۲

در منشأ اصلهای موضوع و نقش آنها در هندسه

برای روشن ساختن نقش اصلهای موضوع، به‌ترسیم طرحی کلی از مهمترین گامهایی که از زمانهای باستانی در راه هندسه برداشته شده‌اند می‌پردازیم.

زادگاه هندسه کشورهای خاور باستانی هستند. درآن کشورها هزارها سال پیش قاعده‌های عملی مهمی برای اندازه گرفتن زاویه‌ها، و مساحت بعضی شکلها، و حجم ساده‌ترین جسمها وضع شده بود تا نیازمندیهای مردم آنها را ازحیث مساحی ومعماری وستاره شناسی برآورد. این قاعده‌ها از راه تجربی بدست‌آمده بودند و ظاهراً باالفاظ، و دهان به‌دهان، اشاعه می‌یافتند: درکهن‌ترین کتابهایی که به‌دست ما رسیده‌اند به‌کاربرد قاعده‌های هندسی برمی‌خوریم، اما ازتلاش برای بیان منظم آنها نشانه‌ای نمی‌یابیم.

با گذشت زمان دایرهٔ چیزهایی که برایشان معرفت هندسی مورد احتیاج بود گسترش یافت و این نیاز احساس شد که قاعده‌ها به‌کلی‌ترین صورت خود به‌نظم درآیند. و این موجب شد که هندسه از موضوعهای عینی به مفهومهای ذهنی انتقال یابد. مثلاً قاعده‌ای که برای تعیین مساحت قطعه زمینی بکار می‌رفت در مورد اندازه گرفتن پهنهٔ قالیئی، یا سطح دیواری، هم سودمند افتاد؛ و سرانجام به یک مفهوم ذهنی، یعنی مربع

مستطیل، رسید.

و بدین‌سان دستگاهی از معرفت تشکیل شد، و بر آن نام هندسه نهادند. هندسه در روزهای اول زندگی خود دانشی تجربی بود، بدین معنی که همهٔ نتیجه‌ها مستقیماً از تجربه عاید می‌شدند.

گسترش هندسه وقتی راه تازه‌ای پیش گرفت که معلوم شد برخی از احکام آن نیازی به پشتوانهٔ تجربی ندارند، زیرا که می‌شد آنها را از حکمهای دیگری، با تکیه بر قانونهای منطق، نتیجه گرفت. پس حکمهای هندسی به دو دسته تقسیم شدند: آنهایی که از راه تجربه استقرار می‌یافتند (و بعداً اصلهای موضوع خوانده شدند)، و آنهایی که بر مبنای اصلهای موضوع به کمک منطق قابل اثبات بودند (قضایا).

از آنجایی که پشتوانهٔ منطقی، که نیازی به وسایل ویژه یا اندازه‌گیریهای خسته‌کننده ندارد، از جنبهٔ فنی خیلی ساده‌تر از روشهای تجربی است طبیعی است که دانشمندان باستانی با این مسأله روبرو شده باشند که چگونه تعداد حکمهای نوع اول، یعنی اصلهای موضوع، را به حداقل برسانند تا هندسه سبکتر گردد و بار اصلی آن بردوش استدلالهای منطقی گذاشته شود. معلوم شد که این هدف دست یافتنی است، زیرا که هندسه از همهٔ خاصیتهای اجسام مجرد شده بود جز بسط دادن، که مطلبی اساسی بود، اما چندان آسان، که می‌شد با کمک قانونهای منطق همهٔ رابطه‌های هندسی را از معدود محدودی مقدمات، یا اصلهای موضوع، نتیجه گرفت.

بدین‌ترتیب هندسه از یک دانش تجربی به یک علم قیاسی[1] تبدیل شد و نمایش اصل موضوعی امروزی را پیدا کرد.

نخستین کتابی که به‌ما رسیده و در آن حکمهای اصلی هندسه به‌نحوی اصولی عرضه شده‌اند کتاب اصول[2] اقلیدس است که در حدود ۳۰۰

۱. قیاس بیرون آوردن نتیجه است. علمی را قیاسی گویند که احکام جدید آن از احکامی که جلوتر گفته شده‌اند به‌کمک منطق نتیجه شوند.

