $(a, 0)$ است ولی L_1 سمت چپ رأس $(-a, 0)$ می‌باشد. به همین نحو، شکل ۴۱ (ب) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به هذلولی (۳) نشان می‌دهد؛ چون برای هذلولی $e > 1$، این بار داریم $a/e < a$؛ درنتیجه، L_2 سمت چپ رأس $(a, 0)$ و سمت راست مبداء است، حال آنکه L_1 سمت راست رأس $(-a, 0)$ و سمت



(ب) (آ)

شکل ۴۱

چپ مبداء می‌باشد. فرض‌کنیم Q_1 و Q_2 نقاط برخورد خط افقی مار بر $P=(x, y)$ با L_1 و L_2 باشند. در این صورت، همانطور که از شکلها دیده می‌شود، برای بیضی

$$|PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \qquad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x \tag{۵}$$

ولی برای شاخهٔ راست هذلولی

$$|PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \qquad |PQ_2| = -\frac{a}{e} + x \tag{۶}$$

و برای شاخهٔ چپ آن

$$|PQ_1| = -\frac{a}{e} - x, \qquad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x \tag{۶'}$$

از مقایسهٔ (۲) با (۵)، (۴) با (۶)، و (۴') با (۶')، درهر حالت خواهیم داشت

$$|PF_1| = e|PQ_1|, \qquad |PF_2| = e|PQ_2| \tag{۷}$$

(جزئیات را شرح دهید).

از رابطهٔ (۷) معلوم می‌شود که *هرگاه P نقطهٔ متغیری از بیضی (۱) یا هذلولی (۳) باشد، آنگاه فاصلهٔ P تا هریک از کانونها حاصل‌ضرب خروج از مرکز e و فاصلهٔ P تا هادی نظیر است*. در اینجا هادی نظیر به‌یک‌کانون همیشه نزدیکترین هادی به‌آن گرفته‌می‌شود. فاصلهٔ بین هر هادی و کانون نظیر عبارت است از

$$d = \frac{a^2}{c} - c = \left(\frac{1}{e} - e\right)a \tag{۸}$$

برای بیضی و

$$d = c - \frac{a^2}{c} = \left(e - \frac{1}{e}\right)a \tag{۸'}$$

برای هذلولی است. (هر یک از عبارات (۸) و (۸') مساوی b^2/c است، که در آن b نصف طول محور اقصر در حالت اول و نصف طول محور مزدوج در حالت دوم است.) به همین نحو، فاصلهٔ بین هر هادی و رأس نظیر برای بیضی مساوی

$$\frac{a^2}{c} - a = \left(\frac{1}{e} - 1\right)a$$

و برای هذلولی برابر

$$a - \frac{a^2}{c} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)a$$

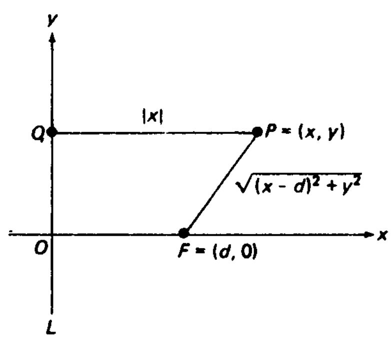
می‌باشد . همانطور که در بالا گفته‌شد ،خود هادیها درفاصلهٔ $h = 2a/e = 2a^2/c$ ازیکدیگر قرار دارند . از این فرمولها می‌توان برای‌یافتن‌هادیهای‌بیضی یاهذلولیی‌که‌حتی‌معادله‌ای به شکل (۱) یا (۳) ندارند استفاده کرد .

خاصیت کانون ــ هادی. لذا ، هم‌اکنون نشان داده‌ایم که هر نقطهٔ P از بیضی یاهذلولی با خروج از مرکز e در *خاصیت کانون ــ هادی*

$$|PF| = e|PQ| \tag{۹}$$

صدق می‌کند ، که در آن F یکی از کانونها بوده و Q پای عمود مرسوم از P به نزدیکترین هادی L به F است . حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم ؛ یعنی ، نشان می‌دهیم‌که‌هر نقطهٔ $P = (x, y)$ صادق در (۹) بر یک بیضی با خروج از مرکز e قرار دارد اگر $0 < e < 1$ یا بر یک هذلولی با خروج از مرکز e واقع است اگر $e > 1$. برای این کار ، فرض کنیم ، مثل شکل ۴۲ ، کانون نقطهٔ $(d, 0)$ بوده و هادی L محور y باشد . در این صورت ،

$$|PF| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \qquad |PQ| = |x|,$$



شکل ۴۲

و (۹) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = e|x|.$$

بنابراین ،

$$(x-d)^2 + y^2 = e^2x^2$$

یا

$$(1 - e^2)x^2 - 2dx + y^2 + d^2 = 0,$$

که در آن $1 - e^2 \neq 0$. با فاکتورگرفتن‌از $1 - e^2$ و کامل‌کردن مربع ، این معادله‌را می‌توان

به صورت زیر نوشت:

$$(1-e^2)\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{d^2}{1-e^2}-d^2=\frac{e^2d^2}{1-e^2},$$

که با

$$\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2$$

معادل می‌باشد. معادلهٔ اخیر را می‌توان به ازای $0<e<1$ به شکل

$$\frac{\left(x-\frac{d}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{ed}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1 \qquad (۱۰)$$

و به ازای $e>1$ به شکل

$$\frac{\left(x+\frac{d}{e^2-1}\right)^2}{\left(\frac{ed}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1 \qquad (۱۰')$$

نوشت. اما (۱۰) معادلهٔ یک بیضی است، ولی ('۱۰) معادلهٔ هذلولی می‌باشد. به‌عنوان تمرین، بیضی (۱۰) و هذلولی ('۱۰) را توصیف‌کرده، و تحقیق کنید هر یک دارای خروج از مرکز e است.

در قضیهٔ زیر تمام این‌نکات، همراه‌بااین امر که فرمول (۹) به ازای $e=1$ به‌خاصیت معرف سهمی بدل می‌شود خلاصه شده است (ر.ک. صفحهٔ ۹۳۱).

قضیهٔ ۱ (خاصیت کانون ــ هادی مقاطع مخروطی). *عدد مثبت e داده شده است. فاصلهٔ نقطهٔ متغیر P تا نقطهٔ ثابت F مساوی e برابر فاصلهٔ P تا خط ثابت L غیرشامل F است اگر و فقط اگر P بر یک مقطع مخروطی به کانون F، هادی L، و خروج از مرکز e واقع باشد. این مقطع مخروطی*

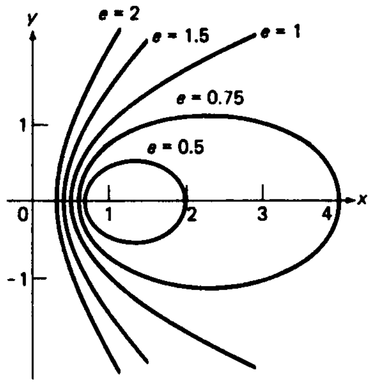
(یک) بیضی است اگر $0<e<1$؛

(دو) سهمی است اگر $e=1$؛

(سه) هذلولی است اگر $e>1$.

این قضیه در شکل ۴۳ تعبیر هندسی شده است، که در آن کانون نقطهٔ $(1,0)$،

هادی محور y ، و خروج از مرکز e مقادیر 0.5 ، 0.75 ، 1 ، 1.5 ، و 2 را می‌گیرد . سهمی نمودار $y^2 = 2x - 1$ ، و سایر منحنیها نمودار (۱۰) و (۱۰′) به ازای $d = 1$ و مقادیر ذکر شده از e می‌باشند .



مقاطع مخروطی با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۴۳

مثال ۱ . معادلهٔ بیضی را بیابید که رئوسش $(\pm 6, 0)$ بوده و هادیهایش به فاصلهٔ $h = \frac{72}{5}$ از هم باشند . خروج از مرکز آن چقدر است ؟

حل . معادلهٔ متعارف بیضی عبارت است از $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ، که در آن $2a$ طول محور اطول و $2b$ طول محور اقصر است . هرگاه $2c$ فاصلهٔ بین کانونها باشد ، آنگاه $2a^2/c$ فاصلهٔ بین هادیها می‌باشد . فرض است که

$$a = 6, \qquad h = \frac{2a^2}{c} = \frac{72}{5},$$

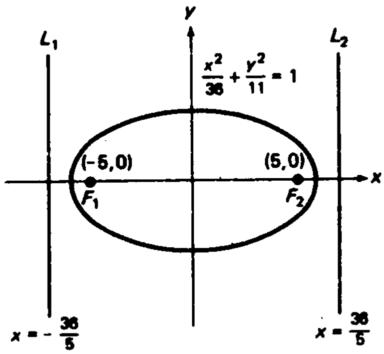
و درنتیجه ، $c = 5,\ b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$. بنابراین ، معادلهٔ بیضی مساوی است با

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1,$$

و خروج از مرکز آن برابر است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6}.$$

شکل ۴۴ بیضی را همراه با کانونهایش $(\pm 5, 0)$ و هادیهایش $x = \pm\frac{36}{5}$ نشان می‌دهد.



شکل ۴۴

مثال ۲. معادلهٔ هذلولی به‌رأسهای $(0, \pm 2)$ و خروج‌از مرکز $e = \frac{3}{2}$ را بیابید. هادیهایش کجا واقعند؟

حل. معادلهٔ متعارف هذلولی مورد بحث عبارت است از $1 = (y^2/a^2) - (x^2/b^2)$، که‌درآن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است. هرگاه $2c$ فاصلهٔ بین کانونها باشد، آنگاه c/a خروج از مرکز است. فرض است که

$$a = 2, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2},$$

درنتیجه، $c = 3, b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. لذا، معادلهٔ هذلولی عبارت است از

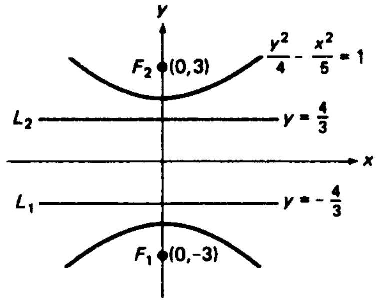
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1,$$

و فاصلهٔ بین هادیهایش مساوی است با

$$h = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e} = \frac{8}{3}.$$

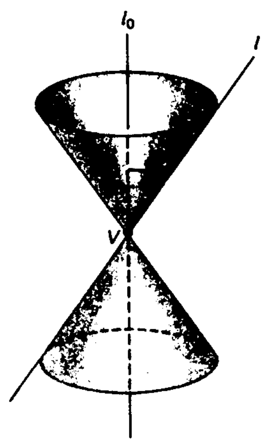
شکل ۴۵ هذلولی را همراه با کانونهایش $(0, \pm 3)$ و هادیهایش $y = \pm\frac{4}{3}$ نشان می‌دهد.

اکنون، همانطور که قول داده‌ایم، توضیح می‌دهیم که چرا سهمی، بیضی، وهذلولی را **مقاطع مخروطی** یا فقط **مخروطی** می‌گویند. از نام برمی‌آید که رابطه‌ای با مخروط وجود دارد؛ و در واقع، هر یک فصل مشترک یک مخروط مستدیر قائم مضاعف با صفحهٔ قاطع



شکل ۴۵

مناسبی می‌باشد. شکل ۴۶ یک چنین مخروط را نشان می‌دهد. این مخروط سطحی است که از دو قسمت به نام **پارچه** تشکیل شده است که یکدیگر را در نقطهٔ V قطع می‌کنند. این نقطه **رأس مخروط** نام دارد، و هر خط l واقع بر مخروط و مار بر V یک **مولد** مخروط نامیده



مخروط مستدیر قائم دوپارچه

شکل ۴۶

می‌شود که با محور l_0 مخروط زاویهٔ حادهٔ α را می‌سازد (ر.ک. شکل). در واقع، هر مولد l با دوران حول l_0 ضمن ثابت نگهداشتن α هر دو پارچهٔ مخروط را جارو می‌کند. فرض کنیم Π (حرف پی بزرگ یونانی) صفحه‌ای باشد که با محور مخروط زاویهٔ β ساخته و از رأس مخروط نگذرد. در این صورت، منحنی، به نام **مقطع مخروطی**، که فصل مشترک Π با مخروط است

(یک) دایره است اگر $\beta = 90°$ ، مثل شکل ۴۷ (آ) ؛
(دو) بیضی است اگر $\alpha < \beta < 90°$ ، مثل شکل ۴۷ (ب) ؛
(سه) سهمی است اگر $\alpha = \beta$ ، مثل شکل ۴۷ (پ) ؛
(چهار) هذلولی است اگر $0 \le \beta < \alpha$ ، مثل شکل ۴۷ (د) .

دایره (آ) | بیضی (ب) | سهمی (پ) | هذلولی (ت)

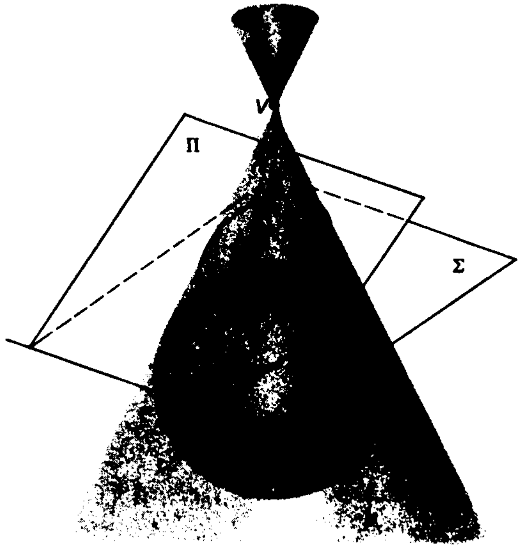
شکل ۴۷

توجه کنید که فقط در حالت (چهار) است که صفحه هر دو پارچهٔ مخروط را قطع می‌کند. اثبات (یک) بلافاصله (با استفاده از مثلثهای همنهشت) صورت می‌گیرد. اثباتهای (دو) تا (چهار) نیاز به‌فراست بیشتری‌است ، و تفصیل فقط برای بیضی داده خواهد شد. با اینحال ، همین استدلال با تعدیلهایی‌جزبی برای‌سهمی و هذلولی به کار خواهندرفت.

اختیاری. اکنون باتوجه به شکل۴۸حالت (دو) رابادقت بیشتری بررسی می‌کنیم .فرض کنیم E فصل مشترک‌صفحهٔ Π با یکی از پارچه‌های مخروط به‌رأس V بوده ،و در مخروط کرهٔ S راطوری محاط می‌کنیم که به Π در نقطهٔ F و به مخروط درامتداد دایرهٔ C مماس باشد .فرض‌کنیم P نقطه‌ای از منحنی E بوده ،و A نقطهٔ برخورد C با مولدی‌از مخروط باشد که از P می‌گذرد . همچنین ، Σ صفحهٔ دایرهٔ C ، L فصل مشترک صفحات Σ و Π ، و Q نقطهٔ اشتراک L و عمود مرسوم از P به L باشد .

پاره‌خطهای PA و PF متساوی‌الطولند ؛ یعنی ،

$$|PA| = |PF|, \tag{11}$$



شکل ۴۸

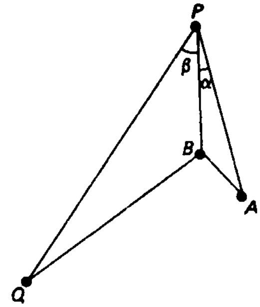
زیرا مماسهایی هستند که از نقطهٔ P بر کرهٔ S رسم شده‌اند. فرض کنیم B پای عمود وارد از P بر صفحهٔ Σ باشد؛ درنتیجه، PB موازی محور مخروط است. در این صورت،

$$\frac{|PB|}{|PA|} = \cos\alpha, \qquad (۱۲)$$

که در آن α زاویهٔ بین یک مولد و محور مخروط است، ولی

$$\frac{|PB|}{|PQ|} = \cos\beta, \qquad (۱۲')$$

که در آن β زاویهٔ بین صفحهٔ Π و محور می‌باشد (ر.ک. شکل ۴۹، که بزرگ شدهٔ قسمتی از



شکل ۴۹

شکل ۴۸ است) . با تقسیم (′۱۲) بر (۱۲) ، به دست می‌آوریم

$$\frac{|PA|}{|PQ|}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

یا معادلا" ، به خاطر (۱۱) ،

$$|PF|=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,|PQ|. \tag{۱۳}$$

اما $\alpha<\beta<90°$ ؛ و درنتیجه ، نسبت $\cos\beta/\cos\alpha$ عددی بین 0 و 1 است . اگر این‌عدد را با e نشان دهیم ، می‌توانیم (۱۳) را به شکل

$$|PF|=e|PQ|$$

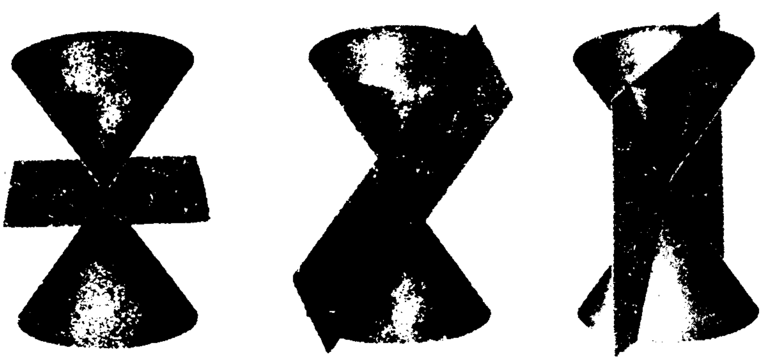
بنویسیم ، که همان تعریف‌بیضی برحسب خاصیت‌کانون ـ هادی آن می‌باشد . لذا ، منحنی E بیضی به کانون F ، هادی L ، و خروج از مرکز e است ، و برهان (دو) تمام‌خواهدبود.

همچنین ، سه مخروطی " تباه شده " وجوددارند که زمانی به دست می‌آیندکه‌صفحهٔ قاطع از رأس مخروط می‌گذرد . این سه‌مخروطی‌عبارتنداز

(یک) یک جفت خط متقاطع اگر صفحه شامل دو مولد باشد ، مثل شکل ۵۰(آ) ؛

(دو) یک خط اگر صفحه شامل فقط یک مولد باشد ، مثل شکل ۵۰ (ب) ؛

(سه) یک نقطه اگر صفحه شامل مولدی نباشد ، مثل شکل ۵۰ (پ) .



(پ) (ب) (آ)

شکل ۵۰

در بخش بعد درخواهیم یافت که مخروطیها ، هم تباه نشده و هم تباه شده ، در بررسی نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم کلی دو متغیره به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند .

مسائل

فرض کنیم h فاصلهٔ بین هادیهای یک بیضی به مرکز مبداء باشد. معادلهٔ بیضی را در صورتی بیابید که

۱. $h = 18$ ، محور اطول قائم و طولش 12 باشد

۲. $h = 5$ ، محور اطول افقی و فاصلهٔ بین کانونها 4 باشد

۳. $h = 13$ ، محور اطول افقی و محور اقصر به طول 6 باشد

۴. $h = 16$ ، محور اطول قائم و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ باشد.

