کاربردهای دیگر انتگرالگیری ۸

در این فصل کاربردهای انتگرالگیری را که در فصل ۴ آغاز شد دنبال می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان حجم یک جسم، بخصوص جسم دوار، را با انتگرالگیری حساب کرد. سپس مفهوم منحنی را طوری تعمیم می‌دهیم که از قید نسبتاً "غیرواقعی که منحنی نمودار یک تابع است رها گردد. این ما را به مفهوم "منحنی پارامتری" رسانیده، و ما را در وضعی قرار می‌دهد که بتوانیم طول یک منحنی کلی و مساحت یک سطح دوار کلی را محاسبه کنیم. بالاخره، از مسائل هندسه به مسائل فیزیک و مهندسی رفته، و چند مطلب در مکانیک سیالات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۰۸ حجم به روش مقاطع عرضی

در این بخش و بخش بعد، حجم اجسام را با استفاده از انتگرالگیری حساب می‌کنیم. مثل شکل ۱ (آ)، فرض کنیم S یک جسم، یعنی یک ناحیهٔ سه‌بعدی، باشد و L خطی باشد که ما آن را محور x می‌گیریم. بعضی از صفحات عمود بر L، S را در نواحی دو بعدی به نام **مقاطع عرضی** S قطع می‌کنند. فرض‌کنیم $A(x)$ مساحت مقطع عرضی S در x باشد، که‌منظور مقطع عرضیی است که از S توسط صفحهٔ عمود بر L در نقطهٔ L به مختص x جدا می‌کند (ر.ک. شکل). همچنین، فرض کنیم

(یک) یک صفحهٔ عمود بر L، S را قطع می‌کند اگر و فقط اگرصفحه L را درنقطه‌ای از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ قطع نماید؛

(دو) تابع $A(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، تعریف مناسبی از حجم V جسم S را

می‌توان با فرمول

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad (1)$$

داد . دلیل آن تقریبا "به‌موازات‌ساخت صفحات ۳۶۷ تا۳۶۹است‌که به‌انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ به عنوان تعریف مناسب مساحت تحت نمودار تابع پیوستهٔ $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ منجر شد .

فرض کنیم

$$a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b \qquad (2)$$

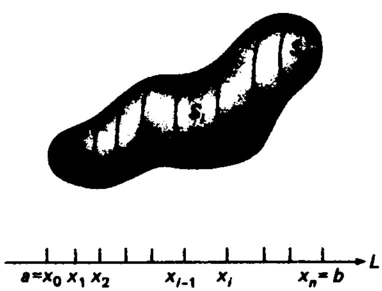
نقاط تقسیم بازهٔ $[a, b]$ صادق‌درنامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ باشند . این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازهٔ

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

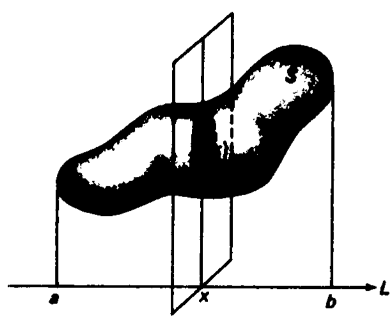
تقسیم می‌کنند ، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است . طبق‌معمول‌فرض‌کنیم

$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$$

اندازهٔ مش تقسیم (۲) یعنی طول ماکزیمم تمام زیربازه‌ها ، باشد . صفحات عمودبرخط L در نقاط x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ جسم S را به n برش نازک $S_1, S_2, \ldots, S_n$ مطابق‌شکل ۱ (ب)



(ب)



(آ)

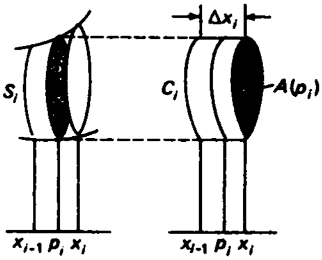
شکل ۱

تقسیم می‌کنند . برش i م به ضخامت Δx_i را درنظر بگیرید . تابع $A(x)$ پیوسته است؛ و درنتیجه ، اگر مقدار Δx_i به قدرکافی کوچک باشد ، مقدارش بر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ تغییر مختصری می‌کند . لذا ، در محاسبهٔ حجم S ، اگر

(یک) $A(x)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $A(p_i)$ را داشته باشد که در آن p_i نقطهٔ‌دلخواهی

از $[x_{i-1}, x_i]$ است[۱]:

(دو) از این صرف‌نظر شود که اضلاع S_i در حالت‌کلی مثل‌شکل ۲ مایلند و S_i را با استوانهٔ قائم C_i تولید شده به وسیلهٔ حرکت مقطع عرضی S در p_i به فاصلهٔ Δx_i درامتدادخطی



شکل ۲

عمود بر مقطع عرضی، یعنی موازی L، عوض کنیم،
آنگاه تقریب مناسبی برای این حجم خواهیم یافت.

در هندسه حجم یک استوانهٔ قائم با مساحت‌مقطع عرضی A و ارتفاع h مساوی‌حاصل ضرب A و h تعریف می‌شود. بنابراین، اگر V_i حجم استوانهٔ C_i باشد، داریم

$$V_i = A(p_i)\Delta x_i. \tag{۳}$$

چون حجم تمام S مساوی مجموع احجام n برش $S_1, S_2, \ldots, S_n$ بوده و حجم هربرش S_i تقریبا" مساوی حجم (۳) استوانهٔ نظیر C_i است، پس

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(p_i)\Delta x_i. \tag{۴}$$

می‌بینید که طرف راست (۴) مجموع ریمانی از تابع $A(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ است.

حجم به عنوان انتگرال. قدم آخر به شیوه‌ای برداشته می‌شود که اینک برای ما آشناست. فرض‌کنیم تمام برشهای S_i، و در نتیجه تمام استوانه‌های تقریب‌ساز C_i، باریکتروباریکتر شوند؛ یعنی، اندازهٔ مش μ به صفر نزدیک شود. در این صورت، انتظار اینکه تقریب (۴) بهتر و بهتر شود معقول است. حال، با توجه به این نکات، می‌توان حجم V جسم S را با حد

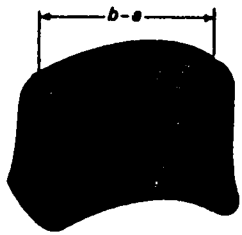
$$V = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(p_i)\Delta x_i$$

---

۱. بستگی تقریب به انتخاب خاصی از نقاط p_i در حد وقتی $\mu \to 0$ از بین خواهد رفت.

تعریف‌کرد . این‌فرمول (۱) راثابت‌می‌کند ،زیرا حد موردنظر چیزی‌جز انتگـرال $\int_a^b A(x)\,dx$ نیست ، که وجود آن را فرض پیوستگی $A(x)$ تضمین می‌کند .

مثال ۱ . فرض‌کنیم مقاطع عرضی جسم S ،مثل‌شکل۳، مساحت مساوی داشته باشند؛ یعنی



شکل ۳

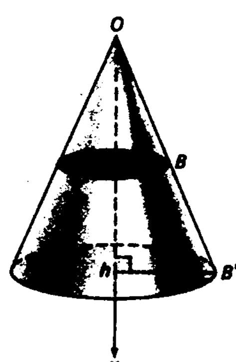
$A(x)$ دارای مقدار ثابت A_0 باشد. در ایـــن صـــورت ، فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b A_0\,dx = A_0(b-a).$$

این همان حجم استوانهٔ قائم با مساحت قاعدهٔ A_0 و ارتفاع $b-a$ است ، ولی البته S می‌تواند بدون استوانه بودن دارای مساحت مقطع عرضی ثابت باشد .

مثال ۲ . حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را بیابید .

حل . مثل شکل۴ ، محور تقارن‌مخروط‌را محور x (به‌سمت‌پایین) و رأس مبدأ O می‌گیریم .



شکل ۴

در این صورت ، $A(x) = \pi y^2$ ، که در آن $y = y(x)$ شعاع مقطع عرضی در x است (یک قرص مستدیر) . مثلثهای قائم OBx و $OB'h$ متشابه‌اند ؛ و درنتیجه ،

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h}.$$

بنابراین ،

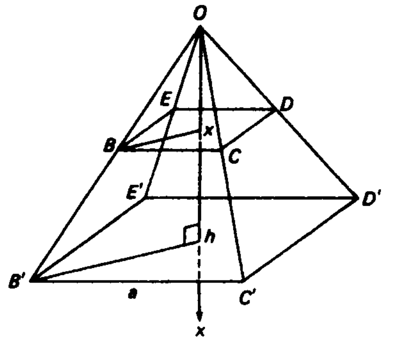
$$y = \frac{r}{h}x, \qquad A(x) = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2,$$

و فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{1}{3}\pi r^2 h. \tag{۵}$$

مثال ۳. حجم V هرم قائم به ارتفاع h را که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است بیابید.

حل. مثل شکل ۵ ، محور x را خطی می‌گیریم که از رأس هرم به پایین بوده و برقاعدهٔ هرم



شکل ۵

عمود است . فرض کنیم مبداء O در رأس بوده ، و h مختص نقطهٔ برخورد محور x با قاعده باشد . مساحت $A(x)$ مقطع عرضی هرم در x مساحت مربع $BCDE$ در شکل است . بنا بر تشابه مثلثهای OBC و $OB'C'$ ، داریم

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}.$$

به‌علاوه ، بنابر تشابه مثلثهای OBx و $OB'h$ ،

$$\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|Ox|}{|Oh|} = \frac{x}{h}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{|BC|}{|B'C'|}=\frac{x}{h},$$

یعنی،

$$|BC|=\frac{|B'C'|}{h}x=\frac{a}{h}x.$$

بنابراین،

$$A(x)=|BC|^2=\frac{a^2}{h^2}x^2,$$

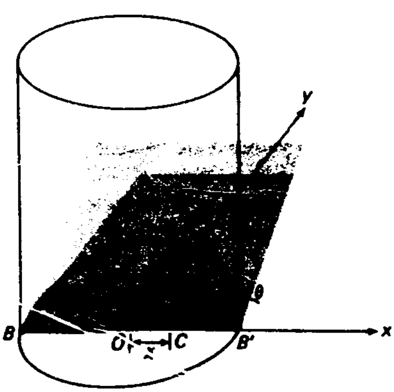
و این بار فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$V=\int_0^h A(x)\,dx=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx=\frac{1}{3}a^2h. \qquad (۶)$$

مساحت قاعدهٔ مخروط مثال ۲ مساوی πr^2 است، حال آنکه در مورد هرم مثال ۳ مساوی a^2 است. لذا، هر دو فرمول (۵) و (۶) برحسب مساحت قاعدهٔ A_0 و ارتفاع h جسم داده شده به شکل $\frac{1}{3}A_0h$ درمی‌آیند. البته، این یک امر تصادفی نیست (ر. ک. مسئلهٔ ۱۹).

مثال ۴. حجم V گوهٔ بریده شده از یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r توسط صفحهٔ مار بر قطری از قاعدهٔ استوانه را که با قاعده زاویهٔ θ می‌سازد پیدا کنید.

حل. مثل شکل ۶، در قاعده یک دستگاه مختصات قائم با محور x در امتداد قطر BB'، مبداء O در نقطهٔ میانی BB' (بر محور استوانه)، و محور y عمود بر BB' در O درنظر



شکل ۶

می‌گیریم . قاعدهٔ گوه به پاره‌خط BB' و نیمدایرهٔ $x^2+y^2=r^2$ ، $y \geq 0$ ، محدودبوده و مقطع عرضی در x مثلث قائم CDE به مساحت

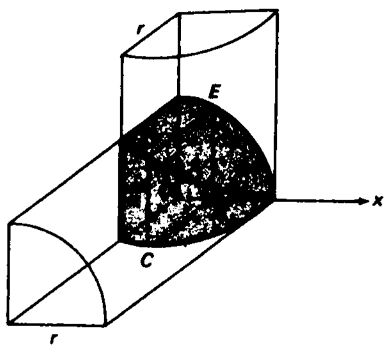
$$A(x)=\frac{1}{2}|CD||DE|=\frac{1}{2}|CD|^2\tan\theta=\frac{1}{2}y^2\tan\theta=\frac{1}{2}(r^2-x^2)\tan\theta$$

می‌باشد . لذا ، با اعمال فرمول (۱) معلوم می‌شود که

$$V=\int_{-r}^{r}A(x)\,dx=\frac{1}{2}\tan\theta\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\tan\theta\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\frac{2}{3}r^3\tan\theta.$$

هرگاه h ارتفاع گوه باشد ، آنگاه $h=|FG|=r\tan\theta$ (ر.ک. شکل) ؛ درنتیجه ، حجم گوه را می‌توان به شکل $V=\frac{2}{3}r^2h$ نوشت .

مثال ۵ . دو استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r یکدیگر را ، مثل شکل ۷ ، در زاویهٔ قائمه‌قطع



شکل ۷

می‌کنند . حجم V جسم S مشترک میان دو استوانه‌را بیابید .

حل . ناحیهٔ سایه‌دار شکل یکهشتم جسم S است . با انتخاب محور x به صورت نموده‌شده و مبداء O در نقطهٔ اشتراک محورهای استوانه ، معلوم می‌شود که مقطع جسم S در x مربع $BCDE$ به طول ضلع $|BC|=\sqrt{r^2-x^2}$ است . بنابراین ، $A(x)=r^2-x^2$ ؛ در نتیجه

$$V=8\int_{0}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\frac{16}{3}r^3.$$

مسائل

حجم جسم S که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به سهمی $y = x^2 + 1$ ، محورهای مختصات ، و خط $x = 1$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود برمحور x

۱. یک مربع

۲. یک نیمدایره با قطر در صفحهٔ xy

باشد .

قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین محور x و منحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است . حجم S را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۳. یک مستطیل به ارتفاع ۱

۴. یک مربع

باشد .

حجم جسم S که قاعده‌اش قرص مستدیر $x^2 + y^2 \leq 9$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۵. یک مربع

۶. یک نیمدایره با قطر واقع در صفحهٔ xy

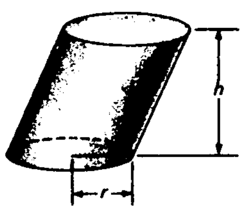
۷. یک مثلث متساوی‌الاضلاع

۸. یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر واقع در صفحهٔ xy

باشد .

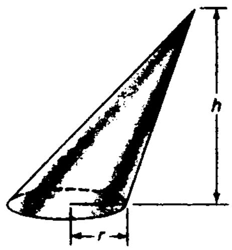
حجم اجسام زیر را بیابید .

۹. یک استوانهٔ مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۸) .



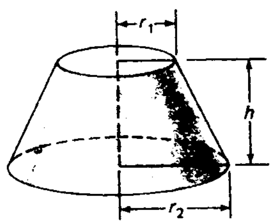
شکل ۸

۱۰. یک مخروط مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۹) .



شکل ۹

۱۱ . جسم نموده شده در شکل ۱۰ یک **مخروط ناقص** از یک مخروط مستدیر قائم نام دارد .
حجم مخروط ناقص را برحسب شعاع قاعدهٔ بالایی r_1 ، شعاع قاعدهٔ پایینی r_2 ، و



شکل ۱۰

ارتفاع h آن بیان کنید .

۱۲ . آب در یک لگن نیمه‌کروی به شعاع r فوت ریخته شده است . حجم آب لگن را وقتی بیابید که آب دارای عمق h فوت باشد . لگن تا چه درصدی باید پر شود تا عمق آب $\frac{1}{2}r$ فوت گردد؟ عمق آب وقتی 75% لگن پر باشد چقدر است؟

قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین دو سهمی $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$ است . حجم S را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x مساوی

۱۳ . یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر واقع درصفحهٔ xy و یک زاویهٔ $30°$

۱۴ . یک شش ضلعی منتظم با یک ضلع واقع در صفحهٔ xy

باشد .

مثل مسائل۳و۴، قاعدهٔجسم S ناحیهٔ بین‌محور x ومنحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است . حجم S را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای عمودبر محور y مساوی

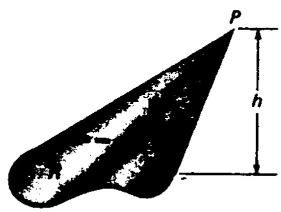
۱۵ . یک مستطیل به ارتفاع ۱

۱۶. یک مربع
باشد.

۱۷. قاعدهٔ جسم S مثلث متساوی‌الاضلاع T به‌ارتفاع h است. فرض کنید هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر ارتفاع ثابت T یک قرص مستدیر به قطر واقع بر T باشد. حجم S را به دو راه بیابید.

۱۸. مقطع عرضی منارهٔ یک کلیسا در فاصلهٔ x فوت از نوک آن با صفحه‌ای عمود برمحور تقارن آن مربعی است‌که طول قطرش $\frac{1}{25}x^2$ فوت است. حجم مناره درصورتی‌که ارتفاع آن 10 فوت باشد، چیست؟

۱۹. فرض کنید R یک ناحیهٔ مسطح به مساحت A_0 بوده، و P نقطه‌ای به فاصلهٔ h از صفحهٔ R باشد. در این صورت، پاره‌خط مرسوم از P تا نقطهٔ R جسم C، به نام *مخروط کلی*، را جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۱۱).



شکل ۱۱

نشان دهید که حجم C مساوی $\frac{1}{3}A_0h$ است.

۲۰. فرض کنید S یک **منشورگون** باشد، یعنی جسم محدود به دو وجه مسطح و یک سطح جانبی. وجوه مسطح که لازم نیست چند ضلعی باشند[1]، **قواعد** S نامیده می‌شوند. فرض کنید قاعده‌ها به فاصلهٔ h بوده، و مساحت مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی قاعده‌ها یک تابع چند جمله‌ای مانند $A(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ از درجهٔ نابیشتر از 3 باشد، و محور x بر قاعده‌ها عمود بوده، و هر نقطه از محور x را بتوان مبداء گرفت. به کمک فرمول منشور (یک)، صفحهٔ ۶۷۳، نشان دهید که حجم جسم S از فرمول زیر به دست می‌آید:

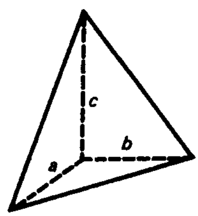
---

۱. مثلاً "، هر مخروط ناقص یک منشورگون است؛ همچنین، یک قطعهٔ کروی (ر.ک. مسئلهٔ ۲۷). منشورگون را منشور نامند اگر قاعده‌ها چندضلعیهای همنهشت بوده و سطح جانبی از متوازی‌الاضلاعهایی تشکیل شده باشدکه رئوس و قواعد نظیر را به هم وصل می‌کنند.

$$V = \frac{1}{6} h(B_1 + 4B + B_2),$$

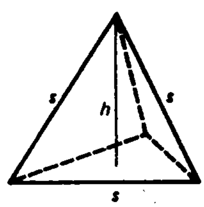
که در آن B_1, B_2 مساحات قاعده‌ها بوده ،و B مساحت مقطع عرضی S به‌وسیلهٔ صفحه در وسط قواعد می‌باشد . این فرمول مربوط به V نیز به فرمول منشورگون معروف است (و پیدایش اصطلاح " منشورگون" را توضیح می‌دهد) . با استفاده از آن ، محاسبات مسئلهٔ ۱۱ را ساده کنید .

۲۱ . حجم چهاروجهی (هرم مثلث‌القاعده) با سه وجه دوبدو متعامد و سه ضلع دوبدو متعامد به طولهای a ، b ،و c را بیابید (ر.ک. شکل ۱۲) .



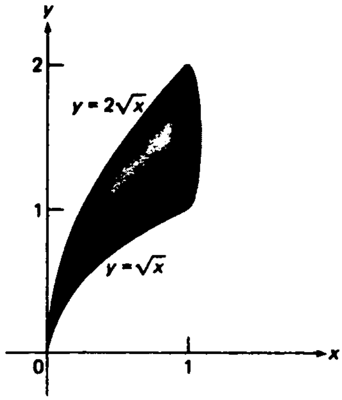
شکل ۱۲

۲۲ . یک چهاروجهی را منتظم گویند اگر وجوه آن مثلثهای متساوی‌الاضلاعی باشند . ارتفاع h و حجم V یک چهاروجهی منتظم به طول ضلع s را بیابید (ر.ک. شکل ۱۳) .



شکل ۱۳

۲۳ . حجم جسم شاخی شکل ۱۴ را بیابید که مقاطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحات عمود بر محور x قرصهای مستدیری می‌باشند . نقاط انتهایی یک قطر هر قرص بر منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = 2\sqrt{x}$ قرار داشته ، و نوک جسم در مبداء صفحهٔ xy بوده و تا مقطع عرضی در $x = 1$ امتداد دارد .



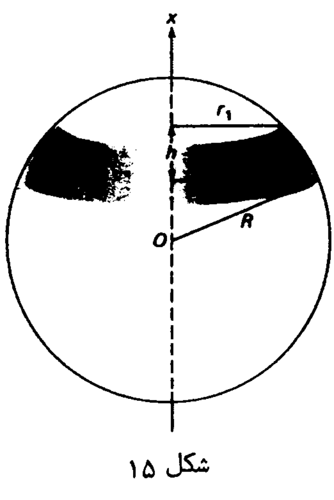
شکل ۱۴

۲۴ . دو جسم بین یک جفت صفحهٔ موازی که به فاصلهٔ h از یکدیگرند قرارداشته،ومقاطع عرضی اجسام به‌وسیلهٔ یک صفحه موازی صفحات داده شده مساحات مساوی دارند . *اصل کاوالیری* را ثابت کنید ، که می‌گوید دو جسم دارای حجم یکسان می‌باشند . (اصل کاوالیری برای مساحت در مسئلهٔ ۲۰ ، صفحهٔ ۳۹۵ ، داده شده است .)

۲۵ . فرض‌کنید یک سوراخ مخروطی به شعاع قاعدهٔ r و عمق r در امتداد محور تقارن‌یک استوانهٔ مستدیر به شعاع r و ارتفاع r تعبیه شده باشد . نشان دهید که‌جسم حاصل حجمی برابر یک نیمکرهٔ توپر به شعاع r دارد .

۲۶ . حجم گوهٔ مثال ۴ را با استفاده از مقاطع عرضی صفحات عمود بر محور y (به جای محور x) حساب کنید .

۲۷ . جسم S محدود به یک‌کره و دو صفحهٔ موازی‌که کره و درون آن را در قرصهای‌مستدیر



شکل ۱۵

قطع می‌کنند یک **قطعهٔ کروی** با دو قاعده نام دارد ، و قرصها قاعده‌های آن می‌باشند (ر.ک . شکل ۱۵ ،که در آن کره به‌شعاع R و به‌مرکز مبداء بوده ومحور x قائم می‌باشد). حجم S را درصورتی بیابید که یکی‌از قاعده‌ها به‌شعاع r_1 ، قاعدهٔ دیگر به‌شعاع r_2 ، و فاصلهٔ بین قواعد h باشد .

۲۸ . حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات مثبت و منحنی $y = e^{-x}$ بوده ، و مقاطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحات عمود برمحور x نیمدایره‌هایی به اقطار واقع در صفحهٔ xy می‌باشند .

