باشگاه دانش‌پژوهان جوان — هوالرحیم — تابستان ۹۵

امتحان آزمایشی شماره

۱ ــ می‌خواهیم مدلِ کوچکی از یک هلی‌کوپتر را در آزمایشگاه بسازیم و روی آن آزمایش‌هایی انجام بدهیم، و از روی نتایجِ آزمایش، مقادیرِ موردنظر را برای هلی‌کوپترِ اصلی بیابیم. شتابِ گرانش برای هلی‌کوپترِ واقعی و مدل یکسان است. ابعادِ طولی هلی‌کوپترِ واقعی λ برابرِ ابعادِ مدل است. مطلوب است محاسبه‌ی نسبتِ کمیت‌های زیر در مدل و هلی‌کوپترِ اصلی.

الف) بُعدِ زمان (یعنی $\frac{T_{\text{واقعی}}}{T_{\text{مدل}}}$)

ب) انرژی مصرفی

پ) توانِ مصرفی

۲- جسمی به جرمِ m با سرعتِ اولیه‌ی $v_{\circ}$ به طورِ عمودی به سمتِ بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید نیروی مقاومتِ هوا برای این پرتابه به صورتِ $\vec{f} = -\epsilon\, m\, t\, v^{2}\, \hat{v}$ مدل شده است.

فرض کنید نسبتِ نیروی مقاومتِ هوا به وزنِ جسم خیلی کوچک است و در همه‌ی قسمت‌ها (به جز قسمتِ آخر) از مرتبه‌ی دوم و بالاترِ آن صرف‌نظر می‌کنیم. مطلوب است:

الف) زمانِ رسیدنِ پرتابه به ارتفاعِ اوج.

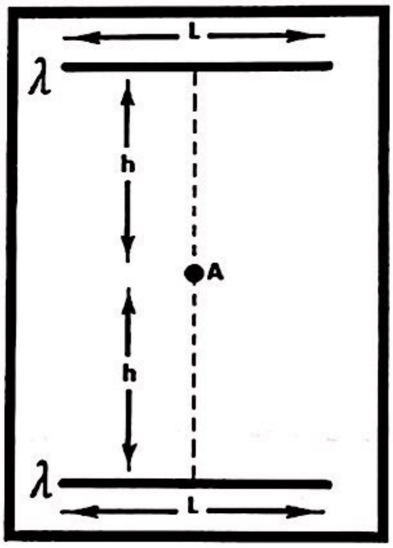
پ) ارتفاعِ اوج.

ت) زمانِ بازگشت.

ث) سرعت در لحظه‌ی بازگشت.

ج) زمانِ رسیدنِ پرتابه به ارتفاعِ اوج تا مرتبه‌ی دوم اختلال حساب کنید.

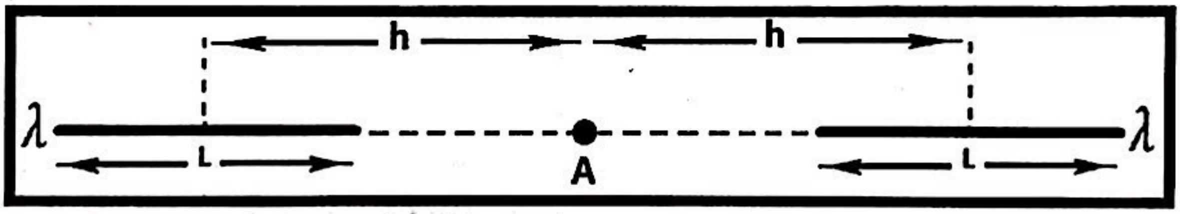
۳ـ یک میله‌ی باردار با چگالی بارِ خطی یکنواختِ λ و طولِ l داریم. نقطه‌ای را که روی عمودمنصفِ این میله در فاصله‌ی h از مرکزِ آن قرار دارد، A می‌نامیم. بارِ نقطه‌ای q را در نقطه‌ی A قرار می‌دهیم.