فرض کنید h فاصلهٔ بین هادیهای یک هذلولی به مرکز مبداء باشد. معادلهٔ هذلولی را درصورتی بیابید که

۵. $h = \frac{32}{5}$ ، محور متقاطع افقی و محور مزدوج به طول 6 باشد

۶. $h = 4$ ، محور متقاطع قائم و طولش 8 باشد

۷. $h = \frac{8}{3}$ ، محور متقاطع قائم و خروج از مرکزش $\frac{3}{2}$ باشد

۸. $h = \frac{16}{5}$، محور متقاطع افقی ومجانبهایش $y = \pm\frac{3}{4}x$ باشند.

خروج از مرکز و هادیهای مقطع مخروطی زیر را بیابید.

۹. بیضی $25x^2 + 9y^2 = 225$

۱۰. بیضی $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ (ر.ک. شکل ۲۳، صفحهٔ ۹۴۸)

۱۱. بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ (ر.ک. مسئلهٔ ۲۱، صفحهٔ ۹۵۴)

۱۲. هذلولی $11x^2 - 25y^2 = 275$

۱۳. هذلولی $2xy = 1$ (ر.ک. شکل ۶، صفحهٔ ۹۲۶)

۱۴. هذلولی $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0$ (ر.ک. شکل ۳۵، صفحهٔ ۹۶۴)

۱۵. مسیر نقطهٔ متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله‌اش تا خط $x = -4$ همیشه‌دو برابر فاصله‌اش تا نقطهٔ $(-1, 0)$ باشد.

۱۶. مسیر نقطهٔ متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله‌اش تا نقطهٔ $(-8, 0)$ همیشه دوبرابر فاصله‌اش تا خط $x = -2$ باشد.

۱۷. نقطهٔ $(7, 0)$ بر یک هذلولی به کانون $F = (-4, -2)$ و نزدیکترین هادی $x = -3$ به F واقع است. معادلهٔ هذلولی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۸. نقطهٔ $(-1, 5)$ بر بیضی به کانون $F = (3, 2)$ و نزدیکترین هادی $x = \frac{21}{4}$ به F قرار دارد. معادلهٔ بیضی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۹. معادلهٔ بیضی باخروج از مرکز $\frac{1}{2}$ وکانون $F = (2, 0)$ ونزدیکترین هادی $x + y - 1 = 0$ به F را بیابید.

۲۰. معادلهٔ هذلولی با خروج از مرکز 2 و کانون$F=(-1,1)$و نــزدیکتــرین هــادی $3x-4y+2=0$ به F را بیابید.

۲۱. در شکل ۴۸، کرهٔ S زیر صفحهٔ قاطع Π قرار داشته و برΠ در نقطهٔ F و با مخروط در امتداد دایرهٔ C مماس است. همچنین، می‌توان کرهٔ دیگرS' را در مخروط طوری محاط کرد که *بالای*Π واقع بوده و بر Π در نقطهٔ F' و بر مخروط در امتداد دایرهٔ C مماس باشد. دراین صورت ،همان استدلالی که نشان داد F یکی از کانونهای بیضی E است که در آن Π مخروط را قطع می‌کند نشان می‌دهد کهF' کانون دیگر است. با استفاده از این ترسیم، خاصیت دو کانونی E را مستقیماً" ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید که $|PF|+|PF'|=2a$. تعبیر هندسی ثابت$2a$برحسب مخروط و کرات چیست؟

۶.۱۰ منحنیهای درجهٔ دو (اختیاری)

منظور از *معادلهٔ درجهٔ دو* از دو متغیر x و y یعنی معادله‌ای به شکل

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \tag{۱}$$

که در آن ضرایب A، B، وC همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) بــه معادلهٔ درجهٔ اول یا خطی تحویل می‌شود). نمودار این معادله یک **منحنی درجهٔ دو** نام دارد، و آن را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد.

اگر " جملهٔ حاصل ضرب "Bxyوجود نمی‌داشت، معادلهٔ (۱) از نوعی می‌بود که قبلاً" با آن آشنا شده‌ایم (ر.ک. زیر). لذا، اگر $B\neq 0$، گام اول در تحلیل (۱) رفتن به دستگاه مختصات جدیدی است که در آن جملهٔ حاصلضرب وجود نداشته باشد. برای این کار، دستگاهxy را حول مبداء O به اندازهٔ زاویهٔ θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران داده، بدین وسیله دستگاه$x'y'$جدید را با همان مبداء به دست می‌آوریم. مختصات قدیم و جدید با معادلات دوران

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta,\\ y &= x'\sin\theta + y'\cos\theta, \end{aligned} \tag{۲}$$

که در صفحهٔ ۹۲۴ به دست آمدند به هم مربوطند. با گذاردن (۲) در (۱)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &A(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + B(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta)\\ &\quad + C(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 + D(x'\cos\theta - y'\sin\theta)\\ &\quad + E(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + F = 0. \end{aligned}$$

این فرمول بزرگ پس از دسته‌بندی جملات به شکل زیر تحویل می‌شود :

$$A'x'^2 + B'x'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \tag{1'}$$

که برحسب ضرایب جدید داریم

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\theta + B\cos\theta\sin\theta + C\sin^2\theta,\\ B' &= B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C-A)\sin\theta\cos\theta,\\ C' &= A\sin^2\theta - B\sin\theta\cos\theta + C\cos^2\theta,\\ D' &= D\cos\theta + E\sin\theta,\\ E' &= -D\sin\theta + E\cos\theta,\\ F' &= F. \end{aligned} \tag{۳}$$

حذف جملهٔ حاصل‌ضرب . حال مقدار θ را طوری می‌گیریم که $B' = 0$: یعنی ، طوری که

$$B' = B(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2(C-A)\sin\theta\cos\theta = 0.$$

به کمک فرمولهای زاویهٔ مضاعف (ر.ک. صفحهٔ ۹۶) ، این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$B\cos 2\theta + (C-A)\sin 2\theta = 0,$$

یا معادلاً ، پس از تقسیم طرفین بر $B\sin 2\theta$ ،

$$\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} \tag{۴}$$

با معاینهٔ نمودار تابع کتانژانت (ر.ک. شکل ۲۴ ، صفحهٔ ۱۰۴) معلوم می‌شود که‌همواره زاویهٔ θ در بازهٔ $(0, \pi/2)$ را طوری یافت که ،صرف‌نظر از مقدار $(A-C)/B$ ، در (۴) صدق نماید .

به ازای این θ ، B' مساوی صفر بوده و معادلهٔ (۱') شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \tag{۵}$$

که‌در آن جملهٔ حاصل ضرب وجود ندارد . پس به وضعیت آشنایی بازگشته‌ایم . هرگاه $A'C' = 0$ ، آنگاه $A' \neq 0,\ C' = 0$ یا $A' = 0,\ C' \neq 0$ (چرا حالت $A' = C' = 0$ غیرممکن است؟) . بنابراین ، (۵) را می‌توان به شکل

$$x'^2 + ax' + by' + c = 0 \tag{۶}$$

یا

$$y'^2 + ax' + by' + c = 0 \tag{۶'}$$

نوشت ، که در آن

$$a = \frac{D'}{A'},\qquad b = \frac{E'}{A'},\qquad c = \frac{F'}{A'} \tag{۷}$$

درحالت اول و

$$a = \frac{D}{C'}, \qquad b = \frac{E'}{C'}, \qquad c = \frac{F'}{C'}$$

در حالت دوم است . اگر $A'C' > 0$ ، می‌توان (۵) را به شکل زیر نوشت :

$$x'^2 + ky'^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{۸}$$

که در آن $k = C'/A' > 0$ و a, b, c با (۷) داده شده‌اند ، ولی اگر $A'C' < 0$ ، (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$x'^2 - ky'^2 + ax' + by' + c = 0, \tag{۸'}$$

که در آن این بار $k = -C'/A' > 0$ و a, b, c مجددا" با (۷) داده می‌شوند . اما (۶) ، (۶') ، (۸) ، و (۸') درست همان معادلاتی هستند که به تفصیل در صفحات ۹۳۵ ، ۹۴۸ ، و ۹۶۴ داده شده‌اند منتها با تفاوتهایی جزیی در نمادها . بدین ترتیب ، هر معادلهٔ درجهٔ دو را می‌توان به معادله‌ای تبدیل کرد که حل آن را قبلا" می‌دانیم .

اگر $b \neq 0$ ، نمودار معادلهٔ (۶) یک سهمی است که محور y' محور تقارن آن است ، ولی اگر $a \neq 0$ ، نمودار (۶') یک سهمی است که محور x' محور تقارن آن می‌باشد . اگر این شرایط برقرار نباشند ، یعنی اگر (۶) به

$$x'^2 + ax' + c = 0 \tag{۹}$$

و (۶') به

$$y'^2 + by' + c = 0 \tag{۹'}$$

تحویل شود ، نمودار به یک جفت خط موازی ، یک نقطه ، یا مجموعهٔ تهی (مجموعه‌ای که اصلا" شامل نقطه‌ای نیست) تباه می‌گردد . درحالت (۹) ، دلیلش این است که معادله دوجواب

$$x' = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2}$$

را دارد اگر $a^2 > 4c$ ، تنها جواب $x' = -a/2$ را دارد اگر $a^2 = 4c$ ، و جواب (حقیقی) ندارد اگر $a^2 < 4c$ ، و حکم مشابهی را می‌توان در باب جوابهای (۹') بیان کرد . نمودار معادلهٔ (۸) یک بیضی (احتمالا" دایره ، اگر $k = 1$) ، یک نقطه ، یا مجموعهٔ تهی است (ر . ک . صفحهٔ ۹۴۸) ، ولی نمودار (۸') یک هذلولی یا یک جفت خط متقاطع می‌باشد (ر . ک . صفحهٔ ۹۶۴) . اگر نمودار بیضی یا هذلولی باشد ، محورهایش موازی محورهای مختصات صفحهٔ $x'y'$ می‌باشند .

منحنیهای درجهٔ دو به عنوان مخروطی .

با احتساب همهٔ این امکانات ، می‌بینیم که هر منحنی درجهٔ دو باید یک بیضی ، دایره ، سهمی ، یا هذلولی باشد ؛ یعنی ، یکی از مخروطیها ، یک جفت خط متقاطع ، یکجفت خط

موازی، یک خط، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی می‌باشد. در صفحهٔ ۹۸۲ یک جفت خط متقاطع، یک خط، و یک نقطه را مخروطیهای تباه شده گرفتیم، و نشان دادیم که هر یک از این " اشکال " فصل مشترک یک صفحه با یک مخروط مستدیر قائم دو پارچه است. حال یک جفت خط موازی و مجموعهٔ تهی را نیز مخروطی تباه شده می‌گیریم. با این قرارداد می‌توان گفت که هر منحنی درجهٔ دو یک مخروطی، *تباه نشده یا تباه شده*، می‌باشد.

تبصره. نامیدن یک جفت خط موازی یا مجموعهٔ تهی به عنوان مخروطی تباه شده شایسته نیست، زیرا به طور هندسی واضح است که اشتراک یک صفحه و یک مخروط مضاعف نامتناهی نمی‌تواند نه یک جفت خط موازی و نه تهی باشد. لذا، معمولاً " تعریف مخروطی را طوری تعمیم می‌دهند که اشتراک یک صفحه با یک *استوانهٔ* مستدیر قائم را نیز، مانند مخروط مستدیر قائم، دربرگیرد. در این صورت، می‌توان یک جفت خط موازی مثل شکل ۵۱(آ)، یا مجموعهٔ تهی (بدون فصل مشترک) مثل شکل ۵۱(ب)، یا یک بیضی مثل مسئلهٔ ۱۷ به دست آورد.

(ب) (آ)

شکل ۵۱

به کمک اتحاد

$$\cot 2\theta = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta},$$

می‌توان (۴) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = \frac{A-C}{B}. \qquad (۱۰)$$

این معادله با معادلهٔ درجهٔ دوم

$$B\cot^2\theta - 2(A-C)\cot\theta - B = 0$$

معادل است ، که دو جواب حقیقی‌اش عبارتنداز

$$\cot\theta = \frac{(A-C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

یکی از این جوابها مثبت و دیگری منفی است (چرا ؟) . با اختیار جواب مثبت ، می‌توان مقادیری از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را یافت که در محاسبهٔ ضرایب (۳) به کمک فرمولهای

$$\cos\theta = \frac{\cot\theta}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}} \tag{۱۱}$$

لازمند (این فرمولها را تحقیق کنید) .

مثال ۱ . نمودار معادلهٔ

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0 \tag{۱۲}$$

را بیابید .

حل . در اینجا $A = 5, B = 4, C = 2, D = -24, E = -12, F = 18$ ، و (۱۰) به‌صورت

$$\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = \frac{3}{4}$$

یا معادلا"

$$2\cot^2\theta - 3\cot\theta - 2 = 0,$$

با جوابهای

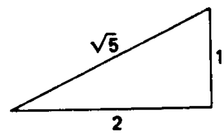
$$\cot\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

در می‌آید . با انتخاب علامت به‌علاوه برای مثبت ساختن $\cot\theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\cot\theta = \frac{8}{4} = 2.$$

لذا ، طبق (۱۱) یا صرفا" با معاینهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۵۲ ، داریم

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$



شکل ۵۲

و ضرایب (۳) به ازای این مقادیر از $\cos\theta$ و $\sin\theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B + \frac{1}{5}C = 4 + \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 6,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B + \frac{4}{5}C = 1 - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} = 1,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{5}}D + \frac{1}{\sqrt{5}}E = -\frac{48}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{60}{\sqrt{5}} = -12\sqrt{5},$$

$$E' = -\frac{1}{\sqrt{5}}D + \frac{2}{\sqrt{5}}E = \frac{24}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$F' = F = 18.$$

لذا، معادلهٔ (۱۲) با دوران محورها به اندازهٔ زاویهٔ $\operatorname{arccot} 2 \approx 26.5°$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 18 = 0.$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان پس از کامل کردن مربع به صورت زیر نوشت:

$$6(x' - \sqrt{5})^2 + y'^2 = 12$$

که، پس از تقسیم بر 12، با

$$\frac{(x' - \sqrt{5})^2}{2} + \frac{y'^2}{12} = 1$$

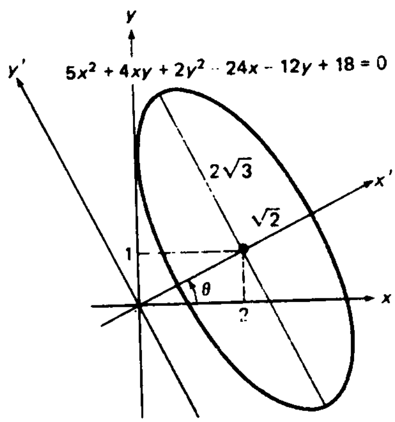
معادل است. این معادلهٔ یک بیضی به شکل متعارف است که مرکز آن در دستگاه $x'y'$ مساوی $(\sqrt{5}, 0)$، محور اطولش درامتدادخط $x' = \sqrt{5}$، و محور اقصرش در امتداد محور x' می‌باشد. نیم محور اطول a مساوی است با $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$، و نیم محور اقصرش b برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد. با گذاردن $x' = \sqrt{5}, y' = 0$ در معادلات دوران (۲)، معلوم می‌شود که مختصات مرکز

بیضی در دستگاه xy عبارتنداز

$$x = \sqrt{5}\cos\theta - 0\sin\theta = \sqrt{5}\frac{2}{\sqrt{5}} = 2,$$

$$y = \sqrt{5}\sin\theta + 0\cos\theta = \sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}} = 1.$$

لذا، نمودار (۱۲) بیضی شکل ۵۳ می‌باشد. در مسئلهٔ ۱۵، ویژگی جالبی از این نمودار مطرح شده است.



شکل ۵۳

مثال ۲. نمودار معادلهٔ

$$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 52x - 78y - 338 = 0 \qquad (۱۳)$$

را بیابید.

حل. این بار $A = 9, B = -12, C = 4, D = -52, E = -78, F = -338$، و (۱۰) به صورت

$$\frac{\cot^2\theta - 1}{2\cot\theta} = -\frac{5}{12}$$

یا معادلاً

$$6\cot^2\theta + 5\cot\theta - 6 = 0,$$

با دو جواب

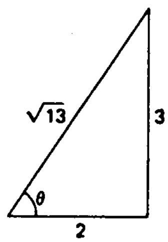
$$\cot\theta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}$$

درمی‌آید . با اختیار علامت به‌علاوه برای مثبت ساختن $\cot\theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\cot\theta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

بنابراین ، طبق (۱۱) یا معاینهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۵۴ ،

$$\cos\theta = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}},$$



شکل ۵۴

ضرایب (۳) به ازای این مقادیر $\cos\theta$ و $\sin\theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{13}A + \frac{6}{13}B + \frac{9}{13}C = \frac{36}{13} - \frac{72}{13} + \frac{36}{13} = 0,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{9}{13}A - \frac{6}{13}B + \frac{4}{13}C = \frac{81}{13} + \frac{72}{13} + \frac{16}{13} = \frac{169}{13} = 13,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{13}}D + \frac{3}{\sqrt{13}}E = \frac{2(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{3(-78)}{\sqrt{13}} = -\frac{338}{\sqrt{13}} = -26\sqrt{13},$$

$$E' = -\frac{3}{\sqrt{13}}D + \frac{2}{\sqrt{13}}E = -\frac{3(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{2(-78)}{\sqrt{13}} = 0,$$

$$F' = F = -338.$$

لذا ، معادلهٔ (۱۳) با دوران محورها به اندازهٔ $\operatorname{arccot}\frac{2}{3} \approx 56.3°$ خلاف‌جهت‌عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید :

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 13y'^2 - 26\sqrt{13}x' - 338 = 0.$$

معادلهٔ اخیر با

$$y'^2 = 2\sqrt{13}(x' + \sqrt{13})$$

معادل است ،که معادلهٔ یک‌سهمی به رأس$(-\sqrt{13}, 0)$ در دستگاه $x'y'$ است که‌محورتقارنش محور x' می‌باشد . با گذاردن $x' = -\sqrt{13}, y' = 0$ در معادلات دوران (۲) ،معلوم می‌شود که مختصات رأس سهمی در دستگاه xy عبارتنداز

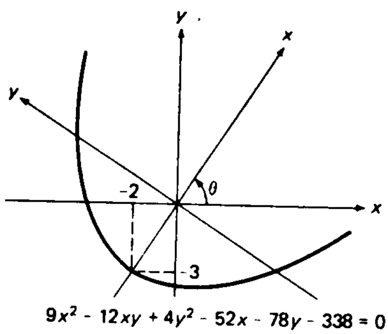
$$x = -\sqrt{13}\cos\theta - 0\sin\theta = -\sqrt{13}\frac{2}{\sqrt{13}} = -2,$$

$$y = -\sqrt{13}\sin\theta + 0\cos\theta = -\sqrt{13}\frac{3}{\sqrt{13}} = -3,$$

حال آنکه محور تقارن خط مار برمبداء با میل θ است؛ یعنی ، خط

$$y = x\tan\theta = \frac{x}{\cot\theta} = \frac{3}{2}x.$$

لذا ، نمودار (۱۳) سهمی شکل ۵۵ می‌باشد .



