بسم الله الرحمن الرحیم

سئوالات دوره تابستان المپیاد فیزیک

سال 88

لطفا برای تعجیل ظهور آقا امام زمان (عج) 3 صلوات بفرستید.

سیده زهرا باستی

از آقای" علی حبیبیان " تشکر می کنم که سئوالات رو در اختیار بنده قرار دادند.

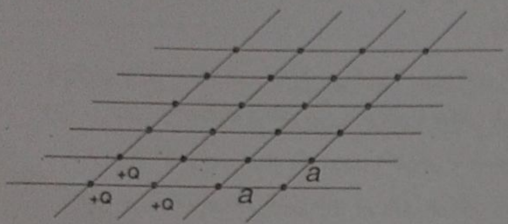
امتحان اول المپیاد فیزیک (تابستان ۸۸)

وقت ۴:۳۰

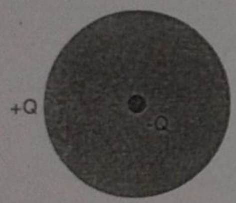
۱)

اَبر اتم در میدان آرایه‌ای از یونهای باردار

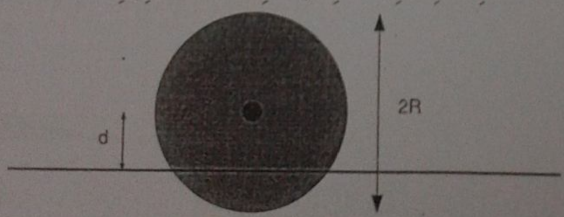
آرایه‌ای از یونها هریک با بار $+Q$ را بر رئوس یک شبکه‌ی مربعی نشانده‌ایم (شکل پایین)؛ طول یالِ هر مربع a می باشد. a از دیگر طول‌هایی که در مسئله داریم کوچکتر است؛ پس می‌توانیم بار سطحیِ این صفحه را پیوسته فرض کنیم. فرض می‌کنیم که این آرایه تا بی‌نهایت ادامه دارد.



اَبرآتم مصنوعیِ نیز از یک هسته‌ی سنگین و فشرده با بار $-Q$ و یک ابرِ الکترونیِ سبک، با بارِ $+Q$ و شعاعِ R ساخته شده است.
ابرِ الکترونی می‌تواند از فضایِ میانِ یونهایِ آرایه‌یِ بالا عبور کند.
هدفِ این مسئله بررسیِ برهمکنشِ الکترواستاتیکی آرایه‌یِ باردار با اَبراتم می‌باشد.

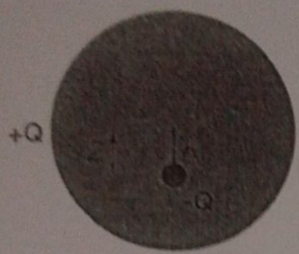


می‌دانیم که $R >> a$؛ فرض می‌کنیم آرایه‌یِ باردار بدونِ تغییر دادن در شکلِ کرویِ ابرِ الکترونی، یا چگالیِ یکنواختِ بار در آن، و یا موقعیتِ نسبیِ میانِ هسته‌یِ اتم و ابرِ الکترونی واردِ ابرِ الکترونی شود (شکل مقابل). اگر فاصله‌یِ میان مرکز اَبرآتم با صفحه‌یِ آرایه $d>0$ باشد:



الف – نیروی الکتریکی که به ابر اتم وارد می شود را بیابید.

حال فرض کنید، هسته‌ی اَبَرآتم و مرکزِ ابرالکترونی را با فنری به ثابتِ K بهم متصل کرده‌ایم (شکلِ روبرو). در اینصورت با نزدیک شدنِ اَبَرآتم به صفحه‌ی آرایه، این فنر کشیده می‌شود. اگر هسته‌ی اَبَراتم را در فاصله ی $d > 0$ از صفحه قرار دهیم:



ب – مطلوبست میزانِ کشیده شدنِ فنر (Z) و نیز دو قطبیِ الکتریکی اَبَرآتم. (در این بخش از مسئله از برهمکنشِ الکتریکی میانِ هسته و اَبَرالکترونیِ اَبَراتم صرفنظر کنید.)

