حالت نیز پیوسته می‌باشد.

۲-۳ فرآیند تولد و مرگ

این فرآیند علاوه بر آنکه یکی از ابتدائی‌ترین شکل مدلهای صف می‌باشد، فرموله کردن وبررسی تحلیلی آن، امکان اثبات فرمولهای مدلهای دیگر صف را فراهم می‌سازد.

این فرآیند در تئوری احتمالات و فرآیندهای تصادفی کاربردهای گوناگونی دارد. ولی در این کتاب فقط از لحاظ مدلهای صف مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در این فرآیند منظور از تولد، ورود برنامه (مشتری و...) به سیستم و مرگ به معنی خروج برنامه (مشتریان و...) از سیستم می‌باشد.

(وضعیت سیستم با تعداد برنامه‌های (مشتری و...) سیستم یعنی N در زمان T به صورت N(T) نشان داده می‌شود. در فرآیند تولد و مرگ، بررسی می‌شود که متغیر تصادفی N(T) چگونه با زمان تغییر پیدا می‌کند. در حالی که می‌دانیم تولد (ورود) و مرگ (خروج) به طور تصادفی، بوقوع می‌پیوندند. در مطالعه فرآیند ورود به، و خروج از سیستم موارد ذیل را در نظر می‌گیریم:

الف - اگر وضعیت سیستم $N(t)=n$ باشد، مدت زمان باقی مانده برای آنکه ورود بعدی اتفاق بیافتد، دارای توزیع نمائی با پارامتر λ_n ، $n = 0,1,2,...$ می‌باشد.

ب - اگر وضعیت سیستم $N(t) = n$ باشد، مدت زمان باقی مانده برای آنکه خروج بعدی اتفاق بیافتد، دارای توزیع نمائی با پارامتر μ_n ، $n = 1,2,...$ می‌باشد.

ج - در هر زمان تنها یک ورود یا یک خروج می‌تواند رخ دهد.

طبق رابطه توزیع نمائی و توزیع پواسن که قبلاً اشاره کردیم (فصل ۲)، λ_nو μ_nبه ترتیب میانگین نرخ ورود و خروج، در فرآیند می‌باشند. طبیعی است که اگر مشتری (برنامه و...) در سیستم باشد با یک ورود (تولد) وضعیت سیستم از n به n+1 انتقال می‌یابد و اگر وضعیت سیستم n باشد، یک خروج (مرگ) وضعیت سیستم را به n-1 انتقال می‌دهد. شکل زیر فرآیند ورود و خروج (تولد و مرگ) رابیان می‌کند. بطوریکه P_n عبارتست از احتمال این که سیستم در وضعیت n باشد.

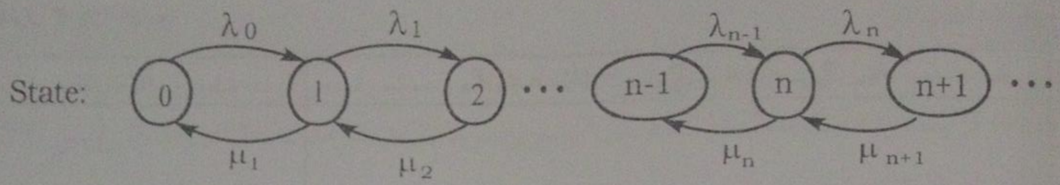
بدیهی است که تعیین مشخصات سیستم هنگامی که در حالت انتقالی یا گذرا (transient)، باشد غالباً مشکل است. در حالی که بعد از آن که سیستم به یک وضعیت یکنواخت (steady state) رسید، می‌توان آن را به ترتیب زیر مورد بررسی قرار داد.

فرض کنید که سیستم در وضعیت n باشد. در این صورت تعداد دفعاتی که فرآیند وارد وضعیت n و از وضعیت n خارج می‌شود را بررسی می‌نمائیم. چون ورود / خروج در وضعیت n به صورت یکی در میان اتفاق می‌افتد، پس تعداد دفعات ورود و خروج یا باهم مساوی و یا آنکه ۱ واحد باهم اختلاف دارند. این اختلاف در مواردی که تعداد دفعات ورود / خروج سیستم زیاد باشد ناچیز است.

بر اساس این بررسی، به یک اصل در فرآیند تولد و مرگ می‌رسیم که عبارتست از اصل تساوی نرخ ورود و خروج.

Rate in = Rate out

بر اساس تساوی مذکور برای تمام وضعیتهای ممکن، احتمال اینکه دقیقاً n مشتری در سیستم باشد را



شکل ۳-۱ فرآیند ورود و خروج

میتوان محاسبه نمود.

برای توضیح بیشتر فرض کنید سیستم در وضعیت صفر است. یعنی هیچ مشتری در سیستم وجود ندارد. طبق شکل ۳-۱ سیستم فقط از وضعیت یک می‌تواند وارد وضعیت صفر بشود (یعنی یک مشتری در سیستم باشد و این مشتری از سیستم خارج شود).