شکل ۵۵

فرض کنیم ضرایب x^2وy^2در معادلهٔ درجهٔ دو اصلی یکی باشند. پس $A = C$ و معادلهٔ (۱۰) به صورت $\cot 2\theta = 0$ با جواب $\theta = 45°$ درمی‌آید . لذا ، در این حالت ، با دوران$45°$محورها جملهٔ حاصل ضرب حذف می‌شود . مثلاً ، دوران$45°$ محورهادرجهت خلاف عقربه‌های ساعت ، معادلات

$$2xy - 1 = 0, \qquad x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$$

را به ترتیب به معادلات

$$x'^2 - y'^2 - 1 = 0, \qquad y'^2 - 4\sqrt{2}x' = 0,$$

تبدیل می‌کند ، و این را می‌توان با جانشانی

$$x = x' \cos 45° - y' \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x' \sin 45° + y' \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

امتحان نمود. اگر این معادلات آشنا به نظر می‌رسند، دلیلش این است که در دو مثال قبل مربوط به دورانهای $45°$، یعنی مثال ۴، صفحهٔ ۹۲۵، و مثالهای ۳ تا ۴، صفحات ۹۳۵ تا ۹۳۶ آمده بودند. لازم است به این مثالها از دیدگاه نظریهٔ ایـن بخش نگاه دیگری بیفکنید.

بالاخره، توجه می‌کنیم که در مسئلهٔ ۱۹ آزمون ساده‌ای برای تعیین ماهیت یک منحنی درجهٔ دو بدون محاسباتی صریح مانند محاسبات امثلهٔ ۱ و ۲ وجود دارد.

مسائل

پس از دوران مناسبی از محورها، مخروطیی که نمودار معادلهٔ داده شده است را نام ببرید. اگر تباه نشده است، آن را رسم نمایید.

۱. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

۲. $x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0$

۳. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

۴. $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

۵. $160x^2 - 56xy + 265y^2 - 2448x - 612y + 7956 = 0$

۶. $16x^2 - 8xy + y^2 + 12x - 3y - 10 = 0$

۷. $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 16x + 38y + 15 = 0$

۸. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$

۹. $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$

۱۰. $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$

۱۱. $x^2 + 6xy + 9y^2 - 50x - 50y + 100 = 0$

۱۲. $13x^2 + 10xy + 13y^2 + 16x - 16y - 272 = 0$

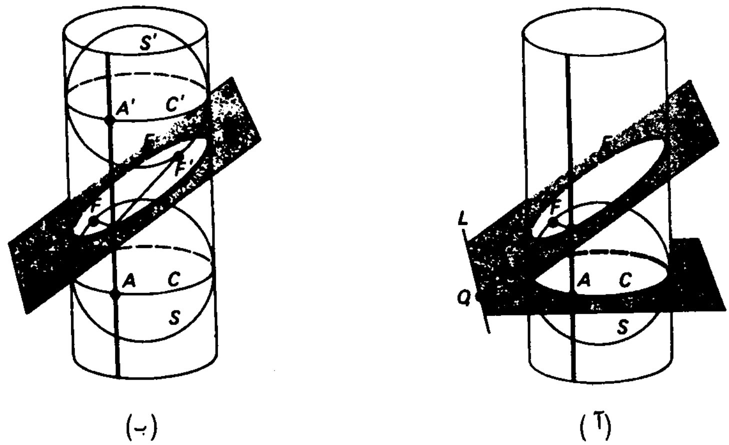
۱۳. $25x^2 - 20xy + 4y^2 - 15x + 6y - 4 = 0$

۱۴. $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$

۱۵. ثابت کنید بیضی مثال ۱، همانند شکل ۵۳، بر محور y مماس است. نقطهٔ تماس‌را بیابید.

۱۶. نشان دهید که معادلهٔ (۴) به ازای دو مقدار متمایز θ در بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ که تفاضلشان $\pi/2$ است برقرار می‌باشد. هر انتخاب به‌معادله‌ای به‌شکل (۵) منجرمی‌شود. دو معادله چه تفاوتی باهم دارند؟

۱۷. با استفاده از شکل ۵۶ (آ)، نشان دهید که منحنی E که فصل مشترک Π با استوانهٔ مستدیر قائم است بیضی است اگر Π با محور استوانه زاویهٔ حاده بسازد. همچنین با استفاده از شکل ۵۶(ب) نشان دهید که E بیضی است (در اینجا S و S' کراتی محاط شده در استوانه‌اند که یکدیگر را در دوایر C و C' قطع می‌کنند.)



شکل ۵۶

۱۸. با نمادهای (۳)، تحقیق کنید به ازای هر انتخاب زاویهٔ دوران θ،

$$A' + C' = A + C, \qquad B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

۱۹. کمیت $\Delta = B^2 - 4AC$ مبین معادلهٔ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ نام دارد. لذا، فرمول دوم مسئلهٔ قبل را می‌توان به شکل فشردهٔ $\Delta = \Delta'$ نوشت، و گفت مبین تحت *دوران پایا* است؛ یعنی، پس از دوران محورها تغییر نمی‌کند. بااستفاده از این امر، نشان دهید که نمودار یک معادلهٔ درجهٔ دو عبارت از

(یک) یک بیضی است (احتمالا" یک دایره، نقطه، یا مجموعهٔ تهی) اگر $\Delta < 0$؛

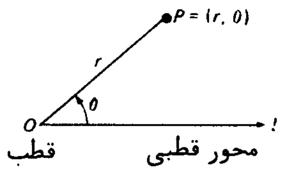
(دو) یک سهمی است (احتمالا" یک جفت خط موازی، یک خط، یامجموعهٔ تهی) اگر $\Delta = 0$؛

(سه) یک هذلولی (احتمالا" دو خط متقاطع) اگر $\Delta > 0$.

۲۰. اعتبار مسئلهٔ ۱۹ را با استفاده از مسائل ۱ تا ۱۴ بیازمایید.

۷.۱۰ مختصات قطبی

تاکنون موضع یک نقطه در صفحه با مختصات قائم یا دکارتی (که در صفحهٔ ۳۲ تعریف شدند) مشخص شده است. لیکن، اغلب شایسته است موضع نقطهٔ P در صفحه‌را به‌صورتی دیگر، یعنی با "مختصات‌قطبی" معین کنیم. این مختصات به صورت زیرتعریف می‌شوند. فرض کنیم l یک شعاع یا نیمخط ثابت، به نام **محور قطبی**، باشد که از نقطهٔ ثابت O، به نام **مبدأ** یا **قطب** خارج‌شده‌است (l را معمولاً"، مثل شکل ۵۷، افقی و به‌راست‌می‌کشند).



شکل ۵۷

فرض کنید $r = |OP|$ فاصلهٔ بین O و P بوده، و θ زاویهٔ بین l و پاره‌خط OP باشد که از l به OP در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود. در این صورت، گوییم نقطهٔ P به **مختصات قطبی** r و θ است، و P را با جفت‌مرتب (r, θ) نشان‌داده، می‌نویسیم $P = (r, \theta)$. برای رسم نمودارها، می‌توان θ را با درجه یا رادیان سنجید، ولی رادیان معمولاً" در مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار می‌رود. اگر $P = (r, \theta)$، r را **مختص شعاعی** و θ را **مختص زاویه‌ای** P می‌نامند.

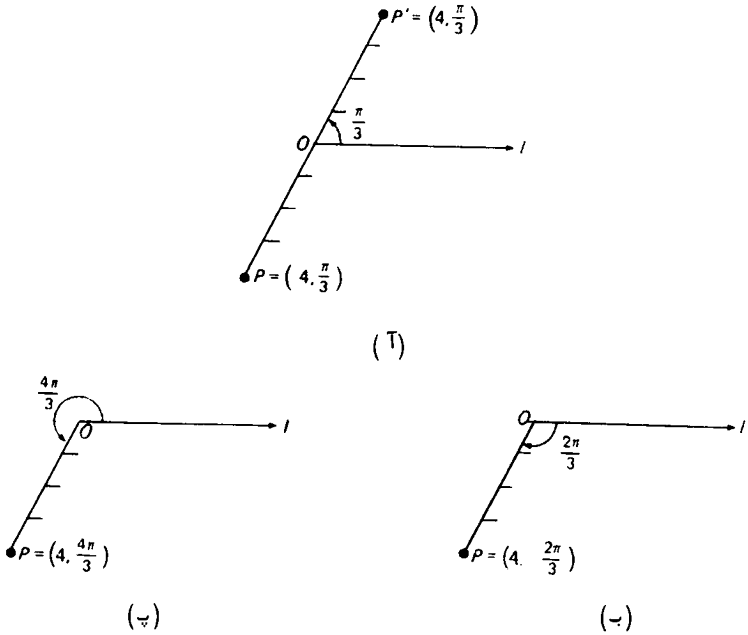
همچنین، r مجاز است‌مقادیر منفی اختیارکند. این‌را باتعریف $P = (r, \theta)$ $(r < 0)$ مساوی منعکس نقطهٔ $P' = (|r|, \theta)$ نسبت به مبدأ O انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، برای یافتن نقطهٔ P به مختصات قطبی $r < 0$ و θ، در عوض در امتداد شعاعی که با محور قطبی l زاویهٔ θ می‌سازد، $|r|$ واحد در جهت خلاف شعاع می‌رویم. این امر در شکل ۵۸ (آ) نموده شده است، که در آن نقطهٔ $P = (-4, \pi/3)$ ونیزنقطهٔ $P' = (4, \pi/3)$ که منعکس P نسبت به O است رسم شده‌اند. از شکلهای ۵۸ (ب) و ۵۸ (پ) واضح است که $P = (-4, \pi/3)$ با جفتهای مرتب $(4, -2\pi/3)$ و $(4, 4\pi/3)$ نیز نموده می شود.

به ازای جفت مرتب (r, θ)، نقطه به مختصات قطبی r و θ به‌طور منحصر به‌فرد معین می‌شود. از آن سو، همانطور که از شکل ۵۸ قبلاً" معلوم است، مختصات قطبی نقطهٔ‌داده شدهٔ P (به خلاف مختصات قائم آن) به‌طور منحصر به فرد معین نیستند. در واقع، اگر $P = (r, \theta)$ نقطه‌ای غیر از قطب O باشد، نیز داریم

$$P = (r, \theta + 2n\pi) \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

و

$$P = (-r, \theta + (2n+1)\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



شکل ۵۸

(این وضع را می‌توان این طور توصیف کرد که بگوییم تناظر بین جفتهای مرتب از مختصات قطبی و نقاط صفحه، به جای یک به یک بودن مثل مختصات قائم، **چند به یک** است.) بنا بر قرارداد، قطب O با هر جفت مرتب به‌شکل $(0, \theta)$، صرف‌نظر از مقدار θ، نمایش‌داده می‌شود. این صرفاً بدان خاطر است که مختص شعاعی قطب صفر است؛ و لذا، مختص زاویه‌ای θ نامعین می‌باشد.

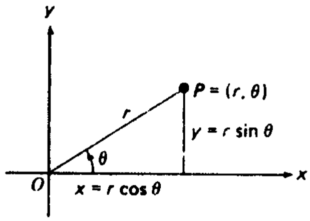
رابطهٔ بین مختصات قطبی و قائم. اغلب مختصات قطبی و قائم باهم به کار می‌روند، به این ترتیب که قطب و محور قطبی را مبداء و محور x مثبت یک دستگاه مختصات قائم می‌گیرند. در این صورت، از شکل ۵۹ واضح است که نقطه به مختصات قطبی r و θ دارای مختصات قائم زیر است:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta. \tag{1}$$

لازم است تحقیق شود که این فرمولها به ازای r منفی نیز برقرارند. اگر $r > 0$، از (۱)

معلوم می‌شود که

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{۲}$$



شکل ۵۹

مثال ۲ . اگر $P = (2, 3\pi/4)$ در مختصات قطبی باشد ، مختصات قائم P را پیدا کنید .

حل . از (۱) به ازای $r = 2$ و $\theta = 3\pi/4$ نتیجه می‌شود که

$$x = 2\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \qquad y = 2\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

مثال ۲ . اگر $P = (-3, -4)$ در مختصات قائم باشد ، مختصات قطبی P را بیابید .

حل . از (۲) به ازای $x = -3$ و $y = -4$ نتیجه می‌شود که

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

و نیز

$$\tan\theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

برای به دست آوردن مقادیر منفی x و y ، باید مقداری برای θ اختیار کنیم که به ازای آن $\cos\theta$ و $\sin\theta$ هر دو منفی باشند . زاویهٔ $\arctan\frac{4}{3} \approx 53.1^\circ$ واجد این شرط نیست ، ولی زاویهٔ $\arctan\frac{4}{3}+180^\circ \approx 233.1^\circ$ این خاصیت را دارد . به‌صورت دیگر ، می‌توان $\theta = \arctan\frac{4}{3}$ را درصورتی اختیار کرد که مختص شعاعی P به‌جای 5 مساوی 5‌- باشد. لذا $P = (5, \arctan\frac{4}{3} + \pi)$، و $P = (-5, \arctan\frac{4}{3})$ دو نمایش P در مختصات قطبی می‌باشند .

نمودار معادلات قطبی . منظور از نمودار تابع

$$r = f(\theta) \tag{۳}$$

یا به‌طورکلیتر معادلهٔ

$$F(r, \theta) = 0, \tag{۴}$$

شامل مختصات قطبی r و θ یعنی مجموعهٔ تمام‌نقاط با دست کم یک جفت مختصات‌قطبی که در (۳) یا (۴) صدق نمایند. مثلاً"، نقطه به مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 1$ (زاویه به رادیان) متعلق به نمودار معادلهٔ

$$r = \theta \tag{۵}$$

است، اگرچه همین نقطه دارای مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 2\pi + 1$است که‌در (۵) صدق نمی‌کنند. هر معادله به شکل (۳) یا (۴) یک **معادلهٔ قطبی** نام دارد، ونمودار یک‌چنین معادله یک منحنی **قطبی** نامیده می‌شود.

مثال ۳. نمودار معادلهٔ $r = a$ $(a > 0)$ دایره‌ای به شعاع a و مرکز قطب O است. نمودار معادلهٔ $\theta = \alpha$ (α دلخواه) شعاعی است که از O خارج شده و با محور قطبی l زاویهٔ α می‌سازد اگر $r \geq 0$، یا خط مار بر O است‌که با l زاویهٔ α می‌سازد اگر شرطی برای r نشده باشد (به یاد آورید که r می‌تواند منفی باشد).

مثال ۴. نمودار تابع

$$r = 4 \sin \theta \tag{۶}$$

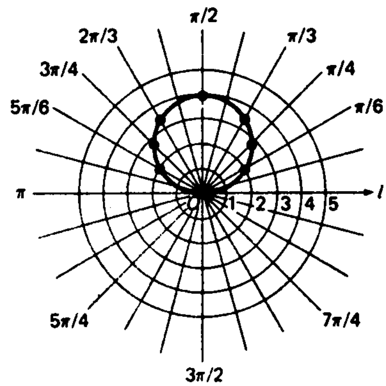
را رسم کنید.

حل. با دادن مقادیر مختلفی به زاویهٔ θ که سینوسشان آشناست، جدول‌زیررا می‌سازیم:

θ(رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$r = 4 \sin \theta$	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0

با رسم این نقاط در مختصات قطبی روی کاغذ رسم (که شعاعهای مار بر قطب O را به‌ازای زوایای مختلف و دوایر متحدالمرکز به مرکز O نشان می‌دهد) و وصل آنها با یک‌منحنی هموار، دایرهٔ شکل ۶۰ به دست می‌آید. نقطهٔ متغیر (r, θ)، وقتی θ از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند، نیمهٔ راست دایره را می‌پیماید و سپس، وقتی θ از $\pi/2$ تا π تغییرکند، نیمهٔ چپ

دایره را خواهد پیمود . به‌علاوه ،می‌توان به‌آسانی تحقیق کرد که (r, θ) ، وقتی θ از π تا $3\pi/2$ تغییر کند ، مجددا" نیمدایرهٔ راست را می‌پیماید و وقتی θ از $3\pi/2$ تا 2π تغییر کند ،نیمدایرهٔ چپ را خواهد پیمود (توجه کنید که وقتی θ بین π و 2π است ، r منفی می‌باشد) . در واقع ، وقتی θ در هر بازه به طول π تغییر کند ، دایره دقیقا" یکبار پیموده می‌شود (چرا؟) .



نمودار قطبی $r = 4 \sin \theta$

شکل ۶۰

برای تحقیق در اینکه منحنی شکل ۶۰ یک دایره است ، یک دستگاه مختصات‌قائم با محور x در امتداد محور قطبی درنظر می‌گیریم . با ضرب معادلهٔ (۶) در r ، به دست می‌آوریم

$$r^2 = 4r \sin \theta,$$

که با استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) به معادلهٔ دکارتی

$$x^2 + y^2 = 4y \qquad (۶')$$

تبدیل می‌شود . ولی (۶') با معادلهٔ زیر معادل است :

$$x^2 + (y-2)^2 = 4,$$

که نمودارش دایره‌ای به‌شعاع 2 بوده و مرکزش در نقطه‌ای‌است‌که ، مانند شکل ،به مختصات زاویه‌ای $x = 0$ و $y = 2$ می‌باشد .

مثال ۵. تابع

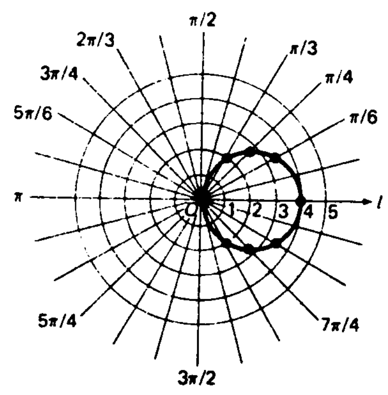
$$r = 4 \cos \theta \qquad (۷)$$

را رسم کنید .

حل . نقطهٔ (r, θ) متعلق به نمودار معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ است اگر و فقط اگر نقطهٔ $(r, \theta - 90^\circ)$ متعلق به نمودار معادلهٔ قطبی $F(r, \theta + 90^\circ) = 0$ باشد . لذا ، نمودار $F(r, \theta + 90^\circ) = 0$ از دوران نمودار $F(r, \theta) = 0$ به اندازهٔ 90° در جهت عقربه‌های ساعت به دست می‌آید . از تعویض θ با $\theta + 90^\circ$ در معادلهٔ $r = 4 \sin \theta$ ، معادلهٔ (۷) به دست می‌آید :

$$r = 4 \sin (\theta + 90^\circ) = 4 \cos \theta.$$

لذا ، دوران 90° دایرهٔ $r = 4 \sin \theta$ ، مثل شکل ۶۰ ، در جهت عقربه‌های ساعت آن را به نمودار تابع (۷) بدل می‌سازد . پس نتیجه می‌شود که نمودار (۷) دایره‌ای به شعاع 2 بوده و مرکزش نقطه‌ای به مختصات قائم $x = 2$ و $y = 0$ می‌باشد (ر.ک. شکل ۶۱) . معادلهٔ دکارتی این دایره چیست ؟

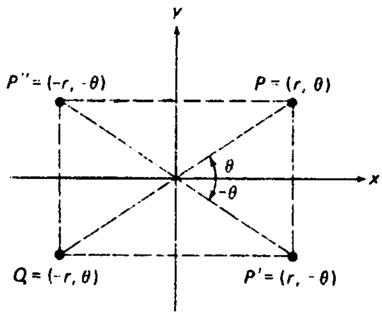


نمودار قطبی $r = 4 \cos \theta$

شکل ۶۱

آزمونهای تقارن . در رسم معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ همیشه باید تقارنهای نمودار را پیدا کنیم . چند آزمون برای اینگونه تقارنها وجود دارند . مختصات قطبی و قائم را همزمان به کار برده ، قطب را مبداء مشترک O و محور قطبی را در امتداد محور x می‌گیریم . همچنین ، $P = (r, \theta)$ نقطه‌ای غیر از خود قطب ، P' ، Q ، و P'' نقشهای P تحت انعکاس نسبت به محور x ، مبداء و محور y ، و G نمودار معادلهٔ $F(r, \theta) = 0$ باشد . در این صورت ، از نمایشهای

قطبی نقاط P' ، Q ، و P'' داده شده در شکلهای ۶۲ و ۶۳ معلوم می‌شود که

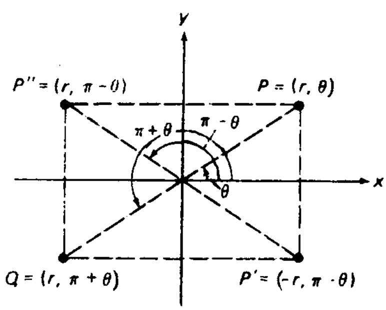


شکل ۶۲

(یک) G نسبت به محور x (محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(r, -\theta) = 0$ یا $F(-r, \pi - \theta) = 0$ باشد؛

(دو) G نسبت به مبداء O (قطب) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, \theta) = 0$ یا $F(r, \pi + \theta) = 0$ باشد؛

(سه) G نسبت به محور y (خط مار بر O عمود بر محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, -\theta) = 0$ یا $F(r, \pi - \theta) = 0$ باشد .