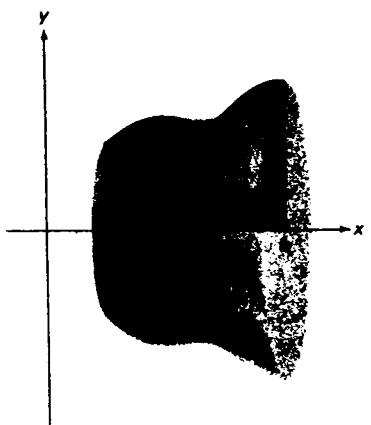
۲۹ . حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محورهای مختصات مثبت ، خط $x = 1$ ، و منحنی $y = x^{-1/3}$ بوده ، و مقاطع عرضی‌اش به وسیلهٔ صفحات عمود بر محور x مربع باشند . اگر $y = x^{-1/2}$ ، حجم چقدر خواهد بود؟

۲۰۸ حجم یک جسم دوار

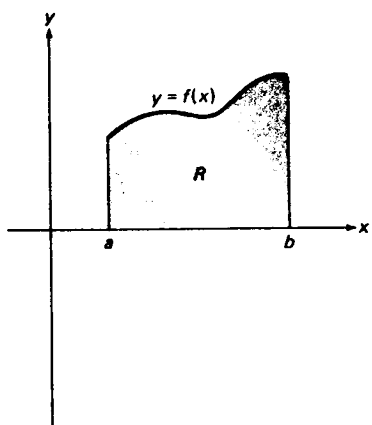
روش قرصها . اگر ناحیهٔ مسطح R حول خط L در صفحهٔ R دوران کند ، ناحیه جسم S را جارو یا " تولید " می‌کند که آن را یک **جسم دوار** با **محور دوران** L می‌نامند . فرض‌کنیم R ناحیه‌ای از صفحهٔ xy باشد که به نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b),$$

محور x ، و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ محدود شده است مثل شکل ۱۶ (آ) ، و نیز محور x را محور دوران اختیار می‌کنیم . در این صورت ، R جسم دواری مانند شکل ۱۶ (ب) تولید می‌کند که مقطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x در نقطه به مختص x



(ب)



(آ)

شکل ۱۶

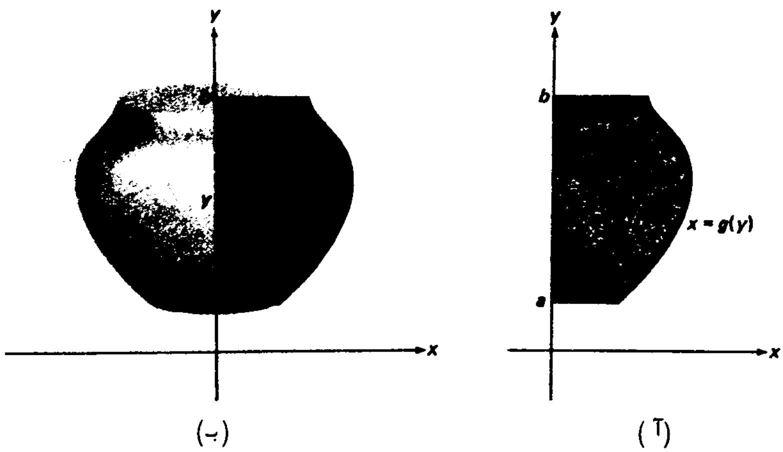
قرص مستدیری به شعاع $y = f(x)$ و مساحت $A(x) = \pi y^2 = \pi[f(x)]^2$ می‌باشد. فرض‌کنیم V حجم جسم S باشد. در این صورت، بنابر روش مقاطع عرضی، $V = \int_a^b A(x)\,dx$؛ ودر نتیجه،

$$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx. \tag{1}$$

گاهی اوقات محور دوران را به جای محور x محور y می‌گیرند. مثلاً، فرض‌کنید ناحیهٔ R محدود به نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b),$$

به محور y و خطوط افقی $y = a$ و $y = b$، مثل شکل ۱۷ (آ)، حول محور y دوران کرده‌و جسم دوار S به شکل ۱۷ (ب) را تولید نماید.



شکل ۱۷

مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور y در نقطه به مختص y قرص مستدیری‌است به شعاع $x = g(y)$ و مساحت $\pi x^2 = \pi[g(y)]^2$. لذا، طبق روش مقاطع عرضی، حجم V جسم از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi \int_a^b x^2\,dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2\,dy, \tag{1'}$$

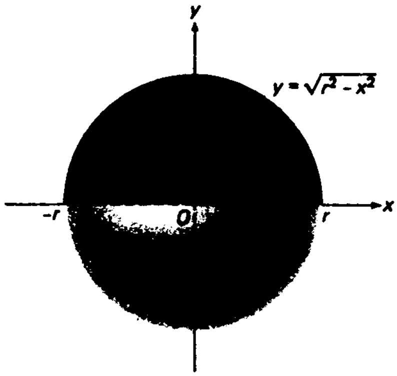
که مشابه فرمول (۱) است. استفاده از فرمول (۱) یا (۱') برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار را روش *قرصها* می‌نامند. این روش در مثال ۲، صفحهٔ ۶۹۹، پیش‌بینی شد ودر آنجا بود که برای محاسبهٔ حجم یک مخروط مستدیر قائم به کار رفت.

مثال ۱. حجم V کرهٔ توپر S به شعاع r را بیابید.

حل. S را می‌توان با دوران ناحیهٔ محدود به محور x و نمودار تابع

$$y=\sqrt{r^2-x^2} \qquad (-r\le x\le r)$$

حول محور x تولید کرد (ر.ک. شکل ۱۸). توجه کنید که در این حالت پاره‌خطهای قائم شکل ۱۶ (آ) به نقاط



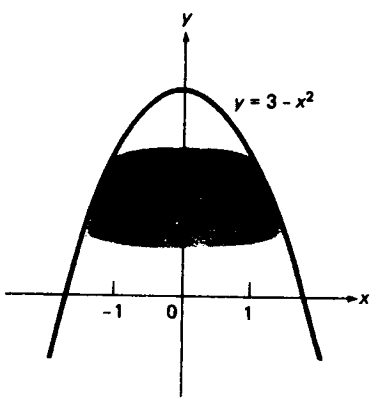
شکل ۱۸

تحویل می‌شوند، زیرا به ازای $x=\pm r$ ، $y=0$. با اعمال فرمول (۱) فوراً خواهیم داشت

$$V=\pi\int_{-r}^{r} y^2\,dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3,$$

که بدین وسیله فرمولی ثابت می‌شود که‌تا کنون آزادانه به کار رفته است.

مثال ۲. حجم V جسم S نموده‌شده‌درشکل۱۹ازدوران‌ناحیهٔ‌محدودبه‌منحنی $y=3-x^2$



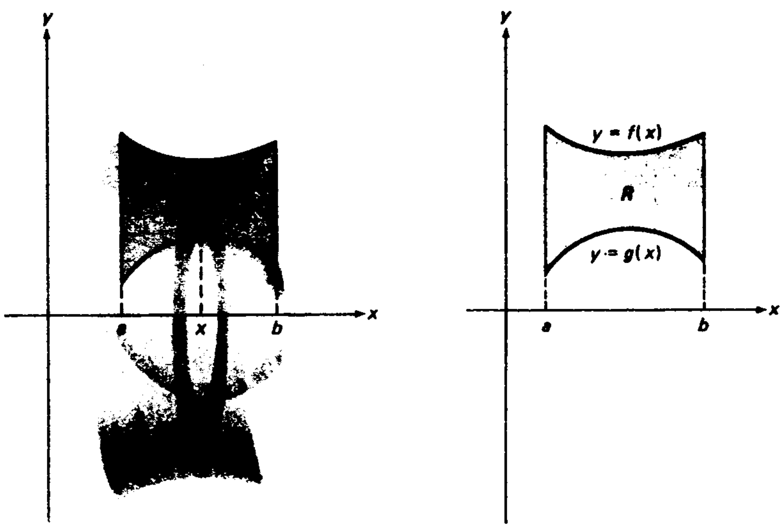
شکل ۱۹.

محور y ، و خطوط $y = 1$ و $y = 2$ حول محور y را بیابید .

حل . جسم S یک مخروط ناقص جامد است که مرزش سهمی‌گون دوار حاصل از دوران سهمی $y = 3 - x^2$ حول محور y است . (یک مخروط ناقص قسمتی از جسم است که بین دو صفحهٔ موازی قاطع جسم قرار دارد .) چون $y = 3 - x^2$ ، داریم $x^2 = 3 - y$ ، و فرمول (۱۴) نتیجه می‌دهد که

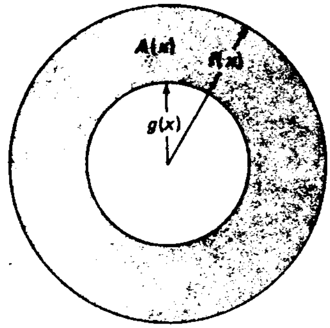
$$V = \pi \int_1^2 x^2\,dy = \pi \int_1^2 (3 - y)\,dy = \pi \left[3y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2}\pi.$$

روش واشرها . حال فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحهٔ xy باشد که به‌وسیلهٔ دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ $(a < b)$ مطابق شکل ۲۰ (آ) محدود شده است . در این صورت ، از دوران R حول محور x جسم دوار S به شکل ۲۰ (ب) تولید می‌شود که مقطع عرضی آن به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x در نقطه به مختص x یک طوق یا ناحیهٔ واشری شکل به شعاع خارجی $f(x)$ و شعاع داخلی $g(x)$ مثل شکل ۲۰ (پ) می‌باشد .



(ب) (آ)

شکل ۲۰



(پ)

شکل ۲۰

مساحت $A(x)$ این واشر تفاضل مساحت یک قرص مستدیر به شعاع $f(x)$ و مساحت یک قرص متحدالمرکز به شعاع $g(x)$ می‌باشد:

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

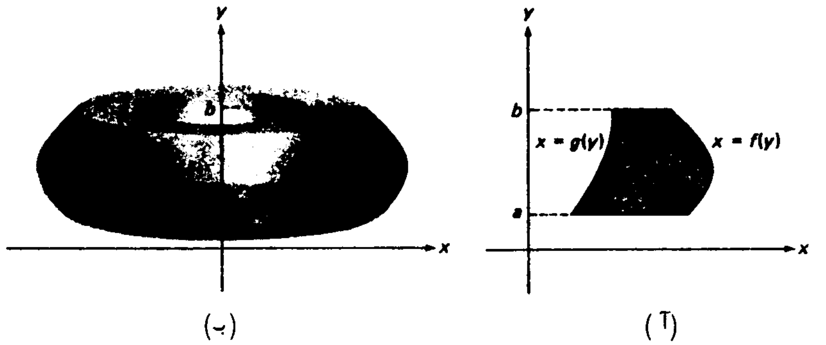
فرض‌کنیم V حجم جسم S باشد. در این صورت، بنا به روش مقاطع عرضی،

$$V = \int_a^b A(x)\,dx = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\}\,dx. \qquad (۲)$$

البته، این فرمول را می‌توان، بدون توسل صریح به واشرها، و باتوجه به اینکه‌حجم جسم دوار S در شکل ۲۰ (ب) تفاضل بین حجمهای دو جسم دوار از نوعی که پیشتر مطرح شد، یعنی یک جسم "خارجی" به حجم $\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$ که از دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $y = f(x)$، محور x، و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x تولید می‌شود، ویک جسم "داخلی" به حجم $\pi \int_a^b [g(x)]^2\,dx$ که از همین دوران ناحیهٔ محدود به منحنی $y = g(x)$، محور x، و خطوط $x = a$ و $x = b$ تولید می‌شود به‌دست آورد.

مثل قبل، گاهی محور دوران به جای محور x محور y اختیار می‌شود. لذا، فرض کنیم R ناحیهٔ محدود به دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$، که $f(y) \geq g(y) \geq 0$، و دو خط افقی $y = a$ و $y = b$ $(a < b)$ مثل شکل ۲۱ (آ) باشند. در این صورت، از دوران R حول محور y جسم دوار S به شکل ۲۱ (ب) تولید می‌شود. به آسانی معلوم می‌شود که حجم S از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V = \pi \int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\}\,dy, \qquad (۲')$$

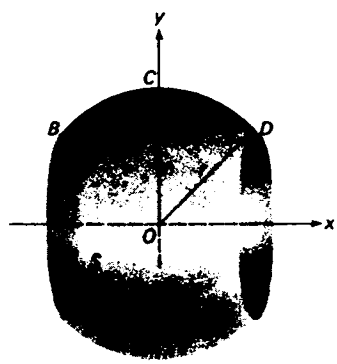


شکل ۲۱

که با (۲) مشابه است. استفاده از فرمول (۲) یا (۲′) برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار روش **واشرها** نام دارد.

مثال ۳. در یک کرهٔ جامد به شعاع r سوراخی به طول $2a$ در امتداد قطر تعبیه شده‌است. حجم V جسم باقیماندهٔ S چقدر است؟ فرض کنید $a < r$.

حل. جسم S نموده شده در شکل ۲۲ مانند یک دستمال سفرهٔ حلقه‌ای است که از دوران



شکل ۲۲

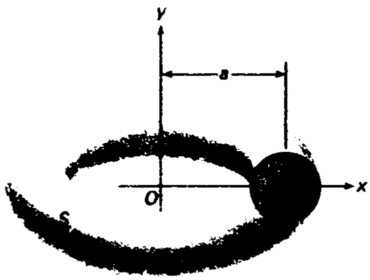
ناحیهٔ محدود به قوس مستدیر BCD و پاره‌خط BD حول محور x تولید می‌شود. قوس BCD نمودارتابع $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ وپاره‌خط BD نمودارتابع‌ثابت $g(x) = h = \sqrt{r^2 - a^2}$ است. لذا، طبق فرمول (۲)،

$$V = \pi \int_{-a}^{a} [(r^2 - x^2) - (r^2 - a^2)]\, dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

پس حجم جسم S همان حجم کره‌ای به شعاع a است ، و از اندازهٔ کره‌ای که در آن سوراخ تعبیه شده مستقل است فقط مشروط بر اینکه قطر کره از طول سوراخ متجاوز باشد . این نتیجه وقتی کمتر تعجب‌آور است که در تعبیه یک سوراخ کوتاه در یک کرهٔ بزرگ متوجه شویم به درلی نیاز داریم که شعاعش فقط کمی از شعاع کره کوچکتر باشد .

مثال ۴. حجم V جسم S حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحهٔ آن که قرص را قطع نمی‌کند پیدا کنید .

حل. فرض کنیم قرص مستدیر ناحیهٔ $(x - a)^2 + y^2 \le r^2$ در صفحهٔ xy بوده ، و محور دوران محور y باشد ؛ r شعاع قرص‌بوده ،و a فاصلهٔ بین مرکز قرص ومحور y باشد ($r < a$ زیرا محور y قرص را قطع نمی‌کند) . پس S مانند نان روغنی شکل ۲۳ است ، به نام حلقهٔ



چنبره

شکل ۲۳

انگشتر یا چنبره . با اعمال فرمول (۲') به ازای

$$f(y) = a + \sqrt{r^2 - y^2}, \qquad g(y) = a - \sqrt{r^2 - y^2},$$

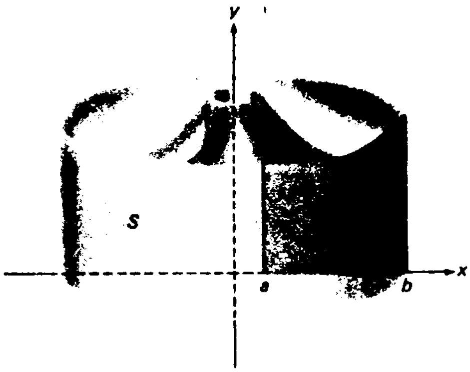
درمی‌یابیم که

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \{[a + \sqrt{r^2 - y^2}]^2 - [a - \sqrt{r^2 - y^2}]^2\}\, dy$$
$$= 4\pi a \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy = 8\pi a \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}\, dy,$$

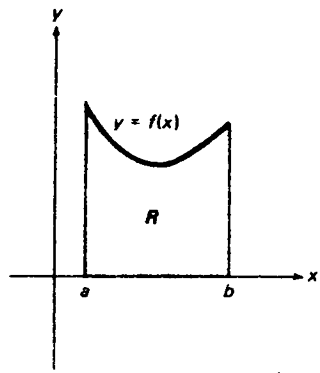
که در آن از زوج بودن انتگرالده در آخرین مرحله استفاده شده است. آخرین انتگرال یک چهارم مساحت یک قرص مستدیر به شعاع r ، یعنی $\frac{1}{4}\pi r^2$ ، است. پس نتیجه می‌شود که

$$V = 8\pi a\left(\frac{1}{4}\pi r^2\right) = 2\pi^2 ar^2.$$

روش غشاءها. حال روش دیگری برای محاسبهٔ حجم یک جسم دوار، به نام ***روش غشاءها***، عرضه می‌کنیم. همانطور که از نام برمی‌آید، در این روش جسم به جای قرصهای مستدیر یا واشرها به غشاءهای استوانه‌ای افراز می‌شود. ناحیهٔ R در شکل ۲۴ (آ) را درنظر می‌گیریم که به محور x ، خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، و نمودار تابع نامنفی پیوستهٔ $y = f(x)$ محدود شده است. اگر ناحیهٔ R حول محور y دوران کند، جسم دوار S شکل ۲۴ (ب) را تولید می‌کند. فرض کنیم



(ب)



(آ)

شکل ۲۴

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b \qquad (۳)$$

نقاط تقسیم بازهٔ $[a, b]$ باشندکه درنامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ صدق می‌کنند. این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازهٔ

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

تقسیم می‌کنند، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است. طبق معمول، فرض کنیم

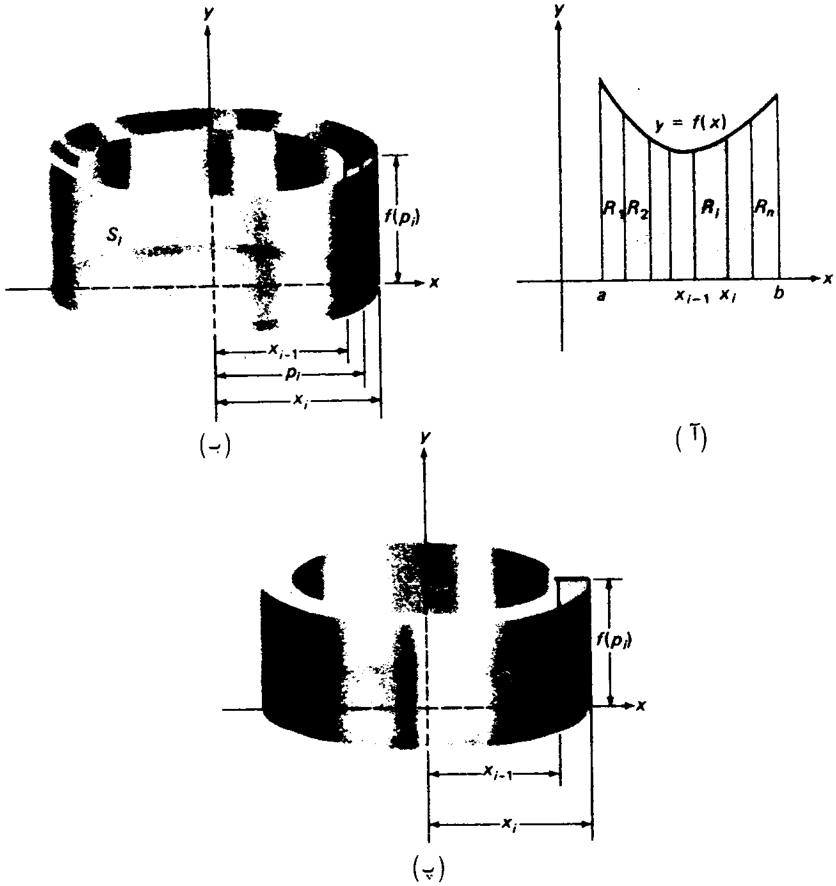
$$\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$$

اندازهٔ مش افراز (۳)، یعنی ماکزیمم طول تمام زیربازه‌ها، باشد. خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}, x = x_n$ ناحیهٔ R را به n نوار باریک $R_1, R_2, \dots, R_n$

مثل شکل ۲۵ (آ) تقسیم می‌کند . فرض کنیم S_i غشاء استوانه‌ای با بالای خمیده باشدکه از دوران نوار R_i حول محور y مثل شکل ۲۵ (ب) تولید می‌شود . تابع $f(x)$ پیوسته است؛ و درنتیجه ، مقدارش بر زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ ، دست کم وقتی Δx_i به قدر کافی کوچک باشد، تغییر مختصری می‌کند . لذا ، اگر $f(x)$ را با مقدار ثابت $f(p_i)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ در نظر بگیریم ، که p_i نقطهٔ دلخواهی از $[x_{i-1}, x_i]$ باشد ، تقریب مناسبی خواهیم داشت . به دلیلی که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود ، p_i را نقطهٔ میانی $[x_{i-1}, x_i]$ اختیار می‌کنیم ؛ درنتیجه ،

$$p_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}. \tag{۴}$$

حاصل تعویض $f(x)$ با $f(p_i)$ بر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ و سپس دوران ناحیهٔ مستطیلی حاصل حول محور y عبارت‌است‌از تعویض غشاء استوانه‌ای S_i شکل ۲۵ (ب) با غشاء استوانه‌ای



شکل ۲۵

C_i شکل ۲۵ (پ) باهمان شعاع داخلی x_{i-1} و شعاع خارجی x_i منتها با سر تخت‌به‌ارتفاع $f(p_i)$ بـــه جای سرخمیده. چون حجم V تمام جسم دوار S مساوی مجموع احجام n غشـاء $S_1, S_2, \ldots, S_n$ با سرهای خمیده است، و چون حجم هر غشاء S_i تقریبا" مساوی حجم V_i غشاء نظیر C_i با سر تخت است، نتیجه می‌شود که

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i. \tag{۵}$$

اما V_i تفاضل بین حجم استوانهٔ مستدیر قائم خارجی به مساحت قاعـدهٔ πx_i^2 و ارتفاع $f(p_i)$ و استوانهٔ داخلی متحدالمرکز به مساحت قاعدهٔ πx_{i-1}^2 و همان ارتفاع می‌باشد. بنابراین،

$$V_i = \pi f(p_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi f(p_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$V_i = 2\pi f(p_i)\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Delta x_i = 2\pi p_i f(p_i)\,\Delta x_i,$$

که در اینجا دلیل انتخاب (۴) واضح است. با گذاردن این عبارت مربوط به V_i در (۵)، به دست می‌آوریم

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi p_i f(p_i)\,\Delta x_i. \tag{۶}$$

طرف راست (۶) یک مجموع ریمان[1] برای تابع $2\pi x f(x)$ بر بازهٔ $[a, b]$ است.

بالاخره، به روشی آشنا، می‌توان اندازهٔ مش μ را به صفر نزدیک ساخت. در این صورت، تمام غشاءهای S_i با سرهای خمیده باریکتر و باریکتر می‌شوند؛ و نیـز غشاءهای تقریب‌ساز C_i با سرهای تخت چنین‌می‌کنند. لذا، وقتی $\mu \to 0$ ، انتظار اینکه تقریب (۶) بهتر و بهتر شود معقول خواهد بود. این نکات پیشنهاد می‌کنند که حجم V جسم S بـا حد

$$V = \lim_{\mu \to 0} 2\pi \sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i)\,\Delta x_i$$

تعریف شود؛ یعنی،

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx = 2\pi \int_a^b xy\,dx, \tag{۷}$$

که در آن وجود انتگرال را پیوستگی $f(x)$ ، و در نتیجه $xf(x)$ ، تضمین خواهد کرد. حال

1. Riemann

فرمول (۷) را تعریف حجم گرفته و آن را به روش غشاء محاسبه می‌کنیم.

توجه کنید که حاصل‌ضرب $2\pi x f(x)$ مساحت یک سطح استوانه‌ای به شعاع x وارتفاع $f(x)$ است. بنابراین، (۷) را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx, \tag{۷'}$$

که در آن $A(x)$ مساحت مقطع جسم S به وسیلهٔ سطح استوانه‌ای به شعاع x با محوردوران (در اینجا محور y) به عنوان محور تقارنش می‌باشد. این همان فرمولی است که‌در روش مقاطع عرضی به کار رفت، ولی در آن روش $A(x)$ مساحت مقطع S به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور دوران در نقطه به مختص x است.

به‌طورکلی، اگر R ناحیه‌ای از نوع شکل ۲۰ (آ) باشد که به دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ $(a < b)$ محدودشده است، حجم جسم S حاصل از دوران R حول محور y عبارت است از

$$V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)]\,dx \tag{۸}$$

(چرا؟). به عنوان تمرین، درحالتی که S از دوران ناحیه‌ای از نوع شکل ۱۷ (آ) یا ۲۱ (آ) حول محور x بدست آمده است، فرمولهایی برای V بنویسید.

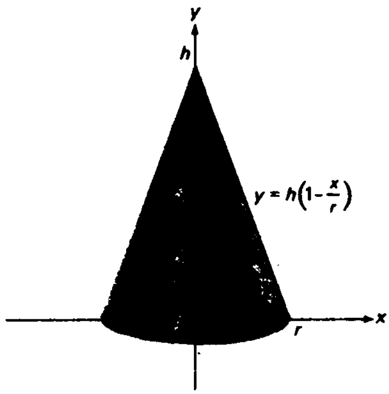
مثال ۵. با استفاده از روش غشاء، حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r را پیدا کنید.

حل. ما قبلاً V را در مثال ۲، صفحهٔ ۶۹۹، به روش قرصها یافتیم. برای محاسبه V به روش غشاء، ملاحظه‌می‌کنیم‌که مخروط‌را می‌توان از دوران‌ناحیهٔ‌مثلثی محدود به‌محورهای مختصات مثبت و خط $y = h[1 - (x/r)]$ حول محور y تولید کرد (ر.ک. شکل ۲۶). لذا، طبق فرمول (۷)، همانطور که از قبل می‌دانیم،

$$V = 2\pi h \int_0^r x\left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi h \int_0^r \left(x - \frac{x^2}{r}\right) dx$$
$$= 2\pi h \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3r}\right]_0^r = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

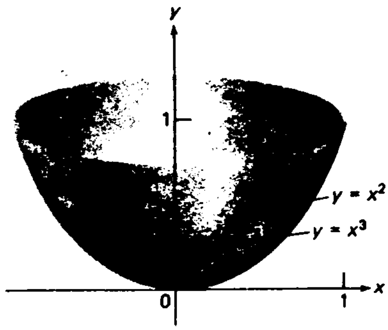
مثال ۶. حجم V جسم S حاصل از دوران ناحیهٔ بین منحنیهای $y = x^2$ و $y = x^3$ حول

محور y را بیابید.



