emamipour@bam.ac.ir

۸.۲ قضیه وجود و یکتایی

مسئله مقدار اولیه $\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ و مستطیل $[-a, a] \times [-b, b]$ مفروض هستند.

اگر ۱) f بر این مستطیل پیوسته و ۲) $\frac{\partial f}{\partial y}$ بر این مستطیل پیوسته باشند، آنگاه یک $h > 0$ موجود است که $h \le a$ و تا نیاز برای $t \in [-h, h]$ یک تابع یکتای $y = \phi(t)$ وجود دارد که جواب مسئله مقدار اولیه داده شده است و در معادله انتگرالی $\phi(t) = \int_0^t f(s, \phi(s))\, ds$ صدق می‌کند.

جواب یکتای این مسئله از حد دنباله توابع

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(t) = \int_0^t f(s, \phi_n(s))\, ds \\ \phi_0(t) \equiv 0 \end{cases}$$

برای $t \in [-h, h]$ به دست می‌آید. به این روش یافتن جواب یکتای معادله انتگرالی، روش تقریب‌های متوالی یا روش تکرار پیکارد می‌گوییم. در ضمن اینکه هر ϕ_n در یک مستطیل کوچکتر مشمول در مستطیل داده شده همگا وجود دارد و پیوسته نیز باشند و البته حد این دنباله یک تابع پیوسته و یکتا در یک زیربازهٔ $[-a, a]$ است که آن را $\phi(t)$ می‌نامیم.

مثال: مسئله مقدار اولیه $y' = 2t(1+y)$ که $y(0) = 0$، را با روش تکرار پیکارد (تقریب‌های متوالی) حل کنید. (فقط سه جمله اول دنباله را حساب کنید)

حل: فرض کنید $y = \phi(t)$ جواب IVP و معادله انتگرالی به صورت $\phi(t) = \int_0^t 2s(1+\phi(s))\,ds$ و فرض کنید $\phi_0(t) = 0$. اکنون $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ و $\phi_3(t)$ را حساب می‌کنیم:

$$\phi_1(t) = \int_0^t 2s(1+\phi_0(s))\,ds = \int_0^t 2s\,ds = t^2$$

$$\phi_2(t) = \int_0^t 2s(1+\phi_1(s))\,ds = \int_0^t 2s(1+s^2)\,ds = t^2 + \frac{t^4}{2}$$

$$\phi_3(t) = \int_0^t 2s(1+\phi_2(s))\,ds = \int_0^t 2s\left(1+s^2+\frac{s^4}{2}\right)ds = t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{3!}$$

پایان حل

نکته اضافی: به نظر می‌رسد که $\phi_n(t) = t^2 + \frac{t^4}{2!} + \frac{t^6}{3!} + \cdots + \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ (برای $n \ge 1$) و $\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = e^{t^2} - 1$ که از اثبات این دو مرحله صرف‌نظر می‌شود و به ذکر آنها اکتفا می‌گردد.

emamipour@bam.ac.ir

مثال: مسأله مقدار اولیه
$$\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$$
مفروض است. با فرض $\phi_0(t) \equiv 0$ و با استفاده از روش تقریب های متوالی، سه جمله اول دنباله $\phi_n(t)$ که به جواب یکتای IVP همگرا است را بیابید.

حل: چون $y(1) = 2$ ابتدا آن را به مبدأ انتقال می دهیم. بنابراین تغییر متغیرهای زیر را انجام می دهیم.

$$\begin{cases} T = t-1 \\ Y = y-2 \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} t = T+1 \\ y = Y+2 \end{matrix} \Leftarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} \text{ یا } y' = Y'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y' = (T+1)^2 + (Y+2)^2 = f(T,Y) \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

توجه: چون $\phi_0(t) \equiv 0$ پس $\phi_0(T) \equiv 0$.

اکنون می توان از روش پیکارد استفاده کرد.

$$\phi_{n+1}(T) = \int_0^T f(s, \phi_n(s))\,ds$$

$$\phi_1(T) = \int_0^T \left((s+1)^2 + (\phi_0(s)+1)^2\right)ds = \int_0^T (s^2 + 2s + 2)\,ds$$

$$\Rightarrow \phi_1(T) = \frac{1}{3}T^3 + T^2 + 2T$$

$$\phi_2(T) = \int_0^T \left((s+1)^2 + (1+\phi_1(s))^2\right)ds = ---$$

و به طور مشابه $\phi_3(T) = \int_0^T \left((s+1)^2 + (1+\phi_2(s))^2\right)ds$ بدست می آید.

تمرین: با فرض $\phi_0(t) \equiv 0$ برای مسأله $\begin{cases} y' = 1 - y^3 \\ y(-2) = 3 \end{cases}$، با استفاده روش تقریب های متوالی، $\phi_1(t)$ و $\phi_2(t)$ و $\phi_3(t)$ را محاسبه کنید.

تمرین: با فرض $\phi_0(t) \equiv 0$ برای مسأله $\begin{cases} y' = t^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$، با استفاده از روش تکرار پیکارد، جواب مسأله مقدار اولیه را تقریب بزنید.