شکل ۶۳

مثال ۶. معادلهٔ

$$F(r, \theta) = r - 4 \sin \theta = 0.$$

که با (۶) معادل است ، همان مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ

$$F(-r, -\theta) = -r - 4 \sin (-\theta) = -r + 4 \sin \theta = 0$$

یا

$$F(r, \pi - \theta) = r - 4 \sin (\pi - \theta) = r - 4 \sin \theta = 0$$

را دارد . این ، بنابر (سه) ، بدین معنی است که نمودار $F(r, \theta) = 0$ نسبت به محور y متقارن است ، و در واقع دایرهٔ شکل ۶۰ دارای این خاصیت است . ولی دایره نسبت به محور x یا مبداء متقارن نیست . بنابراین ، به خاطر (یک) و (دو) ، هیچیک از معادلات

$$F(r, -\theta) = 0, \qquad F(-r, \pi - \theta) = 0, \qquad F(-r, \theta) = 0, \qquad F(r, \pi + \theta) = 0$$

همان مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $F(r, \theta) = 0$ را ندارد، و این مطلب را می‌توان مستقیماً تحقیق کرد .

مثال ۷. تابع

$$r = \sin 2\theta \qquad (۸)$$

را رسم کنید .

حل . ابتدا تقارنها را جستجو می‌کنیم . با نوشتن (۸) به شکل معادل

$$F(r, \theta) = r - \sin 2\theta = 0, \qquad (۸')$$

به‌آسانی معلوم می‌شود که

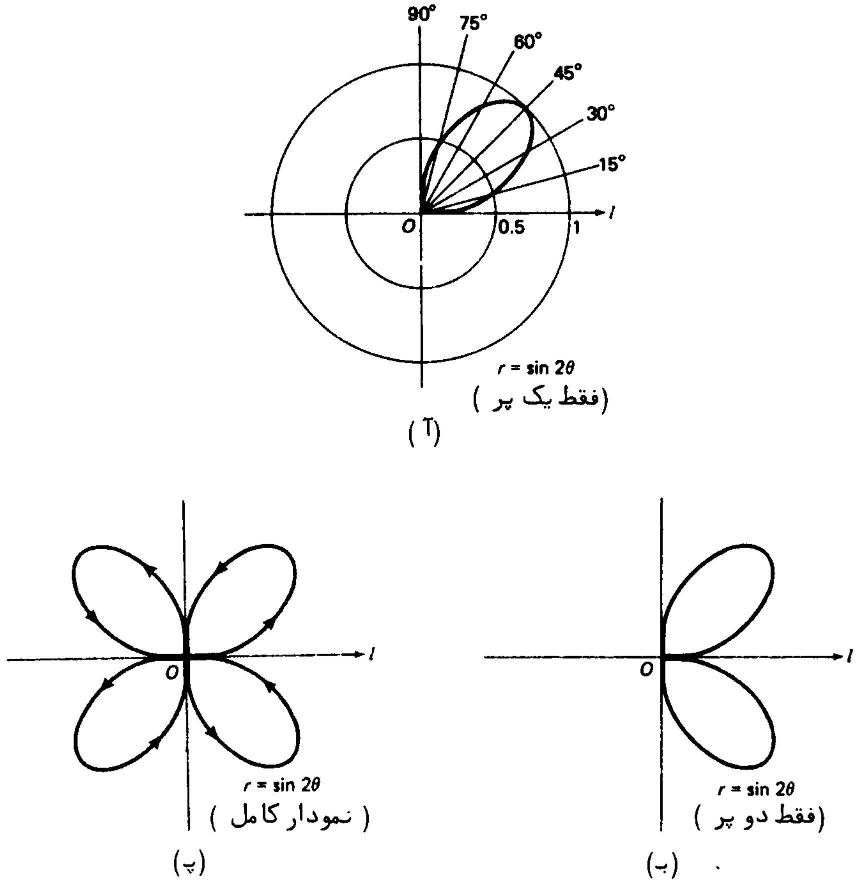
$$F(-r, \pi - \theta) \equiv -F(r, \theta), \qquad F(r, \pi + \theta) \equiv F(r, \theta), \qquad F(-r, -\theta) \equiv -F(r, \theta)$$

(جزئیات را شرح دهید) . از آزمونهای (یک) تا (سه) معلوم می‌شود که نمودار (۸') نسبت به هر دو محور مختصات و مبداء متقارن است . با استفاده از جدول

θ (درجه)	$0°$	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$
$r = \sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

چند نقطه از نمودار را رسم کرده و آنها را با منحنی همواری به هم وصل می‌کنیم . با این کار حلقهٔ بستهٔ شکل ۶۴ (آ) به دست می‌آید ، که فقط بخشی از نمودار است . اما بقیهٔ نمودار را می‌توان با استفاده از تقارن نمودار فوراً به دست آورد . در واقع ، از انعکاس منحنی شکل ۶۴(آ) نسبت به محور x ، منحنی شکل ۶۴(ب) به دست می‌آید ، وازانعکاس این منحنی نسبت‌به‌محور y ، منحنی گل مانند شکل ۶۴(پ) ، به نام *رز چهار پر*،به‌دست می‌آید که نمودار کامل تابع (۸) است . (چه جفتهای دیگر از انعکاسهای متوالی می‌تواند گل را از پر قسمت (آ) شکل تولید کند؟) به عنوان تمرین ، نشان دهید که سه پر بعد که با افزایش θ از $90°$ تا 360 رسم می‌شوند پرهایی در ربعهای چهارم ، سوم ، و دوم می‌باشند ،

و این در شکل ۶۴(پ) با سر سهم نموده شده است .



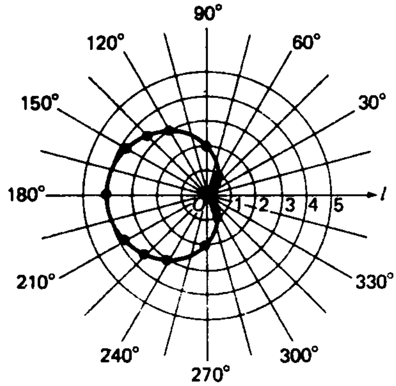
شکل ۶۴

مثال ۸. تابع

$$r = 2(1 - \cos \theta) \qquad (۹)$$

را رسم کنید .

حل . معادلهٔ (۹) درصورت تعویض θ با $-\theta$ تغییر نمی‌کند . لذا ، طبق آزمون (یک) ، نمودار (۹) نسبت به محور قطبی l متقارن است . با استفاده از این تقارن و جدول زیر (توجه کنید که به ازای هر θ ، $r \geq 0$) ، معلوم می‌شود که نمودار (۹) منحنی‌قلب شکل شکل ۶۵ است ، که به **دلگون** معروف بوده و قبلاً "در مسئلهٔ ۲۷ ، صفحهٔ ۷۴۹ ، آمده است .



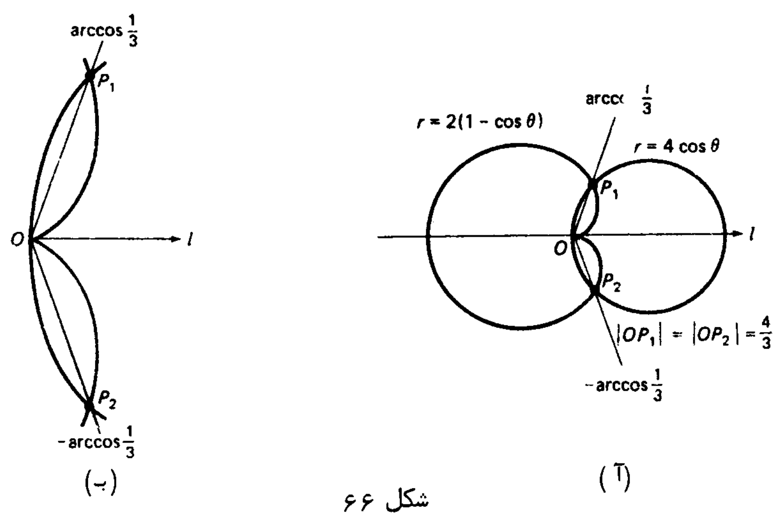
نمودار قطبی $r = 2(1 - \cos\theta)$

شکل ۶۵

θ (درجه)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2(1 - \cos\theta)$	0	$2-\sqrt{3}$ ≈ 0.27	$2-\sqrt{2}$ ≈ 0.59	1	2	3	$2+\sqrt{2}$ ≈ 3.41	$2+\sqrt{3}$ ≈ 3.73	4

مثال ۹ . نقاط اشتراک دایره‌ی $r = 4\cos\theta$، که درمثال ۵ مطرح شد ، ودلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ که در مثال ۸ درنظر گرفته شد ، را بیابید .

حل . در شکل ۶۶ (آ) دو منحنی را دریک دستگاه مختصات قطبی رسم کرده‌ایم . از این شکل ، همراه با شکل ۶۶ (ب) که سه‌بار بزرگ‌شده‌دایره و دلگون را در مجاورت مبداء نشان‌می‌دهد،



شکل ۶۶

معلوم می‌شود که دو منحنی دقیقاً سه نقطهٔ اشتراک دارند، مبداء یا نقطهٔ O و دو نقطهٔ P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی l متقارنند (درنتیجه، هر یک از نقاط نقش دیگری تحت انعکاس نسبت به l است). برای یافتن مختصات قطبی برای P_1 و P_2، ملاحظه می‌کنیم هرگاه $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ باهم برقرار باشند، آنگاه

$$4\cos\theta = 2(1-\cos\theta), \tag{۱۰}$$

یا معادلاً

$$\cos\theta = \frac{1}{3}, \tag{۱۰'}$$

که ایجاب می‌کند که $r = \frac{4}{3}$ دومقدار θی صادق در (۱۰') عبارتنداز $\theta = \pm\arccos\frac{1}{3} \approx \pm 70.5°$، و این مقادیر نظیر نقاط واقع بر دو طرف مختلف محور قطبی‌اند. به‌علاوه، سایر جوابهای (۱۰') با $\theta = \pm\arccos\frac{1}{3}$ به اندازهٔ مضارب صحیح 2π فرق دارند. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که

$$P_1 = (\tfrac{4}{3}, \arccos\tfrac{1}{3}), \qquad P_2 = (\tfrac{4}{3}, -\arccos\tfrac{1}{3}).$$

در مثال قبل، یکی از نقاط اشتراک دومنحنی قطبی $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ یعنی مبداء، در حل معادلهٔ (۱۰) از کف رفت. برای مشاهدهٔ دلیل، دو نقطهٔ متغیر $P = (4\cos\theta, \theta)$ و $P' = (2(1-\cos\theta), \theta)$ را درنظر گرفته، ابتدا دایرهٔ $r = 4\cos\theta$ و بعد دلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ را وقتی متغیر θ، که می‌توان آن را زمان گرفت، از 0 تا 2π افزایش یابد، رسم می‌کنیم. در این صورت، وقتی $\theta = \pi/2$ یا $\theta = 3\pi/2$، P به‌مبداء می‌رسد، حال آنکه P' از مبداء شروع شده و تا $\theta = 2\pi$ باز نمی‌گردد. لذا، دو نقطهٔ P و P' هرگز همزمان در مبداء نخواهند بود، اگرچه هر یک مسیری مار بر مبداء را طی می‌کنند؛ لذا، از حل (۱۰) معلوم نمی‌شود که مبداء نقطهٔ اشتراک دو منحنی است.

اشتراک منحنیهای قطبی. لذا، به خلاف حالت دکارتی، ممکن است جواب همزمان معادلات دو منحنی قطبی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ تمام نقاط اشتراک منحنیها را افشا نکند. این بدان خاطر است که هر نقطه بی‌نهایت نمایش قطبی دارد، هر یک مرکب از جفت مختلفی از مختصات قطبی، و ممکن است نقاطی (مانند مبداء در مثال ۹) وجود داشته باشند که یک نمایش آنها در معادلهٔ یک منحنی و دیگری در معادلهٔ منحنی دیگر صدق کند، ولی هیچیک در هر دو منحنی صدق ننماید. برای یافتن نقاط اشتراکی که از حل معادلهٔ $f(\theta) = g(\theta)$ به دست نمی‌آیند، دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ را در یک دستگاه مختصات قطبی، درست مثل مثال ۹، درنظر می‌گیریم. در این باب، توجه داشته باشید که خطوط مرکبی، به خلاف

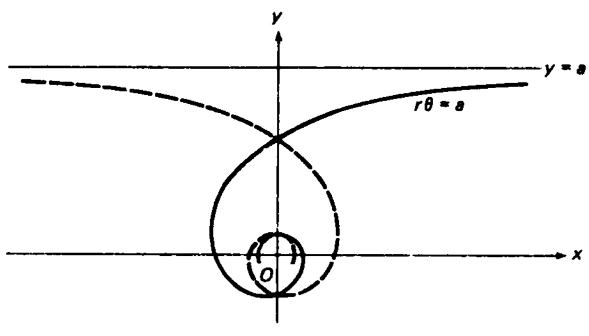
خطوط ریاضی، پهنای ناصفردارند؛ درنتیجه، اگر مقیاس ترسیم خیلی کوچک باشد، نقاط اشتراک تقریباً" منطبق قابل تشخیص نیستند. مثلاً"، در شکل ۶۶(آ)، اگر شکل خیلی کوچکتر می‌بود، تشخیص تمایز سه نقطهٔ O، P_1، و P_2 از هم مشکل بود. برای یافتن *تمام* نقاط اشتراک دو منحنی قطبی روشی کاملاً" تحلیلی وجود دارد[1]، ولی هر وقت شک بردید که نقاط اشتراکی خیلی‌نزدیک به‌هم‌وجوددارند، می‌توانید با رسم شکلهای بزرگتر [مانند شکل ۶۶(ب)] از به کار بردن این روش حذر نمایید.

مثال ۱۰. نمودار معادلهٔ قطبی

$$r\theta = a \qquad (a > 0) \tag{11}$$

را رسم کنید.

حل. به‌ازای r نامنفی، نمودار (۱۱) منحنی توپر شکل ۶۷ است، به نام *مارپیچ‌هذلولوی*، و این نام به خاطر شباهت (۱۱) با معادلهٔ $xy = a$ است که نمایش هذلولی در مختصات



شکل ۶۷

قائم است. به‌آسانی می‌توان ویژگیهای اصلی نمودار را از (۱۱) باتوجه به

$$\lim_{\theta\to 0^+} r = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{a}{\theta} = \infty,$$

---

۱. *یادآور شویم که منحنیهای* $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ *در نقطهٔ* $(f(\alpha), \alpha)$ *غیراز مبداء متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای عدد صحیحی چون* n، $f(\alpha) = g(\alpha + 2n\pi)$ و $f(\alpha) = -g(\alpha + (2n+1)\pi)$، *و منحنیها در مبداء متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای* α و β *ای*، $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.

و

$$\lim_{\theta\to\infty} r = \lim_{\theta\to\infty} \frac{a}{\theta} = 0$$

به دست آورد. پس نتیجه می‌شود که وقتی θ از مقدار مثبت کوچکی تا ∞ افزایش می‌یابد، نقطهٔ متغیر $P = (r, \theta)$ روی نمودار (۱۱)" از بی‌نهایت آمده" و حول مبداء یا قطب O درجهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌پیچد و ضمن آن r تدریجا" به صفر میل می‌کند؛ در محاسبهٔ r از (۱۱)، θ باید به رادیان باشد (چرا؟). مختص y نقطهٔ P عبارت است از

$$y = r\sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta},$$

درنتیجه،

$$\lim_{\theta\to 0^+} y = a\lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta} = a.$$

این، همراه با این امر که وقتی $\theta \to 0^+$، $r \to \infty$، نشان می‌دهد که خط $y = a$ یک‌مجانب افقی مارپیچ است (ر.ک. شکل).

برای یافتن بقیهٔ مارپیچ، نظیر به مقادیر منفی r و θ، منعکس‌منحنی توپر را نسبت به محور y به دست می‌آوریم که منحنی منقطع در شکل است. این تقارن حول محور y از $r\theta \equiv (-r)(-\theta)$ به دست می‌آید. چرا خود مبداء O تعلق به مارپیچ ندارد؟

مسائل

در تمام مسائل زیر در رابطه با هر دو مختصات قطبی و قائم، قطب و محور قطبی دستگاه مختصات قطبی با مبداء و محور x نامنفی دستگاه مختصات قائم یکی است. تمام نقاط در مختصات قطبی داده شده‌اند جز در مسائل ۷ تا ۱۲.

مختصات قائم نقطه به مختصات قطبی داده شده را بیابید.

۱. $(0, \pi^2)$ ✓ ۲. $(-8, 2\pi/3)$

۳. $(12, -\pi/6)$ ✓ ۴. $(2, 5\pi/6)$ ✓

۵. $(-10, -3\pi/2)$ ✓ ۶. (π, π) ✓

تمام نمایشهای نقطه به مختصات قائم داده‌شده را در مختصات قطبی (به انضمام آنهایی که r منفی دارند) پیدا نمایید.

۷. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ✓ ۸. $(1, -\sqrt{3})$ ✓

۹. $(2\sqrt{3}, 2)$ ✓ ۱۰. $(0, 4)$ ✓

۱۱. $(-3, 0)$ ✓   ۱۲. $(-\pi, \pi)$ ✓

۱۳. نقاط $A = (3, -4\pi/9)$ و $B = (5, 3\pi/14)$ دو رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ اند که اقطارش در قطب متقاطعند. دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع را بیابید.

۱۴. نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط $(8, -2\pi/3)$ و $(6, \pi/3)$ را بیابید.

۱۵. نشان دهید که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (r_1, \theta_1)$ و $P_2 = (r_2, \theta_2)$ مساوی است با

$$|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}. \quad \text{(یک)}$$

با استفاده از فرمول (یک)، فاصلهٔ بین نقاط زیر را بیابید.