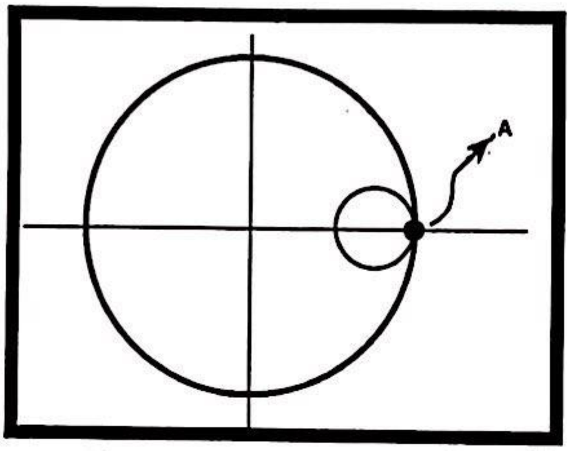
الف) نیرویی که به بار وارد می‌شود را بیابید.

ب) حال میله‌ای مشابهِ ۲ در سوی دیگرِ A در فاصله‌ی h از A قرار می‌دهیم (شکل روبه‌رو). دو میله موازی اند. اگر بارِ نقطه‌ای را اندکی از نقطه‌ی A در راستای عمودی جابه‌جا کنیم، نوسان خواهد کرد. جرمِ بارِ نقطه‌ای را m بگیرید. بسامدِ نوسانات کوچک را حساب کنید. فرض کنید دو میله همیشه افقی باقی می‌مانند و ثابت اند.

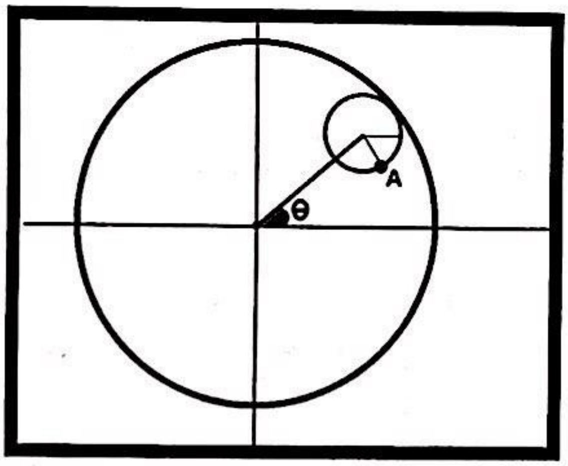
پ) حال فرض کنید این دو میله را روی محورِ افقی قرار می‌دهیم (مانند شکل زیر). فاصله‌ی مرکزهایشان $2h$ است، که $2h > l$ است. بارِ نقطه‌ای q را در نقطه‌ی وسطِ بینِ این دو میله قرار می‌دهیم. بسامدِ نوساناتِ کوچکِ افقی بارِ نقطه‌ای را حولِ این نقطه حساب کنید.



۴- دایره‌ای ثابت به شعاعِ R در نظر بگیرید که مرکزش در مبدأ قرار دارد. یک دایره‌ی دیگر به شعاعِ a درون آن قرار دارد، و در سطحِ داخلی آن غلتشِ محض می‌کند. اگر مرکزِ دو دایره را با خطی فرضی به هم وصل کنیم، حرکتِ دایره‌ی داخلی طوری است که زاویه‌ی این خط با افق (که آن را با θ نشان می‌دهیم) با آهنگِ ثابتِ ω افزایش می‌یابد.



نقطه‌ای روی محیطِ دایره‌ی داخلی که در ابتدا با دایره‌ی بیرونی در تماس است، آغشته به جوهر است و از خودش رد به جا می‌گذارد.



الف) بردارِ مکانِ نقطه‌ی A را بر حسبِ زمان بیابید.

ب) بردارِ سرعتِ نقطه‌ی A را بر حسبِ زمان بیابید.

پ) بردارِ شتابِ نقطه‌ی A را بر حسبِ زمان بیابید.

ت) به ازای $a = \frac{R}{۳}$ معادله‌ی شکلی که توسطِ نقطه‌ی A رسم می‌شود را بیابید. یعنی معادله‌ای مستقل از زمان و به صورتِ $y = f(x)$.