شکل ۲۶

حل. شکل ۲۷ جسم S را که به شکل کاسه است نشان می‌دهد. دو منحنی وقتی متقاطعند



شکل ۲۷

که $x^2 = x^3$؛ یعنی، وقتی $x = 0$ یا $x = 1$. تنها ناحیهٔ متناهی بین منحنیها روی بازهٔ $[0, 1]$ قراردارد، و براین بازه $y = x^2$ منحنی‌بالایی و $y = x^3$ منحنی پایینی‌است. لذا، با انتخاب $a = 0, b = 1$ ، $f(x) = x^2$ ، و $g(x) = x^3$ در فرمول (۸)، به دست می‌آید

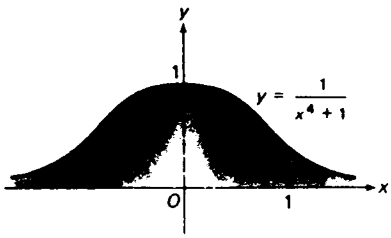
$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

مثال ۷. ناحیهٔ بی‌کران واقع در ربع اول بین محور x و منحنی

$$y = f(x) = \frac{1}{x^4 + 1} \tag{۹}$$

حول محور y دوران می‌کند. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل S را بیابید.

حل. شکل ۲۸ نشان می‌دهد که جسم S به شکل خاکریز است. بنابر تعمیم طبیعی فرمول



شکل ۲۸

(۷) در حالت بازهٔ انتگرالگیری بی‌کران، V را به صورت انتگرال مجازی بیان می‌کنیم:

$$V = 2\pi \int_0^\infty xf(x)\,dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{x}{x^4 + 1}\,dx.$$

پس به کمک جانشانی $t = x^2$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \lim_{u \to x} \int_0^u \frac{x}{x^4 + 1}\,dx = \pi \lim_{u \to \infty} \int_0^{u^2} \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \pi \lim_{u \to \infty} \Big[\arctan t\Big]_0^{u^2} = \pi \lim_{u \to \infty} \arctan u^2 = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که اگر مخرج (۹) به جای $x^4 + 1$ مساوی $x^2 + 1$ باشد، V نامتناهی می‌باشد.

مثال ۸. ناحیهٔ بی‌کران تحت منحنی $y = f(x) = x^{-3/2}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ حول‌محور y دوران کرده است. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل را بیابید.

حل. این بار داریم

$$V = 2\pi \int_0^1 xf(x)\,dx = 2\pi \int_0^1 x(x^{-3/2})\,dx = 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

که در آن، همانطور که مثال ۵، صفحهٔ ۶۸۰، نشان داده، انتگرال مجازی سمت راست

مساوی 2 می‌باشد . پس نتیجه می‌شود که

$$V = 2\pi(2) = 4\pi.$$

مسائل

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تحت منحنی داده شده روی بازهٔ ذکر شده حول محور نموده شده را به هر روشی که می‌خواهید (قرصها ، واشرها ، یا غشاءها) بیابید .

۱ . $y = x^2$ ، $-2 \le x \le 1$ ، محور x

۲ . $y = 4 - x^2$ ، $0 \le x \le 2$ ، محور y

۳ . $y = x^3$ ، $-1 \le x \le 1$ ، محور y

۴ . $y = |x|$ ، $-1 \le x \le 3$ ، محور x

۵ . $y = \sqrt{25 - x^2}$ ، $3 \le x \le 4$ ، محور y

۶ . $y = \cos x$ ، $0 \le x \le \pi/2$ ، محور y

۷ . $y = \sec x$ ، $0 \le x \le \pi/3$ ، محور x

۸ . $y = \ln x$ ، $1 \le x \le e$ ، محور x

۹ . $y = \sinh x$ ، $-1 \le x \le 1$ ، محور x

۱۰ . $y = \cosh x$ ، $0 \le x \le 1$ ، محور y

۱۱ . $y = e^{-x}$ ، $0 \le x \le 1$ ، محور y

۱۲ . $y = \arcsin x$ ، $0 \le x \le 1$ ، محور x

۱۳ . $y = x^{-4/3}$ ، $0 < x \le 1$ ، محور y

۱۴ . $y = xe^{-x}$ ، $0 \le x < \infty$ ، محور x

۱۵ . $y = e^{-x^2}$ ، $0 \le x < \infty$ ، محور y

۱۶ . $y = (x^2 + 1)^{-3/2}$ ، $0 \le x < \infty$ ، محور x

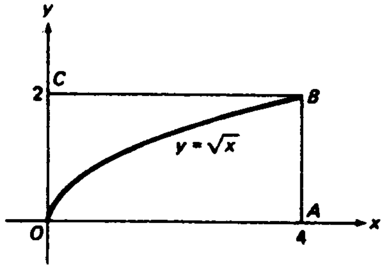
۱۷ . حجم V یک کرهٔ توپر به شعاع r را به روش غشاءها بیابید .

۱۸ . مثال ۴ را به روش غشاءها حل کنید .

۱۹ . مثال ۶ را به روش واشرها حل کنید .

۲۰ . مثال ۷ را به روش قرصها حل کنید .

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ داده شدهٔ OAB یا OBC شکل ۲۹ حول محور مشخص شده را حساب کنید . منحنی OB نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ روی بازهٔ $0 \le x \le 4$ است . در هر حالت، از هر دو روش قرصها یا واشرها و روش غشاءها استفاده کنید .



شکل ۲۹

۲۱. OAB حول محور x

۲۲. OBC حول محور x

۲۳. OBC حول محور y

۲۴. OAB حول محور y

۲۵. OAB حول خط $x=4$

۲۶. OBC حول خط $x=4$

۲۷. OBC حول خط $y=2$

۲۸. OAB حول خط $y=2$

سهمی $y=x^2$ مثلث به رئوس $(0,0)$ ، $(2,0)$ ، و $(0,2)$ را به دو ناحیه تقسیم می‌کنـد ، یکی بالای سهمی و دیگری پایین سهمی است . حجم جسم تولید شده به‌وسیلهٔ هر یک از نواحی را حول

۲۹. محور x ۳۰. محور y

پیدا کنید .

حجم جسم حاصل از دوران مثلث به رئوس $(1,0), (3,1), (2,2)$ را حول

۳۱. محور x ۳۲. محور y

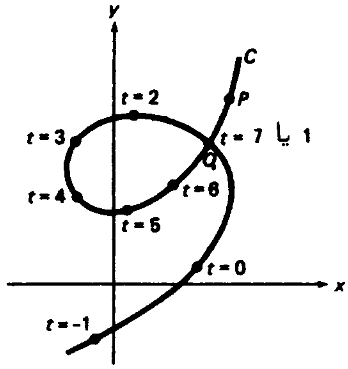
پیدا کنید .

۳۳. حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ بین منحنیهای $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$ را حول خط $y=x$ پیدا کنید .

۳۰۸ منحنیها به شکل پارامتری

تاکنون واژهٔ " منحنی " یعنی نمودار تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ ، که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است ، و گاهی به معنی نمودار تابع پیوسته $x=g(y)$ بوده است ، که‌در

آن y متغیر مستقل و x متغیر وابسته می‌باشد . هیچ خط قائمی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $y = f(x)$ را در بیش‌از یک نقطه قطع‌کند ؛ و به همین ترتیب هیچ خط افقی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $x = g(y)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند ؛ این نتیجهٔ فوری تابع بودن f و g می‌باشد . حال می‌خواهیم خود را از این قید رها کنیم ؛ درنتیجه ، مثلاً " C ، در شکل ۳۰ (که هر دو خاصیت قائم و افقی را نقض می‌کند) طبق خواستهٔ شهودی مایک



شکل ۳۰

منحنی می‌باشد .

معادلات پارامتری یک منحنی . این معادلات به‌آسانی با گرفتن مختص x و مختص y یک نقطهٔ متغیر C دقیقاً " به یک‌صورت و هر دو را تابع متغیر جدید t ، به نام *پارامتر*، گرفتن به دست می‌آیند . لذا ، از این به بعد منحنی *(به شکل پارامتری)* را نمودار یک جفت معادلهٔ (پارامتری) مانند

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \tag{1}$$

تعریف می‌کنیم ؛ یعنی ، مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) که مختصات x و y آنها در (۱) صدق می‌کنند ؛ در اینجا $x(t)$ و $y(t)$ دو تابع پیوسته با قلمرو تعریف یکسان اند ،که همیشه‌بازهٔ I گرفته می‌شود . در معادلات پارامتری از علایم x و y برای نمایش هم متغیرهای‌وابسته‌و هم‌توابع استفاده می‌شود . همچنین ، فرض‌کنیم $x(t)$ و $y(t)$ هر دو توابع ثابت نیستند ، زیرا در غیر این صورت‌منحنی (۱) به‌یک نقطه تحویل می‌شود . وقتی پارامتر t ،که‌می‌توان آن را زمان گرفت ، روی بازهٔ I تغییر کند ، نقطهٔ $P = (x, y)$ مواضع مختلفی در صفحهٔ xy داشته ، و منحنی (پارامتری) (۱) را می‌پیماید . این از شکل ۳۰ برمی‌آید ، که در آن مواضع P به ازای مقادیر مختلف t نموده شده‌اند . حال ، مثل نقطهٔ Q در شکل ، ممکن

است منحنی خودش را قطع کند ، زیرا فقط لازم است دو مقدار مختلف t_1 و t_2 از پارامتر وجود داشته باشند که $x(t_1) = x(t_2)$ و $y(t_1) = y(t_2)$. (این مقادیر در شکل عبارتند از $t_1 = 1$ و $t_2 = 7$.) منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی منحنیی با همان معادلات پارامتری ولی قلمرو $x(t)$ و $y(t)$ به زیر بازه‌ای از I محدود شده باشد .

مثال ۱. نمودار تابع پیوستهٔ

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

را می‌توان با گرفتن x به عنوان پارامتر t و نوشتن

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b)$$

به شکل پارامتری نمایش داد (در اینجا قلمرو f را بازهٔ بسته گرفته‌ایم ، ولی هرنوع دیگر بازه ، متناهی یا نامتناهی ، به همین خوبی خواهد بود .) برای نمایش نمودار تابع پیوسته

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

به شکل پارامتری ، می‌نویسیم

$$x = g(t), \qquad y = t \qquad (a \le t \le b).$$

لذا ، تعریف جدید ما از منحنی دارای این خاصیت مطلوب است که تعریف قبلی را به عنوان حالتی خاص دربردارد .

مثال ۲. منحنی

$$x = 1 + 2t, \qquad y = -1 + t \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۲}$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ $(1, -1)$ به شیب $\frac{1}{2}$. در واقع ، با حل اولین معادلهٔ (۲) نسبت به پارامتر t و گذاردن حاصل در معادلهٔ دوم ، معادلهٔ

$$y = -1 + t = -1 + \frac{1}{2}(x - 1) \tag{۲'}$$

به دست می‌آید که نمودارش خطی است به شیب $\frac{1}{2}$ و ماربر نقطهٔ $(1, -1)$. با بررسی (۲) فوراً معلوم می‌شود که نقطهٔ $(1, -1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است . همین خط با معادلات پارامتری

$$x = 1 + 2t^3, \qquad y = -1 + t^3 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

نیز نموده می‌شود ، زیرا وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، t^3 نیز چنین می‌کند ، یا با

$$x = 1 + 2\tan t, \qquad y = -1 + \tan t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$

نمایش داده می‌شود ، زیرا وقتی t از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ افزایش یابد ، $\tan t$ از $-\infty$ تا ∞

افزایش خواهد یافت .

تبصره . بی‌نهایت تابع پیوستهٔ $f(t)$ هست‌که ، وقتی t بر بازه‌ای چون I افزایش می‌یابد، از $-\infty$ تا ∞ افزایش‌خواهندیافت . لذا ، خط مستقیم (۲) بی‌نهایت نمایش پارامتری به شکل زیر دارد :

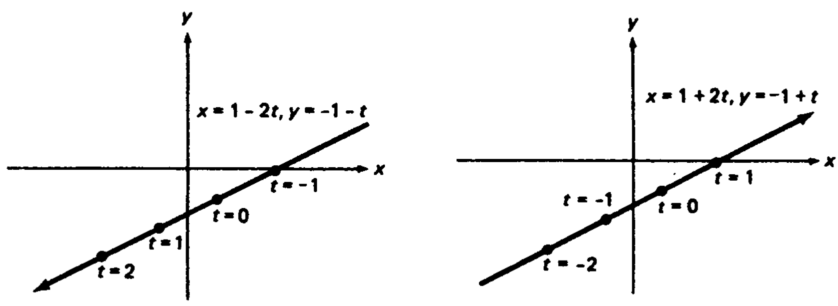
$$x = 1 + 2f(t), \qquad y = -1 + f(t) \qquad (I \text{ در } t)$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر منحنی بی‌نهایت نمایش پارامتری دارد .

جهت یک منحنی . منحنیها به شکل پارامتری یک جهت طبیعی مربوط به جهت افزایش t دارند . مثلاً ، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، نقطهٔ متغیر $P = (x, y)$ واقع بر خط (۲) آن را از چپ به راست رو به بالا می‌پیماید[ر.ک . شکل ۳۱ (آ)] . اما ، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، خط

$$x = 1 - 2t, \qquad y = -1 - t \qquad (-\infty < t < \infty),$$

که از همان نقاط خط (۲) تشکیل شده است ، جهت مخالف را می‌پیماید ؛ یعنی ، از راست به چپ رو به پایین می‌رود[ر.ک . شکل ۳۱(ب)] .



(ب) (آ)

شکل ۳۱

به عنوان تمرین ، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2\ln t, \qquad y = -1 + \ln t \qquad (0 < t < \infty)$$

نمایش همان خط L (۲) ، با همان جهت است ، ولی معادلات

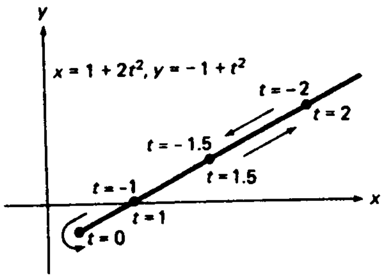
$$x = 1 + 2\cot t, \qquad y = -1 + 2\cot t \qquad (0 < t < \pi)$$

نمایش خط L با جهت مخالف می‌باشد .

مثال ۳. چون t^2 ذاتاً" نامنفی است ، منحنی

$$x = 1 + 2t^2, \qquad y = -1 + t^2 \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۳}$$

همان خط (۲) نبوده ، بلکه یک **شعاع** یا **نیمخط** است که ، همانطور که شکل ۳۲ نشان‌داده ، فقط‌از بخشی از خط (۲) تشکیل شده است . فرض کنیم t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد.در



شکل ۳۲

این صورت ، نقطهٔ $P = (x, y)$ شعاع (۳) را دوبار می‌پیماید ، یکبار در جهت روبه پایین و یکبار در جهت رو به بالا ، و در نقطهٔ $(1, -1)$ که نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است می‌چرخد .

به عنوان تمرین ، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2e^t, \qquad y = -1 + e^t \qquad (-\infty < t < \infty)$$

نمایش همان شعاع بدون نقطهٔ $(1, -1)$ است که یکبار در جهت رو به بالا پیموده‌می‌شود .

مثال ۴. به‌طورکلی ، منحنی

$$x = x_1 + at, \qquad y = y_1 + bt \qquad (-\infty < t < \infty, a \neq 0) \tag{۴}$$

خط مستقیمی است مار بر نقطهٔ (x_1, y_1) به شیب b/a . در واقع ، با حل معادلهٔ اول نسبت به t و گذاردن حاصل در معادلهٔ دوم ، به دست می‌آوریم

$$y = y_1 + \frac{b}{a}(x - x_1) = \frac{b}{a}x + \left(y_1 - \frac{b}{a}x_1\right), \tag{۴'}$$

که معادلهٔ خط مستقیم L به شیب b/a است . به‌علاوه ، نقطهٔ (x_1, y_1) بر L قرار دارد ، و این را می‌توان با قرار دادن $t = 0$ در (۴) یا $x = x_1$ در (۴') دید . توجه کنید که منحنی (۴) درصورتی یک خط قائم است که $a = 0$ و $b \neq 0$.

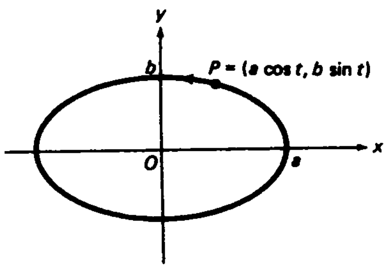
مثال ۵. منحنی

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi) \tag{۵}$$

را در نظر می‌گیریم ، که در آن $a>0, b>0$. چون $x/a = \cos t$ ، $y/b = \sin t$ و $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ ، به آسانی می‌توان پارامتر t را از دو معادلهٔ پارامتری (۵) حذف کرد . با این کار معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۵'}$$

به دست می‌آید که *معادلهٔ دکارتی* منحنی نام دارد ، زیرا تنها متغیرهای ظاهر شده‌درآن مختصات دکارتی یا قائم x و y می‌باشند . (مختصات قائم به افتخار فیلسوف وریاضیدان فرانسوی ، رنه دکارت[1] (۱۶۵۰–۱۵۹۶) ، پایه‌گذار هندسهٔ تحلیلی، *مختصات دکارتی* نیز نام یافته‌اند .) نمودار (۵′) یک منحنی است به نام **بیضی** که در شکل ۳۳ به ازای $a>b$ نموده شده است . هر نقطه که مختصاتش در معادلات پارامتری (۵) صدق کنند در معادلهٔ



شکل ۳۳

دکارتی (۵′) نیز صدق می‌کنند ؛ و لذا ، بر بیضی قرار دارد . به عکس ، به ازای هر نقطهٔ (x, y) از بیضی (۵′) ، مقداری مانند t وجود دارد که x و y در (۵) صدق می‌کنند . برای مشاهدهٔ این امر ، تحقیق می‌کنیم که ، وقتی t از 0 تا 2π افزایش یابد ، نقطهٔ متغیر $P = (x, y) = (a\cos t, b\sin t)$ عملاً" تمام بیضی را یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، با شروع و اختتام در نقطهٔ $(a, 0)$ ، می‌پیماید . لذا ، معادلات پارامتری (۵) و معادلهٔ دکارتی (۵′) **هم‌کشش** هستند بدین‌معنی‌که نمودارهای (۵) و (۵′) یکی می‌باشند . (این انطباق نمودارها خود بخود نیست ، و این امر در مثال بعد روشن خواهد شد .) معادلات پارامتری (۵) ، حتی اگر a و b مجاز به منفی بودن باشند ، همان بیضی‌را نمایش

---

1. René Descartes

می‌دهند جز آنکه اگر $ab < 0$ ، P بیضی را در جهت **عقربه‌های ساعت** می‌پیماید (چرا؟).
اگر $a = b$ ، (۵') به معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = a^2$$

که دایره به شعاع a و مرکز مبداء است تحویل می‌شود ، و معادلات پارامتری نظیر عبارتند از

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

البته ، در اینجا پارامتر t زاویهٔ مرکزی نقطهٔ $P = (x, y)$ است؛ یعنی ، زاویهٔ بین محور x مثبت و خط واصل بین مبداء و P که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود ، ولی این تعبیر t در حالت بیضی با $a \neq b$ فرو می‌ریزد (دلیلش را توضیح دهید) . اگر $a = 0, b \neq 0$ ، منحنی (۵) به پاره خط قائم واصل بین نقاط $(0, -b)$ و $(0, b)$ تحویل می‌شود ، ولی اگر $a \neq 0, b = 0$ ، به پاره‌خط افقی واصل بین نقاط $(-a, 0)$ و $(a, 0)$ تحویل می‌شود ، که وقتی t از 0 تا 2π افزایش یابد ، هر دو پاره‌خط دوبار پیموده می‌شوند (این را تحقیق کنید) . حالت $a = b = 0$ مستثنی شده است ، زیرا در این صورت منحنی (۵) به تنها نقطهٔ $(0, 0)$ " تباه خواهد شد " .

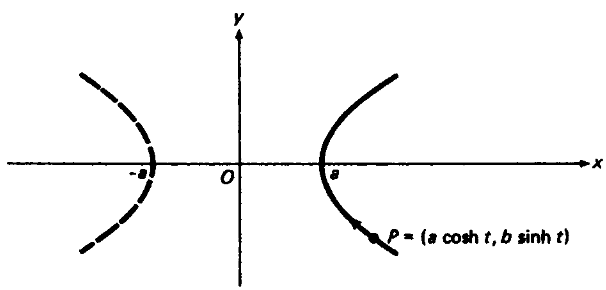
مثال ۶. حال منحنی

$$x = a\cosh t, \qquad y = b\sinh t \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۶}$$

را درنظر می‌گیریم ، که در آن $a > 0, b > 0$. چون $x/a = \cosh t$ ، $y/b = \sinh t$ ، و $\cosh^2 t - \sinh^2 t \equiv 1$ ، می‌توان پارامتر t را از معادلات (۶) حذف کرده معادلهٔ دکارتی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۶'}$$

را به دست آورد . در شکل ۳۴ نمودار (۶') ، معروف به **هذلولی** ، نموده شده است ، و



شکل ۳۴

متشکل است از دو منحنی از هم جدا (یعنی، دو منحنی بدون نقطهٔ مشترک) ، شاخهٔ چپ در نیمصفحهٔ چپ $x < 0$ و شاخهٔ *راست* در نیمصفحهٔ راست $x > 0$ قراردارد. چون هر نقطه از شاخهٔ چپ دارای مختص x منفی است و $a \cosh t$ همواره به ازای $a > 0$ مثبت است ، معلوم می‌شود که (۶) نمی‌تواند شاخهٔ چپ هذلولی را نمایش دهد ، بلکه فقط شاخهٔ راست را نمایش می‌دهد . به‌طور مشخص، از (۶) و خواص آشنای توابع $\cosh t$ و $\sinh t$ معلوم می‌شود که وقتی t از $-\infty$ تا 0 افزایش یابد، x از ∞ تا a کاهش و y از $-\infty$ تا 0 افزایش می‌یابد ، ولی وقتی t از 0 تا ∞ افزایش یابد ، x از a تا ∞ افزایش و y از 0 تا ∞ افزایش‌خواهدیافت. بنابراین، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، نقطهٔ متغیر $P = (x, y) = (a \cosh t, b \sinh t)$ در امتداد شاخهٔ راست هذلولی به بالا حرکت کرده ، و شاخهٔ چپ اصلا" ظاهر نخواهد شد . لذا ، در اینجا ، برخلاف مثال ۵، معادلات پارامتری و معادلهٔ دکارتی حاصل از حذف پارامتر t هم‌کشش **نیستند** .

اگر a مثبت ولی b منفی باشد ، منحنی (۶) مجددا" شاخهٔ راست هذلولی است ، ولی این بار در جهت رو به *پایین* پیموده می‌شود . برای به دست آوردن شاخهٔ چپ هذلولی از (۶) ، باید اجازه دهیم ثابت a منفی شود . در واقع ، اگر $a < 0$ ،منحنی (۶) شاخهٔ چپ هذلولی است (منحنی منقطع در شکل) ، که به ازای $b > 0$ در جهت بالا و به ازای $b < 0$ در جهت پایین پیموده می‌شود .

بحث بیضی و هذلولی در مثالهای ۵ و ۶ فقط یک مرور مقدماتی است . در فصل ۱۰ ، این منحنیهای مهم را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می‌دهیم .

مثال ۷. فرض‌کنید دایره‌ای به‌شعاع a در امتداد یک‌خط مستقیم افقی بدون‌لغزش‌می‌غلطد. منحنی پیموده شده‌توسط نقطهٔ‌ثابت P از محیط دایره را بیابید . (می‌توان P را سنگریزه‌ای تصور کرد که به شیار لاستیک اتومبیل چسبیده است .)

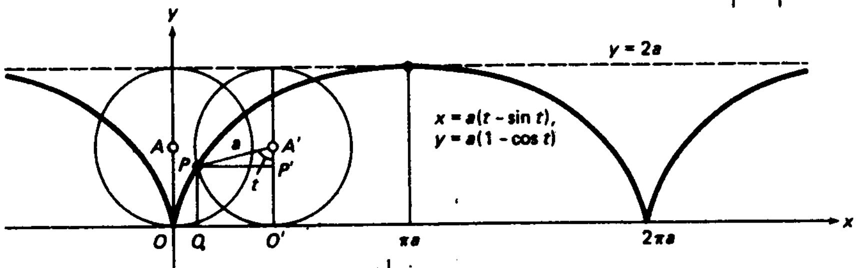
حل. فرض کنیم خط مستقیم محور x بوده ، و t زاویه‌ای به رادیان باشد که دایره ازموضعی که P بر مبداء O منطبق است چرخیده است . در این صورت ، منحنی پیموده شده توسط P به نام *چرخزاد* ، دارای معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۷}$$

می‌باشد . در واقع ، باتوجه به شکل ۳۵ (آ) معلوم می‌شود که P دارای طول

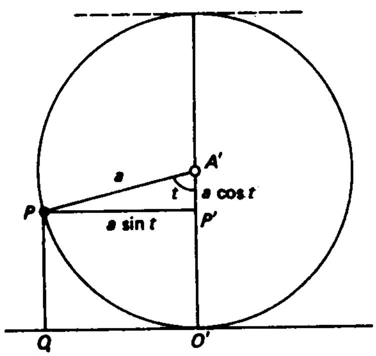
$$x = |OQ| = |OO'| - |QO'| = |OO'| - |PP'|$$

می‌باشد. اما $|OO'|$ مساوی طول قوس $\widehat{O'P}$ است، زیرا دایره بدون لغزش می‌غلطد. درنتیجه $|OO'| = at$ حال آنکه از شکل ۳۵ (ب)، که بزرگ‌شدهٔ قسمتی از شکل ۳۵ (آ) است، می‌توان دید که $|PP'| = a \sin t$.