۲. Elements

سال پیش از میلاد مسیح نوشته شد. ساختمان این کتاب بدین‌گونه است: بعد از تعریفها و اصلهای موضوع نوبت به‌قضایا و حل مسائل می‌رسد، و هرقضیهٔ تازه‌برپایهٔ اصلهای موضوع و قضایائی که جلوتر ثابت شده‌اند اثبات می‌گردد. اصلهای موضوع ثابت نشده‌اند بلکه فقط به‌بیان‌آنها اکتفا شده است.

دوهزار سالی اصول بر دانشمندان تسلط بی‌منازع داشت. اما نکته‌ای در آن بود که موجه به‌نظر نمی‌رسید، وآن اصل موضوع توازی بود، بدین شرح :

اگر خطی که بر دوخط دیگر فرود می‌آید چنان باشد که دو زاویهٔ داخلی که در یك طرف آن هستند وقتی که با هم گرفته شوند از دو قائمه کمتر باشند،آن دوخط راست اگر به‌طور نامتناهی امتداد یابند درآن طرفی که زاویه‌هایش با هم از دو قائمه کمتراند یکدیگر را قطع می‌کنند.[1]

در اعتبار اصل موضوع توازی اقلیدس تردیدی حاصل نشد. اما دودلی در جای دیگر بود: آیا شمردن‌آن جزء اصلهای موضوع کار درستی است؟ آیا نمی‌توان آن را براساس اصل موضوعهای دیگر خود کتاب اثبات کرد و به‌جرگهٔ قضایا انتقالش داد؟

درآغاز تلاش برای اثبات اصل موضوع توازی از این فکر، که جلوتر به‌آن اشاره شد، سرچشمه می‌گرفت که تعداد حکمهای هندسی که نیاز به‌پشتوانهٔ تجربی داشتند هرچه ممکن باشد کمتر شود. با گذشت زمان وضع صورتی دیگر یافت: منشأ تجربی اصل‌های موضوع به‌دست

---

۱. درکتابهای درسی به‌جای اصل موضوع توازی اقلیدس این گزاره، که هم‌ارزآن است،گذاشته شده است: از نقطه‌ای واقع در خارج خطی فقط یك خط می‌توان موازی باآن رسم کرد.

در هندسهٔ اقلیدسی، یا هر هندسهٔ دیگر، دو اصل را وقتی هم‌ارز گویند که نتایج حاصل ازآن هردو یکی باشند، مشروط به‌آن که اصلهای دیگر معتبر بمانند.

فراموشی سپرده شد و درآنها چنان نگریستند که گـویی از بدیهیانند و به هیچ آزمایش یا تجربه‌ای بستگی ندارند[1]. با این دید یقین حاصل شد که اصل موضوع توازی، که به سبب پیچیدگی مطلب بدیهی شمردنش دشوار است در حقیقت اصل موضوع نیست و باید بتوان آن را ثابت کـرد. اما تلاشهای متعدد دراین راه نتیجهٔ مثبتی ببارنیاوردند؛ اصل موضوع توازی، مانند گنجی که طلسم شده باشد، از گشودن راز خـود به‌روی پژوهشگران سرباز می‌زد. کوشش برای اثبات آن، که اندیشهٔ چند نسل ازدانشمندان را مصروف داشت، به‌قیمت تعبیر اندیشه‌گرایانهٔ جوهر وذات اصلهای موضوع، به‌شکست انجامید.

نادرست‌ترین نمونهٔ اثبات اصل موضوع توازی اقلیدس این بود که به‌جای آن گزاره‌ای هم‌ارزآن قرار داده شود، مانند: مایلی و عمودی کـه بریك خط راست رسم شوند یکدیگـر را قطع می‌کنند؛ یا، مثلثی شبیه بـه مثلث دیگر وجود دارد کـه باآن مساوی نیست؛ یا، مکان هندسی نقاطی که دریك طرف پاره‌خطی باشند و از دو سر آن به‌یك فاصله باشند خطی است راست؛ یا، هرسه نقطه یا بر یك خط قراردارند یا بر یك دایره. بعد ثابت خواهیم کرد که اگر اصل موضوع توازی اقلیدس درست نباشد همه این‌قضیه‌ها نادرست هستند. درنتیجه اگر هریک ازآنها را اصل موضوعی فرض کنیم بدان وسیله اعتبار اصل مـوضوع توازی را مـی‌پذیریم. یعنی فرض می‌کنیم که‌آنچه می‌خواستیم ثابت کنیم درست بوده است.