بنابراین اگر احتمال اینکه سیسستم در وضعیت یک باشد P_1 بنامیم و میانگین نرخ خروج از آن و ورود به وضعیت صفر دارای نرخ μ_1 باشد داریم:

میانگین نرخ ورود به وضعیت صفر $=\mu_1 P_1$

همینطور برای خروج از وضعیت صفر، می‌بایست یک ورود (تولد) اتفاق بیافتد. احتمال اینکه سیستم در وضعیت صفر باشد P_0 و نرخ ورود در وضعیت صفر برابر λ_0 است. پس میانگین نرخ خروج از وضعیت صفرُ عبارتست از:

میانگین نرخ خروج از وضعیت صفر $=\lambda_0 P_0$

بنابراین معادله تعادل (Balance Equatioon) برای وضعیت صفر عبارتست از: $\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$

به همین ترتیب برای وضعیت یک داریم:

میانگین نرخ ورود به وضعیت یک $=\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2$

میانگین نرخ خروج از وضعیت یک $=\mu_1 P_1 + \lambda_1 P_1 = (\mu_1 + \lambda_1) P_1$

بنابراین معادله تعادل وضعیت یک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\mu_1 + \lambda_1)\ P_1$$

با همین استدلال می‌تواند جدول ۳-۱ را برای وضعیت‌های مختلف تشکیل داد:

جدول ۳-۱ معادلات انتقال وضعیتها

شماره‌وضعیت	معادله‌وضعیت نرخ خروج = نرخ ورود
۰	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
۱	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = (\mu_1 + \lambda_1) P_1$
۲	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = (\mu_2 + \lambda_2) P_2$
⋮	⋮
n − ۱	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = (\lambda_{n-1} + \mu_{n-1}) P_{n-1}$

جدول ۳-۱ (ادامه)

n	$\lambda_{n-1}P_{n-1} + \mu_{n+1}P_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n)P_n$
. . .	. . .

ملاحظه می‌شود که معادله اول (معادله وضعیت صفر) دارای دو احتمال P_0 ، P_1 و معادله دوم شامل سه احتمال P_0، P_1 و P_2 می‌باشد. بنابراین تمام معادلات را می‌توان برحسب احتمال P_0 بدست آورد. توضیح فوق را به زبان ریاضی زیر میتوان فرموله نمود:

وضعیت	احتمال مورد نظر
۰	$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$
۱	$P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 P_1 - \lambda_0 P_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$
. . .	
n−۱	$P_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} + \frac{1}{\mu_n}(\mu_{n-1} P_{n-1} - \lambda_{n-2} P_{n-2}) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1} \cdots\cdots \lambda_0}{\mu_n \cdots\cdots \mu_1} P_0$
n	$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}(\mu_n P_n - \lambda_{n-1} P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n \cdot \lambda_{n-1} \cdots\cdots \lambda_0}{\mu_{n+1}\mu_n \cdots\cdots \mu_1} P_0$

برای تسهیل بیان ریاضی فرض کنید:

$$\boxed{R_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1}\cdots\mu_1}} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

از روابط فوق نتیجه گیری می شودکه:

$$P_n = R_n P_0$$

چون میدانیم که مجموع احتمال حالات ممکن باید برابر یک شود یعنی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

بنابراین رابطه زیر نتیجه گیری می شود:

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n\right) P_0 = 1$$

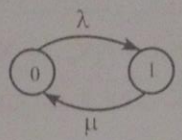
و یا

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_n}$$

مثال ۳_۳

در یک سیستم کامپیوتری وضعیت سرویس CPU به دو صورت تعریف می‌گردد: مشغول (BUSY) و بیکار (idel). فرآیند ورود برنامه‌ها به سیستم دارای توزیع پواسن با پارامتر λ و مدت زمان دریافت سرویس CPU، دارای توزیع نمائی با پارامتر μ می‌باشد.

دیاگرام وضعیت انتقال سیستم برای این مدل تولد و مرگ به صورت زیر است:



لازم به ذکر است که وضعیت صفر به معنی بیکار بودن CPU و وضعیت یک به معنی مشغول بودن آن می‌باشد.

بنابر قانون احتمال داریم: (۱) $P_۰ + P_۱ = ۱$

معادله مربوط به وضعیت‌های سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\mu P_۱ = \lambda_۰ P_۰$$

بنابراین:

$$P_۱=(\frac{\lambda}{\mu}).P_۰$$

پس معادله (۱) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$P_۰ + P_۱ = P_۰\,(۱ + \frac{\lambda}{\mu})$$

بنابراین:

$$P_۰ = \frac{\mu}{(\lambda + \mu)}$$

و

$$P_۱ = \frac{\lambda}{\mu} P_۰ = \frac{\lambda}{(\lambda + \mu)}$$

۳-۳ زنجیره‌های مارکف

فرآیند تصادفی $\{X(t_i), t_i \in T\}$ را یک فرآیند مارکف گوئیم، اگر برای زمانهای مختلف $t_۱ < t_۲ <...< t_n < t_{n+۱}$ و $n+۱$ حالت مختلف (وضعیت) رابطه ذیل برقرار باشد:

$$P[X(t_{n+۱})=x_{n+۱} \mid X(t_۱)=x_۱, X(t_۲)=x_۲,...,X(t_n)=x_n]=P[X(t_{n+۱})=x_{n+۱} \mid X(t_n)=x_n]$$

معادله فوق نشان می‌دهد که آینده فرآیند فقط به حالت فعلی وابسته می‌باشد و ارتباطی به گذشته فرآیند ندارد. این مشخصه که قبلاً نیز بحث شد، به خاصیت بدون حافظه معروف است. فرآیندهای مارکف در جدول ذیل دسته بندی می‌گردند:

با توجه به جدول ۳-۲، فرآیند مارکف را زنجیره مارکف گوییم که فضای حالت (وضعیت) به صورت گسسته باشد.

فرض کنید زنجیره مارکف با زمان گسسته $\{X_n \mid X_n = X(t_n)\}$ باشد در این صورت داریم: