۱- انتگرال های زیر را محاسبه کنید. (۳۰ نمره)

الف) $\int \frac{dx}{x+x^{۳}}$ ب) $\int \sin(\ln(x))\,dx$

۲- طول قوس منحنی $y = \frac{x^{۲}}{۲} - \frac{\ln(x)}{۴}$ از x = ۲ تا x = ۳ را بیابید. (۲۰ نمره)

۳- همگرایی و یا واگرایی انتگرالهای ناسره زیر را مشخص کنید. (۳۰ نمره)

الف) $\int_{۰}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[۳]{x}+x^{۲}}$ ب) $\int_{۱}^{\infty} \frac{\ln(x)(sinx)^{۲}}{x^{۳}+۲}\,dx$

۴- همگرایی و یا واگرایی سری زیر را مشخص کنید. (۲۰ نمره)

$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{\frac{۱}{n}}{\ln(n)\sqrt{(\ln(n))^{۲}-۱}}$$

۵- بازه همگرایی سری توانی زیر را مشخص کنید. (۲۰ نمره)

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n+۲}\left(\frac{x-۲}{۳}\right)^{n}$$

Scanned by CamScanner

پاسخ تشریحی آزمون پایانترم «ریاضی ۱» ... خرداد ۹۸ ... دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

سؤال ۱)

الف) $\int \frac{dx}{\underbrace{x+x^3}_{x(1+x^2)}} \overset{\text{تجزیه کسر}}{=} \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{1+x^2}dx$

$\begin{cases} \overset{x=0}{\longrightarrow} \boxed{A=1} \\ \overset{x=1}{\longrightarrow} 1+\frac{B+C}{2}=\frac{1}{2} \\ \overset{x=-1}{\longrightarrow} -1+\frac{C-B}{2}=\frac{-1}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{B=-1}, \boxed{C=0}$

$= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \boxed{Ln(x) - \frac{1}{2}Ln(1+x^2) + c}$

ب) $\int Sin(Lnx)dx \overset{\text{تغییر متغیر}}{\longrightarrow} \begin{cases} Lnx = u \rightarrow x = e^u \\ \frac{dx}{x} = du \rightarrow dx = xdu \rightarrow \underline{dx = e^u du} \end{cases}$

$= \int e^u Sin(u)du \overset{\text{جزء جزء}}{\longrightarrow} \begin{cases} Sin(u) = t \\ e^u du = dv \end{cases}$ ← روش اول: زمون

روش دوم: سریع

$I = \int e^u Sin(u)du$

مشتق ↓ e^u (+) $-Cos(u)$ ↓ انتگرال

e^u (−) $Sin(u)$

$I = -e^u Cos u + e^u Sin u - \int e^u Sin(u)du$ (I)

$2I = e^u(Sin(u) - Cos(u))$

$\rightarrow \boxed{I = \frac{e^u(Sin(u)-Cos(u))}{2}}$, $u = Lnx$

جایگذاری $\rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2}x(Sin(Lnx) - Cos(Lnx))}$

ادامه سؤالات در برگه خرداد ۹۸

Scanned by CamScanner

سوال ۲)

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4} \rightarrow y' = x - \frac{1}{4x} \rightarrow y'^2 = x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}$$

$$y'^2 + 1 = x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2} = \left(x + \frac{1}{4x}\right)^2$$

طول منحنی $\rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \int_2^3 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx$

$$= \int_2^3 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\right)\Big|_2^3 = \boxed{\frac{5}{2} + \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}}$$

سوال ۳)

الف) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$

مقایسه با ↓ : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\Big|_0^1 = 3/2$ همگرا

مقایسه با ↓ : $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^{\infty} = 1$ همگرا

طبق آزمون مقایسه حدی ؟ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}} < \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ و $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ همگرا است پس $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x}}$ همگرا

طبق آزمون مقایسه حدی همگرا است.

ب) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(\omega)(\sin x)^2}{x^3 + 2} < \int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3+2} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}$

طبق آزمون مقایسه مستقیم همگرا

ابراهیم شاه ابراهیمی - مرادی

Scanned by CamScanner

سوال ۴)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n \sqrt{\ln^2 n - 1}} \xrightarrow{\text{آزمون انتگرال}} \int_3^{\infty} \frac{\frac{dx}{x}}{\ln x \sqrt{\ln^2 x - 1}}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} \ln x = u \\ \frac{dx}{x} = du \end{cases} \rightarrow \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} \begin{cases} u = \sec t \\ du = \sec t \cdot \tan t \, dt \end{cases}$$

$$\rightarrow \int \frac{\sec t \cdot \tan t \, dt}{\sec t \cdot \sqrt{\sec^2 t - 1}} = \int dt = t \xrightarrow{\text{کاتبک}} = \sec^{-1} u \xrightarrow{\text{کاتبک}} = \sec^{-1}(\ln x)$$

$$= \sec^{-1}(\ln x)\Big|_{x=3}^{\infty} = \sec^{-1}(\infty) - \sec^{-1}(\ln 3) = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}(\ln 3)$$

حاصل عددی ← همگرا.

math-teacher.blog.ir

ابوعلی شاه ابراهیمی - مرداد ۹۵

Scanned by CamScanner

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$$

math-teacher.blog.ir

مرحله 1 نسبت

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+3}\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n+2}\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)(x-2)}{(n+3)\,3}\right|$$

$$= \left|\frac{x-2}{3}\right| \text{ همگرا} \quad \Rightarrow \quad -1 < \frac{x-2}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad -3 < x-2 < 3$$

$$-1 < x < 5$$

$x=-1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{-3}{3}\right)^n$ مرحله 1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = 0$ ← همگرا

$\frac{1}{n+2}$ مثل

$x=5$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}\left(\frac{3}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ مرحله 1 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+2}\,dx = \ln(x+2)\Big|_1^{\infty} = \infty$ واگرا

$-1 < x < 5$ ← بازه همگرایی

ایراد کار از اینجا شروع شده