چرخزاد

(آ)



(ب)

شکل ۳۵

پس نتیجه می‌شود که

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

به همین نحو، داریم

$$y = |O'A'| - |P'A'| = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

توجه کنید که این منحنی نمودار تابع $y = f(x)$ است، که در آن f متناوب بادورهٔ تناوب اساسی $2\pi a$ بوده و در هر نقطهٔ

$$x = 2n\pi a \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

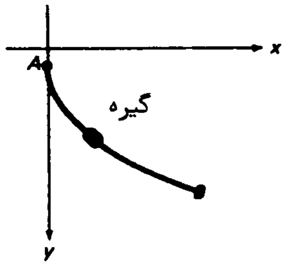
دارای مماس قائم (در واقع، نقطهٔ بازگشت) است. به‌علاوه، هر قوس چرخزاد روی یک بازه به شکل

$$(n - 1)\pi \le t \le n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

نمودار تابعی مانند $x = g(y)$ است . دلیلش را توضیح داده ، و بخصوص نشان دهید که روی بازهٔ $0 \le t \le \pi$ ،

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

خواهیم دید که چرخزاد خواص مکانیکی جالبی دارد . سیمی را در صفحهٔ قائم در نظر می‌گیریم که نقطهٔ A را به نقطهٔ B پایین تر از A متصل می‌کند . همانند شکل ۳۶ ،



شکل ۳۶

فرض کنیم A مبداء یک دستگاه مختصات قائم باشد که محور y آن قائم و رو به پایین است. فرض کنیم سیم از یک گیرهٔ توخالی بگذرد که در امتداد سیم تحت نیروی ثقل می‌لغزد ،و نیز اصطکاک بین سیم و گیره قابل چشم‌پوشی باشد . می‌توان با روشهای پیشرفته‌نشان داد که قوسی از چرخزاد که بین A و B قرار دارد **کوتاه زمان** است؛ یعنی ، منحنیی است که زمان لازم برای آنکه گیره از A تا B پایین بیاید مینیمم است .جالب است که می‌توان نشان داد همین قوس از چرخزاد **همزمان** نیز هست؛ یعنی ، زمان لازم برای لغزیدن گیره به پایین از نقطهٔ P قوس به پایین‌ترین نقطهٔ B ، چه P بالاترین نقطهٔ A یا هر نقطهٔ بین A و B باشد ، یکسان است!

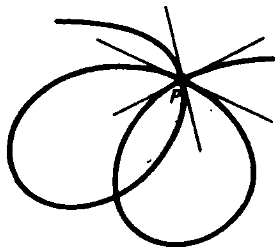
خط مماس بر یک منحنی پارامتری. یک منحنی پارامتری ، یعنی یک منحنی با معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\text{در } I \ t) \tag{۸}$$

داده شده است ، که در آن I یک بازه بوده ، a یک نقطهٔ درونی I است ،ومشتقات $x'(a)$ و $y'(a)$ هر دو موجود و متناهی‌اند و $x'(a) \neq 0$. در این صورت ، منحنی در نقطهٔ $P = (x(a),\ y(a))$ (خط) مماس داشته ، و شیب مماس مساوی است با

$$m = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=a} = \frac{y'(a)}{x'(a)}. \tag{۹}$$

طبق معمول، m نیز شیب منحنی در P نام دارد؛ توجه کنید که اگر منحنی به‌ازای مقادیر پارامتری دیگری مجدداً از P بگذرد، شیب منحنی در P ممکن است مقدار متفاوتی با m را بگیرد، و منحنی در چنین نقطه می‌تواند دو یا چند مماس داشته باشد (شکل ۳۷ این



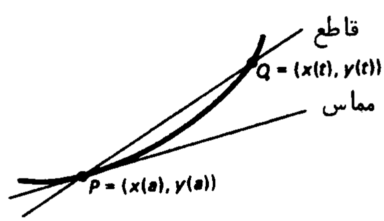
سه مماس در نقطهٔ P

شکل ۳۷

امکان را نشان می‌دهد). برای اثبات (۹) از تعریف m که در صفحهٔ ۱۸۷ داده شد شروع کرده، ملاحظه می‌کنیم که

$$m = \lim_{t\to a} \frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)}, \tag{۱۰}$$

زیرا خارج قسمت سمت راست شیب خط قاطع ماربر نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ و نقطهٔ متغیر $Q = (x(t), y(t))$ مثل شکل ۳۸ است. در اینجا تکیه براین امر است که اگر t به‌قدر کافی



شکل ۳۸

نزدیک a باشد، $x(t) - x(a) \neq 0$، که از فرض $x'(a) \neq 0$ نتیجه می‌شود (بیشتر توضیح دهید). با تقسیم صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی آمده در (۱۰) بر $t-a$، معلوم می‌شود که

$$m = \lim_{t \to a} \frac{\dfrac{y(t)-y(a)}{t-a}}{\dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}} = \frac{\lim\limits_{t \to a} \dfrac{y(t)-y(a)}{t-a}}{\lim\limits_{t \to a} \dfrac{x(t)-x(a)}{t-a}} = \frac{y'(a)}{x'(a)}, \tag{۱۱}$$

که (۹) را ثابت می‌کند.

معادلهٔ خط مماس بر منحنی (۸) در نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ را می‌توان به‌شکل دکارتی

$$\frac{y - y(a)}{x - x(a)} = m = \frac{y'(a)}{x'(a)},$$

یعنی،

$$y'(a)[x - x(a)] - x'(a)[y - y(a)] = 0, \tag{۱۲}$$

یا، باتوجه به مثال ۲، به شکل پارامتری

$$x = x(a) + x'(a)t, \qquad y = y(a) + y'(a)t \qquad (-\infty < t < \infty) \tag{۱۲'}$$

نوشت.

مثال ۸. مماس بر منحنی

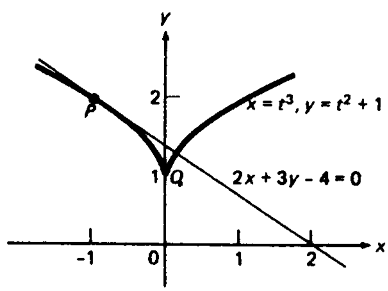
$$x = t^3, \qquad y = t^2 + 1 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطهٔ $P = (-1, 2)$ و در نقطهٔ $Q = (0, 1)$ بیابید.

حل. چون t^3 یک تابع صعودی است، منحنی خود قطعی نداشته؛ و درنتیجه، مماسهای چندگانه نخواهد داشت. نقاط P و Q به ترتیب نظیر مقادیر $t = -1$ و $t = 0$ اند. داریم $x'(t) = 3t^2,\ y'(t) = 2t$؛ و در نتیجه، $x'(-1) = 3,\ y'(-1) = -2$. بنابراین، طبق (۹) و (۱۲)، مماس در P به شیب $m = -2/3$ بوده و به معادلهٔ

$$2x + 3y - 4 = 0,$$

مثل شکل ۳۹ است. از فرمول (۱۱) در Q نمی‌توان استفاده کرد، زیرا $x'(0) = y'(0) = 0$؛



شکل ۳۹

و درنتیجه، با اعمال مستقیم فرمول (۱۰) خواهیم داشت

$$m = \lim_{t\to 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+1) - 1}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}.$$

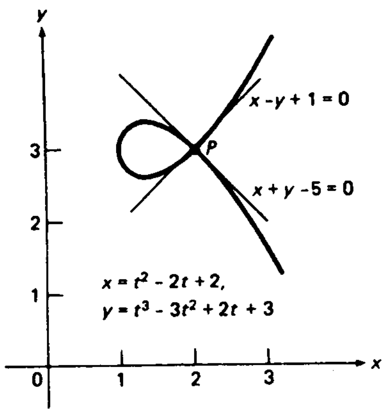
لذا، مقدار حدی خارج قسمت تفاضلی، بسته به اینکه t از راست یا چپ به 0 نزدیک‌شود، ∞ یا $-\infty$ است. بنابراین، طبق همان استدلال صفحهٔ ۳۰۸، منحنی در Q **مماس‌قائم** (یعنی، محور y) دارد. در واقع، همانطور که از شکل معلوم است، منحنی در نقطهٔ Q **بازگشت** دارد.

مثال ۹. مماسهای بر منحنی

$$x = t^2 - 2t + 2, \qquad y = t^3 - 3t^2 + 2t + 3 \qquad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطهٔ $P = (2, 3)$ بیابید.

حل. نقطهٔ P نظیر است به دو مقدار از پارامتر: یعنی، $t = 0$ و $t = 2$ (تحقیق‌کنید). لذا، منحنی دوبار از P می‌گذرد، و دو مماس در P وجود دارند. چون $x'(t) = 2t - 2$، $y'(t) = 3t^2 - 6t + 2$، داریم $x'(0) = -2$، $y'(0) = 2$ و $x'(2) = 2$، $y'(2) = 2$. بنابراین، طبق (۹)، یکی از مماسها به شیب -1 و دیگری به شیب 1 می‌باشد. بنابر(۱۲) مماسها به معادلات $x + y - 5 = 0$ و $x - y + 1 = 0$ مثل شکل ۴۰ می‌باشند. به‌عنوان



شکل ۴۰

تمرین، معادلات پارامتری مماسها را با استفاده از (۱۲) بنویسید.

مسائل

تابع یا معادلهٔ دکارتی را بیابید که منحنی پارامتری داده شده نمودار آن باشد. منحنی‌را رسم کرده و جهت آن را نشان دهید.

۱. $x = 1 + 2t,\ y = 4t + 3 \quad (-1 \le t \le 0)$

۲. $x = -1 + 3t,\ y = 2 - 2t \quad (0 \le t \le 1)$

۳. $x = t^4,\ y = t^2 \quad (0 \le t < \infty)$

۴. $x = t^3,\ y = 6 \ln t \quad (0 < t < \infty)$

۵. $x = e^{-t},\ y = e^{2t} \quad (-\infty < t < \infty)$

۶. $x = t,\ y = \sqrt{t^2 - 9} \quad (3 \le t < \infty)$

۷. $x = \sqrt{4 - t^2},\ y = t \quad (-2 \le t \le 2)$

۸. $x = \cos t,\ y = \cos 2t \quad (0 \le t \le \pi)$

۹. $x = \sec t,\ y = \cos t \quad (\pi/2 < t \le \pi)$

۱۰. $x = \tan t,\ y = \sec t \quad (-\pi/4 \le t \le \pi/4)$

۱۱. $x = 2 \cos t,\ y = 2 \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۲. $x = 2 - 3 \sin t,\ y = -1 + 3 \cos t \quad (2\pi \le t \le 4\pi)$

۱۳. $x = 5 \cos t,\ y = 4 \sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۴. $x = 2 \sin t,\ y = 3 \cos t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۱۵. $x = 3 \cosh t,\ y = 4 \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

۱۶. $x = -2 \sinh t,\ y = 3 \cosh t \quad (-\infty < t < \infty)$

معادلات پارامتری خطوط زیر را بنویسید.

۱۷. به شیب -1 و قطع y ، 4

۱۸. به شیب 2 و قطع x ، -3

۱۹. با قطع x ، 2 و قطع y ، 6

۲۰. مار بر نقطهٔ $(3, -4)$ به شیب 5

۲۱. مار بر نقاط $(-3, 2)$ و $(4, 7)$

۲۲. مار بر نقاط $(1, 8)$ و $(9, -2)$

معادلات پارامتری زیر را بنویسید.

۲۳. دایره‌ای به شعاع 5 به مرکز $(-2, 3)$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

۲۴. دایره‌ای به قطر 6 به مرکز نقطهٔ $(4, -8)$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۵. بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۶. بیضی $2x^2 + 5y^2 = 4$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

۲۷. شاخهٔ چپ هذلولی $16x^2 - 9y^2 = 144$ در جهت رو به بالا.

۲۸. شاخهٔ راست هذلولی $3x^2 - 2y^2 = 6$ در جهت رو به پایین.

۲۹. منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ از نقطهٔ $(1, 0)$ تا نقطهٔ $(0, 1)$.

۳۰. منحنی با معادلات پارامتری زیر را توصیف کنید:

$$x(t)=\begin{cases} t & 0\le t\le 1 \text{ اگر } \\ 1 & 1\le t\le 2 \text{ اگر } \\ 3-t & 2\le t\le 3 \text{ اگر } \\ 0 & 3\le t\le 4 \text{ اگر } \end{cases} \qquad y(t)=\begin{cases} 0 & 0\le t\le 1 \text{ اگر } \\ t-1 & 1\le t\le 2 \text{ اگر } \\ 1 & 2\le t\le 3 \text{ اگر } \\ 4-t & 3\le t\le 4 \text{ اگر } \end{cases}$$

شیب m منحنی داده شده در نقطهٔ نظیر به مقدار مشخص شده از پارامتر t را بیابید.

۳۱. $x = t^2, y = 2t, t = 4$

۳۲. $x = \sqrt{t}, y = t^2 + 1, t = 9$

۳۳. $x = t^3, y = \ln(\ln t), t = e$

۳۴. $x = \cos t, y = t + \sin t, t = \pi/3$

۳۵. $x = 2\cos^2 t, y = 3\sin t, t = \pi/6$

۳۶. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t = \pi$

۳۷. نمایش پارامتری هذلولی (۶) را طوری بیابید که مستلزم توابع هذلولی نباشد.

مماس(های) وارد بر منحنیهای زیر را بیابید.

۳۸. $x = 4\cos t, y = 2\sqrt{3}\sin t$ در $(2, 3)$

۳۹. $x = t - t^4, y = t^2 - t^3$ در $(0, 0)$

۴۰. $x = t^3 + 1, y = t^2 + t + 1$ در $(0, 1)$

۴۱. $x = \cosh t, y = 2\sinh t$ در $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$

۴۲. فرض کنید

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (\, I \text{ در } t\,)$$

یک منحنی پارامتری بوده، و a یک نقطهٔ درونی بازهٔ I باشد. همچنین، $x(t), y(t)$ دارای مشتقات متناهی $x'(t), y'(t)$ در همسایگی a باشند، که $x'(a) \neq 0$، و دارای مشتقات دوم متناهی $x''(a), y''(a)$ در خود نقطهٔ a باشند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰، نشان دهید که

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x(a)} = \frac{x'(a)y''(a) - y'(a)x''(a)}{[x'(a)]^3} \qquad \text{(یک)}$$

d^2y/dx^2 را در $x = x(a)$ درصورتی بیابید که

۴۳. $x = 2t^2, y = 3t^3, a = 1$

۴۴. $x = 5\cos t, y = 4\sin t, a = \pi/6$

۴۵. $x = t\cos t, y = t\sin t, a = 0$

۴۶. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, a = \pi/4$

منحنی داده شده کجا مماسهای قائم دارد؟

۴۷. $x = -1 + 2\cos t, y = 1 - 2\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۴۸. $x = -3\cos t, y = 4\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

۴۹. $x = 2\cosh t, y = 3\sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

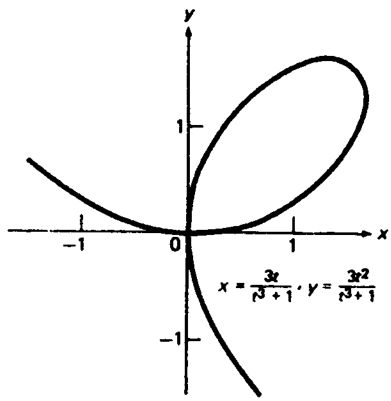
۵۰. $x = t^4 - 2t^2, y = t^3 + 1 \quad (-\infty < t < \infty)$

۵۱. نشان دهید که اگر $x'(a) = y'(a) = 0$ ، منحنی $x = x(t), y = y(t)$ ممکن است در نقطهٔ $P = (x(a), y(a))$ مماس قائم داشته باشد یا نداشته باشد.

۵۲. منحنی

$$x = \frac{3at}{t^3+1}, \qquad y = \frac{3at^2}{t^3+1} \qquad (-\infty < t < \infty, a > 0),$$

نموده شده در شکل ۴۱ برای حالت $a = 1$ ، چینهٔ *دکارت* نام دارد. معادلهٔ دکارتی



چینهٔ دکارت

شکل ۴۱

چینه را بیابید. چه مقادیری از پارامتر t آن قسمت از منحنی که در ربع اول است را می‌دهند؟ در ربع دوم را می‌دهند؟ در ربع چهارم را می‌دهند؟ نشان دهید که چینه در مبداء مماس افقی و قائم دارد.

۵۳. نشان دهید که نقطهٔ متغیر $P=(x,y)$ از منحنی

$$x=\frac{1}{t^2}(1+\ln t),\qquad y=\frac{1}{t}(3+2\ln t)\qquad (0<t<\infty)$$

در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y\frac{dy}{dx}=1+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

صدق می‌کند.

۵۴. نشان دهید که مماس و قائم به چرخزاد (۷) در نقطهٔ P از نقاط اوج و حضیض دایرهٔ مولد چرخزاد می‌گذرند (P بر محیط آن واقع است).

۵۵. سه مماس بر منحنی

$$x=t^3-3t^2+2t+1,\quad y=t^6-5t^4+4t^2+2\quad(-\infty<t<\infty)$$

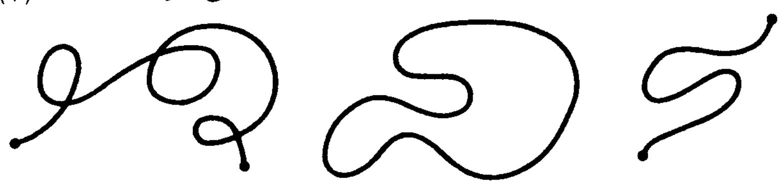
در نقطهٔ $(1,2)$ را بیابید.

۴۰۸ طول یک منحنی مسطح

حال به مسئلهٔ یافتن طول منحنی مسطح C به معادلات پارامتری

$$x=x(t),\qquad y=y(t)\qquad (a\le t\le b)$$

می‌پردازیم، که در آن C فقط تعدادی متناهی خود قطعی دارد، که بالاخص ایجاب می‌کند که هیچ قوسی از C بیش از یکبار پیموده نمی‌شود. نقطهٔ $A=(x(a),y(a))$ نقطهٔ *شروع* و نقطهٔ $B=(x(b),y(b))$ نقطهٔ *پایان* نام‌دارد، زیرا وقتی t از a تا b افزایش یابد، نقطهٔ متحرک $P=(x(t),y(t))$ منحنی C را با شروع در A و پایان در B می‌پیماید. نقاط A و B را *نقاط انتهایی* C می‌نامند. اگر A و B یکی باشند، گوییم C *بسته* است. یک منحنی بدون خودقطعی، جز احتمالا" با نقاط انتهایی یکسان، را *ساده* می‌گویند. شکل ۴۲ (آ) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی متمایز، و شکل ۴۲ (ب) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی یکسان، یعنی یک منحنی بستهٔ *ساده*، را نشان می‌دهد. منحنی نموده شدهٔ ۴۲ (پ) که سه



(آ) یک منحنی ساده — (ب) یک منحنی بستهٔ ساده — (پ) یک منحنی نه ساده نه بسته

شکل ۴۲

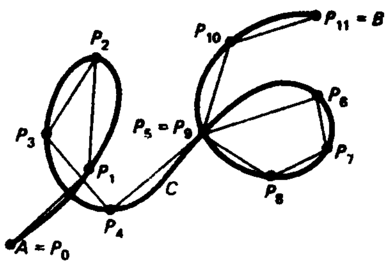
نقطهٔ خودقطعی دارد نه ساده است نه بسته .

تبصره. بنابر **قضیهٔ** مشهور منحنی ژردان[1] ، هر منحنی بستهٔ سادهٔ C صفحه را به دو ناحیهٔ متمایز تقسیم می‌کند که C مرز مشترک آنهاست و یکی از نواحی به نام **درون** C کراندار ، و ناحیهٔ دیگر به نام **برون** C بی‌کران است . با آنکه این نتیجه از نظر هندسی واضح است ، ولی *اثبات* آن واقعاً " مشکل است! به یاد آورید که ما فقط فرض کرده‌ایم توابع $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته‌اند ، که آزادی رفتار بسیاری به آنها خواهد داد .

در هندسهٔ مقدماتی ، طول فقط برای پاره‌خطها و قوسهای مستدیر (ومنحنیهای متشکل از این پاره‌خطها و قوسها) تعریف شده است . لذا ، اولین کار **تعریف** طول C است ، درست همانطور که مجبور به تعریف مساحت ناحیهٔ بین دو منحنی یا حجم یک جسم بودیم . طبیعی است سعی کنیم C را با یک منحنی تقریب کنیم که طولش را از قبل می‌دانیم . بااین هدف ، بازهٔ $[a, b]$ را به‌وسیلهٔ مقادیر $a = t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t_n = b$ از پارامتر که در نامساویهای $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ صدق می‌کنند به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم . این مقادیر از پارامتر t ، $n+1$ نقطهٔ

$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

بر منحنی C معین می‌کنند که C را به n قوس تقسیم می‌نمایند که P_0 نقطهٔ شروع A و P_n نقطهٔ پایان B می‌باشد (برای حالت $n = 11$ ، ر.ک. شکل ۴۳) . چون فقط تعدادی



یک مسیر چندضلعی محاط شده در یک منحنی

شکل ۴۳

متناهی خودقطعی مجاز است ، بعضی از نقاط $P_0, P_1, \ldots, P_n$ ممکن است با آنکه نظیر به

---

1. *Jordan*

مقادیرمختلفی از t اندباهم یکی باشند . مثلا" ، درمنحنی شکل فوق نقاط P_5 و P_9 یکی هستند .

مسیرهای چندضلعی وطول متناهی داشتن . حال فرض کنیم هریک از نقاط $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ را با پاره‌خطی به نقطهٔ بعدی،مثل شکل فوق، وصل کرده باشیم . در این صورت ، C با **مسیر چندضلعی** $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ تقریب می‌شود که در C *محاط* شده است و از n پاره خط $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ متصل به‌هم تشکیل شده‌است (نقاط $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ را رئوس $P_0P_1P_2 \ldots P_n$ می‌نامند) . البته ، طول این مسیر چندضلعی چیزی جز مجموع طولهای پاره‌خطهای آن نیست؛ یعنی ، مسیر به طول

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| \qquad (۱)$$

می‌باشد . فرض کنیم

$$\mu = \max \{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\},$$

که درآن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیر بازهٔ i م $[t_{i-1}, t_i]$ می‌باشد . پس ظاهرا "معقول است که (۱) را تقریب مناسبی برای طول C بگیریم ، که این تقریب با کوچک شدن μ بهترخواهد شد . این کار پیشنهاد می‌کند که طول منحنی C را به صورت حد

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$$

تعریف کنیم مشروط براینکه این حد موجود و متناهی باشد ، که در این حالت گوییم C *با* **طول متناهی** است .

طول منحنی به عنوان انتگرال . معلوم می‌شود که پیوستگی توابع $x(t)$ و $y(t)$ با طول متناهی بودن منحنی C را تضمین نمی‌کند . به عبارت دیگر ، منحنیهایی مانند $(a \le t \le b)$ $x = x(t), y = y(t)$ با $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته وجود دارند که در آنها می‌توان مسیرهای چندضلعی با طول بدلخواه بزرگ محاط کرد . (یک مثال از چنین منحنی باطول نامتناهی در مسئلهٔ ۲۳ آورده‌شده‌است .) اما فرض کنیم توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ **به‌طورپیوسته مشتقپذیر** باشند ، بدین معنی که $x'(t)$ و $y'(t)$ بر $[a, b]$ موجود و پیوسته باشند .[1] در این

---

۱ . مشتقات $x(t)$ و $y(t)$ در *نقاط انتهایی* a و b را باید مشتقات راست $x'_+(a), y'_+(a)$ و مشتقات چپ $x'_-(b), y'_-(b)$ تعبیر نمود . در این صورت ، *لازم نیست* $x(t)$ و $y(t)$ *خارج* بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده باشند .

صورت ، C با طول متناهی و دارای طول L است که از رابطهٔ

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (۲)$$

به دست می‌آید . برای مشاهدهٔ این امر ، ابتدا با استفاده از فرمول فاصلهٔ بین دو نقطه طول مسیر چندضلعی محاطی را به شکل زیر بیان می‌کنیم :

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

سپس قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات (قضیهٔ ۲ ، صفحهٔ ۲۵۸)را برهرتفاضل مختصات $x(t_i) - x(t_{i-1}), y(t_i) - y(t_{i-1})$ اعمال کرده ، به دست می‌آوریم

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(u_i)\,\Delta t_i \qquad (t_{i-1} < u_i < t_i),$$
$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(v_i)\,\Delta t_i \qquad (t_{i-1} < v_i < t_i).$$

با این می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i. \qquad (۳)$$

اگر u_i و v_i به ازای هر i مساوی می‌بودند ، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ بود ، و در این صورت می‌داشتیم

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\, \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

و بدین وسیله فرمول (۲) ثابت می‌شد . در حالت کلی $u_i \neq v_i$ ، ولی شهودا " واضح به نظر می‌رسد که وقتی $\mu \to 0$ ، طرف راست (۳) هنوز باید به همان حد

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

نزدیک شود (بالاخره ، $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر i ، $u_i - v_i \to 0$) . این در واقع درست است ،و آن را می‌توان دقیقا " با استدلالی ثابت‌کرد مستلزم مفهومی (پیوستگی یکنواخت)که‌ازحوصلهٔ یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج‌است .لذا، از این به بعد فرمول (۲) را ثابت شده درنظر خواهیم گرفت .

مثال ۱. طول (به نام محیط) دایرهٔ

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید .

حل. در اینجا

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = a \cos t,$$

و از فرمول (۲) داریم

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2}\, dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$
$$= a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a,$$

که قبلا" از هندسهٔ مقدماتی آن را می‌دانستیم.

مثال ۲. طول L یک قوس کامل چرخزاد نموده شده در شکل ۳۵ (آ)، صفحهٔ ۷۳۰، را بیابید.

حل. این قوس کامل به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0),$$

درنتیجه،

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \qquad \frac{dy}{dt} = a \sin t,$$

و

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(2 - 2 \cos t)$$
$$= 2a^2\left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

چون $a > 0$ و به ازای $0 \le t \le 2\pi$ ، $\sin (t/2) \ge 0$ ، از (۲) نتیجه می‌شود که

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt$$
$$= 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a.$$

این $8/2\pi \approx 1.27$ بار از محیط $2\pi a$ دایره به شعاع a که در ساختن چرخزاد به کار رفت بزرگتر است. لذا، به ازای هر میل طی شده توسط یک اتومبیل، سنگریزهٔ چسبیده‌به شیار

لاستیک چرخ مسافتی حدود $[(4/\pi) - 1](5280) \approx 1443$ ft را ، بی‌توجه به اندازهٔ لاستیک ، بیشتر طی خواهد کرد .

فرض‌کنیم C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b) \tag{۴}$$

باشد . در این صورت ، C دارای نمایش پارامتری

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b) \tag{۴'}$$

بوده و رابطهٔ (۲) شکل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$

یا معادلا" ، پس‌ازتغییر متغیر انتگرالگیری از t به x ، شکل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \tag{۵}$$

را به خود خواهد گرفت .

مثال ۳. هرگاه C نیمدایرهٔ

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (-a \le x \le a)$$

باشد ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

و از (۵) نتیجه می‌شود که

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = a \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

که در آن اینک با یک انتگرال مجازی سروکار داریم، با آنکه محاسبهٔ این انتگرال آسان بوده و مساوی π است (این را نشان دهید) ، ولی خیلی ساده‌تر است که C را بامعادلات پارامتری

$$x = a\cos t, \qquad y = a\sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

نمایش دهیم ، زیرا در این صورت فورا" به دست می‌آوریم

$$L = a \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = a \int_0^\pi dt = \pi a$$

(با مثال ۱ مقایسه کنید) .

در واقع ،اگر C یک منحنی به‌شکل (۴) باشد که در آن $f(x)$ بر $[a, b]$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر است ، می‌توان فرمول (۵) را بدون استفاده از فرمول (۲) و نمایش‌پارامتری (۴) به‌طور مستقیم ثابت کرد . در واقع ، فرض کنیم

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$
$$\mu = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\} \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

و قرار می‌دهیم $P_i = (x_i, f(x_i))$ ؛ درنتیجه ، مسیر چندضلعی $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ در C محاط شده است . در این صورت ،

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2},$$

که در آن ، بنابر قضیهٔ مقدار میانگین ،

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(u_i)\,\Delta x_i \qquad (x_{i-1} < u_i < x_i).$$

بنابراین ،

$$\sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(u_i)]^2}\,\Delta x_i$$

یک مجموع ریمان واقعی برای تابع پیوستهٔ $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ است ؛ولذا ، طول منحنی C مساوی است با

$$L = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

لذا ، فرمول (۵) را مستقیما " و دقیقا " ، با احتراز از " تکنیک u_i, v_i " که در برهان‌فرمول (۲) آمد ، ثابت کرده‌ایم . به عنوان تمرین ، مستقیما " و نیز از فرمول (۲) نشان‌دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

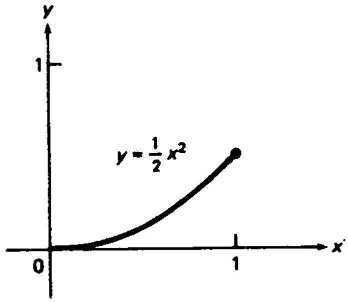
باشد ، آنگاه طول C از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$L = \int_a^b \sqrt{[g'(y)]^2 + 1}\,dy = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\,dy, \qquad (۵')$$

که مشابه (۵) است .

مثال ۴ . طول L قوسی‌از سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید که مبداء را به نقطهٔ $(1, \frac{1}{2})$ وصل می‌کند.

حل. قوس مورد نظر در شکل ۴۴ نموده است. در اینجا $dy/dx = x$ ، و از رابطهٔ (۵) به



شکل ۴۴

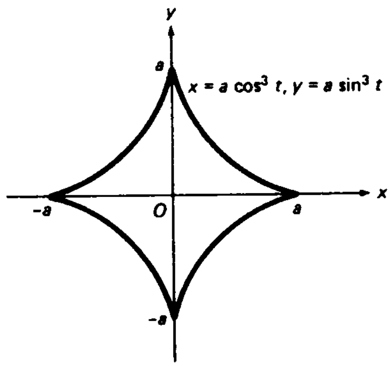
کمک مثال ۳، صفحهٔ ۶۲۸ ، نتیجه می‌شود که

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} x\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right] \approx 1.15.$$

مثال ۵. منحنی

$$x = a\cos^3 t, \qquad y = a\sin^3 t \qquad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0),$$

که در شکل ۴۵ نموده شده است، **ستاره‌گون** نام دارد. طول L آن را بیابید.



ستاره‌گون

شکل ۴۵

حل. از تقارن ستاره‌گون معلوم می‌شود که

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.$$

چون

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t \sin t, \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t,$$

داریم

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t\ (\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= 9a^2\cos^2 t\sin^2 t.$$

بنابراین، طبق (۲)، چون به‌ازای $0 \le t \le \pi/2$ ، $\cos t \ge 0, \sin t \ge 0$ ، خواهیم داشت

$$L = 12a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t\, dt$$
$$= 6a\int_0^{\pi/2} \sin 2t\, dt = -3a\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = 6a.$$

مسائل

طول منحنی پارامتری داده شده را بیابید .

۱. $x = 2t^3, y = 3t^2 \quad (-1 \le t \le 1)$

۲. $x = t^2, y = t^3 \quad (0 \le t \le 2)$

۳. $x = \ln t, y = 1/t \quad (1 \le t \le 2)$

۴. $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t \quad (-\pi/2 \le t \le 0)$

۵. $x = e^t, y = e^{2t} \quad (-\infty < t \le 0)$

۶. $x = 3\sin^2 t, y = 2\cos^3 t \quad (0 \le t \le \pi/2)$

۷. $x = \cos t, y = t + \sin t \quad (-\pi \le t \le \pi)$

۸. $x = t\cos t, y = t\sin t \quad (0 \le t \le 1)$

۹. $x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t \quad (a \le t \le b)$

۱۰. $x = \cos t + t\sin t, y = \sin t - t\cos t \quad (0 \le t \le 10)$

۱۱. تحقیق کنید که فرمول (۲) طول L پاره‌خط واصل بین دونقطهٔ دلخواه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ را دقیقا" به ما می‌دهد .

۱۲. نشان دهید که منحنی $y = \cosh x$ دارای این خاصیت است که طول منحنی روی بازهٔ $[a, b]$ مساوی مساحت تحت منحنی از $x = a$ تا $x = b$ می‌باشد .

طول منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) را بیابید .

۱۳. $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y} \quad (1 \le y \le 3)$

۱۴. $y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4x^2} \quad (1 \le x \le 2)$

۱۵. $y = 2x^{3/2} + 3 \quad (0 \le x \le 7)$

۱۶. $x = \frac{1}{3}y^{3/2} - \sqrt{y} \quad (0 \le y \le 1)$

۱۷. $y = \ln x \quad (\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8})$

۱۸. $x = \ln \cos y \quad (0 \le y \le \pi/4)$

۱۹. $y = \ln \sin x \quad (\pi/3 \le x \le 2\pi/3)$

۲۰. $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x \quad (1 \le x \le e)$

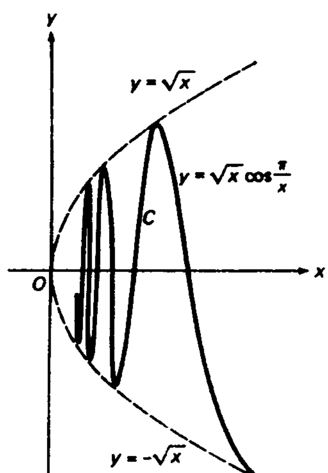
۲۱. $x = \int_0^y \sqrt{\cosh t}\, dt \quad (0 \le y \le 2)$

۲۲. $y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\, dt \quad (-\pi/2 \le x \le \pi/2)$

۲۳. تحقیق کنید که نمودار تابع پیوسته،

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\frac{\pi}{x} & \text{اگر } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

نموده شده در شکل ۴۶ یک منحنی با طول نامتناهی مانند C است.

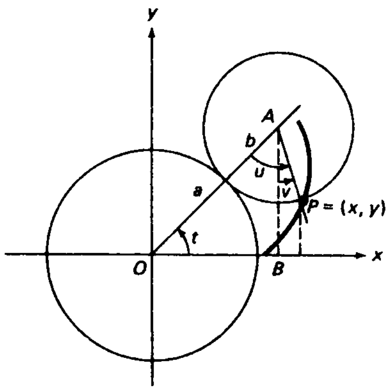


یک منحنی با طول نامتناهی

شکل ۴۶

۲۴. نشان دهید که ستاره‌گون به معادلات پارامتری $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$ $(0 \le t \le 2\pi, a > 0)$ دارای معادلهٔ دکارتی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ است. طول ستاره‌گون را با استفاده از فرمول (۵)، به جای فرمول (۲) مثل مثال ۵، پیدا کنید. تحقیق کنید که، همانطور که از شکل ۴۵ مشهود است، ستاره‌گون در چهار نقطهٔ $(\pm a, 0)$، $(0, \pm a)$ نقطهٔ بازگشت دارد.

۲۵. فرض کنید دایره‌ای به شعاع b بدون لغزش در قسمت خارجی یک دایرهٔ ثابت به شعاع $a > b$ بغلطد. در این صورت، نقطهٔ $P = (x, y)$ روی محیط دایرهٔ غلطان یک منحنی به نام **بروچرخزاد** را می‌پیماید. فرض کنید P ابتدا در نقطهٔ $(a, 0)$ بوده، و t زاویهٔ بین محور x مثبت و خط واصل بین مراکز دو دایره مثل شکل ۴۷ باشد.



شکل ۴۷

نشان دهید که بروچرخزاد دارای معادلات پارامتری

$$x = (a + b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t,$$
$$y = (a + b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t \qquad \text{(یک)}$$

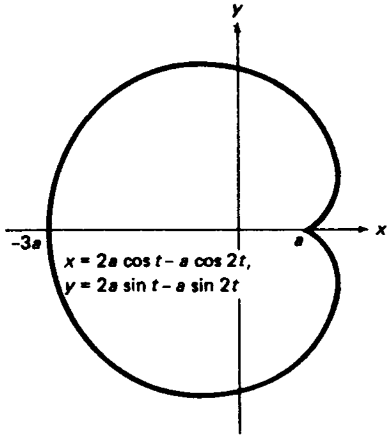
است.

۲۶. در مسئلهٔ قبل، فرض‌کنید دایره به شعاع b در **داخل** دایره‌ای به شعاع $a > b$ بدون لغزش بغلطد. در این صورت، P یک منحنی به نام **بتوچرخزاد** را خواهد پیمود. نشان دهید که بتوچرخزاد دارای معادلات پارامتری

$$x = (a - b)\cos t + b\cos\frac{a-b}{b}t,$$
$$y = (a - b)\sin t - b\sin\frac{a-b}{b}t \qquad \text{(دو)}$$

می‌باشد . توجه کنید که با تغییر علامت b معادلات (یک) به معادلات (دو) تبدیل می‌شوند .

۲۷ . اگر $b = a$ ، بروچرخزاد به منحنی شکل ۴۸ بدل می‌شود که به **دلگون** معروف است ،



دلگون

شکل ۴۸

زیرا شبیه قلب می‌باشد . طول دلگون را پیدا نمایید .

۲۸ . نشان دهید که اگر $b = \frac{1}{4}a$ ، بتوچرخزاد به صورت ستاره‌گون درمی‌آید که در مثال ۵ و مسئلهٔ ۲۴ بررسی شد . (به این دلیل ، ستاره‌گون را *بتوچرخزاد چهاربازگشتی* نیز می‌نامند .) اگر $b = \frac{1}{2}a$ ، بتوچرخزاد چه خواهد شد ؟

۲۹ . اگر a/b عدد صحیحی باشد ، طول بروچرخزاد (یک)؛ بتوچرخزاد (دو) چقدر است ؟ جوابها را با اعمال آنها بر دلگون و ستاره‌گون امتحان نمایید .

۳۰ . انتگرال

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt \qquad (0 < k < 1)$$

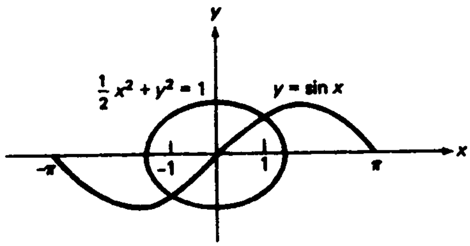
یک تابع غیرمقدماتی از k به‌نام *انتگرال بیضوی تام* از نوع دوم تعریف می‌کند. نشان دهید که بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

به طول $L = 4aE(\sqrt{a^2 - b^2}/a)$ می‌باشد .

۳۱ . تحقیق کنید که یک نوسان کامل منحنی سینوس $y = \sin x$ همان طول L بیضی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$

را داراست (ر.ک. شکل ۴۹). L را به کمک مسئلهٔ ۱۹، صفحهٔ ۶۷۴، تقریب نمایید.



دو منحنی با طول یکسان

شکل ۴۹

۵.۸ مساحت یک سطح دوار

فرض کنیم

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

معادلات پارامتری منحنی سادهٔ C در صفحهٔ xy باشند، که در آن توابع $x(t)$ و $y(t)$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و $y(t)$ نامنفی می‌باشد. فرض کنیم C مثل شکل ۵۰ (آ) حول محور x چرخیده باشد. بااین کار سطح S، به نام *سطح دوار*، با محور x به عنوان محور دوران تولید می‌شود. در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، تعریف شایستهٔ مساحت Aی سطح S از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(1) \qquad A = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt = 2\pi\int_a^b y\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

برای این کار، ابتدا مسیر چندضلعی $P_0P_1P_2\ldots P_{n-1}P_n$ را، درست مثل صفحهٔ ۷۳۹ که به تعریف طول C منجر شد، محاط می‌کنیم. مثل قبل، رئوس مسیر چندضلعی عبارتند از نقاط

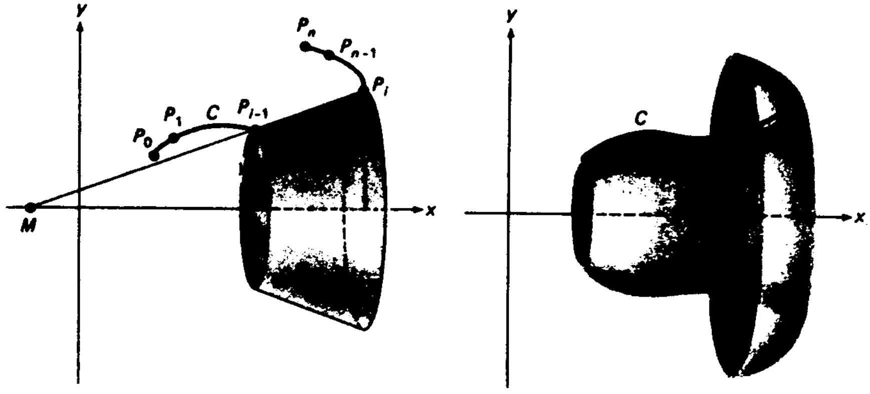
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

که در آنها $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$. وقتی C حول محور x دوران یابد، هر پاره‌خط $P_{i-1}P_i$ یک نوار مخروطی B_i (سطح جانبی یک مخروط ناقص)، مثل شکل ۵۰ (ب)، را جارو می‌کند. مساحت B_i مساوی است با

$$(2) \qquad A_i = \pi(y_{i-1}+y_i)|P_{i-1}P_i|,$$

که در آن $|P_{i-1}P_i|$ طول $P_{i-1}P_i$ بوده و

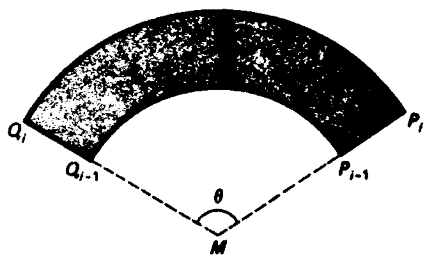
$$y_i = y(t_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$



(ب) (آ)

شکل ۵۰

برای اثبات (۲) ، نوار B_i را در امتداد پاره‌خط $P_{i-1}P_i$ بریده و آن را صاف می‌کنیم تا ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۵۱ به دست آید (نوار را می‌توان با چسباندن اضلاع $P_{i-1}P_i$ و



شکل ۵۱

$Q_{i-1}Q_i$ مجدداً " ساخت) . در این صورت ، A_i تفاضل بین مساحات دو قطاع مستدیر با زاویهٔ مرکزی یکسان θ ، قطاع MP_iQ_i به شعاع $R=|MP_i|$ و قطاع $MP_{i-1}Q_{i-1}$ به شعاع $r=|MP_{i-1}|$ است.[1] بنابراین ،

$$A_i = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}r^2\theta$$

---

۱. در اینجا فرض است که مثل شکل ۵۰(ب) $y_{i-1} < y_i$. هرگاه $y_{i-1} > y_i$ ، آنگاه $R=|MP_{i-1}|$ و $r=|MP_i|$ ، ولی هرگاه $y_{i-1}=y_i$ ، آنگاه B_i یک نوار استوانه‌ای به‌مساحت $2\pi y_i|P_{i-1}P_i|$ می‌باشد .

(ر.ک. صفحهٔ ۵۴) . اما ، طبق ساخت ،

$$R\theta = 2\pi y_i, \qquad r\theta = 2\pi y_{i-1}, \qquad R - r = |P_{i-1}P_i|,$$

و درنتیجه ،

$$A_i = \frac{1}{2}(R + r)(R - r)\theta = \frac{1}{2}(R\theta + r\theta)|P_{i-1}P_i| = \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|,$$

که (۲) را ثابت می‌کند .

مساحت سطح به عنوان یک انتگرال. ظاهرا " معقول است که مجموع مساحات تمام n نوار مخروطی B_i را تقریب مناسبی به مساحت سطح دوار S درنظر بگیریم ، که این تقریب وقتی اندازهٔ مش

$$\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n\} \qquad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

کوچک شود بهتر خواهد شد . لذا ، مساحت S را مساوی حد زیر **تعریف می‌کنیم**:

$$A = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} A_i = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|$$
$$= 2\pi \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|,$$

مشروط براینکه حد موجود و متناهی باشد . محاسبهٔ طول $|P_{i-1}P_i|$ همانند صفحهٔ ۷۴۰ صورت می‌گیرد ، و می‌توان این حد را به صورت زیر نوشت:

$$A = 2\pi \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i,$$

که در آن $t_{i-1} < u_i < t_i,\ t_{i-1} < v_i < t_i$. به‌علاوه ، عدد $\frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ بین (یااحتمالا " منطبق بر) اعداد y_{i-1}, y_i قرار دارد؛ و درنتیجه ، بنابر قضیهٔ مقدار میانی ، به‌ازای w_i ای در بازهٔ $[t_{i-1}, t_i]$ ، $y(w_i) = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$. پس نتیجه می‌شود که

$$A = 2\pi \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} y(w_i)\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2}\, \Delta t_i. \qquad (۳)$$

اگر u_i ، v_i ، و w_i به ازای هر i مساوی باشند ، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوستهٔ $y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازهٔ $[a, b]$ است ،ودراین‌صورت خواهیم داشت

$$A = 2\pi \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} y(u_i)\sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2}\, \Delta t_i$$
$$= 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt,$$

و بدین وسیله فرمول (۱) ثابت می‌شود. در حالت کلی u_i ، v_i ، و w_i یکی نیستند، ولی شهودا" واضح است که وقتی $\mu \to 0$ ، طرف راست (۳) باید به همان حد

$$2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

نزدیک شود (بالاخره، $\mu \to 0$ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر i ، $u_i - v_i \to 0,\ u_i - w_i \to 0$.) این در واقع درست است و می‌توان آن را با استدلالی تکنیکی که در اینجا داده نمی‌شود بدقت ثابت کرد. لذا، از این به بعد فرمول (۱) را ثابت شده می‌گیریم.

به عنوان تمرین، نشان دهید هرگاه $x(t)$ نامنفی بوده و منحنی C حول محور y به جای محور x دوران کند، آنگاه مساحت A ی سطح دوار S حاصل از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$A = 2\pi \int_a^b x(t)\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \qquad (۱')$$

مثال ۱. مساحت A ی سطح یک کره به شعاع r را بیابید.

حل. یک کره به شعاع r را می‌توان از دوران نیمدایرهٔ

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t \qquad (0 \le t \le \pi)$$

حول محور x تولید کرد (ر.ک. شکل ۱۸، صفحهٔ ۷۱۰، که در آن نیمدایره بانمودارتابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ مشخص شده است). با اعمال فرمول (۱) فورا" به دست می‌آوریم

$$A = 2\pi \int_0^\pi r\sin t\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t\, dt = -2\pi r^2 \cos t\Big|_0^\pi = 4\pi r^2,$$

که فرمولی را ثابت می‌کند که از آن قبلا" چند بار استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲. مساحت A ی سطح چنبرهٔ شکل ۲۳، صفحهٔ ۷۱۴، را بیابید؛ یعنی، مساحت‌سطح حاصل از دوران دایرهٔ $(x-a)^2 + y^2 = r^2$ حول محور y را پیدا نمایید.

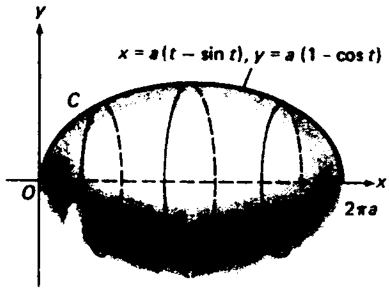
حل. دایره را می‌توان با معادلات پارامتری زیر نمایش داد:

$$x = a + r\cos t, \qquad y = r\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

این بار فرمول (۱′) را به کار برده، به دست می‌آوریم

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt$$
$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r\cos t)\, dt = 2\pi r \Big[at + r\sin t \Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ra.$$

مثال ۳. فرض کنیم C قوس کاملی از یک چرخزاد باشد. مساحت A ی سطح S حاصل از دوران C حول محور x (سطح به شکل توپ راگبی در شکل ۵۲) را بیابید.



شکل ۵۲

حل. مثل مثال ۲، صفحهٔ ۷۴۲، C دارای معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \qquad (0 \le t \le 2\pi,\ a > 0)$$

است و

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

چون $a > 0$ و، به ازای $0 \le t \le 2\pi$، $\sin(t/2) \ge 0$، به کمک (۱) پس از جانشانی $u = t/2$ معلوم می‌شود که

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sin\frac{t}{2}\, dt$$
$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\, du.$$

اما

$$\int_0^\pi \sin^3 u\, du = \int_0^\pi (1-\cos^2 u)\sin u\, du$$
$$= \left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^\pi = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

و درنتیجه ،

$$A = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

فرض‌کنیم C نمودار تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر

$$y = f(x) \qquad (a \le x \le b)$$

باشد . در این صورت ، C دارای معادلات پارامتری

$$x = t, \qquad y = f(t) \qquad (a \le t \le b)$$

است ، و فرمول (۱) مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x ، پس از بازگرداندن متغیر انتگرالگیری از t به x ، به صورت زیر درمی‌آید :

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (۴)$$

به همین نحو ، در این حالت فرمول (۱´) برای مساحت سطح حاصل از دوران حول‌محور y به صورت زیر درمی‌آید :

$$A = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (۵)$$

به‌عنوان تمرین ، نشان دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \qquad (a \le y \le b)$$

باشد ، آنگاه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x مساوی است با

$$A = 2\pi \int_a^b y\sqrt{[g'(y)]^2+1}\, dy = 2\pi \int_a^b y\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\, dy, \qquad (۴´)$$

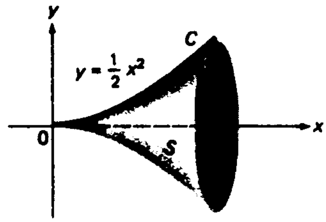
حال آنکه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور y مساوی است با

$$A = 2\pi \int_a^b g(y)\sqrt{[g'(y)]^2+1}\, dy = 2\pi \int_a^b x\sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1}\, dy. \qquad (۵´)$$

مثال ۴. فرض‌کنیم C همان قوس سهموی شکل ۴۴ ، صفحهٔ ۷۴۵ ، باشد ؛ یعنی ،

$$y = \frac{1}{2}x^2 \qquad (0 \le x \le 1), \qquad (۶)$$

و فرض کنیم S سطح حاصل از دوران C حول محور x باشد (شکل بوقی شکل ۵۳) . پس $dy/dx = x$ ، و از (۴) نتیجه می‌شود که



شکل ۵۳

$$A = \pi \int_0^1 x^2\sqrt{1 + x^2}\, dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال، قرار می‌دهیم $x = \tan u$ و به‌کمک مثال ۶، صفحهٔ ۶۲۰، به‌دست می‌آوریم

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \tan^2 u\sqrt{1+\tan^2 u}\sec^2 u\,du = \int_0^{\pi/4} \tan^2 u \sec^3 u\,du$$

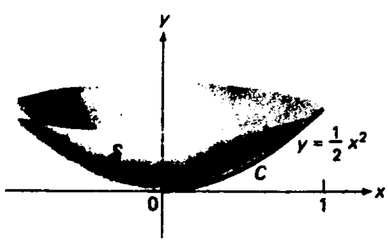
$$= \left[\frac{1}{4}\sec^3 u \tan u - \frac{1}{8}\sec u \tan u - \frac{1}{8}\ln|\sec u + \tan u|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}+1),$$

پس نتیجه می‌شود که

$$A = \left[\frac{3}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{8}\ln(\sqrt{2}+1)\right]\pi \approx 0.42\pi.$$

مثال ۵. از دوران قوس سهموی (۶) حول محور y سطح کاسه شکل S شکل ۵۴ (بخشی از یک **سهمی گون دوار**) به دست می‌آید . در این صورت ، بنابر (۵) ،



شکل ۵۴

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{2\pi}{3}(1+x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2^{3/2}-1) \approx 1.22\pi.$$

مسائل

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی پارامتری داده شده حول محور ذکر شده را بیابید.

۱. $x = t^3, y = \frac{3}{2}t^2 \ (0 \le t \le 1)$ ، محور x

۲. $x = 1/t, y = \ln t \ (\frac{1}{2} \le t \le 1)$ ، محور y

۳. $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t \ (0 \le t \le \pi/2)$ ، محور y

۴. $x = t + \sin t, y = \cos t \ (0 \le t \le \pi/3)$ ، محور x

۵. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t \ (0 \le t \le \pi/2)$ ، محور x

۶. $x = 2e^{-t}, y = e^{-2t} \ (0 \le t < \infty)$ ، محور y

۷. $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t \ (0 \le t \le \pi, a > 0)$ ، محور y

۸. $x = 2\cos t + \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t \ (0 \le t \le 2\pi/3)$ ، محور x

۹. فرض کنید ناحیهٔ تحت منحنی

$$y = a\cosh\frac{x}{a} \qquad (0 \le x \le b, a > 0)$$

حول محور x دوران کرده باشد. نسبت حجم V جسم دوار حاصل به مساحت سطح جانبی A ی آن چقدر است؟

۱۰. تحقیق کنید که فرمول (۱) مساحت A ی سطح نوار مخروطی حاصل از دوران پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ دلخواه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ حول محور x را دقیقا " می‌دهد (فرض کنیم $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0$). به عنوان حالتی خاص، فرمول $A = \pi r L$ را برای مساحت جانبی یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع مایل L نتیجه بگیرید.

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) حول محور ذکر شده را بیابید.

۱۱. $x = y^{1/3} \ (0 \le y \le 1)$ ، محور y

۱۲. $y = \sin x \ (0 \le x \le \pi/2)$ ، خط $x = -1$

۱۳. $x = \sin y \ (-\pi \le y \le 0)$ ، خط $x = 1$

۱۴. $y = |1 - x| + 1 - x \ (0 \le x < \infty)$ ، محور y

۱۵. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1} \ (1 \le x \le \sqrt{2})$ ، محور x

۱۶. $y = e^{-x}\ (0 \le x < \infty)$ ، محور x

۱۷. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\ (1 \le x \le e)$ ، محور x

۱۸. $x = \frac{1}{8}y^2 - \ln y\ (1 \le y \le 4)$ ، محور x

۱۹. فرض کنید S یک منطقهٔ کروی به ارتفاع h باشد؛ یعنی، سطح جدا شده از یک‌کره به شعاع R به‌وسیلهٔ دو صفحهٔ موازی به فاصلهٔ h از یکدیگر $(0 < h \le 2R)$ که هردوکره را قطع می‌کنند. مساحت S را یافته، و نشان دهید که از جای صفحات مستقل است (ر.ک. شکل ۱۵، صفحهٔ ۷۰۷).

۲۰. فرض کنید منحنی $y = 1/x\ (x \ge 1)$ حول محور x دوران کرده جسم دوار بی‌کران S را تولید کند. نشان دهید S دارای حجم متناهی V است، ولی مساحت A ی سطح نامتناهی می‌باشد. V را بیابید. آیا سطح S (که گاهی "بوق گابریل[1]" نام دارد) را می‌توان با مقداری متناهی رنگ نقاشی کرد؟

۲۱. فرض کنید S سطح حاصل از دوران قوسی از دایرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول حول خط $x + y = 1$ باشد. مساحت S چقدر است؟

۶.۸ مطالب بیشتر در باب کار

فرض کنیم s مختص موضع ذره‌ای باشد که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند، وبرآن نیروی متغیر $F = F(s)$ اثر نماید. دراین صورت، مثل صفحهٔ ۴۲۸، کار انجام‌شده‌توسط این نیرو بر ذره عبارت است از

$$W = \int_a^b F(s)\,ds, \qquad (1)$$

که در آن a موضع شروع و b موضع پایان ذره است. بخصوص، اگر $F(s)$ دارای مقدارثابت F باشد، فرمول (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$W = F\int_a^b ds = F\cdot(b-a),$$

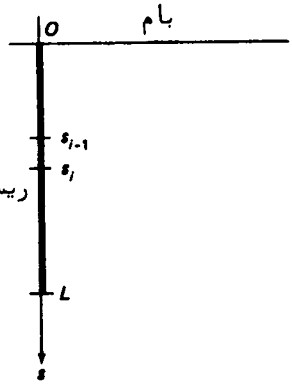
یعنی، کار مساوی حاصل‌ضرب نیرو در تغییر مکان $b - a$ (فاصلهٔ پیموده شده‌توسط ذره) است. حال مسائلی را درنظر می‌گیریم‌که در آنها کار بر یک "محیط پیوسته" مانند یک طناب یا یک مایع انجام می‌شود که می‌توان آن را متشکل از تعداد بسیارزیادی‌ذره گرفت.

مثال ۱. یک طناب سنگین به طول L فوت و به وزن c پوند بر فوت از لبهٔ یک‌بام آویزان

1. Gabriel

است. چقدر کار لازم است تا طناب را به بالای بام بکشانیم؟ از کار انجام شده بر طناب پس از گذشتن از لبهٔ بام صرف‌نظر کنید.

حل. همانند درشکل ۵۵، فرض‌کنیم محور s قائم و روبه‌پایین بوده ومبدأ لبهٔ بام باشد. در این



شکل ۵۵

صورت، طناب ابتدا بازهٔ $[0, L]$ را اشغال می‌کند. با معرفی نقاط تقسیم s_i که در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = L$ صدق می‌کنند، $[0, L]$ را به تعداد زیادی زیر بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$ افراز کرده، بدین وسیله طناب را به تعداد زیادی " عنصر " کوچک تقسیم می‌کنیم که هر یک را می‌توان یک ذره درنظر گرفت. وزن عنصری که ابتدا زیر بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$ را اشغال می‌کند $c\,\Delta s_i$ پوند است، که $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$، و این نیروی‌ثقلی‌وارد بر عنصری است که در بالا بردن آن باید انجام داد. به‌علاوه، عنصر i م طناب با رفتن به بالای بام تغییر مکانی تقریبا" مساوی s_i (یا هر عدد دیگری در بازهٔ $[s_{i-1}, s_i]$) خواهد داشت؛ و درنتیجه، مقدار کار لازم برای بالابردن این عنصر تقریبا" مساوی است با $(c\,\Delta s_i)s_i$ فوت ــ پوند. هر تعریف معقول از مقدار کل کار W ی لازم برای‌بردن تمام طناب به بالای بام باید در این شرط صدق کند که W مجموع کارهای لازم برای بالا بردن تک تک عناصر طناب باشد. بنابراین،

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} cs_i\,\Delta s_i, \qquad (۲)$$

که‌در آن‌تقریب‌با‌کوچک‌شدن‌عناصرطناب، یعنی‌وقتی‌اندازهٔ‌مش $\mu = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n\}$ به صفر نزدیک می‌شود، بهتر خواهد شد. حال، باتوجه به اینکه طرف راست (۲) مجموع ریمانی برای تابع cs بر بازهٔ $[0, L]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} cs_i \Delta s_i = \int_0^L cs\, ds.$$

البته ، مقدار این انتگرال مساوی است با

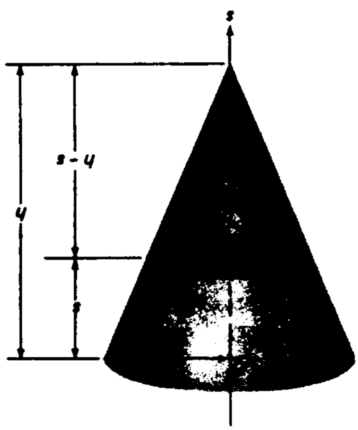
$$W = \frac{1}{2} cs^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2} cL^2.$$

مثلا" ، اگر طناب 30 ft طول و 1.5 lb/ft وزن داشته باشد ، مقدار کار لازم برای‌بردن‌آن به بالای بام مساوی است با $\frac{1}{2}(1.5)(30)^2 = 675$ ft-lb .

کار انجام شده در پمپاژ یک مایع . در مثال زیر از همین نوع استدلال برای حل یک مسئلهٔ هیدرولیک استفاده می‌کنیم .

مثال ۲ . بشکه‌ای به شکل یک مخروط مستدیر قائم معکوس به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h کاملا" از مایعی که چگالی‌اش (جرم بر واحد حجم) ρ است پر شده است . چقدر کار لازم است تا تمام مایع از سر بشکه با لوله‌ای که درست زیر سطح آن قرار گرفته خارج گردد ؟

حل . همانند شکل ۵۶ ، محور تقارن مخروط‌را محور s می‌گیریم که جهتش به طور قائم روبه



شکل ۵۶

پایین بوده و مبداء آن مرکز قاعدهٔ مخروط باشد . فرض کنیم بازهٔ $[0, h]$ به‌وسیلهٔ نقاط تقسیم s_i صادق در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = h$ به تعداد

زیادی زیربازه $[s_{i-1}, s_i]$ تقسیم شده باشد. در این صورت، صفحات عمود برمحور s در نقاط به مختصات s_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ مخروط پر از مایع را به n لایه تقسیم می‌کنند. فرض کنیم $A(s)$ مساحت مقطع عرضی مخروط در s باشد؛ یعنی، قرص مستدیر جدا شده از مخروط به‌وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور مخروط در نقطه به مختص s. لایهٔ i بین صفحات عمود بر محور s در نقاط به مختصات s_{i-1} و s_i در واقع یک مخروط ناقص است، ولی حجمش تقریباً" مساوی حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم به مساحت قاعدهٔ $A(s_i)$ و ارتفاع $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$، یعنی $A(s_i)\Delta s_i$ (همین نوع تقریب در سراسر بخش ۱۰۸ در محاسبهٔ حجم به روش مقاطع عرضی به کار رفت)، می‌باشد. لذا، وزن مایع در لایهٔ i م تقریباً" $\rho g A(s_i)\Delta s_i$ است، که در آن ρ چگالی مایع و g شتاب ثقل می‌باشد. به‌علاوه، لایهٔ i م مایع برای رفتن تا سر بشکه به اندازهٔ تقریباً" s_i جابجا می‌شود؛ و درنتیجه، مقدار کار لازم برای بالابردن لایه تقریباً" $\rho g A(s_i) s_i \Delta s_i$ می‌باشد. فرض کنیم W کار کل لازم برای پمپاژ تمام مایع تا سر بشکه باشد. در این صورت، بنابر همان استدلال مثال پیش،

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \rho g A(s_i) s_i \Delta s_i, \tag{۳}$$

که درآن‌وقتی‌لایه‌های‌مایع همه‌باریک‌شوند، یعنی‌اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n\}$ به صفر نزدیک شود، تقریب بهتر خواهد شد. بنابراین، چون طرف راست (۳) یک مجموع ریمان برای تابع $\rho g A(s)s$ بر بازهٔ $[0, h]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho g A(s_i) s_i \Delta s_i = \int_0^h \rho g A(s) s\, ds.$$

برای محاسبهٔ انتگرال، فرض کنیم x شعاع مقطع عرضی مخروط در s مانند شکل باشد. در این صورت، بنابر تشابه مثلثها،

$$\frac{x}{h-s} = \frac{r}{h},$$

و درنتیجه،

$$x = \frac{r}{h}(h-s), \qquad A(s) = \pi x^2 = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 (h-s)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$W = \int_0^h \rho g A(s) s\, ds = \pi \rho g \left(\frac{r}{h}\right)^2 \int_0^h (h^2 - 2hs + s^2) s\, ds$$

$$= \pi \rho g \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{2} h^2 s^2 - \frac{2}{3} h s^3 + \frac{1}{4} s^4\right]_0^h = \frac{1}{12} \pi \rho g r^2 h^2.$$

مثلا" ، فرض کنیم بشکه به شعاع قاعدهٔ $2\ \mathrm{m}$ و ارتفاع $6\ \mathrm{m}$ بوده و پر از گلیسیرین به چگالی $1260\ \mathrm{kg/m^3}$ باشد. دراین صورت ، با انتخاب $g = 9.8\ \mathrm{m/sec^2}$ ، معلوم می‌شود که کار لازم برای تخلیهٔ بشکه در دستگاه متری عبارت است از

$$W = \frac{1}{12}\pi(1260)(9.8)(2^2)(6^2) = 148{,}176\pi \approx 465{,}510 \text{ ژول}$$

یا ، در دستگاه مهندسی ، حدودا" $343{,}360$ ft-lb می‌باشد.[1] برای آب ، که چگالی $1000\ \mathrm{kg/m^3}$ (در $4°\mathrm{C}$) است ، مقدار کار لازم برای تخلیهٔ بشکه تقریبا" $(1000/1260)(465{,}510) \approx 369{,}450$ ژول می‌باشد.

توان. میزان تغییر کار نسبت به زمان ، یعنی dW/dt ، را **توان** می‌نامند (ر.ک. مسئلهٔ ۲۹ ، صفحهٔ ۴۳۸). واحد mks توان *وات* است و آن برابر است با 1 ژول برثانیه. واحد مهم دیگر توان *اسب بخار* است و آن مساوی 746 وات یا 550 ft-lb/sec می‌باشد.

مثال ۳. یک پمپ بشکهٔ پر از گلیسرین مثال قبل را در 30 دقیقه تخلیه می‌کند. توان پمپ چقدر است؟

حل. کار پمپ در 30 دقیقه تقریبا" 465,510 ژول است. بنابراین ، توان آن مساوی است با

$$\frac{465{,}510}{30(60)}\ \frac{\text{ژول}}{\text{ثانیه}} \approx 258.6 \text{ وات}$$

یا ، معادلا" ،

$$\frac{258.6}{746} \approx 0.35 \text{ اسب بخار}$$

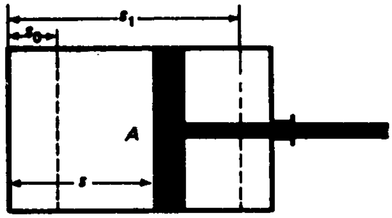
در اینجا فرض می‌کنیم پمپ باسرعت‌ثابت کار کند و مایع را باسرعت قابل چشم‌پوشی خارج

---

۱. *در دستگاه واحدهای سانتیمتر ـ گرم ـ ثانیه (cgs) ، واحد نیرو دین است و آن نیرویی است که به جرم ۱ گرم شتاب $1\ \mathrm{cm/sec^2}$ وارد می‌کند ، حال آنکه در دستگاه متر ـ کیلوگرم ـ ثانیه (mks) ، واحد نیرو نیوتن است و آن نیرویی است که به جرم 1 kg شتاب $1\ \mathrm{m/sec^2}$ می‌دهد. واحدهای نظیر برای کار عبارتند از دین ـ سانتیمتر یا ارگ و نیوتن ـ متر یا ژول ($1 = $ ژول $10^7 = 0.7376$ ft-lb ارگ).*

می‌کند؛ درنتیجه،تمام قدرتش صرف بالابردن مایع شده و به مایع انرژی جنبشی‌نمی‌دهد. برای ساده بودن وضع، نیز فرض می‌کنیم (که نسبتاً "غیرواقعی است) پمپ آنقدر کارا است که تفاضل بین توان ورودی و توان خروجی آن قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

مثال ۴. در یک استوانهٔ مستدیر با مساحت مقطع عرضی A که به یک پیستون قابل حرکت مجهز شده است گاز وارد کرده‌ایم (ر.ک. شکل ۵۷). کار انجام شده توسط گاز بر پیستون



استوانهٔ دارای یک پیستون

شکل ۵۷

در انبساط از حجم اولیهٔ V_0 به حجم نهایی V_1 را بیابید.

حل. فرض کنیم p فشار (یعنی، نیرو بر واحد مساحت) گاز بر سطح پیستون بوده، و s فاصلهٔ بین پیستون و سر استوانه باشد. همچنین، انبساط گاز پیستون را از موضع اولیهٔ s_0 تا موضع نهایی s_1 حرکت می‌دهد. وقتی گاز منبسط می‌شود، فشارش تغییر می‌کند (درواقع کاهش می‌یابد)؛ و درنتیجه، همین امر در مورد نیروی pA وارد بر پیستون صادق است. لذا، کار W وارد بر پیستون به وسیلهٔ انبساط گاز مساوی است با

$$W = \int_{s_0}^{s_1} pA\, ds.$$

در اینجا فشار تابعی از مختص s است، ولی می‌توان آن را به صورت تابع $p = p(V)$ از حجم $V = As$ گاز محبوس درنظر گرفت. بنابراین، اگر متغیر انتگرالگیری را از s به V تغییر دهیم، می‌توانیم W را به شکل معادل زیر بنویسیم:

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\, dV, \qquad (۴)$$

که در آن V_0 حجم اولیه و V_1 حجم نهایی می‌باشد.

انبساط همدما. مثال ۴ را ادامه داده، فرض می‌کنیم گاز به‌طور *همدما*، یعنی در دمای ثابت

منبسط شود . در این صورت ، فشار و حجم به‌وسیلهٔ **قانون بویل**[1]

$$pV = C = \text{ثابت} \tag{۵}$$

با تقریبی مناسب ،دست‌کم اگر نه فشار و نه دما خیلی پایین نباشند ،به‌هم مربوط‌می‌شوند . توجه کنید که $C = p_0V_0 = p_1V_1$ ،که درآن p_0 فشاراولیه‌و p_1 فشار نهایی‌گاز می‌باشد . پس از (۴) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = C\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V} = C\ln V\Big|_{V_0}^{V_1} = C\ln\frac{V_1}{V_0} = p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}. \tag{۶}$$

مثلاً ، در انبساط همدما از حجم اولیهٔ $2\ \mathrm{ft}^3$ به حجم نهایی $10\ \mathrm{ft}^3$ ، گاز که ابتدا در فشار $50\ \mathrm{lb/in}^2$ است کاری مساوی

$$144(50)(2)\ln\frac{10}{2} = 14{,}400\ln 5 \approx 23{,}176\ \text{ft-lb}$$

انجام می‌دهد (144 عامل تبدیل از $\mathrm{lb/in}^2$ به $\mathrm{lb/ft}^2$ می‌باشد) .

انبساط بی‌دررو (اختیاری) . از آن سو ،فرض‌کنیم گاز **به‌طور بی‌دررو** ، یعنی‌بدون معاوضهٔ گرما با محیط اطرافش، منبسط شود . در این صورت ، فشار و حجم گاز با فرمول

$$pV^k = C = \text{ثابت} \tag{۵'}$$

به هم مربوط می‌شوند ، که در آن k ثابت دیگری است که به ماهیت گاز بستگی دارد ؛ k برای گازهای تک اتمی 1.67 و برای گازهای دو اتمی 1.40 می‌باشد . از روابط (۴) و (۵') معلوم می‌شود که

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p\,dV = C\int_{V_0}^{V_1} V^{-k}dV = C\frac{V^{1-k}}{1-k}\Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{C}{1-k}(V_1^{1-k} - V_0^{1-k}).$$

اما $C = p_0V_0^k = p_1V_1^k$ ، که در آن p_0 فشار اولیه و p_1 فشار نهایی گاز است ؛ و لذا ،

$$W = \frac{p_0V_0 - p_1V_1}{k-1}. \tag{۷}$$

در انبساط $V_1 > V_0$ ، ولی در تراکم $V_1 < V_0$. در تراکم بی‌دررو ، کار W' انجام شده توسط پیستون بر گاز قرینهٔ (۷) است ؛ یعنی ،

$$W' = -W = \frac{p_1V_1 - p_0V_0}{k-1}. \tag{۷'}$$

---

1. *Boyle*

این را می‌توان پس از جانشانی مقدار p_1 حاصل از حل معادلهٔ $p_1V_1^k = p_0V_0^k$ به شکل زیر نوشت:

$$W' = \frac{p_0V_0}{k-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right] \tag{۸}$$

مثلاً ، فرض کنیم هوا با فشار اولیهٔ $25\ \mathrm{lb/in^2}$ به‌طور بی‌دررو از حجم اولیهٔ $900\ \mathrm{in^3}$ به حجم نهایی $60\ \mathrm{in^3}$ متراکم شود . در این صورت ، چون برای هوا $k = 1.4$ ،

$$W' = \frac{1}{12}\,\frac{25(900)}{0.4}\left[\left(\frac{900}{60}\right)^{0.4} - 1\right] = 4687.5[(15)^{0.4} - 1] \approx 9160\ \text{ft-lb}$$

($\frac{1}{12}$ عامل تبدیل از in-lb به ft-lb است) . به عنوان تمرین ، نشان دهید که فقط 55% کار برای تراکم همین هوا به‌طور همدما لازم می‌باشد .

مسائل

۱. یک کابل سنگین به طول 20 m و چگالی خطی 5 kg/m ابتدا روی زمین قرار دارد . سپس آن را به‌طور قائم بالا می‌بریم تا انتهای آزاد آن در 4 m ی زمین آویزان شود . چقدر کار روی کابل انجام شده است .

اطاقک یک آسانسور به وزن 1 تن از کابلی به طول 100 ft و وزن 10 lb/ft آویزان بوده و با پیچیدن کابل روی یک قرقره در بالای تیر آسانسور بالا می‌رود .

۲. وقتی اطاقک 50 ft از پایین‌ترین موضع خود بالا رود ، چقدر کار بر آن ؟ برکابل‌صورت گرفته است ؟

۳. وقتی اطاقک از ارتفاع 50 ft به ارتفاع 75 ft برسد ، چقدر کار بر آن و بر کابل صورت گرفته است ؟

۴. سطلی پر از آب به‌طور قائم باسرعت 2.5 ft/sec به بالا برده شده است . وزن سطل 5 lb بوده و ابتدا شامل 45 lb آب است ، ولی همین‌طور که بالا می‌رود ، آب‌به‌میزان 1.25 lb/sec از آن نشت می‌کند . چقدر کار لازم‌است تا سطل سوراخ به‌ارتفاع 50 ft ؟ به ارتفاع 100 ft برسد ؟

۵. چقدر طول می‌کشد تا یک‌پمپ به‌توان 2-hp مقدار $150{,}000\ \mathrm{ft^3}$ آب‌را از سطح‌یک‌دریاچه به ارتفاع 12 ft بالای سطح دریاچه برساند ؟ (چگالی وزن آب با تقریبی مناسب مساوی $62.5\ \mathrm{lb/ft^3}$ است .)