لباچفسکی در پژوهشی کـه در نظریهٔ موازیهاآغاز کـرد راه دیگری پیش گرفت. چون کار را با تلاشهایی برای اثبات اصل مـوضوع توازی شروع‌کرد متوجه گردید که یکی ازآنها به‌نتایجی بکلی غیرمنتظر می‌رسد.

---

۱. می‌دانیم که‌کوران مادرزادی که از راه جراحی بینایی می‌یابند تا مدتی بعد ازبینا شدن مکعب را ازکره تمیز نمی‌دهند مگر این‌که به‌آنها دست بزنند. این دلیلی است بر نیاز به‌تجربه برای دریافت صحیح شکلهای هندسی، که بی‌وجودآن مفهومهای هندسی صورتپذیر نمی‌توانند شد.

این تلاش اثبات با برهان خلف بود و بر پایهٔ دلیلی که می‌آید قرار داشت: اگر اصل موضوع توازی اقلیدس نتیجهٔ اصل موضوعهای دیگر او باشد و اگر با وجود این فرض شود که از نقطهٔ واقع در خارج خطی که با آن خط در یک صفحه باشد دست کم دو خط متمایز بتوان رسم کرد که آن خط را قطع نکنند، این فرض زود یا دیر، و به صورت نتیجه‌ای نزدیک یا دور، به‌تناقض برخواهد خورد. اما لباچفسکی با بررسی بیشتر از بیشتر نتیجه‌های تازه‌ای که براین فرض مترتب می‌شدند یقین حاصل کرد که، هرقدر هم ازدیدگاه هندسهٔ اقلیدسی به‌نظر باطل نماید، این نتایج دستگاه سازگاری از قضایائی تشکیل می‌دهند که می توانند مبنای یک فرضیهٔ تازهٔ علمی باشند.

بدین ترتیب اساس هندسهٔ نااقلیدسی پی‌ریزی شد.[۱] اصل موضوع توازی‌آن با اصل اقلیدسی فرق دارد و به‌صورتی‌است که بالاتر بیان‌کردیم و ازاین پس به‌آن با عنوان اصل موضوع توازی لباچفسکی اشاره‌می‌کنیم.

اما هنوز روشن نبود که‌آیا با اطمینان خاطر می‌توان حکم کرد که از مجموعهٔ نامتناهی نتیجه‌هایی که از اصل موضوع توازی لباچفسکی برمی‌آیند حتی یکی نیست که به‌تناقض بربخورد. لباچفسکی راهی برای حل این مسأله اندیشید و به‌این نکته اشاره کرد که اگر هندسه‌ای که او کشف کرده است سازگار باشد باید حسابی کردن آن امکان‌پذیر باشد، یعنی بتوان حل هرمسألهٔ هندسی را منجر ساخت به‌محاسبهٔ‌آن، و تبدیل‌آن به‌تحلیلی با استفاده ازدستورهای مثلثات هذلولوی که خود او ابداع کرده بود. بعداً دانشمندان دیگر دلایل متقن برسازگار بودن هندسهٔ او یافتند.

پژوهشهای لباچفسکی در قلمرو هندسهٔ هذلولوی خیلی دامنه‌دار بود و اصول هندسه و مثلثات و هندسهٔ تحلیلی و هندسهٔ تفاضلی (دیفرانسیل)را دربر می‌گرفت. وی، با استفاده از هندسهٔ خودش، بیشتر از ۲۰۰ دستور

۱. پس از آن معلوم شد که علاوه بر هندسهٔ لباچفسکئی هندسه‌های نااقلیدسی متعدد دیگر می‌توان ساخت.

جدید برای محاسبهٔ انتگرال معین نتیجه گرفت.

کشف لباچفسکی در نظر معاصران او، حتی شاگردانش، سخت بیمعنی و در حکم سرپیچی گستاخانه از قواعد منطق و ذوق سلیم بود.[1] این گونه برخورد با اندیشه‌های بزرگی که مفهومهایی را که در ردیف مقدسات‌قرار گرفته‌اند از بیخ و بن برمی‌اندازند، مایهٔ شگفتی نیست. فرضیهٔ خورشید-مرکزی کپرنیکوس هم، که منکر آنچه بدیهی می‌نمود، و مدعی‌آنچه قابل تصور بود، بود با چنین پیشواز دشمنانـه‌ای روبرو شد. درکی بسیار عمیق لازم بود تا وجود دوگونه هندسهٔ مختلف‌را بتوان دریافت. اکنون به‌عرضه کردن بعضی دلیلها که به‌آسانترین صورت فهمیده می‌شوند می‌پردازیم.