ت) شعاعِ انحنای مسیر بر حسبِ بردارهای سرعت و شتاب به صورتِ $\rho = \frac{|v|^۳}{|\vec{v}\times\vec{a}|}$ تعریف می‌شود. شعاعِ انحنای مسیر را برای حالت $a = \frac{R}{۳}$ بر حسبِ زمان حساب کنید.

ث) به ازای $a = \frac{R}{۲}$ معادله‌ی شکلی که توسطِ نقطه‌ی A رسم می‌شود را بیابید. یعنی معادله‌ای مستقل از زمان و به صورتِ $y = f(x)$.

۵ـ در یک سیستم یک‌بعدی با N جسم صلب مشابه و شرایط اولیه‌ی داده‌شده، چند برخورد کشسان اتفاق خواهد افتاد؟

نشان می‌دهیم که در سیستمی شامل N ذره‌ی یکسان، که تنها درجه‌ی آزادی آن‌ها حرکت بر روی یک خط راست باشد، و برخورد ذره‌ها کشسان باشد، حداکثر $N(N-1)/2$ برخورد روی می‌دهد.

سیستمی شامل N ذره‌ی هم‌جرم با سرعت‌های اولیه‌ی v_1، v_2، ... v_N؛ و مکان‌های اولیه‌ی x_1، x_2، ... x_N در نظر بگیرید. جز در وضعیت‌هایی استثنایی، فاصله‌ی بعضی از ذره‌ها با گذشت زمان کم می‌شود، و بنا بر این برخورد می‌کنند. فرض کنید این برخوردها کشسان باشند. ذره‌ها را از چپ به راست با برچسب‌های 1، 2، و ... N نام‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید اولین برخورد بین ذره‌ی j و ذره‌ی $j+1$ باشد. پس از برخورد سرعت این دو ذره تغییر می‌کند، و پس از آن ممکن است ذره‌ی j' با ذره‌ی $j'+1$ برخورد کند. سؤال این است حداکثر چند برخورد ممکن است روی بدهد.

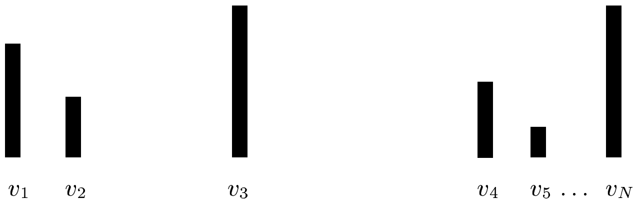
در نگاه اول مسئله پیچیده به نظر می‌رسد. برای یافتن راه حل کلی بهتر است مسئله را ابتدا برای N های کوچک حل کنیم ـ شاید مسئله روشن‌تر شود.

- در حالت $N=2$، اتفاق‌های زیر ممکن است روی دهند.

الف) اگر $x_1 < x_2$، و $v_1 < v_2$، آن وقت با گذشت زمان، فاصله‌ی دو ذره زیاد می‌شود، و بنا بر این برخوردی روی نمی‌دهد.

ب) اگر $x_1 < x_2$، و $v_1 > v_2$، آن وقت جسم 1 به جسم 2 نزدیک می‌شود و با آن برخورد می‌کند. از مکانیک مقدماتی می‌دانیم که پس از برخورد سرعت‌ها به این نحو عوض می‌شوند:

$$v_1' = v_2 \qquad v_2' = v_1. \tag{1}$$



شکل 1: سرعت ذره‌ها را با ستون‌هایی متناسب با سرعت نشان می‌دهیم. اگر یک ستون از ستون سمت چپ خود بلندتر باشد، برخورد روی خواهد داد. توالی برخوردها بستگی به فاصله‌ی ذره‌ها دارد، اما سرانجام حالتی باید تشکیل شود که ستون‌ها از چپ به راست به ترتیب بلندی (از بلند به کوتاه) مرتب شده باشند.

در نتیجه پس از برخورد داریم $v'_1 < v'_2$، و بنا بر این دوباره برخوردی روی نخواهد داد.

پس در حالت $N = 2$ حداکثر یک برخورد ممکن است روی دهد.

- در حالت $N = 3$ که سه ذره داریم ($x_1 < x_2 < x_3$)، حالت‌ها بیش‌تر اند. در این حالت حداکثر 3 برخورد روی خواهد داد. این در صورتی است که داشته باشیم $v_3 < v_2 < v_1$، زیرا در این حالت
  - ممکن است اول 2 و 3 برخورد کنند، بعد 1 و 2، بعد دوباره 2 و 3،
  - ممکن است اول 1 و 2 برخورد کنند، بعد 2 و 3، بعد دوباره 1 و 2،

  نکته‌ی جالب این است که تعداد برخوردها مستقل از ترتیب روی دادن آن‌ها است.

می‌بینیم که این شیوه‌ی بررسی، با زیاد شدن تعداد ذره‌ها سخت‌تر می‌شود. برای خارج شدن از سردرگمی به روش نموداری زیر متوسل می‌شویم. سرعت ذره‌ها را در نموداری به صورت ستون‌های عمودی می‌کشیم (شکل ۱).

فرض کنیم سرعت ذره‌ها از چپ به راست به ترتیب v_1، v_2، ... v_N باشد. اگر سرعت یک ذره از سرعت ذره‌ی سمت راست خود بیش‌تر باشد، و فاصله‌ی این دو ذره به اندازه‌ی کافی کم باشد، آن وقت حتماً برخورد می‌کنند. اگر فاصله‌ی این دو ذره زیاد باشد، ممکن است پیش از برخورد این دو ذره، دو ذره‌ی دیگر با هم برخورد کنند. در ادامه خواهیم دید که فاصله‌ی ذره‌ها، و در نتیجه ترتیب برخوردها،

تأثیری بر تعداد برخوردها ندارد.

فرض کنید f_i تعداد ذره‌هایی باشد که در سمت راست ذره‌ی i اند و سرعت آن‌ها از v_i کم‌تر است. تابع حالت سیستم را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$F = \sum_{i=1}^{N} f_i. \tag{2}$$

نکته‌ی جالب این است که در هر برخورد F دقیقاً به اندازه‌ی 1 کم می‌شود، و این مستقل از آن است که کدام دو ذره برخورد کنند. برای اثبات این مطلب فرض کنیم قرار باشد ذره‌های j و $j+1$ برخورد کنند. این یعنی $v_j > v_{j+1}$ است. پس از برخورد سرعت ِ این دو ذرّه عوض می‌شود و این بار $v'_j < v'_{j+1}$ است.

پیش از برخورد	v_1	v_2	$\cdots$	v_j	v_{j+1}	$\cdots$	v_N
پس از برخورد	$v'_1 = v_1$	$v'_2 = v_2$	$\cdots$	$v'_j = v_{j+1}$	$v'_{j+1} = v_j$	$\cdots$	$v'_N = v_N$

اگر دوباره ذره‌ها را از چپ به راست شماره‌گذاری کنیم، می‌بینیم تعداد ذرّه‌هایی که سرعت‌شان کم‌تر از v'_j است درست برابر است با تعداد ذرّه‌هایی که پیش از برخورد سرعت‌شان کم‌تر از v_{j+1} بود، یعنی f_{j+1}؛ و تعداد ذره‌هایی که سرعت‌شان کم‌تر از v'_{j+1} است درست یکی کم‌تر از تعداد ذرّه‌هایی است که پیش از برخورد سرعت‌شان کم‌تر از v_j بود، زیرا پس از برخورد $v'_j < v'_{j+1}$ شده. به عبارت دیگر

پیش از برخورد	f_1	f_2	$\cdots$	f_j	f_{j+1}	$\cdots$	f_N
پس از برخورد	$f'_1 = f_1$	$f'_2 = f_2$	$\cdots$	$f'_j = f_{j+1}$	$f'_{j+1} = f_j - 1$	$\cdots$	$f'_N = f_N$