۶. دو آبشار روی یک‌رودخانه قرار دارند . یکی در ارتفاع 45 ft و دیگری در ارتفاع 30 ft واقع است . اگر سرعت آب رودخانه $2250\ \mathrm{ft^3/sec}$ باشد ، توان کل دو آبشار چقدر

است ؟

۰۷ بشکه‌ای به ارتفاع h از مایعی به چگالی ρ تا عمق d پر شده است . فرض کنید صفحهٔ افقی به فاصلهٔ s پایین‌تر از سر بشکه آن را در ناحیه‌ای به مساحت $A(s)$ قطع کند . کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه را بیابید .

۰۸ چاهی به قطر 4 ft و عمق 30 ft تا نصف آب دارد . کار لازم برای پمپاژ تمام آب تا سر چاه را بیابید . چقدر کار لازم است تا 250 گالن آب پمپاژ گردد ؟ (یک‌گالن 231 اینچ مکعب است .)

۰۹ یک کاسه از مایعی به چگالی ρ پرشده و به شکل نیمکره‌ای به شعاع r است . چقدر کار لازم است تا تمام مایع تا ارتفاع h بالای کاسه برده شود ؟

۱۰ . فرض کنید کار لازم برای پر کردن یک بشکه به ارتفاع h از یک مایع به‌وسیلهٔ سوراخی در ته آن W_1 باشد . اگر W_2 کار لازم برای تخلیهٔ بشکه به‌وسیلهٔ پمپاژ تا سرآن‌باشد، W_1 چه رابطه‌ای با W_2 دارد ؟

۱۱ . بشکه‌ای به شکل یک مخروط مستدیر قائم وارون به شعاع قاعدهٔ 3 ft و ارتفاع 5 ft تا عمق 4 ft از آب پر شده است . با استفاده از فرمول منشـــور (یک) ، صفحهٔ ۶۷۳ ، کار لازم برای پمپاژ تمام آب به سر بشکه؛ تا ارتفاع 2 ft بالای بشکه را بیابید .

۱۲ . بشکه‌ای به شکل هرم قائم به ارتفاع h که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است (این هرم در شکل ۵ ، صفحهٔ ۷۰۰ ، نموده شده است) . کار لازم برای پر کردن بشکـه با مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (قاعدهٔ مربع) را بیابید . همچنین، کار لازم برای تخلیهٔ بشکه از طریق سوراخی در سر آن (نوک هرم) را پیدا کنید .

۱۳ . هرم بزرگ چه اوپس در گیزه نزدیک قاهره در اصل به ارتفاع 147 m با قاعدهٔ مربع به طول ضلع 230 m بوده است . این هرم از بلوکهای سنگ آهک با چـگالی تقریبی 2500 kg/m^3 ساختـــه شده است . مقدار کار و تعداد افراد و سالهای لازم برای ساختن هرم را تخمین بزنید . فرض کنید متوسط کار کارگر 50 ساعت در هفته ، یک سال‌کاریک سال استراحت ، بوده و در هر دقیقــه کــار تقریبا " 50 kg به مسافت 1 m بالابرده می‌شود .

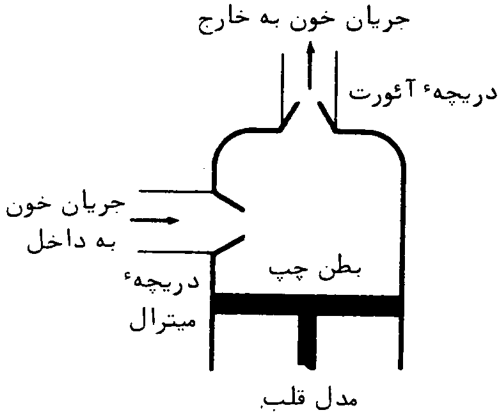
۱۴ . پیستون یک موتور بخار 90 ضربه در دقیقه ، هر یک به طول 15 in می‌زند .فرض‌کنید مساحت مقطع عرضی‌استوانه 48 in^2 بوده ،و فشار متوسط‌بر پیستون در طول یک‌ضربه 60 lb/in^2 باشد . اگر موتور به طور کامل کار کند ، متوسط خروجی موتور چقدراست ؟

۱۵ . چقدر کار لازم‌است‌تا 720 in^3 هلیوم در فشار اولیهٔ 20 lb/in^2 به حجم نهایی 40 in^3 به‌طور همدما ؟ به‌طور بی‌دررو متراکم شود ؟ (هلیوم یک گاز تک اتمی است .)

۱۶. یک گاز در انبساط همدما از حجم اولیهٔ $40\ in^3$ و فشار 16 آتمسفر 1568 ft-lb کارانجام می‌دهد. حجم و فشار نهایی گاز را بیابید. (یک آتمسفر مساوی $14.7\ lb/in^2$ است.)

۱۷. فرض کنید $p = p(h)$ و $\rho = \rho(h)$ فشار و چگالی هوا در ارتفاع h از سطح دریا باشند. هرگاه دما ثابت باشد، آنگاه $p = k\rho$ ، که در آن k ثابت تناسب است (این صورت دیگری است از قانون بویل). از تغییرات دمای هوا نسبت به ارتفاع صرف‌نظرکرده، **معادلهٔ فشاری** $p = p_0 e^{-gh/k}$ را به دست آورید، که در آن p_0 فشار هوا در سطح دریا و g شتاب ثقل می‌باشد.

۱۸. قلب انسان از دیدگاه مکانیکی یک پمپ است (ر.ک. شکل ۵۸) که در آن خون از دریچهٔ میترال وارد بطن چپ شده و سپس وقتی ماهیچهٔ قلب منقبض می‌شود از دریچهٔ آئورت خارج می‌گردد، و بدین ترتیب حجم قلب کاهش می‌یابد. دریک‌قلب جوان و سالم، در هر انقباض فشار دیوارهٔ قلب بر خون به‌طور تقریبا "خطی ازفشار



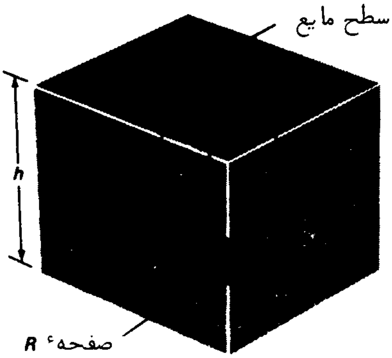
شکل ۵۸

انبساطی 80 mm Hg (میلیمتر جیوه) به فشار انقباضی 120 mm Hg افزایش می‌یابد. کار W انجام شده توسط قلب در یک ضربان آن را درصورتی تخمین بزنید که تغییر حجم خون در یک انقباض تقریبا " $75\ cm^3$ باشد. ($100\ mm\ Hg \approx 1.33 \times 10^5$ دین $/ cm^2$).

۷.۸ فشار مایع (دلخواه)

یک صفحهٔ تخت نازک به شکل ناحیهٔ مسطح R به مساحت A است که در مایعی فرو رفته است. فرض کنیم مایع به چگالی جرم ρ ، یا معادلا" به چگالی وزن $\delta = \rho g$ ، باشد

که در آن g شتاب ثقل است. فرض کنیم R افقی بوده و در عمق h قرار داشته باشد؛ در نتیجه، R و سطح آزاد مایع مثل شکل ۵۹ درفاصلهٔ h از هم قراردارند. پس نیروی F وارد از طرف مایع بر R چیزی جز وزن مایع موجود در یک استوانهٔ قائم به ارتفاع h وقاعدهٔ R



شکل ۵۹

نیست (در اینجا یک فرض تلویحی می‌کنیم که در تبصرهٔ بعداز مثال ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد). چون حجم استوانه Ah است، نتیجه می‌شود که

$$F = \delta Ah \tag{۱}$$

لذا، نیروی F با عمق h متناسب می‌باشد. از تقسیم F بر مساحت A معلوم می‌شودکه ***فشار*** یعنی نیرو بر واحد مساحت، بر صفحهٔ شناور نیز با h متناسب می‌باشد:

$$p = \delta h. \tag{۲}$$

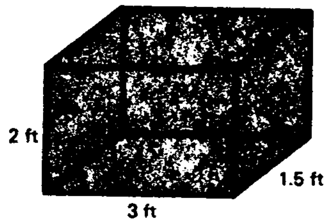
نیروی (۱) و فشار (۲)را، حتی وقتی مایع آب نباشد، " هیدرواستاتیک " می‌نامند.

اصل پاسکال[1]. این نتایج کلیتر از آنند که ابتدا به نظر می‌رسند زیرا، بنابر ***اصل پاسکال،*** فشار در هر نقطه از یک مایع ***در تمام جهات یکی است***. لذا، یک " سطح آزمایش " کوچک به مساحت a که در عمق h از مایعی به چگالی وزن δ قرار دارد، بی‌توجه به جهت سطح، نیروی یکسان $F = \delta ah$ را تحمل‌می‌کند. در این حکم فرض کرده‌ایم سطح آنقدرکوچک باشد که تغییر فشار روی آن حتی وقتی به صورت قائم است (بدترین حالت) قابل چشم پوشی باشد. در غیر این صورت، برای به دست آوردن نیروی وارد بر سطح، باید به طریقی که

1. *Pascal*

ذیلا" توصیف می‌شود از فشار روی سطح انتگرال گرفت .

مثال ۱ . یک آکواریم به شکل مکعب مستطیل به طول 3 ft ، عرض 1.5 ft ، و ارتفاع 2 ft است (ر.ک. شکل ۶۰) . نیروی وارد از طرف آب بر ته آکواریم را بیابید . فشار وارد بر ته آن چقدر است؟ در عمق 6 in چقدر است؟



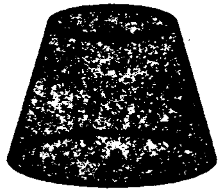
شکل ۶۰

حل . فرض کنیم آکواریم کاملا" پر از آب بوده ، و از وجود ماهی یا گیاه احتمالی صرف‌نظر می‌کنیم . چگالی وزن δ ی آب را مساوی $62.5\ \mathrm{lb/ft^3}$ اختیار می‌کنیم (δ عملا" بادما تغییر می‌کند) . از (۱) نتیجه‌می‌شود که نیروی‌وارد بر ته آکواریم ،که‌مستطیلی‌به‌مساحت $4.5\ \mathrm{ft^2}$ است ، مساوی است با $(62.5)(4.5)(2) = 562.5\ \mathrm{lb}$. به‌علاوه ، طبق(۲) ،فشار بر قاعده عبارت است از $(62.5)(2) = 125\ \mathrm{lb/ft^2}$ ، و فشار در عمق 6 in برابر است با

$$(62.5)(0.5) = 31.25\ \mathrm{lb/ft^2}$$

در مثال ۲ ، نیروهای وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریم به دست خواهندآمد .

تبصره . اگر ساختن یک استوانهٔ پر از مایع روی ناحیهٔ R ممکن نباشد ، نمی‌دانیم چه رخ می‌دهد . مثلا" ،اگر R قاعدهٔ ظرف شکل ۶۱ باشد ، اطراف مایل ظرف از ساختن یک‌چنین

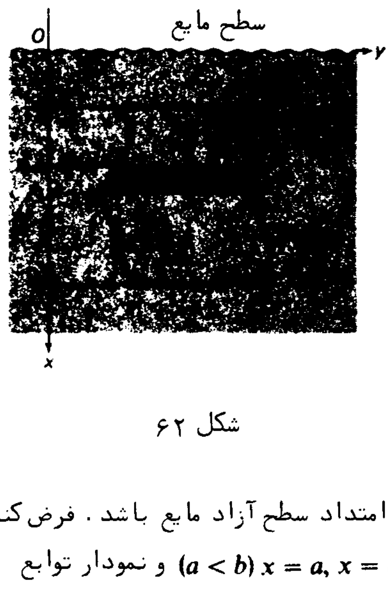


شکل ۶۱

استوانه جلوگیری می‌کند . با کمال تعجب خواهیم دید که فرمولهای (۱) و (۲) حتی

در این شرایط برقرارند . در بدو امر ، این " تناقض هیدرواستاتیک " به نظر غیر قابل توضیح است تا اینکه درک کنیم نیروهای وارد از طرف مایع بر دیوارههای ظرف دارای یک مولفهٔ **رو به پایین** است که مایع را به ته ظرف انتقال میدهد . لذا ، نیروی کل وارد بر ته ظرف در واقع مجموع این مولفهٔ رو به پایین و وزن مایع داخل ظرف است . درواقع ، یک تحلیل مشروح نشان میدهد که ، **بیتوجه به شکل ظرف** ، F دقیقاً " همانی است که اگرظرف یک استوانهٔ قائم با همان قاعدهٔ R و پر از مایع تا همان عمق میبود!

نیروی وارد بر یک صفحهٔ شناور . حال مسئلهٔ یافتن نیروی وارد بر صفحهٔ شناور R را که افقی نیست مطرح میکنیم ؛ درنتیجه ،فشار از یک نقطه بهنقطهٔ دیگر تغییر میکند . ما خود را به حالت مهمی که در آن R قائم است محدود میکنیم (با اینحال ، ر.ک . مسائل ۱۳و ۱۴) . همانند در شکل ۶۲ ، مختصات قائم x و y را درنظر میگیریم که محور x قائم وروبه



شکل ۶۲

پایین بوده و محور y در امتداد سطح آزاد مایع باشد . فرض کنیم R ناحیهای درصفحهٔ xy باشد که به خطوط افقی $x = a, x = b$ $(a < b)$ و نمودار توابع $y = f(x), y = g(x)$ محدود شده است ، که f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f(x) \geq g(x)$. بازهٔ $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم x_i صادق درنامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ به تعداد زیادی زیربازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ افراز میکنیم . درنتیجه ، خطوط $x = x_i$ ، R رابهتعداد زیادی نوار افقی R_i تقسیم میکند ،که R_i ناحیهٔ محدود به خطوط $x = x_{i-1}$ ، $x = x_i$ و منحنیهای $y = f(x), y = g(x)$ است . هر نوار R_i تقریباً " مستطیلی بهمساحت‌تقریبی $[f(x_i) - g(x_i)]\Delta x_i$ است ،کهدرآن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و میتوان x_i را هر نقطهٔ دیگری از

بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ نیز گرفت . به‌علاوه ، با آنکه نقاطی از R_i در عمقهایی متغیر از x_{i-1} تا x_i وجود دارند ، اگر Δx_i کوچک باشد این تغییر عمق جزئی بوده و می‌توان تمام نقاط R_i را تقریباً " در یک عمق ، مثلاً" x_i ، گرفت . بنابراین ، از فرمول (۱) و اصل پاسکال معلوم می‌شود که نیروی وارد از طرف مایع برنوار R_i تقریباً "مساوی است با $\delta[f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i$.

بقیهٔ استدلال به نحو آشنایی ادامه می‌یابد . فرض کنیم F نیروی کل وارد از طرف مایع بر تمام صفحهٔ R باشد . دراین صورت ، F مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک نوارهای R_i می‌باشد . بنابراین ،

$$F \approx \delta \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i, \tag{۳}$$

که در آن تقریب در صورت باریک‌شدن تمام نوارهای R_i ، یعنی وقتی‌اندازهٔ مش $\mu = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود ، بهتر خواهد شد . حال ، با توجه به اینکه طرف راست (۳) یک مجموع ریمان تابع $[f(x) - g(x)]x$ بر بازهٔ $[a, b]$ است ، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$F = \delta \lim_{\mu \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]x\, dx.$$

این را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$F = \delta \int_a^b w(x)x\, dx, \tag{۴}$$

که در آن $w(x) = f(x) - g(x)$ عرض ناحیهٔ R در عمق x زیر سطح مایع می‌باشد .

مثال ۲ . نیروی وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریم مثال ۱ را بیابید .

حل . دو دیوارهٔ قائم مستطیلهایی به عرض 3 ft و ارتفاع 2 ft بوده ، و دو تای دیگر مستطیلهایی به عرض 1.5 ft و ارتفاع 2 ft می‌باشند . لذا ، در حالت اول $w(x) \equiv 3$ ، ولی در حالت دوم $w(x) \equiv 1.5$. همچنین ، $a = 0$ (آکواریم تا سر از آب پر شده‌است) و $b = 2$. پس نتیجه می‌شود که نیروی F_1 وارد بر دیواره‌های بزرگتر مساوی است با

$$F_1 = 62.5 \int_0^2 3x\, dx = 187.5 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 375 \text{ lb},$$

حال آنکه نیروی وارد بر دیواره‌های کوچکتر برابر است با

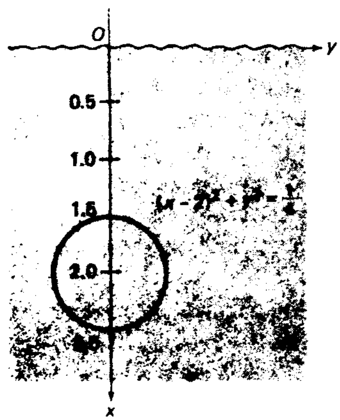
$$F_2 = 62.5 \int_0^2 1.5x\, dx = 93.75 \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 187.5 \text{ lb}.$$

فرض کنیم آکواریم فقط تا نصف آب داشته باشد . در این صورت ، هنوز داریم $a = 0$ (به یاد آورید که مبداء در سطح آزاد آب قرار دارد) ، ولی در اینجا $b = 1$. به‌عنوان تمرین، نشان دهید که این هر دو نیروی F_1 و F_2 را چهار برابر کوچکتر می‌سازد .

مثال ۳ . یک بشکهٔ تقطیر که از الکل اتیل به چگالی وزن $\delta = 7950$ نیوتن$/m^3$ پر شده است در یکی از جداره‌های قائم خود یک دریچهٔ شیشه‌ای مستدیر دارد . دریچه به‌شعاع 0.5 m بوده ، و بالاترین نقطهٔ دریچه 1.5 m زیر سطح الکل است . چه نیرویی از سوی الکل بر دریچه وارد می‌شود ؟

حل . مختصات را مثل شکل ۶۳ اختیار می‌کنیم . می‌بینیم که قاب دریچه دایره‌ای است به معادلهٔ

$$(x-2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$



شکل ۶۳

بنابراین ، دریچه ناحیه‌ای است بین منحنیهای $y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}$ و $y = g(x) = -\sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}$ روی بازهٔ $[1.5, 2.5]$ ؛ درنتیجه ،

$$w(x) = 2\sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2} \qquad (1.5 \leq x \leq 2.5).$$

پس از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که نیروی F وارد از سوی الکل بر دریچه مساوی است با

$$F = 15{,}900 \int_{1.5}^{2.5} \sqrt{\frac{1}{4} - (x-2)^2}\, x\, dx.$$

برای محاسبهٔ انتگرال ، جانشانی $u = x - 2$ را انجام داده به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F &= 15{,}900 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,(2+u)\,du \\ &= 31{,}800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du + 15{,}900 \int_{-0.5}^{0.5} u\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du \\ &= 31{,}800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2}\,du, \end{aligned}$$

که در آن از فرد بودن تابع $u\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}$ استفاده کرده‌ایم (بیشتر توضیح دهید) .آخرین انتگرال چیزی جز مساحت یک قرص نیمه‌مستدیر به شعاع $\frac{1}{2}$ نیست؛ و لذا ، مساوی $\frac{1}{8}\pi$ می‌باشد . بنابراین ،

$$F = \frac{31{,}800\pi}{8} = 3975\pi \approx 12{,}488 \text{ نیوتن}$$

به‌عنوان تمرین ، تحقیق کنید که نیروی F حاصل ضرب مساحت دریچه در فشار در مرکز آن است .

شناوری‌واصل ارشمیدس[1] . مثال ۴ . یک‌تکه چوب به طول a ، عرض b ، و ارتفاع c که‌بخشی از آن در دریاچه‌ای فرو رفته در آب شناور است . فرورفتگی h چوب از سطح آب‌راپیداکنید [ر.ک . شکل ۶۴(آ)] . فرض کنید چوب تمایلی به واژگون شدن نداشته باشد .

حل . فرض کنیم δ چگالی وزن آب باشد . بنابر فرمول (۱) ، آب نیروی " شناوری " رو به بالای $F = \delta abh$ را بر ته چوب وارد می‌کند . اما abh حجم آب جابجا شده توسط چوب است؛ و درنتیجه ، **نیروی شناوری مساوی وزن آب جابجا شده است** . این حالت‌خاصی‌است از ***اصل ارشمیدس*** که می‌گوید نیروی‌خالص‌وارد بر یک‌جسم شناور یا غوطه‌ور **به شکل دلخواه** از سوی مایع اطرافش یک‌نیروی شناوری رو به‌بالاست‌که مساوی وزن مایع جابجاشده‌می‌باشد . توجه کنید که در این مسئله ، نیروهای وارد از سوی آب بر چهار جدارهٔ قائم چوب‌دو بدو یکدیگر را حذف می‌کنند؛ و لذا ، اثری بر چوب نخواهند داشت .

برای یافتن فرورفتگی h چوب در آب ، ملاحظه می‌کنیم که در حالت تعادل نیروی شناوری F بر چوب مساوی قرینهٔ‌وزن w چوب است . اما $w = \delta' abc$ ، که در آن δ' چگالی

---

1. *Archimedes*

وزن چوب می‌باشد . لذا ، شرط تعادل به صورت زیر درمی‌آید :

$$F = \delta abh = \delta' abc = w. \qquad (۵)$$

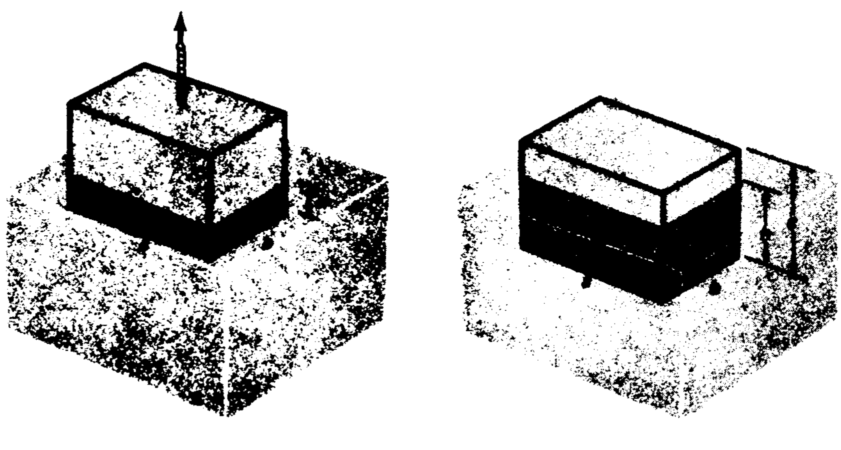
با حل نسبت به h به دست می‌آوریم $h = (\delta'/\delta)c$ ، یا معادلا "

$$h = \alpha c,$$

که در آن $\alpha = \delta'/\delta$ **ثقل مخصوص** چوب است ؛ یعنی ، نسبت چگالی آن به چگالی آب می‌باشد.

مثال ۵ . فرض کنید قطعه چوب مثال ۴ با طنابی که به نقطهٔ میانی وجه بالایی آن بسته شده به‌طور قائم به بالا کشیده شود . کار لازم برای بالابردن چوب تا وقتی ته آن از سطح آب بیرون بیاید چقدر است . (از وزن طناب و هر اثر ناشی از کشش سطحی صرف‌نظرمی‌شود.)

حل . وقتی ته چوب در فاصلهٔ x زیر سطح آب قرار دارد ، چوب نیروی شناوری رو به‌بالای δabx را تحمل می‌کند که مساوی وزن آب جابجا شده توسط قسمت غوطه‌ور چوب می‌باشد [ر.ک . شکل ۶۴ (ب)] . بر چوب نیروی روبه‌پایینی مساوی وزن آن w نیز وارد می‌شود ؛



(ب) (آ)

شکل ۶۴

و درنتیجه ، نیروی خالص رو به پایین بر چوب $F(x) = w - \delta abx$ است . اما ، بنابرفرمول (۵) ، $w = \delta abh$ ؛ و لذا ،

$$F(x) = \delta ab(h - x).$$

بنابراین ، برای بیرون کشیدن چوب از آب ، باید با انجام کار

$$W = -\int_h^0 F(x)\,dx = \int_0^h F(x)\,dx = \delta ab \int_0^h (h-x)\,dx$$
$$= \delta ab\left[hx - \frac{1}{2}x^2\right]_0^h = \frac{1}{2}\delta abh^2 = \frac{1}{2}wh$$

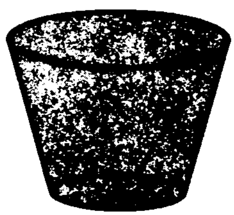
بر این نیرو فایق آمد .

مسائل

۱ . نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک سد مستطیلی قائم به عرض 40 ft و ارتفاع 30 ft را وقتی بیابید که سطح آب 4 ft پایین‌تر از لبهٔ سد باشد .