در قسمت هندسهٔ مسطحهٔ دبیرستان صفحه‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد که از فضای اطراف خود مستقل است؛ به بیان دیگر هندسهٔ مسطحه عبارت است از هندسهٔ صفحهٔ اقلیدسی. هندسهٔ بعضی سطوح منحنی نیـز کـاملاً معـروف هستند، مانند هندسهٔ کروی کـه بسیار در اخترشناسی و شاخه‌های دیگری از علم بکار برده می‌شود.

در هر علمی ساده‌ترین مفهومها مهمترین مفهومها هستند. در هنـدسهٔ اقلیـدسی این مفهومهـا عبارتند از مفهومهـای نقطـه و خـط و صفحه. این

---

۱. البته نمی‌توان بی‌محابا معاصران لباچفسکی را به‌ناتوانی درك کشف او متصف کرد؛ بسیاری از آنان ابراز عقیده‌ای نکردند، شاید از این روی که قلمرو علائق علمی‌آنان محیط تفحصات لباچفسکی را در بر نمی‌گرفت. این را هم می‌دانیم‌که ریاضیـدان بزرگ آلمانی کارل‌گاوس (Karl Gauss) و هندسه‌دان برجستهٔ مجـار یانوش بویوئی (Janos Bolyai)، که بی‌ارتباط با لباچفسکی به‌فکر امکان ساختن هندسه‌ای نااقلیدسی افتادند، اندیشه‌هایی نظیر او داشتند. اما گاوس از بیم‌آن‌که فکرش را نفهمند و به‌ریشش بخندند چیزی به‌پشتیبـانی لباچفسکی منتشر نـکرد و بویوئی که دید تتبعات خودش در هندسهٔ نااقلیدسی (که در ۱۸۳۲/۲۳۹۱ انتشار داد) مورد قبول نیافت مطالعات ریاضی راکنار گذاشت. پس لباچفسکی مـاند کـه به‌تنهایی بـرای به‌کرسی نشاندن حرف حسابش تقلا کند.

اصطلاحات درهندسه‌های نااقلیدسی حفظ شده‌اند، بدین‌صورت‌که(همه‌جا) منظور از «خط راست» خطی است که در روی‌آن کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین دو نقطه‌را می‌توان اندازه گرفت؛ «صفحه» سطحی است دارای این خاصیت که هرگاه دونقطه از «خط راستی» متعلق به آن سطح باشندآنگاه همهٔ نقاط آن «خط راست» به‌آن سطح تعلق داشته باشند. مثلاً درهندسهٔ کروی‌سطح کره و دایرهٔ بزرگ آن، بترتیب، «صفحه» و«خط راست» شناخته شده‌اند. این‌گونه وضع اصطلاح‌کاملاً بمورد است زیراکه «خط راست» ساده‌ترین خطها، و«صفحه» ساده‌ترین صفحه‌هایی است‌که اولی واجد مهمترین صفت خط و دومی دارای مهمترین صفت صفحهٔ هندسهٔ اقلیدسی باشند.[۱]

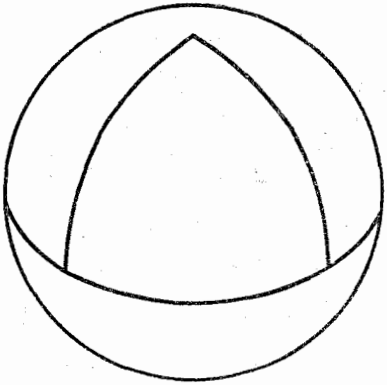
بپردازیم به‌برخی خصایص هندسهٔ کروی. برای مصور ساختن‌آن، آن را بـه صورت هندسهٔ سطح یک کره درنظر مـی‌گیریم. درک این مطلب مشکل‌نیست که دو«خط راست» این هندسه (مثلاً دو نصف‌النهار) یکدیگر را در دو انتهای قطری از کـره قطع می‌کنند. وانگهی مجموع زاویه‌های یک مثلث کروی بزرگتر است از π؛ مثلاً در مثلثی محدود به‌ربـع استوا و دو قوس از دو نصف‌النهار (شکل ۱) هرسه زاویه قائمه‌اند.[۲]