۱۶. $(5, -\pi/12), (8, \pi/4)$ ✓   ۱۷. $(12, 3\pi/4), (-16, 5\pi/4)$ ✓

۱۸. مساحت هر یک از مربعهایی را بیابید که نقاط $(12, -\pi/10)$ و $(3, \pi/15)$ دو رأس مجاورشان باشند.

۱۹. مساحت مربعی را بیابید که نقاط $(6, -105°)$ و $(4, 30°)$ دو رأس مقابل آن باشند.

۲۰. فرض کنید O قطب بوده، و $P_1 = (r_1, \theta_1)$, $P_2 = (r_2, \theta_2)$، که در آنها r_1, r_2 مثبت بوده و $0 \le \theta_1 < \theta_2 \le \pi$. نشان دهید که مساحت مثلث OP_1P_2 مساوی است با $\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$. مساحت مثلث به رئوس O، $P_1 = (5, \pi/3)$، و $P_2 = (10, 7\pi/12)$ را بیابید.

۲۱. ✓ نشان دهید که معادلهٔ قطبی دایره به شعاع a و مرکز (r_1, θ_1) عبارت است از

$$r^2 - 2r_1 r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2. \quad \text{(دو)}$$

۲۲. ✓ با استفاده از فرمول (دو)، تحقیق کنید که دوایر شکلهای ۶۰ و ۶۱ به معادلات قطبی $r = 4 \cos\theta$ و $r = 4 \sin\theta$ می‌باشند. این معادلات را با استفاده از این امر که هر مثلث محاطی در یک دایره که یکی از اضلاعش قطر باشد قائم‌الزاویه است نیز تحقیق نمایید.

معادلهٔ قطبی دایره با شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۳. $3, (6, \pi/4)$ ✓   ۲۴. $4, (-4, \pi/3)$ ✓   ۲۵. $\sqrt{5}, (2, \pi/2)$ ✓

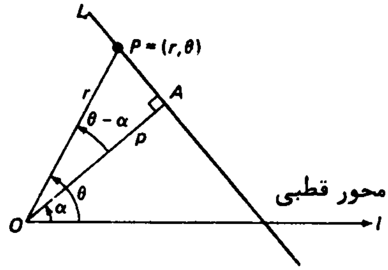
۲۶. فرض کنید L خط مستقیمی باشد که از قطب O نمی‌گذرد. نشان دهید که معادلهٔ قطبی L عبارت است از

$$r\cos(\theta - \alpha) = p, \quad \text{(سه)}$$

که در آن p طول و α میل عمود مرسوم از O به L است (ر.ک. شکل ۶۸). معادلهٔ دکارتی معادل (سه) چیست؟

معادلهٔ دکارتی داده شده را در مختصات قطبی بنویسید.

۲۷. $y = x$ ✓   ۲۸. $3x + 4y = 5$ ✓



شکل ۶۸

۲۹. $x^2 + y^2 = 9$

۳۰. $x^2 - y^2 = 4$

۳۱. $x^2 + y^2 - ax = 0$

۳۲. $x^2 + y^2 + ay = 0$

۳۳. $y^2 = 4x$

۳۴. $2xy = 1$

۳۵. $x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2$

۳۶. $x^4 = 9(x^2 + y^2)$

معادلهٔ قطبی داده شده را در مختصات قائم نوشته، و نمودار آن را شناسایی کنید.

۳۷. $\theta = \pi$

۳۸. $r \sin \theta = 3$

۳۹. $r \cos \theta = -2$

۴۰. $\sin \theta = \frac{1}{2}$

۴۱. $r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 6$

۴۲. $r \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

۴۳. $r = -\sin \theta$

۴۴. $r = 8 \cos \theta$

۴۵. $r^2 \sin 2\theta = 4$

۴۶. $r = 2(\cos \theta - \sin \theta)$

منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = a \sin (n\theta + \phi) \quad (\ n = 2, 3, \ldots \text{ ، } \phi \text{ دلخواه ، } a > 0\ )$$

یک رز نام دارد (برای تحلیل رز $r = \sin 2\theta$ نظیر به انتخاب $a = 1, \phi = 0, n = 2$ ، ر. ک. مثال ۷). رز با معادلات زیر را رسم نمایید.

۴۷. $r = 4 \sin 3\theta$

۴۸. $r = 2 \cos 4\theta$

۴۹. $r = \cos 6\theta$

۵۰. $r = \sin (5\theta + \pi)$

توجه کنید که رز n پر دارد اگر n فرد باشد و $2n$ پر دارد اگر n زوج باشد. منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = a + b \cos (\theta + \phi) \quad (\ a > 0 \text{ ، } b > 0 \text{ ، } \phi \text{ دلخواه}\ )$$

یک *لیماسون* خوانده می‌شود. اگر $a = b$ ، لیماسون به دلگون تحویل می‌شود (برای تحلیل دلگون $r = 2(1 - \cos \theta)$ نظیر به‌انتخاب $a = b = 2, \phi = \pi$ ، ر. ک. مثال ۸) لیماسون به

معادلهٔ زیر را رسم نمایید.

۵۱. $r = 3 + 2\cos\theta$
۵۲. $r = 3 - \sin\theta$

۵۳. $r = 1 + 2\cos\theta$
۵۴. $r = 2 + 3\sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

معادلهٔ قطبی داده شده را با استفاده از تقارنها رسم کنید.

۵۵. $r^2 = 4\cos 2\theta$ (لمنیسکات)

۵۶. $r^2 = -\sin 2\theta$ (لمنیسکات)

۵۷. $r = \sin\theta\tan\theta$ (سیزوئید)

۵۸. $r = \cot\theta$ (منحنی کاپا)

۵۹. $r = 1 + 2\sin(\theta/2)$ (کلیه گون)

۶۰. $r = \sec\theta - 4\cos\theta$ (سه بخشی)

۶۱. $r = 2\theta$ (مارپیچ ارشمیدسی: شکل کلی $r = a\theta$)

۶۲. $r = e^{\theta/10}$ یا معادلا" $\ln r = \theta/10$ (مارپیچ لگاریتمی: شکل کلی $r = e^{a\theta}$)

۶۳. $r^2 = \theta$ (مارپیچ سهموی: شکل کلی $r^2 = a^2\theta$)

۶۴. $r^2\theta = 1$ (لیتوس، واژهٔ لاتینی "شیپور": شکل کلی $r^2\theta = a^2$)

در مسائل ۶۱ تا ۶۴، قسمتی‌از مارپیچ که در آن $r > 0, \theta > 0$ با منحنی‌توپر، وبقیهٔ‌مارپیچ را با منحنی منقطع رسم کنید.

تمام نقاط‌اشتراک جفت داده شده از منحنیهای قطبی زیر را بیابید.

۶۵. $\theta = \pi/4, r = \theta$

۶۶. $r = 1 + \cos\theta, r = 1 - \cos\theta$

۶۷. $r = 1 + \sin\theta, r = 1 - \cos\theta$

۶۸. $r = 2\cos 3\theta, r = 1$

۶۹. $r = \sin 2\theta, r = \cos\theta$

۷۰. $r = \sin\theta\ r = |\cos\theta|$

۷۱. $r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta$

۷۲. $r\theta = 2, r = 1$

۸.۱۰ مخروطیها در مختصات قطبی

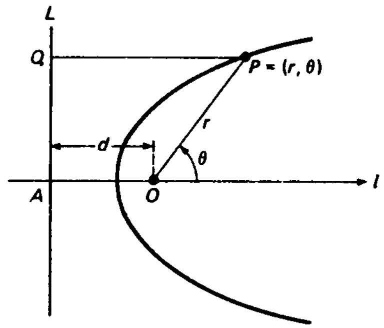
همانطور که قضیهٔ زیر نشان می‌دهد، مختصات قطبی برای نوشتن معادلات مخروطیهای تباه نشده بسیار مناسب‌اند.

قضیهٔ ۲ (معادلهٔ قطبی یک مخروطی) . *مخروطی با خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d دارای معادلهٔ*

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \qquad (۱)$$

در مختصات قطبی است اگر قطب O در کانون و محور قطبی بر هادی L عمود و جهتی به خارج از L داشته باشد .

برهان . درحالت بیضی یا هذلولی ، دو هادی وجود داشته و L هادی نزدیکتر به کانون است . هندسهٔ مربوطه در شکل ۶۹ نموده شده است ، که در آن هادی سمت چپ کانون



شکل ۶۹

قرار دارد . بنابر قضیهٔ ۱ ، صفحهٔ ۹۷۶ ، داریم

$$\frac{|OP|}{|PQ|} = \frac{r}{|PQ|} = e. \qquad (۲)$$

اما

$$|PQ| = |AO| + r\cos\theta = d + r\cos\theta,$$

درنتیجه ، (۲) به صورت زیر درمی‌آید :

$$r = e(d + r\cos\theta).$$

با حل این معادله نسبت به r ، فرمول (۱) به دست می‌آید .

مثال ۱ . مخروطی به معادلهٔ قطبی

$$r = \frac{9}{5 - 4\cos\theta} \qquad (۳)$$

را شناسایی کنید.

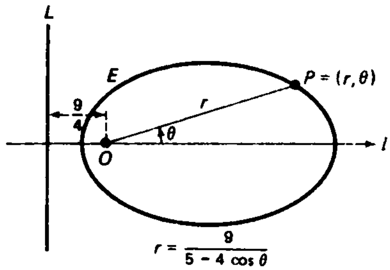
حل. با نوشتن (۳) به شکل

$$r = \frac{\frac{9}{5}}{1 - \frac{4}{5}\cos\theta}, \qquad (۳')$$

و سپس مقایسهٔ (۳') با (۱)، معلوم می‌شود که

$$e = \frac{4}{5}, \qquad ed = \frac{4}{5}d = \frac{9}{5}, \qquad d = \frac{9}{4}.$$

چون $e < 1$، مخروطی بیضی است؛ و در واقع، با رسم معادلهٔ (۳)، بیضی E شکل ۷۰ به دست می‌آید که کانونی در قطب O و هادی L را داشته‌و فاصلهٔ کانون تا هادی آن $\frac{9}{4}$ است. توجه کنید که معادلهٔ قطبی L مساوی است با $r\cos\theta = -\frac{9}{4}$ یا معادلاً $r = -\frac{9}{4}\sec\theta$.



شکل ۷۰

برای به دست آوردن معادلهٔ دکارتی بیضی E، فرض کنیم محور اطول به طول $2a$ و فاصلهٔ بین کانونها $2c$ باشد. در این صورت، بنابر فرمول (۸)، صفحهٔ ۹۷۴، $e = c/a$ و

$$d = \frac{a^2}{c} - c,$$

لذا،

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}, \qquad \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{9}{4},$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$a = 5, \qquad c = 4, \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3,$$

که در آن $2b$ طول محور اقصر است. لذا، E در دستگاه مختصات قائم به مبداء در مرکز E و

محور x در امتداد محور اطول به معادلهٔ زیر می‌باشد :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

این معادله در دستگاه مختصات‌قائم که مبداء آن در کانون چپ است به‌صورت‌زیرمی‌باشد :

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

(چرا ؟) . به‌عنوان تمرین ، این معادله را با جانشانیهای $r\cos\theta=x$ و $r^2=x^2+y^2$ مستقیما " از معادلهٔ (۳) به دست آورید .

مثال ۲ . برای هذلولی به معادلهٔ دکارتی

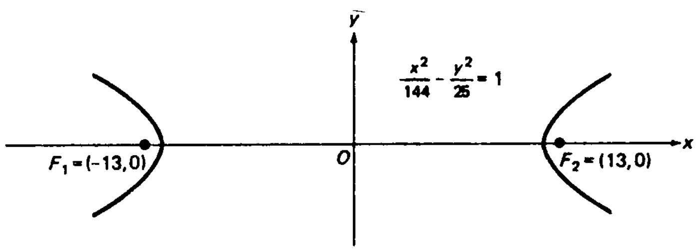
$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1 \qquad (۴)$$

معادلهٔ قطبی بنویسید .

حل . فرض کنیم $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج باشد . در این صورت ،

$$a=12, \qquad b=5, \qquad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{169}=13,$$

که در آن $2c$ فاصلهٔ بین‌کانونهای F_1 و F_2 است ،که برمحور x قرار دارند (ر.ک. شکل۷۱) .



شکل ۷۱

مثل قبل ، خروج از مرکز مساوی‌استبا $e=c/a$ ، ولی در اینجا ، طبق فرمول (۸́)،صفحهٔ ۹۷۴ ، فاصلهٔ بین کانون و هادی مساوی است با

$$d=c-\frac{a^2}{c},$$

بنابراین ،

$$e=\frac{13}{12}, \qquad d=13-\frac{144}{13}=\frac{25}{13},$$

درنتیجه، هذلولی به معادلهٔ قطبی

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} = \frac{\frac{25}{12}}{1 - \frac{13}{12}\cos\theta},$$

یا معادلا"

$$r = \frac{25}{12 - 13\cos\theta} \qquad (۵)$$

است. به‌طوردقیقتر، نمودار(۵) شاخهٔ راست هذلولی (۴) است اگر $\theta_0 < |\theta| \leq \pi$ ، که در آن $\theta_0 = \arccos \frac{12}{13} \approx 22.6°$. هرگاه $0 \leq |\theta| < \theta_0$ ، آنگاه $r < 0$ و نمودار (۵) شاخهٔ چپ می‌باشد (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . در هر دو حالت، قطب در کانون راست F_2 است، و محور قطبی در امتداد محور x مثبت می‌باشد.

صورتهای مختلف معادلهٔ قطبی یک مخروطی. در معادلهٔ (۱) θ را با $\theta - \alpha$ عوض کرده به دست می‌آوریم

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos(\theta - \alpha)}. \qquad (۶)$$

در این صورت، نمودار (۶) یک مخروطی است که محور اطول، محور متقاطع، یا محور تقارنش (بسته به اینکه مخروطی بیضی، هذلولی، یا سهمی است) به جای محور قطبی $\theta = 0$ ، در امتداد خط $\theta = \alpha$ قرار دارد. بخصوص، نمودارهای معادلات

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 - e\sin\theta}, \quad r = \frac{ed}{1 + e\sin\theta} \qquad (۶')$$

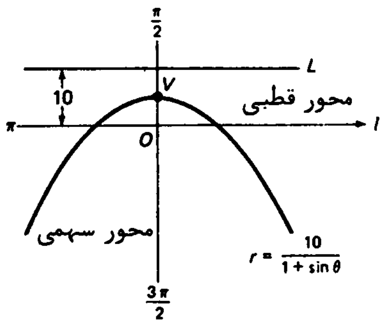
همه مخروطی‌اند ،زیرا اینها معادلاتی‌هستندکه از (۶) با قرار دادن $\alpha = \pi, \pi/2, -\pi/2$ به دست می‌آیند. به طور مشخص، اولین معادله یک مخروطی را توصیف می‌کند که هادیش بر محور قطبی عمود بوده و d واحد به *راست* کانون قرار دارد، حال آنکه معادلات دوم و سوم مخروطیهایی را توصیف می‌کنند که هادیهایشان موازی محور قطبی و به ترتیب d واحد زیر کانون و d واحد بالای آن قراردارند.

مثال ۳. معادلهٔ قطبی سهمیی را بنویسید که فاصلهٔ کانون تا هادی آن ۱۰ بوده، محور تقارن قائم داشته، و به پایین باز شود.

حل. با گذاردن $e = 1, d = 10$ در آخرین معادلهٔ (۶') ، به دست می‌آوریم

$$r = \frac{10}{1 + \sin\theta}.$$

نمودار این معادله سهمی شکل ۷۲ است. رأس V سهمی نقطهٔ $(5, \pi/2)$ است، ولی هادی L به معادلهٔ قطبی $r \sin\theta = 10$ یا معادلاً $r = 10 \csc\theta$ می‌باشد.



شکل ۷۲

مسائل

مخروطی با معادلهٔ قطبی داده شده را شناسایی و رسم کنید. خروج از مرکز e را بیابید، جای رئوس را مشخص‌کنید، و معادلهٔ قطبی هادی L نظیر به کانون در قطب O را بنویسید.

۱. $r = \dfrac{5}{1 + \cos\theta}$

۲. $r = \dfrac{4}{3 - 2\cos\theta}$

۳. $r = \dfrac{6}{2 - 3\sin\theta}$

۴. $r = \dfrac{12}{3 - 4\cos\theta}$

۵. $r = \dfrac{9}{4 + 3\sin\theta}$

۶. $r = 4\csc^2\dfrac{\theta}{2}$

۷. $r = \dfrac{10}{1 + 2\cos\theta}$

۸. $r = \dfrac{8}{2 - \cos\theta + \sin\theta}$

۹. $r = \dfrac{20}{2 - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta}$

معادلهٔ قطبی مخروطی با معادلهٔ دکارتی داده‌شده را نوشته، قطب را در یک کانون و محور قطبی را در امتداد محور x مثبت قرار دهید.

۱۰. $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

۱۱. $\dfrac{y^2}{64} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

۱۲. $4x^2 - y^2 = 1$

۱۳. $y^2 = 6x$

۱۴. $2xy = 1$ ۱۵. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$

با این فرض که قطب در یک‌کانون است ، معادلهٔ قطبی مخروطی صادق در شرایط داده‌شده را بنویسید (e خروج از مرکز است) .

۱۶. رئوس در $(6, 0)$ و $(2, \pi)$

۱۷. رئوس در $(1, \pi/2)$ و $(5, \pi/2)$

۱۸. $e = 1$ ، رأس در $(2, \pi/4)$

۱۹. $e = \frac{2}{3}$ ، رأس در $(3, -\pi/2)$

۲۰. $e = \frac{3}{4}$ ، هادی $r = 2 \csc \theta$

۲۱. $e = \frac{4}{3}$ ، هادی $r = 6 \sec \theta$

۲۲. فرض کنید $r = ed/(1 - e \cos \theta)$ معادلهٔ قطبی یک هذلولی باشد . در این صورت ، مخرج به ازای $\theta = \theta_0 = \arccos\,(1/e)$ صفر است . چه رابطه‌ای θ_0 با مجانبهای هذلولی دارد ؟

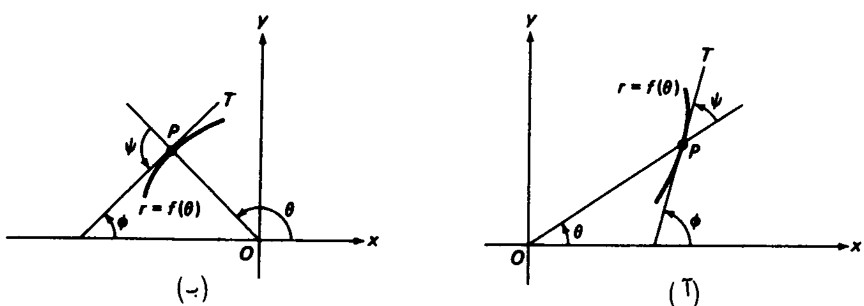
۲۳. یک ستارهٔ دنباله‌دار در مداری بیضوی با خروج از مرکز بالا $(e \approx 1)$ که خورشید در یکی از کانونهایش قرار دارد حرکت می‌کند . وقتی ستاره از یک نقطه به فاصلهٔ 50 میلیون میل به حضیض (نزدیکترین نقطه به خورشید) حرکت می‌کند ، خط واصل بین خورشید و ستاره $45°$ می‌چرخد . فاصلهٔ ستاره تا خورشید را درحضیض بیابید .