۲ . نیروهای هیدرواستاتیک وارد بر شش وجه یک مکعب غوطه‌ور به طول ضلع 2 ft را در صورتی بیابید که وجه بالایی 5 ft زیر سطح یک دریاچه و موازی با آن باشد .

۳ . فنجانی به شکل یک مخروط ناقص وارون به ارتفاع h و مساحت قاعدهٔ A می‌باشد (ر . ک . شکل ۶۵) . فشار وارد بر قاعدهٔ فنجان را درصورتی بیابید که از مایعی به‌چگالی



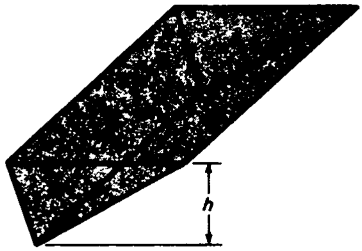
شکل ۶۵

وزن δ پر شده باشد . آیا نیروی وارد بر قاعده مساوی وزن مایع در فنجان‌است؟ چه نیرویی آن قسمت از مایع که مستقیما " روی قاعدهٔ فنجان نیست را تحمل می‌کند؟

۴ . یک صفحهٔ مستطیلی در یک مایع به چگالی وزن δ به‌طور قائم وارد شده است‌به‌طوری که یکی از اضلاعش موازی (یا در امتداد) سطح مایع قرار می‌گیرد . نشان دهید که نیروی وارد بر یک طرف صفحه مساوی حاصل‌ضرب مساحت آن در فشار در مرکز آن (نقطهٔ تقاطع قطرها) است .

۵ . نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک‌صفحهٔ‌مربع شکل به طول ضلع a را درصورتی‌بیابید که صفحه در مایعی به چگالی وزن δ به‌طور قائم طوری وارد شده است که یکی‌ازرئوس مربع در سطح مایع و یکی از اقطار موازی سطح مایع قرار دارد .

۶ یک تغار با دو انتهای مثلثی شکل به مساحت A کاملا" در مایعی به چگالی وزنی δ تا عمق h فرورفته است (ر.ک. شکل ۶۶). نیروی F وارد از سوی مایع بر هر انتها را بیابید. آیا F به شکل مثلث بستگی دارد؟



شکل ۶۶

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحهٔ قائمی را بیابید که در مایعی به‌چگالی‌وزنی δ فرورفته است مشروط بر اینکه صفحه به شکل زیر باشد:

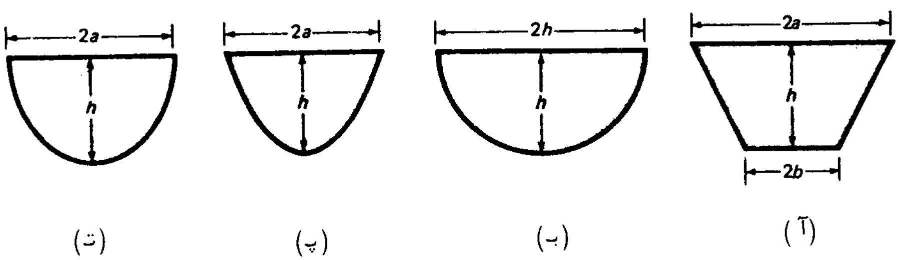
۷. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین شکل ۶۷ (آ)

۸. قرص نیمه‌مستدیر شکل ۶۷ (ب)

۹. قطعه سهمی شکل ۶۷ (پ)

۱۰. ناحیهٔ نیمه بیضوی شکل ۶۷ (ت)

در هر حالت، لبهٔ بالایی صفحه در امتداد سطح مایع قرار دارد.



شکل ۶۷

صفحهٔ نازکی به شکل ناحیهٔ محدود به محور x و نمودار تابع

$$y = b\cos\frac{\pi x}{2a} \qquad (-a \le x \le a, b > 0)$$

می‌باشد. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر صفحه را درصورتی بیابید که در مایعی به چگالی

وزن δ به شکل زیر فرورفته است مشروط بر اینکه

۱۱. لبهٔ مستقیم صفحه در امتداد سطح مایع است.

۱۲. لبهٔ مستقیم صفحه بر سطح مایع عمود بوده و یک انتهای آن در سطح مایع می‌باشد.

۱۳. یک قرص مستدیر به شعاع 1 ft در مایعی به چگالی وزن δ طوری فرورفته است که صفحهٔ آن با قائم زاویهٔ θ ساخته و بالاترین نقطه‌اش 2 ft زیر سطح مایع قرار دارد. نیروی وارد از سوی مایع بر یک طرف قرص چقدر است؟

۱۴. یک استخر شنا دارای عرض 10 ft، طول 24 ft، عمق 4 ft در انتهای کم‌عمق، و عمق 8 ft در انتهای گود می‌باشد. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر ته استخر را در صورتی بیابید که استخر پر باشد. در انتهای گود به اندازهٔ 6 ft آب داشته باشد.

۱۵. چقدر کار لازم است تا چوب مثال ۴ را پایین برد که کاملاً غوطه‌ور شود؟

۱۶. فرض کنید ثقل مخصوص یخ 0.92 و از آن آب دریا 1.03 باشد. چه کسری از یک کوه یخ زیر سطح دریا قرار می‌گیرد؟

یک جسم شناور به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به ارتفاع H و شعاع قاعدهٔ R در یک دریاچه شناور است. وزن جسم w و ثقل مخصوص آن α است.

۱۷. عمق تعادل h قاعدهٔ جسم (رأس مخروط) را بیابید.

۱۸. کار لازم برای بالابردن جسم تا وقتی از سطح آب خارج شود را بیابید.

۱۹. کار لازم برای پایین بردن آن تا وقتی کاملاً درآب فرورود را بیابید.

۲۰. به یک جسم فلزی که می‌گویند از طلای جامد ساخته شده ظن‌برده‌ایم که در آن حفره‌ای وجود دارد. وزن آن در هوا 25 oz و در آب 23 oz است. نشان دهید که ظن غالب است، و حجم حفره را بیابید. (ثقل مخصوص طلا 19.3 می‌باشد.)

اصطلاحات و مباحث کلیدی

محاسبهٔ حجم به روش مقاطع عرضی

محاسبهٔ حجم به روش قرصها و واشرها

محاسبهٔ حجم به روش غشاءها

منحنیها به شکل پارامتری (منحنیهای پارامتری)

خط مماس بر یک منحنی پارامتری

طول یک منحنی مسطح

مساحت یک سطح دوار

کار انجام شده بر یک محیط پیوسته (طناب، مایع، گاز)

فشار مایع و نیروی وارد بر یک جسم غوطه‌ور

مسائل تکمیلی

۱. مخروط مستدیر قائم C به ارتفاع H توسط صفحه‌ای موازی قاعده به دو قطعه با حجم مساوی تقسیم شده است. فاصلهٔ بین این صفحه و رأس C چقدر است؟ آیا جواب به زاویهٔ رأس C وابسته است؟

۲. مسئلهٔ قبل را درصورتی حل کنید که مخروط C به وسیلهٔ صفحات موازی با قاعده به سه قسمت متساوی‌الحجم تقسیم شده باشد. آیا جواب برای مخروط کلی همین است؟

حجم جسم S که قاعده‌اش بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$(a>0, b>0)$ است را درصورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحه‌ای عمود بر محور x یکی از اشکال زیر باشد:

۳. یک مربع

۴. یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین که وترش در صفحهٔ xy است

۵. یک نیمدایره که قطرش در صفحهٔ xy است.

۶. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ بین منحنیهای $y=\cosh x$ و $y=\sinh x$ در ربع اول بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن مربع باشند.

۷. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به محور x مثبت، محور y منفی، و منحنی $y=\ln x$ بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن نیمدایره‌هایی به اقطار واقع در صفحهٔ xy باشند.

با استفاده از یک روش (قرصها، واشرها، یا غشاءها)، حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ تحت منحنی داده شده روی بازهٔ ذکر شده را حول محور مشخص شده پیدا نمایید.

۸. $y=\sqrt{\ln x},\ 1\le x\le e^2$ ، محور x

۹. $y=xe^x,\ 1\le x\le 2$ ، محور y

۱۰. $y=\arctan x,\ 0\le x\le 1$ ، محور y

۱۱. $y=\tanh x,\ -1\le x\le 1$ ، محور x

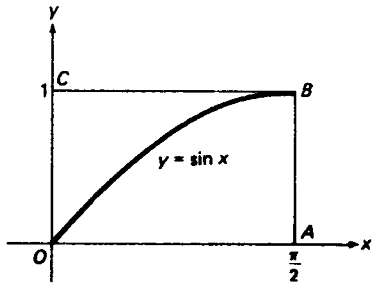
۱۲. $y=\sin x^2,\ 0\le x\le \sqrt{\pi/3}$ ، محور y

۱۳. $y=\csc x,\ \pi/4\le x\le \pi/2$ ، محور x

۱۴. $y = e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ ، محور x

۱۵. $y = e^{-\sqrt{x}}, 0 \le x < \infty$ ، محور y

حجم جسم حاصل از دوران ناحیهٔ OAB یا OBC شکل ۶۸ حول محور مشخص شده را حساب کنید. منحنی OB نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازهٔ $0 \le x \le \pi/2$ است. در هر حالت، از هر دو روش قرصها یا واشرها و روش غشاءها استفاده نمایید.



شکل ۶۸

۱۶. OAB حول محور x

۱۷. OBC حول محور x

۱۸. OBC حول محور y

۱۹. OAB حول محور y

۲۰. OAB حول خط $x = \pi/2$

۲۱. OBC حول خط $x = \pi/2$

۲۲. OBC حول خط $y = 1$

۲۳. OAB حول خط $y = 1$

مقادیر پارامتر t را طوری بیابید که نقطهٔ P بر منحنی پارامتری داده شده (که به‌ازای هر t تعریف شده است) قرار گیرد.

۲۴. $P = (0, 0)$ بر $x = t^3 + 2t^2 - t - 2, y = t^4 - 5t^2 + 4$

۲۵. $P = (-3, 0)$ بر $x = 2\cos t - \cos 2t, y = 2\sin t - \sin 2t$

۲۶. $P = (1, 2)$ بر $x = \tan t, y = 2\sin^2 t + \sin 2t$

منحنی پارامتری داده‌شده را، که در آن t روی بازه‌ای به طول ناکمتراز 2π تغییر می‌کند، رسم نمایید. هر منحنی به یک شکل *لساژو* معروف است، و اگر ولتاژهای $x = x(t)$ و $y = y(t)$ بر صفحات افقی و قائم اسیلوسکوپ اعمال‌شوند، این منحنیها روی صفحهٔ یک اسیلوسکوپ با اشعهٔ کاتودی ظاهر می‌شوند.

۲۷. $x = \sin t, y = \sin 2t$

۲۸. $x = \sin t, y = \sin 3t$

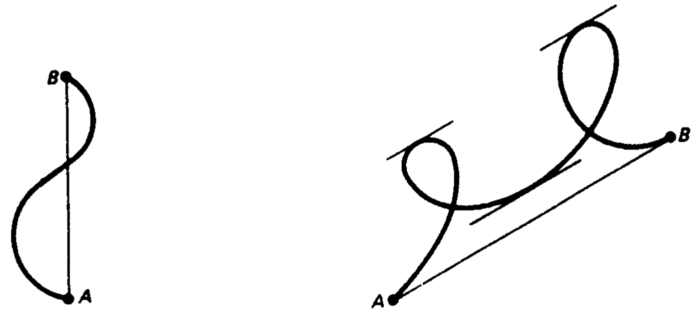
۲۹. $x = \sin 2t, y = \sin 3t$

۳۰. $x = \sin 3t, y = \sin 4t$

۳۱. فرض کنید در منحنی پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \le t \le b),$$

مشتقات $x'(t), y'(t)$ بر بازهٔ باز (a, b) موجود و متناهی بوده و در هر نقطه از (a, b)
$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ ، و نیز نقاط انتهایی $A = (x(a), y(a)), B = (x(b), y(b))$ منحنی
برهم منطبق نباشند. نشان دهید که دست کم یک نقطه از منحنی (نه یک نقطهٔ
انتهایی) وجود دارد که مماس بر منحنی در آن موازی وتر واصل بین A و B است.
[وتر و مماس ممکن است مثل شکل ۶۹ (آ) مایل، یا مثل شکل ۶۹ (ب) قائم باشند.]



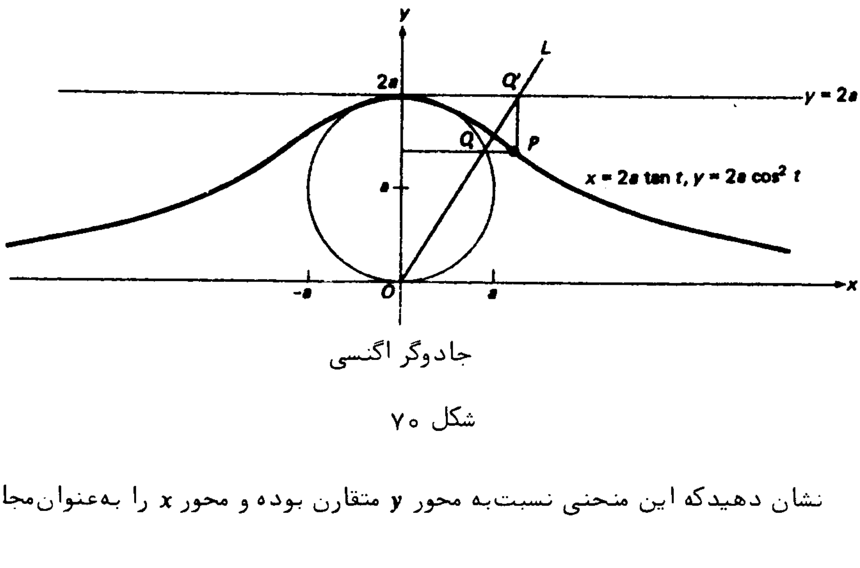
(ب) (آ)

شکل ۶۹

۳۲. منحنی زنگدیس

$$x = 2a \tan t, \quad y = 2a \cos^2 t \qquad (-\pi/2 < t < \pi/2, a > 0)$$

نموده‌شده در شکل ۷۰ به **جادوگر اگنسی** معروف است. معادلهٔ دکارتی آن‌را بنویسید.



جادوگر اگنسی

شکل ۷۰

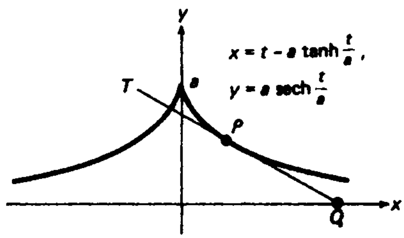
نشان دهیدکه این منحنی نسبت‌به محور y متقارن بوده و محور x را به‌عنوان‌مجانب

دارد. نقاط عطف آن را پیدا نمایید. نشان دهید که هرگاه خطوط افقی و قائمی از نقطهٔ P منحنی رسم کنیم و خط افقی ابتدا دایرهٔ $x^2+(y-a)^2=a^2$ را در نقطهٔ Q قطع کند ولی خط قائم خط $y=2a$ را در نقطهٔ Q' قطع نماید، آنگاه، همانطورکه شکل نشان می‌دهد، نقاط Q و Q' بر خط L مار بر مبداء O قرار دارند. تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟

۳۳. منحنی

$$x=t-a\tanh\frac{t}{a},\qquad y=a\operatorname{sech}\frac{t}{a}\qquad(-\infty<t<\infty,\ a>0),$$

که در شکل ۷۱ نموده شده، به **کشاننده** معروف است. تحقیق کنید که کشاننده نسبت به محور y متقارن است و محور x را به عنوان مجانب دارد، و نیز نمودار تابعی‌است مانند $y=f(x)$ و در نقطهٔ $(0,a)$ نقطهٔ بازگشت دارد. نشان دهید که کشاننده هم مماسی است به این معنی که هرگاه P خط مماس برمنحنی در نقطهٔ دلخواه T بوده و Q قطع x، T باشد (ر.ک. شکل)، آنگاه $|PQ|$ دارای مقدار ثابت a می‌باشد. تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟



کشاننده

شکل ۷۱

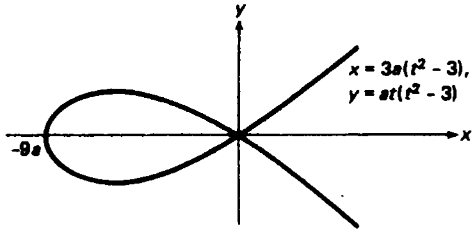
۳۴. سگی که ابتدا در نقطهٔ $(0,a)$ از محور y مثبت است روباهی را که ابتدا در مبداء است تعقیب می‌کند. روباه در امتداد محور x مثبت ضمن آنکه سگ در تعقیبش است می‌دود. فرض کنید سگ همواره در جهت روباه و در فاصلهٔ a تا روباه بدود. منحنی تعقیب سگ چیست؟

۳۵. منحنی

$$x=3a(t^2-3),\qquad y=at(t^2-3)\qquad(-\infty<t<\infty,\ a>0),$$

که در شکل ۷۲ نموده شده‌است، به **مکعبی تشیرن‌هاوزن** معروف است. معادلهٔ دکارتی

مکعبی را نوشته ، و نشان دهید که نسبت به محور x متقارن است . مماسهای وارد بر مکعبی در مبداء را بیابید .



مکعبی تشیرن‌هاوزن

شکل ۷۲

۳۶ . اگر $b = \frac{1}{3}a$ ، بتوچرخزاد مسئلهٔ ۲۶ ، صفحهٔ ۷۴۸ ، به یک منحنی به نام **دلتاگون** یا بتوچرخزاد سه *بازگشتی* تبدیل می‌شود . معادلات پارامتری دلتاگون را بنویسید . دلتاگون را رسم کرده ، و طول آن را حساب کنید .

طول منحنی داده شده را بیابید .

۳۷ . $x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, y = \dfrac{2t}{1 + t^2} \quad (-\infty < t < \infty)$

۳۸ . $x = -\dfrac{1}{t^2} \cos t + \dfrac{1}{t} \sin t, y = \dfrac{1}{t^2} \sin t + \dfrac{1}{t} \cos t \quad (1 \le t \le 2)$

۳۹ . $x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t \quad (-\pi \le t \le \pi)$

۴۰ . $y = \dfrac{1}{10} x^5 + \dfrac{1}{6x^3} \quad (1 \le x \le 2)$

۴۱ . $x = \ln \csc y \quad (\pi/4 \le y \le 3\pi/4)$

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید .

۴۲ . $x = 2 \cos t + \cos 2t, \ y = 2 \sin t - \sin 2t \ (\frac{2}{3}\pi \le t \le \frac{4}{3}\pi)$ ، محور y

۴۳ . $x = 3 \cos t - \cos 3t, \ y = 3 \sin t - \sin 3t \ (0 \le t \le \pi)$ ، محور x

۴۴ . $y = |x - 1| + |x| \ (-1 \le x \le 2)$ ، خط $y = 2$

۴۵ . $x = 2y^{1/4} - \frac{2}{7}y^{7/4} \ (0 \le y \le 1)$ ، محور x

۴۶ . فرض کنید S سطح حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>b>0)$$

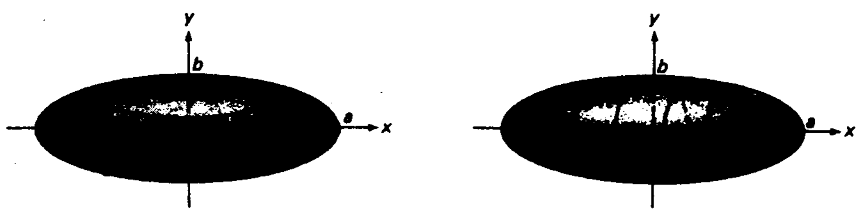
حول محور x باشد. در این صورت، S یک بیضی‌گون دوار یا کره‌گون نام دارد. چون $a>b$، کره‌گون S کشیده است؛ یعنی، مانند یک توپ راگبی یا یک سیگار برگ کشیده است[ر.ک. شکل ۷۳ (آ)]. نشان دهید که S دارای مساحت سطح

$$A=2\pi b^2+\frac{2\pi ab}{e}\arcsin e$$

است که در آن عدد

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

(با پایهٔ لگاریتمهای طبیعی اشتباه نشود) خروج از مرکز بیضی نام دارد. فرض کنید بیضی به جای محور x حول محور y دوران کند. در این صورت، چون $b<a$، کره گون حاصل S' جمع شده است؛ یعنی، مانند یک توپ که بچه‌ای رویش نشسته یا یک فرفرهٔ خیلی تخت منقبض یا پهن شده است[ر.ک. شکل ۷۳ (ب)].



کره‌گون جمع شده

(ب)

کره‌گون کشیده

(آ)

شکل ۷۳

نشان دهید که S' دارای مساحت

$$A'=2\pi a^2+\frac{\pi b^2}{e}\ln\frac{1+e}{1-e}$$

است، که در آن e مجدداً "خروج از مرکز" است. نشان دهید که وقتی $e\to 0^+$، A و A' به حد یکسان $4\pi a^2$ میل می‌کنند که در آن a ثابت است. چرا این انتظار می‌رود؟

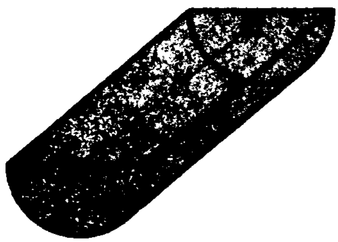
۴۷. فرض کنید S و S' مانند مسئلهٔ قبل باشند. حجم V کره‌گون کشیدهٔ توپر محدود به S، و حجم V' کره‌گون جمع شدهٔ توپر محدود به S' را بیابید.

۴۸. سیارهٔ مشتری یک کره‌گون جمع شده با شعاع استوایی تقریبی **71,600 km** و شعاع قطبی تقریبی **67,300 km** است. حجم و مساحت مشتری را تخمین بزنید. (زمین و خورشید نیز جمع شده‌اند ولی خیلی کم.)

۴۹. یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a حول یکی از اضلاعش دوران می‌کند. مساحت سطح دوار حاصل را بیابید. حجم جسم توپر محدود به این سطح چقدر است؟

۵۰. یک استخر کودکان **8 ft** عرض، **16 ft** طول، **2 ft** عمق در انتهای کم عمق، و **4 ft** عمق در انتهای گود دارد. چقدر کار لازم است که آب این استخر پر از سرش پمپاژ گردد؟ اگر عمق آب در قسمت کم عمق **6 in** باشد چقدر؟ اگر عمق آب در انتهای گود **1 ft** باشد چقدر؟ اگر استخر تا **75%** پر باشد، چقدر طول می‌کشد تا یک پمپ به توان **0.125-hp** آن را تخلیه کند؟

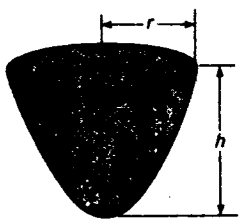
۵۱. یک تغار به شکل نیمی از یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r و طول L (ر.ک. شکل ۷۴) از مایعی به چگالی ρ پر شده است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع به ارتفاع



شکل ۷۴

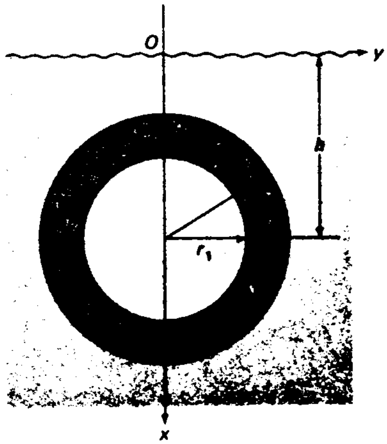
h بالای تغار برسد؟

۵۲. شکل ۷۵ بشکه‌ای را نشان می‌دهد شبیه قسمتی از یک سهمی‌گون دوار به ارتفاع h و شعاع r در بالای آن. کار لازم برای پر کردن بشکه از مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (رأس سهمی‌گون) را بیابید.



شکل ۷۵

۵۳. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحهٔ قائمی که در یک مایع به چگالی وزن δ فرو رفته است را درصورتی بیابید که صفحه به شکل واشر مستدیری به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 بوده و مرکزش درفاصلهٔ $h \geq r_2$ زیر سطح مایع قرار داشته باشد (ر.ک. شکل ۷۶).



شکل ۷۶

۵۴. یک بشکه پر از مایعی به چگالی وزن δ دارای جداره‌ای مستطیلی و قائم بوده و لبهٔ آن در سطح مایع قرار دارد. فرض کنید جداره به‌وسیلهٔ قطر مستطیل به دو قسمت تقسیم شده باشد. نشان دهیدکه نیروی وارد از سوی‌مایع بر یک قسمت‌جداره‌دوبرابر نیروی وارد بر قسمت دیگر است.

یک گوی چوبی به شعاع 1 ft تا نیمه در مایعی به چگالی وزن δ فرورفته است. کار لازم درهر مورد زیر را پیدا کنید:

۵۵. برای خارج کردن گوی از مایع

۵۶. برای فروبردن گوی در مایع