البته در جغرافیا، غیر از کـره، نقشه‌های برسطوح مستوی نیز متداول هستند. این کار بمنزلهٔ‌آن است که از روی نقشه‌های کـره به‌بررسی هندسهٔ کروی پرداخته شود، که کاری است شدنی، مشروط به‌آن کـه معلوم باشد اندازه‌های خطوط واقعی و زاویه‌های واقعی را چگونه مـی‌توان از روی نمایش‌آنها برروی نقشه بدست‌آورد؛ زیرا که دراین نمایشها اندازه‌ها بهم می‌خورند ومیزان بهمخوردگی در سراسر نقشه یکی نیست. مثلاً در روی

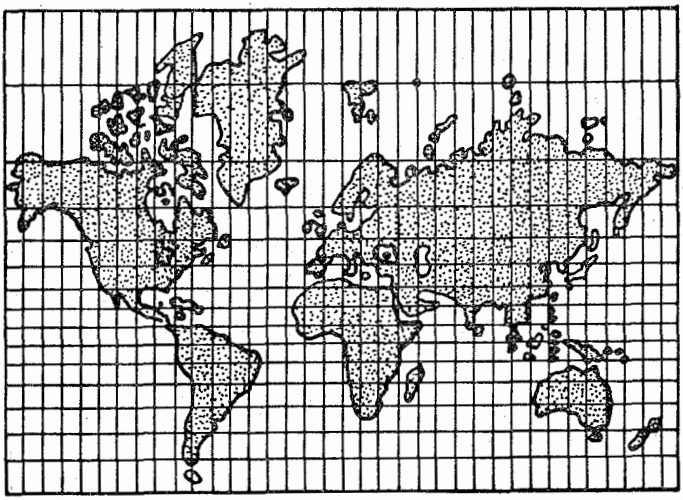
---

۱. باید خاطر نشان کـردکه در هندسه‌هـای تصویری از مفهوم فاصلهٔ بین دو نقطه اثری نیست. دراین‌گونه هندسه‌ها تعبیر «خط راست» و «صفحه» مورد پیدا نمی‌کند.

۲. تعریف زاویهٔ بین دو منحنی زاویهٔ بین مماسهای برآنهاست در نقطهٔ تقاطعشان.



شکل ۱



شکل ۲

نقشه‌های کره زمین کـه به‌قاعدهٔ تصویر مرکاتور[1] رسم شده‌اند تصویرهای نصف‌النهارها خطوط متوازی‌اند (شکل ۲)، و خطوط عمود برآنهـا کـه نمایش مـدارها هستند چنانند کـه پاره خطی کـه نمایندهٔ ۱° برروی مدار است، بـی‌توجه به‌عرض مدار، همه‌جا یکی است، حال‌آن کـه در حقیقت هرچه عرض مدار بیشتر باشد طول قوس ۱° برروی‌آن کوتاه‌تر است.

چون‌سطح دارای دوبعد است هندسه‌ای که موضوعش مطالعهٔ شکلهای واقع برصفحه است دوبعدی، وخود سطح فضای دوبعدی نامیده می‌شوند. از زمان باستان دوگونه هندسهٔ دوبعدی شناخته شده بود، اقلیدسی (بـرای صفحه) وکروی. ریاضیدانان به‌وجودهندسهٔ دوبعدی نااقلیدسی، یعنی‌هندسهٔ کروی، وقعی نمی‌گذاشتند؛ فقط به‌این دلیل ساده که کره در هندسهٔ سه‌بعدی اقلیدسی بررسی‌می‌شد. واین وضع موجب شده بود که خواص نااقلیدسی خود کره نادیده گرفته شوند.

براثر پژوهشهای لباچفسکی معلوم شد که نه تنها سطوح با خـواص نااقلیدسی قابل تصور هستند بلکه فضاهای سه بعدی نااقلیدسی هم وجـود دارند.