۹.۱۰ خط مماس بر یک منحنی قطبی

حال مسئلهٔ یافتن خط مماس بریک‌منحنی‌قطبی را مطرح می‌کنیم . علاوه‌بر دستگاه مختصات قطبی زمینه ، مختصات قائمی معرفی می‌کنیم که قطب O مبداء و محور قطبی محور x مثبت باشد . فرض کنیم منحنی نمودار تابع مشتقپذیر

$$r = f(\theta)$$

بوده ، و مماس بر منحنی در نقطهٔ P خط میل ϕ $(0 \leq \phi < \pi)$ ، مثل شکل ۷۳ ، باشد . در



شکل ۷۳

این صورت ، شیب T مساوی است با

$$m = \tan \phi = \frac{dy}{dx}.$$

ما ، علاوه‌بر زاویهٔ میل ϕ ،به‌زاویهٔ شعاعی–مماسی ψ (پسی‌کوچک یونانی) علاقه‌مندیم . این زاویهٔ بین ادامهٔ خط شعاعی OP و مماس T است‌که‌از OP تا T در جهت خلاف‌عقربه‌های ساعت سنجیده شده و در بازهٔ $0 \le \psi < \pi$ گرفته می‌شود .

ارتباط بین ϕ, ψ و مختص زاویهٔ θ با فرمول زیر داده می‌شود :

$$\phi = \psi + \theta, \tag{1}$$

که می‌توان آن را از شکل ۷۳ (آ) به دست آورد . در اینجا فرض است که ϕ زاویهٔ بیرونی مثلثی است با زوایای حاده که به محور x ، مماس T ، و خط شعاعی OP محدود است ، و θ یک زاویهٔ درونی آن می‌باشد (لذا ، بخصوص، $0 < \theta < \phi$) ، ولی البته حالات دیگری نیز وجود دارند . اما به‌آسانی معلوم می‌شود که (۱) و فرمول معادلش

$$\psi = \phi - \theta \tag{1'}$$

همواره با تقریب مضرب صحیحی از π برقرارند [مثلا" ،درشکل ۷۳ (ب) ، $\phi = \psi + \theta - \pi$] بنابراین ، چون تابع تانژانت متناوب با دورهٔ تناوب π است ، همواره خواهیم داشت

$$\tan \psi = \tan (\phi - \theta) = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \tan \theta}, \tag{2}$$

درنتیجه ، در تمام حالات فرمول یکسانی برای $\tan \psi$ برحسب $\tan \phi$ و $\tan \theta$ بــه دست می‌آید .

حال ملاحظه می‌کنیم که نقطهٔ $P = (r, \theta)$ دارای مختصات قائم

$$x = r \cos \theta, \qquad y = r \sin \theta \tag{3}$$

است و نیز داریم

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \qquad (x \neq 0). \tag{4}$$

با گذاردن $r = f(\theta)$ در (۳) ، به دست می‌آوریم

$$x = x(\theta) = f(\theta) \cos \theta, \qquad y = y(\theta) = f(\theta) \sin \theta. \tag{5}$$

این یک نمایش پارامتری‌منحنی موردبحث‌است ،که درآن مختص زاویه‌ای θ پارامتر می‌باشد. لذا ، طبق نکاتی که در صفحات ۷۳۱ تا ۷۳۴ گفته شد ،

$$m = \tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}. \tag{6}$$

با گذاردن (۴) و (۶) در (۲) ، خواهیم داشت

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{dy}{dx}\dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\dfrac{y}{x}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}}.$$

اما مشتق توابع (۵) عبارتنداز

(۷) $$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

و درنتیجه ،

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} &= r\cos\theta\,[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta] \\ &\quad - r\sin\theta\,[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta] \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,rf(\theta) = rf(\theta), \end{aligned}$$

حال آنکه

$$\begin{aligned} x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} &= r\cos\theta\,[f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta] \\ &\quad + r\sin\theta\,[f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta] \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,rf'(\theta) = rf'(\theta). \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\tan\psi = \frac{rf(\theta)}{rf'(\theta)} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)},$$

یعنی ،

(۸) $$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{r}{r'},$$

مشروط براینکه $dr/d\theta \neq 0$. سادگی این فرمول برای $\tan\psi$ در مقایسه با فرمول شیب T ، یعنی

$$\tan\phi = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta},$$

یا معادلا"

(۹) $$\tan\phi = \frac{(dr/d\theta)\sin\theta + r\cos\theta}{(dr/d\theta)\cos\theta - r\sin\theta},$$

حاصل از جانشانی (۷) در (۶) اعجاب آور است .

مثال ۱ . زوایای ψ و ϕ را در نقاط $P=(1,0)$ و $Q=(3/2,\pi/6)$ از دلگون $r=1+\sin\theta$ بیابید .

حل . در اینجا $dr/d\theta=\cos\theta$ ، و فرمول (۸) به صورت زیر درمی‌آید :

$$\tan\psi=\frac{r}{dr/d\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.$$

بنابراین ،

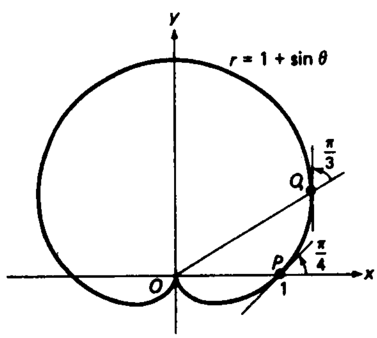
$$\tan\psi|_{\theta=0}=1, \qquad \tan\psi|_{\theta=\pi/6}=\frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2(\frac{3}{2})}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\psi|_{\theta=0}=\frac{\pi}{4}, \qquad \psi|_{\theta=\pi/6}=\frac{\pi}{3}$$

(ر.ک. شکل ۷۴) . در P و Q داریم $0\le\theta<\phi$ ؛ و درنتیجه ، $\phi=\psi+\theta$. پس نتیجه می‌شود که

$$\phi|_{\theta=0}=\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{4}, \qquad \phi|_{\theta=\pi/6}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}.$$



شکل ۷۴

لذا ، مماس در P به شیب 1 است ولی مماس در Q قائم می‌باشد . به‌آسانی معلوم می‌شود که مماس در P خط $y=x-1$ است ، ولی مماس در Q خط $x=\frac{3}{4}\sqrt{3}$ می‌باشد .

مثال ۲ . نشان دهید که مارپیچ لگاریتمی

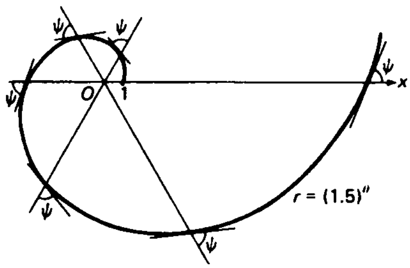
$$r=e^{a\theta} \qquad (\theta\ge 0, a>0)$$

متساوی‌الزاویه است ، بدین معنی که زاویهٔ ψ بین خط شعاعی و مماس در تمام نقاط مارپیچ یکسان است .

حل . چون $dr/d\theta = ae^{a\theta}$ ، داریم

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{e^{a\theta}}{ae^{a\theta}} = \frac{1}{a},$$

درنتیجه ، $\psi \equiv \operatorname{arccot} a$. شکل ۷۵ متساوی‌الزاویه بودن را در حالت $a = \ln \frac{3}{2}$ ، $\psi \equiv \operatorname{arccot} (\ln \frac{3}{2}) \approx 67.9°$ ، $r = (\frac{3}{2})^\theta$ نشان می‌دهد .



مارپیچ لگاریتمی

شکل ۷۵

مثال ۳ . میل ϕ مماس بر مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \qquad (\theta \geq 0,\ a > 0)$$

را در نقطهٔ $P = (a\pi/2, \pi/2)$ بیابید .

حل . این بار $dr/d\theta = a$ و ، با استفاده از فرمول (۹) ، مستقیما" داریم

$$\tan \phi = \frac{a \sin \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{a \cos \frac{\pi}{2} - \frac{a\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi},$$

درنتیجه ،

$$\phi = \arctan\left(-\frac{2}{\pi}\right) + \pi \approx 147.5°$$

(چرا π اضافه می‌کنیم ؟) توجه کنید که ϕ از ثابت a مستقل است . به روش دیگر ، بنابر

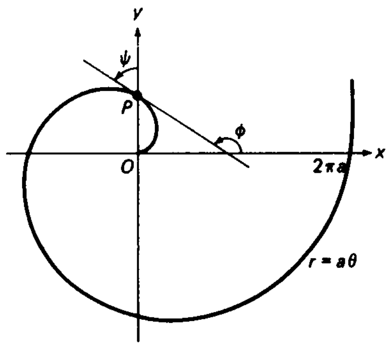
(۸) ،

$$\tan\psi = \frac{a\pi/2}{a} = \frac{\pi}{2},$$

و درنتیجه ،

$$\psi = \arctan\frac{\pi}{2} \approx 57.5°, \qquad \phi = \psi + \theta = \arctan\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 147.5°$$

(ر.ک. شکل ۷۶) . معادل بودن دو عبارت برای ϕ از فرمول (۱۶) ، صفحهٔ ۴۷۶ ، به دست می‌آید . به عنوان تمرین ، نشان دهید که خط مماس در P دارای معادلهٔ $4x + 2\pi y - a\pi^2 = 0$ است .



مارپیچ ارشمیدسی

شکل ۷۶

مسائل

برای منحنی قطبی داده شده در نقطهٔ مشخص شدهٔ P ، ابتدا $\tan\psi$ و سپس زوایای ψ و ϕ را بیابید .

۱. $r = 6\cos\theta,\ P = (3, \pi/3)$

۲. $r = 8\sin\theta,\ P = (4, \pi/6)$

۳. $r = \sin 2\theta,\ P = (1/\sqrt{2}, \pi/8)$

۴. $r = \sqrt{2}\,|\cos\theta|,\ P = (1, 3\pi/4)$

۵. $r = 3\sec^2\theta,\ P = (4, \pi/6)$

۶. $r = 1 + 2\sin(\theta/2),\ P = (1, 4\pi)$

۷. $r = 2 - \cos\theta,\ P = (2, 3\pi/2)$

۸. $r = 3\cot\theta,\ P = (\sqrt{3}, \pi/3)$

۹. $r = \dfrac{5}{1-\cos\theta},\ P = (5, \pi/2)$

۱۰. $r = \dfrac{3}{\sqrt{2}+\cos\theta},\ P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

۱۱. $r = \theta^2/4,\ P = (\pi^2, 2\pi)$

۱۲. $r = \pi/\theta,\ P = (\frac{1}{3}, 3\pi)$

۱۳. منحنی قطبی $r = f(\theta)$ داده شده است، و $f(\theta_0) = 0$. نشان دهید که خط $\theta = \theta_0$ بر این منحنی در قطب مماس است.

۱۴. نشان دهید که دلگون $r = 2(1-\cos\theta)$ بر محور قطبی در قطب مماس است (ر.ک. شکل ۶۵، صفحهٔ ۱۰۰۴).

۱۵. رز سه پر $r = \cos 3\theta$ سه مماس متمایز در قطب دارد. آنها را بیابید.

۱۶. در چه نقاطی از دلگون $r = 1 + \cos\theta$ مماس قائم است؟

۱۷. در چه نقاطی از لمنیسکات $r^2 = \sin 2\theta$ مماس افقی است؟

۱۸. با استفاده از فرمول ($8'$)، نشان دهید که مماس بر یک دایره بر شعاع مرسوم به نقطهٔ تماس عمود است.

مثل شکل ۱۷، صفحهٔ ۱۹۷، زاویهٔ $\alpha\ (0 \le \alpha < \pi)$ بین دو منحنی متقاطع T_1 و T_2 مساوی زاویهٔ بین مماسهای C_1 و C_2 در نقطهٔ اشتراک تعریف می‌شود، که از T_1 به T_2 در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود[1].

۱۹. $r = 4\cos\theta$ و $r = 2(1-\cos\theta)$ در $(\frac{4}{3}, \arccos\frac{1}{3})$ (ر.ک. مثال ۹، صفحهٔ ۱۰۰۴).

۲۰. $r = \sin 2\theta$ و $r = \cos\theta$ در $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$

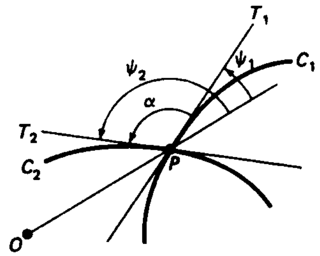
۲۱. $r = 1/(1-\sin\theta)$ و $r = 3/(1+\sin\theta)$ در $(2, \pi/6)$ و $(2, 5\pi/6)$

۲۲. $r^2 = \sin 2\theta$ و $r^2 = \cos 2\theta$ در $(1/\sqrt[4]{2}, \pi/8)$ و $(1/\sqrt[4]{2}, 9\pi/8)$

راهنمایی. با زوایای شعاعی ـ مماسی ψ_1 و ψ_2 نظیر به T_1 و T_2 کار کرده، توجه کنید که $\alpha = \psi_2 - \psi_1$ (ر.ک. شکل ۷۷).

---

۱. به صورت دیگر، زاویهٔ بین C_1 و C_2 را اغلب زاویهٔ کوچکتر بین T_1 و T_2، بی‌توجه به جهت سنجش، تعریف می‌کنند. هرگاه β این زاویه باشد، آنگاه $\beta = \alpha$ اگر $0 \le \alpha \le \pi/2$، ولی $\beta = \pi - \alpha$ اگر $\pi/2 < \alpha < \pi$.



زاویهٔ بین منحنیهای C_1 و C_2
در P مساوی است با $\alpha = \psi_2 - \psi_1$

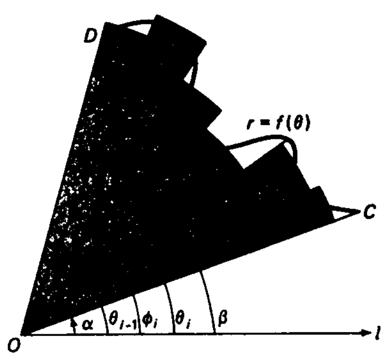
شکل ۷۷

۱۰.۱۰ مساحت در مختصات قطبی؛ طول یک منحنی قطبی

حال به یافتن مساحت A از ناحیهٔ OCD شکل ۷۸ می‌پردازیم که به شعاع $\theta = \alpha$ ، شعاع $\theta = \beta$ $(\beta > \alpha)$ ، و منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = f(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

محدود شده است ، که در آن f پیوسته و نامنفی است . OCD را می‌توان تعمیمی از قطاع مستدیر گرفت که در آن ضلع خمیده دیگر یک قوس مستدیر نیست . چون هندسهٔ مقدماتی



شکل ۷۸

راجع به این نواحی چیزی‌نمی‌گوید ، باید پیش از محاسبهٔ مساحت A **تعریف** مناسبی‌برایش پیدا کنیم . استراتژی ، جز در مواردی جزئی ، همانی است که در تعریف مساحت تحت یک منحنی به معادلهٔ $y = f(x)$ در مختصات قائم به کار رفت (ر.ک. صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹) .

لذا ، با تقسیم بازهٔ $[\alpha, \beta]$ به‌تعداد n بزرگی از زیربازهٔ کوچک به‌وسیلهٔ نقاط تقسیم

$$\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta$$

صادق در نامساویهای

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

شروع می‌کنیم . فرض کنیم

$$\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{۱}$$

و

$$\mu = \max\{\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \ldots, \Delta\theta_n\}$$

را ماکزیمم تمام زوایای (۱) می‌گیریم . در این صورت ، شعاعهای $\theta = \theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ ناحیهٔ OCD را به n برش نازک کیک مانند تقسیم می‌کنند . تابع f پیوسته بوده ، ودرنتیجه اگر $\Delta\theta_i$ به قدر کافی کوچک باشد ، مقدارش در زیربازهٔ $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ تغییر مختصری خواهد کرد . لذا ، اگر f را با مقدار ثابت $f(\phi_i)$ بر $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ بگیریم که ϕ_i نقطهٔ ***دلخواهی*** از $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ است ، تقریب مناسبی برای آن به دست می‌آید . تعویض $f(\theta)$ با $f(\phi_i)$ بر هر زیربازهٔ $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ معادل تعویض برشها به وسیلهٔ قطاعهای مستدیر سایه‌دار در شکل است . مجموع مساحات این قطاعها مساوی است با

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\phi_i)]^2\, \Delta\theta_i \tag{۲}$$

(فرمول (۸) ، صفحهٔ ۹۰ ، را به یاد آورید) . معقول آن است که (۲) را تقریب مناسبی به مساحت A ناحیهٔ OCD بگیریم ، که در آن تقریب با کوچک شدن u بهتر می‌شود . حال باتوجه به این استدلال ، A را حد

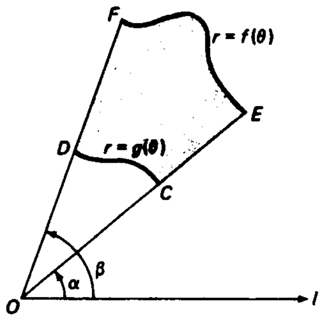
$$A = \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\phi_i)]^2\, \Delta\theta_i$$

تعریف می‌کنیم ، که چیزی جز انتگرال

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\, d\theta \tag{۳}$$

نیست . در اینجا ازاین استفاده می‌کنیم که مجموع (۲) یک مجموع ریمان برای f^2 بر $[\alpha, \beta]$ است ، و جود انتگرال از پیوستگی f^2 نتیجه می‌شود ، که به نوبهٔ خود پیوستگی f راایجاب می‌کند .

به‌طورکلی ، وقتی ناحیه مانند ناحیهٔ سایه‌دار $CEFD$ شکل ۷۹ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha, \theta = \beta$ و نمودارهای دو تابع پیوستهٔ $r = f(\theta), r = g(\theta)$ که $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ محدود



شکل ۷۹

شده است ، می‌توان نوشت

$$A = CEFD \text{ مساحت } = (OEF \text{ مساحت }) - (OCD \text{ مساحت })$$

زیرا نواحی OEF و OCD غیر از مرز مشترکشان CD نقطهٔ دیگری ندارند . اما ، اگر فرمول (۳) را دوبار به کار گیریم ،

$$OEF \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta, \qquad OCD \text{ مساحت } = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 \, d\theta,$$

و درنتیجه ،

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 \, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 \, d\theta,$$

یا معادلاً

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \{[f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2\} \, d\theta. \qquad (\text{۳}')$$

مثال ۱ . مساحت داخل دلگون $r = 1 + \cos\theta$ ، و نیز مساحت خارج این دلگون و داخل دایرهٔ $r = 3\cos\theta$ را بیابید .

