

به نام خدا
روز نخست
روابط بازگشتی
<http://YazdCS.blog.ir>

۱ زیرمجموعه‌های نامتوالی

تعداد زیرمجموعه‌ها از اعداد ۱ تا n که هیچ دو عضو آن متوالی نیستند چندتا است؟

۲ زیرمجموعه‌های نامتوالی k عضوی

تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از اعداد ۱ تا n که هیچ دو عضو آن متوالی نیستند چندتا است؟

۳ نواحی صفحه

n خط داریم که هیچ دوتایی یک دیگر را قطع نمی‌کنند، همچنین هیچ ۳ تایی از یک نقطه نمی‌گذرند.

۱.۳ کل نواحی

تعداد نواحی ایجاد شده توسط این خطوط چندتا است؟

۲.۳ نواحی بسته

تعداد نواحی بسته ایجاد شده توسط این خطوط چندتا است؟

۴ پریش‌ها

به جایگشتی که هیچ عضوی از آن در سر جای خودش نیست پریش گوئیم، تعداد پریش‌ها را با کمک اصل شمول و عدم شمول و همچنین به شکل بازگشتی محاسبه کنید.

۵ کاتالان

یک شبکه‌ی $n \times n$ داریم، شخصی در گوشه‌ی پایین چپ این شبکه ایستاده است و می‌خواهد به گوشه‌ی بالاراست آن برسد، برای این کار در هر مرحله یک خانه به راست یا یک خانه به بالا می‌رود، اما دوست ندارد در هیچ مرحله‌ای از قطر اصلی شبکه پایین‌تر برود. (قطر اصلی خط واصل گوشه‌ی پایین چپ به بالاراست است.) برای حرکت و رسیدن به مقصود خود چند حالت دارد؟

۱.۵ پرانتزگذاری صحیح

ثابت کنید تعداد پرانتزگذاری‌های صحیح با n جفت پرانتز برابر با C_n است.

۲.۵ مثلث‌بندی n ضلعی

ثابت کنید تعداد حالت‌های مثلث‌بندی یک n ضلعی محدب برابر با C_{n-2} است.

۳.۵ توپ‌گذاری

n توپ کنار هم روی زمین قرار داده شده، می‌توانید به هر تعداد توپ روی توپ‌های فعلی قرار دهید به طوری که توپ‌های پایدار باشند. $C(n)$ را تعداد حالت‌های نهایی ممکن برای توپ‌ها در نظر بگیرید و رابطه‌ی بازگشتی‌ای برای آن محاسبه کنید.

۶ دنباله‌ی صعودی/نزولی

ثابت کنید هر دنباله‌ی $nm+1$ عضوی، یا یک زیردنباله‌ی $n+1$ عضوی صعودی یا یک زیردنباله‌ی $m+1$ عضوی نزولی دارد.

۷ زیردنباله‌ی مشترک*

ثابت کنید برای هر k طبیعی، n طبیعی‌ایی وجود دارد به طوری که به ازای هر سه جایگشت دلخواه از اعداد ۱ تا n ، در دست کم دو تا از آن‌ها زیردنباله‌ی یکسان و یکنوا به طول دست کم k وجود دارد.

۸ بلوک غیر تکراری

ثابت کنید بیشتر از 8^n عدد n رقمی وجود دارد که هیچ زیر دنباله‌ی متوالی از رشته دوبار پشت سرهم تکرار نشده باشد. [MOSP 2001, from Kvant]

۹ اختلاف یکی‌ای

n را یک عدد طبیعی در نظر بگیرید. تعداد اعداد طبیعی در مبنای n را بیابید که هر رقم آن به غیر از چپ‌ترین رقم، رقمی را در سمت چپ خود با فاصله‌ی یک یا بیشتر داشته باشد به طوری که اختلاف این دو رقم ± 1 باشد. [USAMO 1990]