وارد کردن مفهوم هندسه‌های سه بعدی نااقلیدسی ممکن است مشکلی ایجاد کند مگر این که به‌این توضیح توجه کنیم: گـاهی مناسب است کـه نتایج بررسی ردهٔ خاصی ازپدیده‌ها را به‌صورت هندسی نمایش‌دهیم.مثلاً معلومات حـاصل از نتـایج رشد باروری کار کـارگران را با منحنی‌ها و نمودارها مجسم می‌سازند. و این نشانهٔ‌آن است که بسیاری از فرایندهای واقعی و حالتهایی را که ارتباط مستقیمی با هندسه ندارند می‌توان بوسیلهٔ شکلهای هندسی نمایان ساخت.

---

۱. گـرهارد مـرکـاتر (Garhard Mercator) (۲۰۷۱ ـ ۲۱۵۳/ ۱۵۱۲ ـ ۱۵۹۴) نقشه‌کش بـرجستهٔ فلاندری. روش تصویـری‌کـه او در ۱۵۶۹/۲۱۲۸ پیشنهاد کرد قبول عام یافت و ازآن زمان نقشه‌های‌دریایی با این روش رسم می‌شوند.

اگر نمودار را همچون خطی درصفحهٔ اقلیدسی درنظر بگیریم آشکار می‌شود که شکلهای هندسهٔ اقلیدسی در مثال‌ما بکار رفته‌اند. درحالتهای پیچیده‌تر ممکن است به‌هندسه‌های سه‌بعدی، وحتی چند بعدی، اقلیدسی و نااقلیدسی توسل جوئیم. اما ازآنچه گفتیم نمی‌توان نتیجه گرفت که همهٔ این هندسه‌ها نسبت‌ها را بتفصیل توصیف می‌کنند؛ نظریه‌هایی وجود دارند که اصطلاحات هندسی را در بیان مطلب خود بکار می‌برند و، بطور کلی، به‌این اصطلاحات معنی‌هایی اسناد می‌شود که با مفهومهای فضائی ارتباطی ندارند. بدین‌ترتیب با افزودن زمان به عنوان بعد چهارم به سه بعد فضای حقیقی مفهوم فضای چهار بعدی را وارد می‌کنیم‌که درآن یک فاصلهٔ زمانی معین مانند «پاره خطی راست» در نظر گرفته می‌شود. در بیشتر حالتها این شیوهٔ برخورد فقط ظاهری از تجسم می آفریند، با وجود این تا حدی به آسان شدن درک مفهوم پدیده‌هایی که با این روش مورد مطالعه قرار می‌گیرند کمک می‌کند.

بدین‌ترتیب ساختن هندسه‌های نااقلیدسی از این حیث قابل توجیه است که اطلاق آنها به‌چیزهایی که وجود عینی دارند امکان‌پذیر است. نفس این واقعیت که این نتایج با اصطلاحات هندسی بیان می‌شوند نتیجه‌ای حقیقی نیست: تغییردادن این طرز بیان هندسی به‌صورتی که با خواص شیء و پدیده‌های مورد بحث مطابقت پیدا کنند کار دشواری بنظر نمی‌رسد.

این را هم بگوییم که در ریاضیات عملی وقتی که نظریه‌ای چیزهای مختلفی راکه‌تابع قوانین واحد ریاضی هستند ازجنبهٔ کیفی توصیف‌می‌کند قراردادن بعضی مفهومها به‌جای بعضی دیگر کاری‌است متداول و معمول.

هندسه‌های سه بعدی درخور دقت خاص هستند. با صرف نظر از کاربردهای دیگری که این هندسه‌ها ممکن است داشته باشند در آنها باید به صورت فرضیه‌هایی نگریست که مدعی توصیف ویژگیهای فضائی حقیقی‌اند. این که کدام از این هندسه‌ها بیشتر با واقعیت مطابقت دارد

مسأله‌ای است که آن را فقط می‌توان با آزمونهای تجربی حل کرد.

اما باید واقعیتی را خاطر نشان سازیم که برای آنچه بعداً عرضه می‌کنیم دارای اهمیتی است. نقشه‌ای از یک صفحهٔ لباچفسکئی را می‌توان برروی یک صفحهٔ اقلیدسی کشید، و آن هم به بیشتر از یک راه، درست همانطور که درمورد کره عمل می‌کنیم. ما باید تحلیل چنین نقشه‌ای را پایهٔ مطالعه‌ای قرار دهیم که در اینجا از هندسهٔ هذلولوی می‌شود.

