

حل دستگاههای معادلات متقارن

آرون دومان

ترجمه محمدمهدی طاهری

چکیده:

این یادداشت روشی ساده ولی کارآمد برای حل دستگاههای معادلات متقارن از توابع گویا را نشان خواهد داد. با دستکاری کردن معادلات داده شده می توان چندجمله ایی ساخت که ریشه هایش جواب های خواسته شده می باشند.

فرض کنید توابع گویای f, g با شرایط زیر داده شده اند.

(1) f تابعی گویا و یک متغیره است.

(2) g تابعی گویا و متقارن با $n-1$ متغیر است. (به ازای بعضی $n \geq 2$) و می خواهیم همه اعداد

مختلط متمایز $x_1, x_2, \dots, x_n$ را بیابیم به نحوی که:

$$f(x_1) = g(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$f(x_2) = g(x_3, x_4, \dots, x_n, x_1)$$

.

.

.

$$f(x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})$$

با نمایش دادن سمت راست i امین معادله بر حسب مجموع های متقارن متغیرها می توانیم چندجمله ایی با ریشه های $x_1, x_2, \dots, x_n$ بیابیم. این تکنیک در مثال هایی که در پی می آید روشن می شود:

مساله 1: همه اعداد مختلط متمایز x, y, z را بیابید به طوری که:

$$\begin{cases} x = y^3 + z^3 \\ y = z^3 + x^3 \\ z = x^3 + y^3 \end{cases}$$

راه حل: فرض کنید $s_1 = x + y + z$ و $s_2 = xy + yz + zx$ و $s_3 = xyz$ در اینصورت بنا بر اتحاد مشهور زیر:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz + (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 3s_3 + s_1(s_1^2 - 3s_2) \\ = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$$

می توانیم معادلات مزبور را به این شکل بنویسیم:

$$\begin{cases} x = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 - x^3 \\ y = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 - y^3 \\ z = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 - z^3 \end{cases}$$

چون x, y, z متمایز هستند لذا باید هریک برابر یکی از سه جواب معادله زیر باشند:

$$t = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 - t^3$$

یا معادله زیر :

$$t^3 + t - (s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3) = 0$$

با روابط ویت (که ضرایب $t^3 + t - (s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3)$ و $t^3 - s_1t + s_2t - s_3$ را محاسبه می کند) داریم:

$$\begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 1 \\ s_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 \end{cases}$$

با قرار دادن $s_1 = 0$ و $s_2 = 1$ در معادله سوم بدست می آوریم بنابراین $s_3 = 0$. در نتیجه x, y, z ریشه های $t^3 + t = 0$ بنابراین جواب ها $(0, i, -i)$ و جایگشت های دیگر آن هستند. □

مساله 2: همه اعداد مختلط متمایز a, b, c, d را بیابید که در این شروط صدق کنند:

$$\begin{cases} a^4 = bcd + 1 \\ b^4 = acd + 1 \\ c^4 = abd + 1 \\ d^4 = abc + 1 \end{cases}$$

راه حل : فرض کنیم $s_4 = abcd$. با ضرب معادله اول در a ، معادله دوم در b ، معادله سوم در c و معادله چهارم در d بدست می آوریم:

$$\begin{cases} a^5 = a + s_4 \\ b^5 = b + s_4 \\ c^5 = c + s_4 \\ d^5 = d + s_4 \end{cases}$$

بنابراین a, b, c, d ریشه های چندجمله ای $t^5 - t - s_4$ هستند. متأسفانه این چند جمله ای یک ریشه اضافه دارد که به کار ما نمی آید. آن را r می نامیم. می توانیم با در نظر گرفتن اینکه $abcd r = s_4$ از شر این ریشه راحت شویم. بنابراین یا $r = 1$ یا $abcd = s_4 = 0$. اگر $r = 1$ آنگاه

$$1^5 - 1 - s_4 = 0 \Rightarrow s_4 = 0$$

بنابراین در همه حالات $s_4 = 0$ و $a, b, c, d, 1$ ریشه های چند جمله ای زیر هستند:

$$t^5 - t = t(t-1)(t+1)(t^2+1)$$

بنابراین جواب ها $(0, -1, i, -i)$ و جایگشت های آن هستند. ($r = 1$ و $s_4 = 0$ معادل هستند). □

همانگونه که در بالا نشان داده شد، ممکن است حذف کردن یک ریشه ناخواسته چندان دشوار نباشد. اما وقتی بیش از یک ریشه اضافی وجود دارد حتی در ساده ترین معادلات هم به ندرت پاسخ های زیبا بدست می آید.

مثال بعدی این تکنیک را برای حل معادلات متقارن با توابع گویا نشان می دهد.