از این جا معلوم می‌شود که F بر اثر این برخورد دقیقاً به اندازه‌ی 1 کم می‌شود. پس اگر k برخورد روی دهد، F دقیقاً به اندازه‌ی k کم می‌شود. وقتی $F = 0$ شد، دیگر هیچ برخوردی روی نخواهد داد. پس تعداد برخوردها دقیقاً برابر است با F در لحظه‌ی 0 . بیش‌ترین برخوردهای ممکن وقتی روی می‌دهد که F اولیه بیشینه باشد. چون بیشینه‌ی f_i برابر است با $N - i$، بنا بر این

$$F^{\max} = \sum_{i=1}^{N} f_i^{\max} = \sum_{i=1}^{N} (N - i) = \frac{N\,(N-1)}{2}. \tag{3}$$

برای یافتن بیش‌ترین تعداد برخوردهای ممکن، یک راه هندسی هم هست:

می‌دانیم که در نمودار فضازمانی، حرکت ذره‌ی آزاد، که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، با یک خط راست مشخص می‌شود. اگر محور افقی را برای زمان در نظر گرفته باشیم، شیب این خط سرعت ذره

است. ببینیم در برخورد دو ذره‌ی یک‌سان چه اتفاقی می‌افتد. چون سرعت دو ذره پس از برخورد عوض می‌شود، نمودار عبارت است از دو خط راست متقاطع، که پس از برخورد فقط نام خط‌ها (متناظر با نام ذره‌ها) عوض می‌شود. پس، مجموعه‌ی تمام جهان‌خط‌های سیستم N ذره‌ای، عبارت است از N خط راست، و هر تقاطع معادل است با یک برخورد. پس، مسئله‌ی یافتن تعداد بیش‌ترین برخوردها معادل است با یافتن بیش‌ترین تعداد تقاطع‌های N خط راست در صفحه. (در صفحه، زیرا ذره‌ها فقط روی محور x حرکت می‌کنند، و بنا بر این فضازمان همان صفحه‌ی (t,x) است.) اگر هیچ کدام از خط‌ها با هم موازی نباشند، هر دو خطی هم را قطع می‌کنند. پس، مسئله معادل است با انتخاب 2 خط از N خط، که برابر است با

$$C_2^N = \binom{N}{2} = \frac{N!}{2!\,(N-2)!} = \frac{N\,(N-1)}{2}. \tag{4}$$

در پرینکیپیا، نیوتن به کمک ِ قوانین ِ مکانیک اش قوانین ِ کِپلِر را ثابت می‌کند، و برا ی ِ آن که درست بودن ِ قوانین ِ مکانیک را نشان بدهد، قوانین ِ کِپلِر در مورد ِ منظومه ی ِ شمسی، منظومه ی ِ قمرها ی ِ مشتری، و منظومه ی ِ قمرها ی ِ کیوان را شاهد می‌آورد. جدول ِ زیر، که عیناً از پرینکیپیا برداشته شده، مورد ِ قمرها ی ِ مشتری است.

Isaac Newton, *The Principia—Mathematical Principles of Natural Philosophy*, University of California Press, 1999, p. 797

دوره‌ی‌تناوب‌ها ی ِ قمرها ی ِ مشتری

$1^{\mathrm{d}}\,18^{\mathrm{h}}\,27^{\mathrm{m}}\,34^{\mathrm{s}}$	$3^{\mathrm{d}}\,13^{\mathrm{h}}\,13^{\mathrm{m}}\,42^{\mathrm{s}}$	$7^{\mathrm{d}}\,3^{\mathrm{h}}\,42^{\mathrm{m}}\,36^{\mathrm{s}}$	$16^{\mathrm{d}}\,16^{\mathrm{h}}\,32^{\mathrm{m}}\,9^{\mathrm{s}}$

فاصله ی ِ قمرها از مرکز ِ مشتری، بر حسب ِ شعاع ِ مشتری

	1	2	3	4
از رصدها ی ِ بُرِلّی	5 2/3	8 2/3	14	24 2/3
تاؤنلی، با میکرومتر	5.52	8.75	13.47	24.72
کاسینی، با تله‌سکپ	5	8	13	23
کاسینی، با گرفت ِ قمرها	5 2/3	9	14 23/60	25 3/10
از دوره‌ی‌تناوب‌ها	5.667	9.017	14.384	25.299