هندسهٔ لباچفسکئی در مواردی‌که اینک خواهیم گفت قبول عام یافت. در ۱۸۶۸/۲۴۲۷ هندسه‌دان ایتالیایی اجنیو بلترامی[1] (۲۳۹۴ ـ ۱۸۳۵/۲۴۵۹ ـ ۱۹۰۰) کشف کرد که در فضای اقلیدسی سطحی وجود دارد که دارای ویژگیهای صفحهٔ لباچفسکئی، یا بهتر بگوییم (هرگاه کوتاه‌ترین خط بر روی سطوح را بمنزلهٔ «خط راست» بپذیریم) قسمتی از صفحهٔ لباچفسکئی، است. این کشف، که دیری نکشید که منجر به ترسیم نقشه‌های گوناگون بر صفحهٔ لباچفسکئی شد، دانشمندان را به درستی اندیشه‌های هندسه‌دان روسی معتقد ساخت، و موجب نهضتی برای بررسی دقیقتر کار او شد، و پژوهشهای متعدد در زمینهٔ هندسه‌های نااقلیدسی را برانگیخت.

کشف هندسه‌های نااقلیدسی مسأله‌ای بسیار دشوار برای علم فیزیک مطرح ساخت و آن توضیح این مسأله بود که آیا فضای واقعی فیزیکی، چنان که قبلاً پنداشته شده بود، اقلیدسی است، و اگر نیست به کدام نوع از فضاهای نااقلیدسی تعلق دارد[2]. برای یافتن جواب این مسأله لازم است که از راه تجربه به آزمون اعتبار اصول موضوع آن پرداخت، زیرا که آشکار است که با بهترشدن ابزارهای اندازه‌گیری، اعتماد به معلوماتی

---

۱. Eugenio Beltrami

۲. وقتی‌که این مسأله مورد توجه قرار می‌گیرد از امکان یکنواخت نبودن فضای واقعی غافل نباید ماند، یعنی فضائی که نهاد هندسی آن در نقاط مختلف متفاوت باشد.

که از راه تجربه فراهم‌آیند بیشتر می‌شود و با بالارفتن این اعتماد امکان نفوذ در جزئیاتی که از این پیش از دقت پژوهندگان گریخته‌اند افزایش می‌یابد.

بدین ترتیب لباچفسکی هندسه را به تعبیر مادی اصول موضوع آن باز گرداند، یعنی که این اصول احکامی هستند که خواص هندسی فضا را به صورتی که آدمی بر اثر تجربه درکشان می‌کند، به رشتهٔ قاعده می‌کشند.

ما هنوز نمی‌توانیم مسألهٔ نهاد هندسی فضای حقیقی فیزیکی را بکلی حل شده انگاریم. با وجود این می‌توانیم خاطر نشان سازیم که در نظریهٔ جدید نسبیت، براساس داده‌های متعدد، چنین بنظر می‌رسد که فضای حقیقی نااقلیدسی است و خواص هندسی آن از خواص فضای لباچفسکئی پیچیده‌ترند. یکی از بزرگترین ضربتهایی که بر اعتقاد به اقلیدسی بودن نهاد فضای حقیقی وارد آمد براثر کشف این قانون فیزیکی بود که ممکن نیست سرعتی بالاتر از سرعت نور وجود داشته باشد.

حالا می‌توانیم به پرسشی که غالباً به گوش می‌رسد جواب بگوئیم، یعنی به‌این که‌کدام یک از دو هندسهٔ اقلیدسی یا لباچفسکئی درست است.

چنین پرسشی در مورد هندسه‌های دو بعدی اقلیدسی و کروی مطرح نمی‌شود، هر دو به وضوح درست هستند، و هر یک محیطی خاص برای کار برد خود دارد. نه دستورهای هندسهٔ کروی را می‌توان برای شکلهای مسطح بکار برد و نه دستورهای هندسهٔ دو بعدی اقلیدسی را برشکلهای واقع بر روی کره بکار بست. همین حکم بر هندسه‌های مختلف سه بعدی روا است: هر یک ازآنها که ازجنبهٔ منطقی سازگار است در حوزهٔ خاصی، که الزاماً سرشت هندسی ندارد، بکار می‌رود؛ لیکن اگر به آن یک سرشت کلی بدهیم اعتبار خود را از دست می‌دهد.