مساله 3 : همهٔ اعداد مختلط متمایز را بیابید به طوری که:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 = \frac{y^2 + z^2}{yz - 1} \\ y^3 + y^2 = \frac{z^2 + x^2}{zx - 1} \\ z^3 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{xy - 1} \end{cases}$$

راه حل : فرض کنید $xyz = 0$ ، مثلاً $x = 0$. در اینصورت معادله ها به سادگی نتیجه می دهند که $y = 0$ که با $x \neq y$ در تناقض است بنابراین $xyz \neq 0$.

فرض کنید s_1, s_2, s_3 مجموع های متقارن برحسب x, y, z باشند. در اینصورت داریم :

$$x^2 + y^2 + z^2 = s_1^2 - 2s_2$$

بنابراین دستگاه معادلات نشان می دهد که x, y, z جواب های معادله زیر هستند:

$$t^3 + t^2 = \frac{s_1^2 - 2s_2 - t^2}{\frac{s_3}{t} - 1}$$

که با این معادله هم ارز است:

$$-t^3 + (s_3 - 1)t^2 + s_3t = s_1^2 - 2s_2 - t^2$$

در نتیجه:

$$t^3 - s_3t^2 - s_3t + s_1^2 - 2s_2 = 0$$

با استفاده دوباره از روابط ویت بدست می آوریم:

$$\begin{cases} s_1 = s_3 \\ s_2 = -s_3 \\ s_3 = -s_1^2 + 2s_2 \end{cases}$$

با استفاده از دو معادله اول بدست می آید: $s_3^2 + 3s_3 = 0$ اگر $s_3 = 0$ آنگاه $s_1 = s_2 = 0$ بنابراین $x = y = z = 0$ که امکان ندارد. بنابراین $s_3 = -3$ و x, y, z ریشه های

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 3 = 0 \text{ یا } (t+1)^3 + 2 = 0$$

هستند. لذا جواب ها عبارتند از:

$$(-1 - \sqrt[3]{2}, -1 - \sqrt[3]{2}\omega, -1 - \sqrt[3]{2}\omega^2)$$

و جایگشت های آن. در اینجا ω ریشه سوم واحد می باشد. $\square$

مساله پایانی امکان گسترش این روش را از توابع گویا به توابع دیگر نشان می دهد:

مساله 4: همه اعداد حقیقی و متمایز x, y, z را بیابید به طوری که :

$$\begin{cases} 2^x = 2^y + 2^z - yz \\ 2^y = 2^z + 2^x - zx \\ 2^z = 2^x + 2^y - xy \end{cases}$$

راه حل: فرض کنید $a = 2^x + 2^y + 2^z, b = xyz$ بنابراین دستگاه معادلات به این شکل در می آید:

$$2^t = a - 2^t - \frac{b}{t}, \quad t = x, y, z \text{ برای}$$

که معادل است با:

$$t(2^{t+1} - a) + b = 0$$

که این نتیجه می دهد x, y, z صفرهای تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هستند که به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(t) = t(2^{t+1} - a) + b$$

چون x, y, z متمایز هستند و $f(x) = f(y) = f(z) = 0$ نتیجه می گیریم که $f'(x)$ باید حداقل دو صفر مجزا داشته باشد. ضمناً معادله $f'(t) = 0$ به این صورت است:

$$t \ln 2 + 1 - a2^{-t-1} = 0 \quad \text{یا} \quad (t \ln 2 + 1)2^{t+1} = a$$

تابع $t \rightarrow t \ln 2 + 1 - a2^{-t-1}$ صعودی است بنابراین چون $a > 0$ ، این تابع حداکثر یک صفر دارد.

در نتیجه f' حداکثر یکبار صفر می شود و دستگاه معادلات جواب ندارد. $\square$

تذکر نهایی:

با اینکه در اصل، با این روش می توان هر دستگاه معادلات متقارنی از توابع گویا را حل کرد، در عین حال این روش را تنها در شرایط بسیار محدودی می توان بکار برد. در واقع باید معادلات مزبور متقارن بوده و جواب های مورد نظر متمایز باشند. علاوه بر این وقتی چندجمله ایها بیش از یک یا دو ریشه ناخواسته داشته باشند، کنار گذاشتن این ریشه ها خسته کننده خواهد بود و جواب ها به کلی زشت خواهند شد! با این حال این امکان وجود دارد که بتوان این روش را به گونه ای تعمیم داد که برای یافتن جواب های نامتمایز دستگاه های معادلات متقارن از توابع گویا یا حتی دستگاه های معادلاتی که شامل توابع گویا نیستند کارآمد باشد.

آرون دومان، دانشگاه کالیفرنیا، برکلی

این نوشتار ترجمه ای بود از:

Mathematical Reflections 1 (2014), Solving Systems of Equations, Aaron Doman