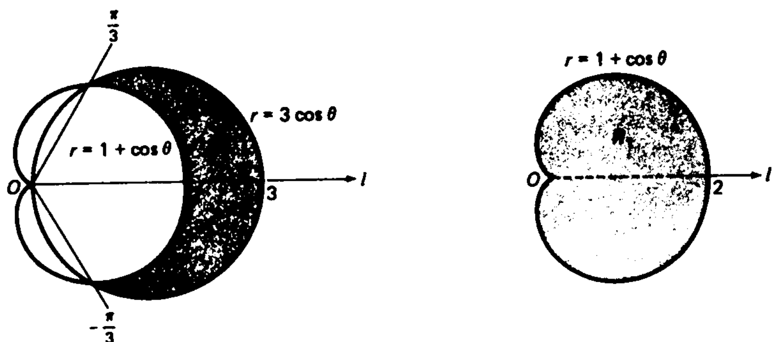
حل . در ناحیهٔ R_1 داخل دلگون [ر.ک. شکل ۸۰ (آ)] ، حدود انتگرالگیری عبارتند از $\alpha = -\pi, \beta = \pi$ ، و شعاعهای $\theta = \alpha, \theta = \beta$ که ناحیه را دربرمی‌گیرند به یک نقطه ، یعنی قطب O ، " جمع می‌شوند " ، زیرا $r|_{\theta=-\pi} = r|_{\theta=\pi} = 0$. پس از فرمول (۳) نتیجه‌می‌شود که مساحت R_1 مساوی است با

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

(در مرحلهٔ دوم از تقارن R_1 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

$$A_1 = \left[\theta + 2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$

در مورد ناحیهٔ R_2 خارج دلگون و داخل دایرهٔ $r = 3\cos\theta$ (بـه شعـاع $\frac{3}{2}$) ، حدود انتگرالگیری عبارتنداز $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ ، زیرا اینها مختصات زاویه‌ای نقـاط اشتراک دلگون و دایره‌اند[ر.ک. شکل ۸۰ (ب)] ، و بـه عـلاوه، اگـر $-\pi/3 \le \theta \le \pi/3$ ، $3\cos\theta \ge 1+\cos\theta$.



(ب) (آ)

شکل ۸۰

لذا ، طبق فرمول (۳) به ازای $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ ، $f(\theta) = 3\cos\theta, g(\theta) = 1+\cos\theta$ مساحت R_2 مساوی است با

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}[(3\cos\theta)^2 - (1+\cos\theta)^2]\,d\theta = \int_0^{\pi/3}(8\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1)\,d\theta$$
$$= \int_0^{\pi/3}\left(8\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} - 2\cos\theta - 1\right)d\theta = \int_0^{\pi/3}(4\cos 2\theta - 2\cos\theta + 3)\,d\theta$$

(مجدداً از تقارن R_2 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

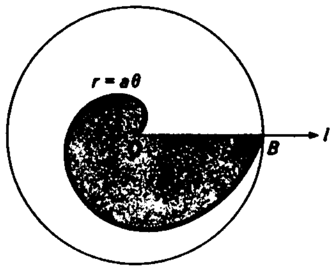
$$A_2 = \left[2\sin 2\theta - 2\sin\theta + 3\theta\right]_0^{\pi/3} = 2\sin\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} + \pi = \pi,$$

که $\frac{4}{3}$ مساحت $(\frac{3}{2})^2\pi = \frac{9}{4}\pi$ محدود به فقط دایره است.

مثال ۲. مساحت A ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۸۱ محدود به محور قطبی l و " دور"اول مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \qquad (\theta \geq 0, a > 0).$$

یعنی بخشی از مارپیچ که نظیر به بازهٔ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است، را بیابید.



شکل ۸۱

حل. در اینجا $\alpha = 0$ ، $\beta = 2\pi$ ، و

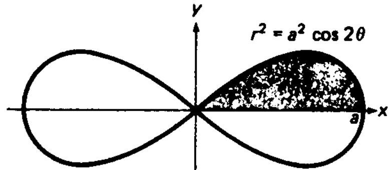
$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2\, d\theta = \frac{1}{6}\, a^2\theta^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\,\pi^3 a^2.$$

توجه کنید که A یکسوم مساحت محدود به دایرهٔ ذکر شده به شعاع $|OB| = 2\pi a$ است.

مثال ۳. مساحت A محصور به لمنیسکات

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \qquad (a > 0) \tag{۴}$$

نموده شده در شکل ۸۲ را بیابید.



لمنیسکات

شکل ۸۲

حل. ابتدا با قرار دادن $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ در (۴)، آن را بـه مختصات قطبی

تبدیل می‌کنیم . این کار نتیجه می‌دهد که

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad \text{یا} \quad r^2 = a^2\cos 2\theta$$

(تقسیم بر r^2 را توجیه کنید) . لمنیسکات نسبت به هر دو محور x و y متقارن است ؛ و لذا ، مساحت کل A محصور به لمنیسکات چهار برابر مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل است که در ربع اول بین شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/4$ قرار دارد . بنابراین ،

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\,d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\,d\theta = a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

طول یک منحنی قطبی . حال به یافتن طول یک منحنی قطبی می‌پردازیم . فرض کنیم C یک منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = f(\theta) \qquad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

باشد . در این صورت ، C دارای نمایش پارامتری زیر است :

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \qquad (\alpha \le \theta \le \beta),$$

که در آن مختص زاویه‌ای θ پارامتر بوده ، و می‌توان نظریهٔ طولها را که قبلاً "در بخش۴.۸ ارائه شده به کار برد . در واقع ، هرگاه f به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد ، آنگاه C با طول متناهی و دارای طول

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

خواهد بود (ر.ک. فرمول (۲) ، ص ۷۴۱) . اما

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta]^2 + [f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta]^2$$
$$= [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2,$$

درنتیجه ،

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f(\theta)]^2}\,d\theta,$$

یا ، به‌طور فشرده‌تر ،

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta. \qquad (۵)$$

مثال ۴ . محیط L دلگون $r = 1 + \cos\theta$ را ، که در شکل ۸۰ (آ) رسم شده ، بیابید .

حل. با استفاده از فرمول (۵) و تقارن دلگون نسبت به محور قطبی، داریم

$$L = 2\int_0^\pi \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + (-\sin\theta)^2}\, d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta$$
$$= 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta = 4\int_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta.$$

اما اگر $0 \le \theta \le \pi$، $\cos(\theta/2) \ge 0$؛ و لذا،

$$L = 4\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^\pi = 8.$$

مثال ۵. طول L اولین دور مارپیچ ارشمیدسی $r = a\theta$ مثال ۲ را بیابید.

حل. با اعمال فرمول (۵)، به کمک فرمول (۶́)، صفحهٔ ۶۲۹، به دست می‌آوریم

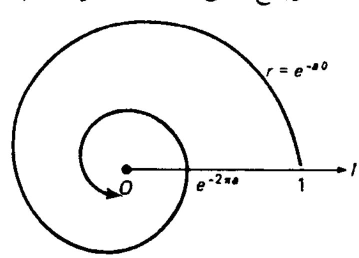
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\theta^2 + a^2}\, d\theta = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1}\, d\theta$$
$$= \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2+1})\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{a}{2}\left[2\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2+1})\right] \approx 21.3a.$$

مثال ۶. طول کل مارپیچ لگاریتمی

$$r = e^{-a\theta} \qquad (0 \le \theta < \infty, a > 0)$$

را بیابید.

حل. وقتی θ افزایش می‌یابد، مارپیچ طبق شکل ۸۳ حول قطب O درجهت خلاف عقربه‌های



شکل ۸۳

ساعت می‌چرخد . طول کل L مارپیچ با انتگرال مجازی زیر تعریف می‌شود :

$$L=\int_0^{\infty}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{\infty}\sqrt{(e^{-a\theta})^2+(-ae^{-a\theta})^2}\,d\theta$$
$$=\sqrt{1+a^2}\int_0^{\infty}e^{-a\theta}\,d\theta=\sqrt{1+a^2}\lim_{u\to\infty}\int_0^{u}e^{-a\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\lim_{u\to\infty}(1-e^{-au})=\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

مثال ۷ . مساحت A سطح حاصل از دوران لمنیسکات $r^2=a^2\cos 2\theta$ حول محور x را بیابید (ر.ک. شکل ۸۲) .

حل . بنابر تقارن ، A دوبرابر مساحت سطح حاصل از دوران قوس

$$r^2=a^2\cos 2\theta \qquad (0\le\theta\le\pi/4,\ r\ge 0)$$

حول حور x است . لذا ، طبق فرمول (۱) ، صفحهٔ ۷۵۰ ، پس از تعویض t با θ ،

$$A=4\pi\int_0^{\pi/4}y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=4\pi\int_0^{\pi/4}r\sin\theta\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

با مشتقگیری از $r^2=a^2\cos 2\theta$ نسبت به θ ، به دست می‌آوریم

$$2r\frac{dr}{d\theta}=-2a^2\sin 2\theta,$$

درنتیجه ،

$$r\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{r^4+\left(r\frac{dr}{d\theta}\right)^2}=\sqrt{(a^2\cos 2\theta)^2+(-a^2\sin 2\theta)^2}$$
$$=\sqrt{a^4(\cos^2 2\theta+\sin^2 2\theta)}=a^2.$$

بنابراین ،

$$A=4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\theta\,d\theta=-4\pi a^2\cos\theta\Big|_0^{\pi/4}=4\pi a^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

که حدوداً "29% مساحت $4\pi a^2$ کره‌ای به شعاع a است .

مسائل

مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی قطبی داده شده و جفت شعاع مشخص شده را بیابید .

۱. $r = 3\sec\theta, \theta = 0, \theta = \pi/4$

۲. $r = -4\csc\theta, \theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4$

۳. $r = 2\tan\theta, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3$

۴. $r = 1/(1+\theta), \theta = -\pi/4, \theta = \pi/4$

۵. $r = \sqrt{2}/(1+\cos\theta), \theta = \pi/3, \theta = \pi/2$

۶. $r = 1/\theta, \theta = 2\pi/3, \theta = \pi$

۷. $r = 2^{\theta}, \theta = 0, \theta = \pi/2$

۸. $r = 5\theta^2, \theta = -\pi/2, \theta = 0$

مساحت داخل منحنی قطبی داده شده را بیابید .

۹. $r = 8\sin\theta$

۱۰. $r = -\sqrt{3}\cos\theta$

۱۱. $r = 10\,|\cos\theta|$

۱۲. $r = \cos\theta + \sin\theta$

۱۳. $r = 3 - 3\sin\theta$ (دلگون)

۱۴. $r = 2 - \cos\theta$ (لیماسون)

۱۵. $r = 3 + 2\cos\theta$ (لیماسون)

۱۶. $r^2 = 4\sin 2\theta$ (لمنیسکات)

۱۷. $r = \sqrt{5}\sec^3(\theta/3)$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$

۱۸. $r = \sec\theta - 4\cos\theta$ $(-\pi/3 \le \theta \le \pi/3)$

مساحت کل محصور به رز داده شده را بیابید .

۱۹. $r = \sin 2\theta$

۲۰. $r = \cos 4\theta$

۲۱. $r = \cos 3\theta$

۲۲. $r = \sin 5\theta$

راهنمایی . ابتدا مساحت یک پر را حساب کنید .

در هر مورد ، مساحت داخل منحنی قطبی اول و خارج منحنی قطبی دوم را بیابید .

۲۳. $r = \cos\theta, r = \sin\theta$

۲۴. $r = 4\sin\theta, r = 2$

۲۵. $r = 1, r = 1 + \cos\theta$

۲۶. $r = 2 - \cos\theta, r = 3\cos\theta$

۲۷. $r = \sin 2\theta, r = \frac{1}{2}$

۲۸. $r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta$

در هر مورد ، مساحت داخل هر دو منحنی قطبی را بیابید .

۲۹. $r = \cos\theta, r = \cos(\theta - (\pi/4))$

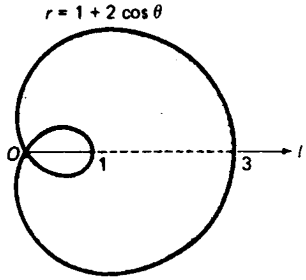
۳۰. $r = 1 + \cos\theta, r = 1 - \cos\theta$

۳۱. $r = \sin 2\theta, r = \cos\theta$

۳۲. $r = 2\cos 3\theta, r = 1$

۳۳. مساحت محصور به حلقهٔ داخلی لیماسون $r = 1 + 2\cos\theta$ را بیابید . همچنین ،

مساحت بین حلقهٔ داخلی و حلقهٔ خارجی، یعنی مساحت ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۸۴، را بیابید.



شکل ۸۴

۳۴. با کمترین تلاش، نشان دهید که مساحت محدود به منحنی

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\theta} \qquad (0 < e < 1)$$

مساوی است با $\pi p^2(1 - e^2)^{-3/2}$.

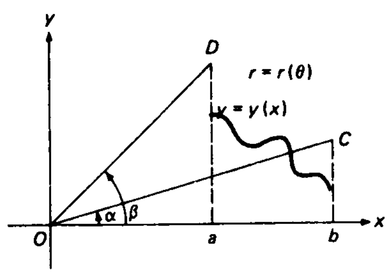
راهنمایی. ر.ک. مثال ۴، صفحهٔ ۹۴۹.

۳۵. واضح است که محاسبات زیر نادرستند. مساحت محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2\cos 2\theta$ مساوی است با

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\,d\theta = \frac{a^2}{4}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi} = 0$$

(برای جواب درست، ر.ک. مثال ۳). اشکال در کجاست؟

۳۶. شکل ۸۵ منحنیی را نشان می‌دهد که دارای معادلهٔ قطبی $r = r(\theta)$ بر بازهٔ $\alpha \le \theta \le \beta$



شکل ۸۵

و معادلهٔ دکارتی $y = y(x)$ بر بازهٔ $a \le x \le b$ است. حال دو عبارت برای مساحت A

از ناحیهٔ OCD وجود دارند؛ یعنی،

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta$$

و

$$A = \int_a^b y\,dx + (\text{مساحت مثلث } OaD) - (\text{مساحت مثلث } ObC)$$

تحقیق کنید که مقدار A به دست آمده در دو حالت یکی است، و این چیزی است که یک نظریهٔ سازگار از مساحت در صفحه طالب آن می‌باشد.

طول منحنی قطبی داده شده را بیابید (ثابت a مثبت است).

۳۷. $r = a \sec\theta \quad (-\pi/4 \le \theta \le \pi/4)$

۳۸. $r = a \csc\theta \quad (\pi/3 \le \theta \le 2\pi/3)$

۳۹. $r = 2a \sin\theta \quad (\pi \le \theta \le 2\pi)$

۴۰. $r = \cos\theta + \sin\theta \quad (0 \le \theta \le \pi)$

۴۱. $r = e^{\theta} \quad (0 \le \theta \le 1)$

۴۲. $r = \theta^2 \quad (-\pi \le \theta \le \pi)$

۴۳. $r = 1/\theta \quad (\frac{1}{2} \le \theta \le 2)$

۴۴. $r = 2^{\theta} \quad (-\infty < \theta \le 0)$

۴۵. $r = 1/(1 + \cos\theta) \quad (-\pi/2 \le \theta \le \pi/2)$

۴۶. $r = a \cos^2(\theta/2) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

۴۷. $r = a \sin^3(\theta/3) \quad (0 \le \theta \le 3\pi)$

۴۸. $r = a \tanh(\theta/2) \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$

۴۹. مساحت سطح حاصل از دوران دلگون $r = a(1 + \cos\theta)$ حول محور x را بیابید.

۵۰. مساحت سطح حاصل از دوران لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ نسبت به محور y (به جای محور x، مثل مثال ۷) را بیابید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتقال و دوران محورها، انتقال و دوران معادلات

آزمونهای تقارن برای رسم $F(x, y) = 0$

تعریف سهمی

کانون، هادی، محور، و رأس سهمی

معادلات سهمی به شکل متعارف
خاصیت انعکاسی سهمی
تعریف بیضی
کانونها ، محور اطول ، محور اقصر ، و رئوس بیضی
معادلات بیضی به شکل متعارف
خروج از مرکز بیضی
خاصیت انعکاسی بیضی
تعریف هذلولی ، شاخه‌های هذلولی
کانونها ، محور متقاطع ، محور مزدوج ، رئوس و مجانبهای هذلولی
معادلات هذلولی به شکل متعارف
خروج از مرکز هذلولی
هادیهای بیضی و هذلولی
خاصیت کانون ــ هادی مقاطع مخروطی
منحنیهای درجهٔ دو به عنوان مقاطع مخروطی
تعریف مختصات قطبی
رابطهٔ بین مختصات قطبی و قائم
نمودار معادلات قطبی ، آزمونهای تقارن برای نمودار $F(r, \theta) = 0$
مخروطیها در مختصات قطبی
خط مماس بر یک منحنی قطبی ، زاویهٔ شعاعی ــ مماسی
مساحت در مختصات قطبی ، طول یک منحنی قطبی

مسائل تکمیلی

۱. انتقالی از محورها نقطهٔ $(3, -4)$ در دستگاه xy را به نقطه‌ای از محور x' ونقطهٔ $(2, 3)$ را به نقطه‌ای از محور y' می‌برد . معادلات انتقال مربوطه چیست؟

۲. از نظر هندسی واضح است که (آ) حاصل دو انتقال متوالی محورها خود انتقالی از محورهاست ؛ و (ب) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ درصفحه **تحت *انتقال پایا*** است ؛ یعنی ، پس از انتقال محورها تغییر نمی‌کند . (آ) و (ب) را به‌طور جبری تحقیق نمایید .

۳. از نظر هندسی واضح است که (آ) حاصل دو دوران متوالی حول نقطهٔ O خود دورانی حول O است ؛ و (ب) فاصلهٔ بین دو نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ **تحت *دوران***

پایا است؛ یعنی، پس از دوران محورها تغییر نمی‌کند. (آ) و (ب) را به طور جبری تحقیق کنید.

۴. پیشامد E که در موضع x (در امتداد یک خط) رخ می‌دهد و زمان t را می‌توان با جفت مرتب (x, t) مشخص کرد. فرض کنید پیشامد E در دو "کنج"، یعنی دستگاه xt و دستگاه $x't'$، که نسبت به دستگاه xt با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، مشاهده شده باشد، و

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{v}{c},$$

که در آن c سرعت نور است (θ را **پارامتر سرعت** می‌نامند). در این صورت، بنابر نسبیت خصوصی اینشتن (ر.ک. مسئلهٔ ۵۴، صفحهٔ ۴۴۳)، مختصات x' و t' به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر به مختصات x و t مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \theta - ct \sinh \theta, \\ ct' &= -x \sinh \theta + ct \cosh \theta, \end{aligned} \qquad \text{(یک)}$$

که **تبدیل لورنتس**[1] نام دارند. نشان دهید که حاصل دو تبدیل لورنتس متوالی خود یک تبدیل لورنتس است.

راهنمایی. از فرمولهای (۶) و (۷)، صفحهٔ ۵۶۴ استفاده کنید.

۵. در نظریهٔ نسبیت، **بازهٔ فضا زمان** بین پیشامدهای $E_1 = (x_1, t_1)$ و $E_2 = (x_2, t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2},$$

که در آن c سرعت نور است. نشان دهید که کمیت s **پایای لورنتس** است؛ یعنی در اثر تبدیل لورنتس (یک) تغییر نمی‌کند.

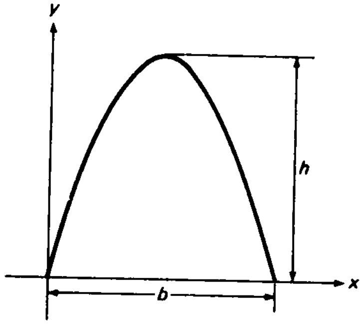
۶. فرض کنید G نمودار معادلهٔ $\sin(x + y) = 0$ باشد. G از چهار تقارن مطرح شده در صفحهٔ ۹۲۸ کدامها را دارد؟ G را توصیف کنید.