اما در مورد نهاد هندسی فضای حقیقی، مسأله، به صورتی که مشخص کرده‌ایم، در قلمرو فیزیک قرار می‌گیرد و حل آن به وسیلهٔ هندسهٔ محض میسر نیست. از جمله، صفت مشخص‌کنندهٔ آن این است که هیچ هندسه‌ای

روابط فضائی را با دقت مطلق دربر نمی‌گیرد؛ مثلاً ساخت ملکولی ماده وجود اجسامی با ابعاد قابل درک با لمس را که واجد خواص هندسی یک کرهٔ آرمانی باشند نفی می‌کند. ازاین روی کاربرد قاعده‌های هندسی در حل مسائل عینی بناچار نتایج تقریبی ببار می‌آورد. بدین ترتیب مفهومی که از نهاد هندسی فضای حقیقی داریم به این عقیده، که از جنبهٔ علمی تأیید شده است، تحلیل می‌رود که گاهی هندسه‌ای روابط واقعی فضائی‌را بهتر از هندسه‌های دیگر توصیف می‌کند.

با این که نظریهٔ نسبیت از دستورهای هندسهٔ نااقلیدسی استفاده می‌کند، نتیجه نباید گرفت که از هندسهٔ اقلیدسی سلب اعتبار شود، چنان‌که از اختر شماری و کیمیاگری و علوم کاذبی مانند آنها شد. هر دو هندسه ابزار پژوهش در صورتهای فضائی‌اند، اما هندسهٔ نااقلیدسی پژوهشهای دقیقتری را میسر می‌سازد در حالی که هندسهٔ اقلیدسی برای حل بیشتر مسایل مهم عملی با درجهٔ خاصی از دقت بکار می‌رود؛ و چون در عین‌حال سادگی زیاد صفت برجستهٔ آن است کاربرد وسیع آن برای همیشه تضمین می‌شود.

برای به پایان رساندن این زمینهٔ مختصر اندیشه‌های تازه‌ای را که لباچفسکی در گسترش هندسه وارد عرصه کرده است خاطر نشان می‌سازیم.

خدمات علمی این متفکر بزرگ منحصر به‌پرده برداشتن از راز هزار سالهٔ اصل موضوع توازی نبود؛ بلکه کار او از اهمیت خیلی بیشتری برخوردار است.

لباچفسکی، با گذاشتن یکی از اصل موضوعهای اقلیدس در بوتهٔ انتقاد تحلیلی، زمینه‌را برای مطالعهٔ مجدد بعضی از احکام مقدماتی دستگاه اقلیدسی فراهم ساخت و این کار به گسترش اصول دقیق علمی برای ساختمان اصل موضوعی هندسه و شاخه‌های دیگر ریاضی رهنمون گردید.

کشف هندسهٔ هذلولوی به‌وسیلهٔ لباچفسکی علم صورتهای فضائی را از چارچوب تنگ دستگاه اقلیدسی‌رهانید. هندسهٔ او درنظریهٔ انتگرالهای

معین و سایر محیطهای ریاضی کاربردی مستقیم یافت.

لباچفسکی پرداختن بـه مسائلی را آغاز کـرد کـه در هیأت پیشین ریاضیات ظهور نکرده بودند، از جمله مسألهٔ نهـاد هندسی فضای حقیقی. اگر هندسهٔ لباچفسکئی نبود نظریهٔ نسبیت، که یکـی از عظیمترین کارهای فیزیک نوین‌است، امکان گسترش نمی‌یافت. برمبنای پژوهشهای لباچفسکی دانشمندان نظریه‌ای به وجود آوردند که تحلیل فرایندهایی را که دردرون هستهٔ اتم روی می دهند میسر سازد.

در پایان، اهمیت عرفانی اندیشه‌های این ریـاضیدان بزرگ روس را خـاطرنشان می‌سـازیم. پیش از لباچفسکی هندسه قرنها زیرسیطرهٔ نظرهای آرمان گرایانه (ایـده‌آلیست)، کـه از افـلاطون فیلسوف بزرگ یـونانی سرچشمه می‌گرفتند، بود. افلاطون با اسناد سرشتی‌مطلق به اصل موضوعهای اقلیدس منکر منشأ تجربی آنها شده بـود. لباچفسکی با قاطعیت این بینش را درهم کوفت و هندسه را به وضعی مادی باز گردانید.