۷. معادله قوس سهموی به قاعدهٔ b و ارتفاع h شکل ۸۶ را بیابید. مساحت تحت قوس چقدر است؟

۸. وتری از یک سهمی را **وتر کانونی** نامند که از کانون F سهمی گذشته باشد. نشان‌دهید که مماسهای بر یک سهمی در نقاط انتهایی یک وتر کانونی برهم عمود بوده و روی‌هادی

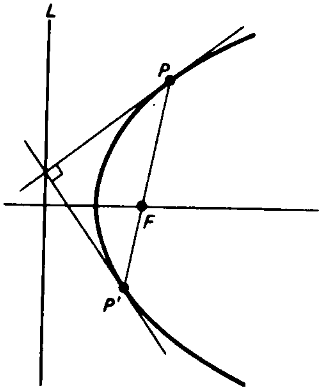
---

1. Lorentz



شکل ۸۶

L همدیگر را قطع می‌کنند (ر.ک. شکل ۸۷، که در آن PP' یک وتر کانونی می‌باشد).

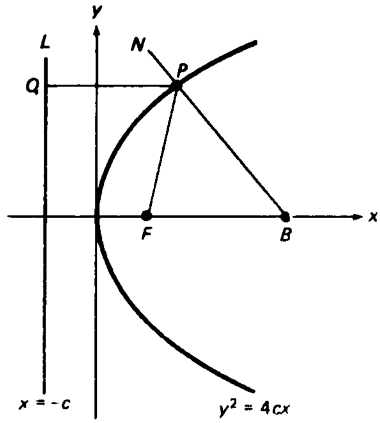


شکل ۸۷

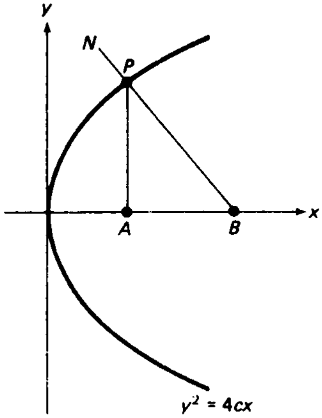
راهنمایی. از مسائل ۳۱ و ۳۲، صفحهٔ ۹۴۱، استفاده کنید.

۹. قائم N در نقطهٔ دلخواه P از سهمی $y^2 = 4cx$ $(c > 0)$ ، به کانون $F = (c, 0)$ ، محور x را در نقطهٔ B قطع می‌کند. نشان دهید دو موضع برای P وجود دارد که به ازای آنها مثلث FPB متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $4c$ است. (ر.ک. شکل ۸۸ ، که در آن L هادی سهمی بوده و Q پای عمود مرسوم از P به L می‌باشد.)

۱۰. فرض کنید N ، P ، و B همانهای بوده در مسئلهٔ قبل بوده، و A پای عمود مرسوم از P به محور x باشد (ر.ک. شکل ۸۹). نشان دهید که پاره‌خط AB ، به نام **تحت قائم سهمی**، به ازای هر موضع نقطهٔ P ، به طول ثابت $2c$ است.

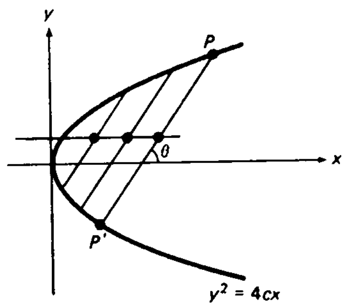


شکل ۸۸



شکل ۸۹

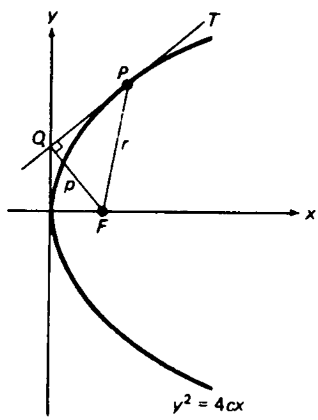
۱۱. نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ بـا میل ناصفر ثابت θ خط مستقیمی موازی محور x است (ر.ک. شکل ۹۰).



شکل ۹۰

۱۲. نشان دهید که عمود مرسوم از کانون F بر سهمی $y^2 = 4cx$ $(c > 0)$ بر مماس T درنقطهٔ P سهمی همیشه T را درنقطهٔ Q از محور y قطع می‌کند (ر.ک. شکل ۹۱). همچنین، نشان دهید که هرگاه $|FP| = r$ و $|FQ| = p$ ، آنگاه به ازای هر موضع P ، $p^2 = cr$.

۱۳. فرض کنید E بیضی به معادلهٔ $7x^2 + 3y^2 = 55$ باشد. از شش نقطهٔ $P_1 = (2, -3)$ $P_2 = (-2, 2)$, $P_3 = (0, -5)$, $P_4 = (3, -2)$, $P_5 = (1, 4)$, $P_6 = (-3, 1)$ کدامها روی E اند؟ کدامها داخل E اند؟ کدامها خارج E می‌باشند؟



شکل ۹۱

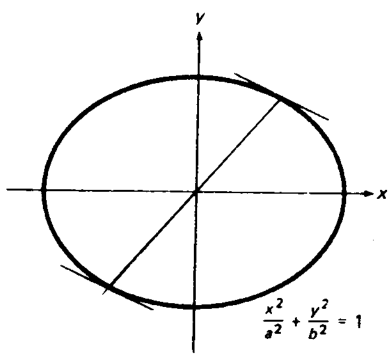
۱۴. مساحت چهار ضلعیی را بیابید که دو رأسش در کانونهای بیضی $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ ودو رأس دیگرش در نقاط انتهایی محور اقصر قرار داشته باشند.

۱۵. یک بیضی که نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است از نقاط $(6, 0)$ و $(4, \sqrt{5})$ می‌گذرد. معادلهٔ بیضی را بنویسید. خروج از مرکز چقدر است؟

۱۶. نقاط تقاطع بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ و دایرهٔ مار بر کانونها وقطع y بالایی بیضی را پیدا کنید.

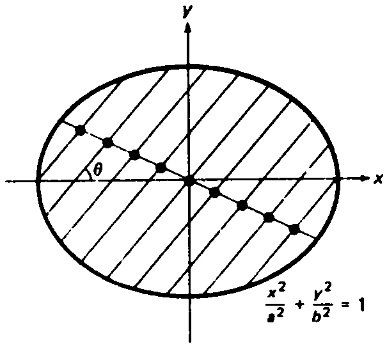
۱۷. مماسهایی از بیضی $\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{24}y^2 = 1$ را بیابید که با خط $6x - 3y + 11 = 0$ موازی باشند. فاصلهٔ بین مماسها چقدر است؟

۱۸. وتری از یک بیضی که از مرکز آن بگذرد **قطر** نام دارد. نشان دهید که مماسهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ در نقاط انتهایی یک قطر موازیند (ر.ک. شکل ۹۲).



شکل ۹۲

۱۹ . نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ با میل ثابت θ قطری از بیضی است (ر.ک. شکل ۹۳) .



شکل ۹۳

۲۰ . بر بیضی $\frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$ نزدیکترین نقطهٔ P به خط $2x - 3y + 25 = 0$ را بیابید . فاصلهٔ بین P و خط چقدر است؟

۲۱ . نشان دهید که حاصل‌ضرب فواصل نقطهٔ P از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ به کانونهای $(\pm c, 0)$ تا مجانبهایش به ازای جمیع مواضع P مقدار یکسانی دارد . این مقدار چقدر است؟

۲۲ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + a \sec t, \quad y = y_0 + b \tan t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2) \qquad \text{(دو)}$$

شاخهٔ راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخهٔ چپ‌آن است اگر $a < 0$. معادلات‌پارامتری شاخه‌های یک‌هذلولی به محور متقاطع قائم‌رابنویسید .

۲۳ . مماسهای برهذلولی $\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{5}y^2 = 1$ عمود بر خط $4x + 3y - 7 = 0$ را بیابید .

۲۴ . مماسهای بر هذلولی $\frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{16}x^2 = 1$ موازی خط $2x + 4y - 5 = 0$ را بیابید . فاصلهٔ بین مماسها چقدر است؟

۲۵ . نقطهٔ اشتراک مماس بر هذلولی $xy = 1$ ماربر نقطهٔ $(2, \frac{1}{2})$ با مماس ماربرنقطهٔ $(\frac{1}{2}, 2)$ را بیابید .

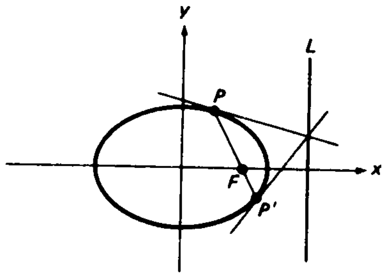
۲۶ . خروج از مرکز بیضی را بیابید که در آن فاصلهٔ بین هادیها سه برابر فاصلهٔ بین کانونهاست .

۲۷ . خروج از مرکز هذلولیی را بیابید که در آن فاصلهٔ بین کانونها پنج برابرفاصلهٔ‌بین هادیهاست .

۲۸ . فاصلهٔ بین هادیهای یک بیضی به مرکز $(-3, 4)$ و محور اطول افقی 36 بوده ، ونقطه‌ای بر بیضی وجود دارد که فاصله‌اش تا کانونها 9 و 15 است . معادلهٔ بیضی به‌شکل متعارف چقدر است ؟

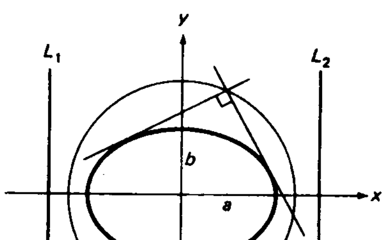
۲۹ . هذلولیی بیابید که کانونهایش در رئوس بیضی $\frac{1}{100}x^2 + \frac{1}{64}y^2 = 1$ بوده ، و هادیهایش از کانونهای بیضی بگذرند .

۳۰ . وتری از بیضی را یک **وتر کانونی** نامند اگر از یکی از کانونهای بیضی بگذرد . نشان دهید که مماسهای بر بیضی درنقاط انتهایی یک وتر کانونی روی هادی L که به‌کانون مربوطه نزدیکتر است متقاطع می‌باشند (ر.ک. شکل ۹۴ ، که در آن PP' یک‌وتر‌کانونی است) .



شکل ۹۴

۳۱ . نشان دهید مکان هندسی تمام نقاطی‌که بتوان از آنها دو خط مماس متعامد بر بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ کشید دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ است که ***دایرهٔ هادی*** بیضی نام دارد (ر.ک شکل ۹۵ ، که هادیهای L_1 و L_2 بیضی را نیز نشان می‌دهد .)



شکل ۹۵

۳۲ . شعاع دایرهٔ هادی یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{4}{5}$ و نیم محور اطول 15 را بیابید .

۳۳. بنابر مسئلهٔ ۳۰، مماسهای مرسوم از نقاط انتهایی یک وتر کانونی بیضی روی یک هادی متقاطعند. نشان دهید که، برخلاف سهمی (ر.ک. مسئلهٔ ۸)، این مماسها هرگز بر هم عمود نیستند.

پس از دوران مناسبی از محورها، بگویید نمودار معادلهٔ داده شده چه مخروطی است. مخروطی را درصورت تباه نشده بودن رسم نمایید.

۳۴. $4xy + 3y^2 + 16x + 12y + 36 = 0$

۳۵. $9x^2 + 30xy + 25y^2 - 42x - 70y + 49 = 0$

۳۶. $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

۳۷. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y = 0$

۳۸. نشان دهید هرگاه $A + C$ و $4AC - B^2$ هر دو مثبت باشند، آنگاه نمودار معادلهٔ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ بیضیی‌است‌که مساحت‌محصور به‌آن $2\pi/\sqrt{4AC - B^2}$ می‌باشد.

۳۹. منحنی درجهٔ دو به معادلهٔ

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$$

را به‌طور ساده تعبیر هندسی کنید.

۴۰. نشان دهید که نمودار معادلهٔ

$$xy + Ax + By + C = 0$$

یا یک هذلولی متساوی‌الاضلاع است یا یک جفت خط عمود بر هم.

فرض کنید C_k منحنی به معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1 \qquad \text{(سه)}$$

باشد، که در آن $a^2 > b^2, k > -a^2, k \neq -b^2$.

۴۱. نشان دهید C_k بیضی است اگر $k > -b^2$ و هذلولی است اگر $-a^2 < k < -b^2$.

۴۲. نشان دهید همهٔ C_k ها کانونهای یکسان‌دارند (به‌این دلیل است که C_k را هم‌کانون می‌نامند).

۴۳. معادلهٔ (سه) را به ازای $a^2 = 4, b^2 = 1$ و $k = -3, -2, 0, 1$، که کانونهای F_1 و F_2 را مشخص‌می‌کنند، رسم نمایید.

۴۴. نشان دهید که هر بیضی C_k $(k > -b^2)$ به هر هذلولی $C_{k'}$ $(-a^2 < k' < -b^2)$ متعامد است؛ یعنی، نشان‌دهید که منحنیهای C_k و $C_{k'}$ درتمام نقاط اشتراکشان برهم عمودند.

۴۵. یک دایره به معادلهٔ قطبی زیر است:

$$r^2 - 3\sqrt{3}\, r \cos\theta - 3r \sin\theta - 7 = 0.$$

شعاع و مرکز آن را (در مختصات قطبی) بیابید .

۴۶ . مختصات قطبی جدید نقــاط $A = (4, \pi/3)$ ، $B = (1, 2\pi/3)$ ، و $C = (5, \pi/4)$ را پس از دوران محور قطبی تا آنکه از A بگذرد پیدا نمایید .

۴۷ . نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین نقاط به مختصات قطبی $(12, 4\pi/9)$ و $(12, -2\pi/9)$ را بیابید .

۴۸ . منحنی به معادلهٔ قطبی

$$r = a + b \sec \theta \qquad (a > 0, b > 0)$$

یــک **حلزونگون** نــام دارد . یکی از ســه حلزونگون $r = 2 + \sec \theta$، $r = 2 + 2 \sec \theta$، $r = 2 + 3 \sec \theta$ دارای " حلقه" است . آن کدام است ؟

معادلهٔ قطبی $F(r, \theta) = 0$ را طوری مثال بزنید که نمودارش نسبت به محور y متقارن بوده ولو اینکه مجموعهٔ جوابش با مجموعهٔ جواب هر یک از معادلات زیر یکی نباشد .

۴۹ . $F(-r, -\theta) = 0$ ۵۰ . $F(r, \pi - \theta) = 0$

۵۱ . $F(-r, -\theta) = 0$ یا $F(r, \pi - \theta) = 0$.

۵۲ . نقطهٔ P طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فواصلش تا دونقطهٔ ثابت F_1 و F_2 مقدار ثابت b^2 است (لذا ، $|PF_1||PF_2| = b^2$) .معادلهٔ دکارتی و معادلهٔ قطبی مسیــر P ، که **بیضی کاسینی** نام دارد ، را با اختیار $F_1 = (-a, 0), F_2 = (a, 0)$ در مختصات قائم یا معادلا " $F_1 = (a, \pi), F_2 = (a, 0)$ در مختصات قطبی پیدا کنید . بیضیهای کاسینی‌را به ازای $b^2 = 8,\ a^2 = 6, 8, 10$ رسم کرده ، و تفاوتهای کیفی این سه حالت را توصیف نمایید .

۵۳ . یک خط مار بر کانون F یک مخروطی تباه نشده با خروج از مرکز e و فاصلهٔ کانون تا هادی d مخروطی را در نقاط A و B قطع می‌کند . نشان دهید که مجموع

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}$$

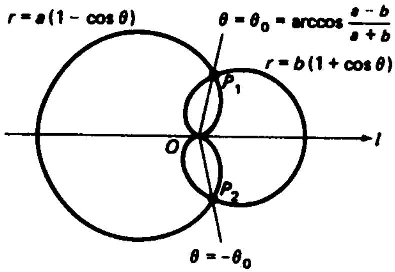
به ازای جمیع مواضع خط مقدار یکسانی دارد ؟

۵۴ . با استفاده از مختصات قطبی ، برهان دیگری برای خاصیت انعــکاسی سهمی که در صفحهٔ ۹۳۹ ثابت شد بیاورید .

۵۵ . نشان دهید که دوایر $r = a \sin \theta$ و $r = b \cos \theta$ در نقاط اشتراک ، صرف‌نظر از ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند (یعنی ، همدیگر را در زوایای قائمه قطع می‌کنند) .

۵۶ . دلگونهای $r = a(1 - \cos \theta)$ و $r = b(1 + \cos \theta)$ در قطب و دو نقطهٔ P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی متقارن‌اند همدیگر را قطع می‌کنند (رک .شکل ۹۶) . نشان دهید که

دلگونها در P_1 و P_2 ، بی‌توجه به ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند. زاویهٔ بین دلگونها در قطب چقدر است؟



شکل ۹۶

فرض کنید A_n مساحت یک پر رز $r = a\sin n\theta$ بوده، و A مساحت کل محصور به تمام رزباشد. نشان دهید که

۵۷. $A_n = \frac{\pi a^2}{4n}$

۵۸. $A = \frac{\pi a^2}{2}$ اگر n زوج باشد، ولی $A = \frac{\pi a^2}{4}$ اگر n فرد باشد.

۵۹. مساحت داخل هر دو دلگون $r = 1 + \sin\theta$ و $r = 1 - \cos\theta$ را بیابید.

۶۰. فرض کنید A_n مساحت محدود به محور قطبی و n دور اول مارپیچ ارشمیدسی $r = a\theta\ (\theta \geq 0, a > 0)$ باشد. نشان دهید که $A_{n+1} - A_n = 8\pi^3 a^2 n$ $(n \geq 1)$ ، A_1 ، A_2 ، A_3 ، و A_4 را بیابید.

۶۱. دو منحنی قطبی بستهٔ ساده با مساحات محصور مختلف مثال بزنید که هر یک از هر خط مار بر قطب پاره‌خطی به طول ثابت $2a$ جدا سازد.

۶۲. با استفاده از مختصات‌قطبی ،نشان‌دهید که مساحت محصور به حلقهٔ چینهٔ دکارت

$$x = \frac{3at}{t^3+1}, \qquad y = \frac{3at^2}{t^3+1} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

(ر.ک. شکل ۴۱ ، صفحهٔ ۷۳۷) مساوی است با $\frac{3}{2}a^2$.

راهنمایی. چینه دارای معادلهٔ دکارتی $x^3 + y^3 = 3axy$ است.

۶۳. اگر $0 < a < b$ ، لیماسون $r = a + b\cos\theta$ دو حلقه دارد، یکی حلقهٔ داخلی ودیگری حلقهٔ خارجی. مساحت بین دو حلقه را به دست آورید.

۶۴. نشان دهید که مارپیچ هذلولوی $r\theta = 1$ $(1 \le \theta < \infty)$ طول متناهی ندارد.

۶۵. طول منحنی قطبی

$$\theta = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \qquad (1 \le r \le 3)$$

را بیابید.

۶۶. طول منحنی به " معادلات پارامتری قطبی "

$$r = t, \qquad \theta = \ln t \qquad (0 < t \le 1)$$

را پیدا کنید. محاسبات را ابتدا با بیان r به صورت تابعی از θ امتحان نمایید.