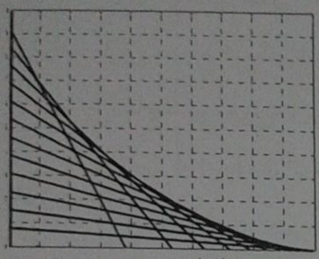
در بخشِ نهاییِ مسئله، فنر را حذف می‌کنیم؛ اما برهمکنشِ الکتریکیِ میانِ هسته و اَبَرالکترونی را دقیق وارد می‌کنیم. از آنجائیکه اَبَرالکترونی را کره‌ای با چگالیِ بارِ یکنواخت فرض کرده‌ایم، جابجا شدن هسته از مرکزِ آن موجبِ ایجادِ یک نیرویِ الکتریکی به هسته و نیرویِ عکسِ آن به اَبَرالکترونی می شود. این نیرو جاذبه بوده و نقشی مانندِ فنر بازی می‌کند

پ – شکلِ دقیقِ این نیرویِ جاذب را بیابید.

ت – حال با درنظر گرفتنِ نتایج بخشِ پ، دوقطبیِ الکتریکیِ اَبَرآتم را برای وقتی که هسته‌ی آن در فاصله ی $d > 0$ از صفحه‌یِ آرایه قرار دارد، محاسبه نمایید.

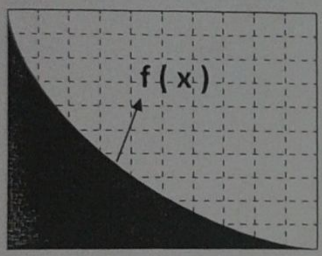
ث – امیدوارم موفق باشید.

۲) دو انتهای میله ی صلبی به طولِ L مطابقِ شکلِ ۱ می توانند روی دو دیواره ی عمود بر هم حرکت کنند. میله در ابتدا به صورتِ عمودی قرار گرفته است. سپس سرِ بالایی میله شروع به حرکت با سرعتِ ثابتِ V روی محورِ عمودی به سمتِ پایین می کند، و در نتیجه سرِ پایینی میله نیز به سمتِ راست حرکت می کند. اگر از این میله در طولِ زمان چند عکس بگیریم، شکلی مانندِ شکلِ ۱ ایجاد می شود. اگر تعدادِ این عکس ها بی نهایت باشد، شکلِ ۲ به دست می آید.



شکل ۱

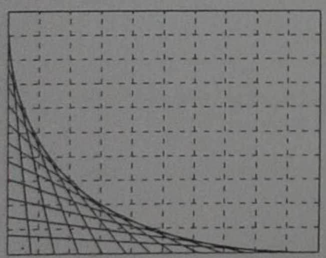
الف) سرعتِ سرِ پایینی میله را بر حسبِ زمان حساب کنید.



شکل ۲

ب) طولِ ثابتِ X_0 را روی محورِ افقی در نظر بگیرید. در هر لحظه از زمان، ارتفاعِ نقطه ای از میله که بالای این نقطه ی ثابت قرار می گیرد را y می نامیم. Y و مشتقِ زمانی y را بر حسبِ زمان به دست آورید.

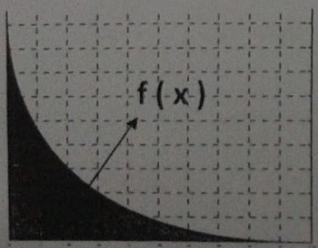
پ) با توجه به قسمتِ قبل، معادله ی منحنی $f(x)$ را که در شکلِ ۲ مشخص شده است بیابید.



شکل ۳

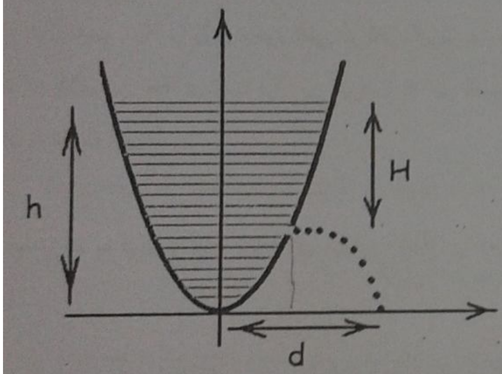
ت) حال فرض کنید به تعدادِ مساوی نقاطِ هم فاصله ای را روی محور x و y جدا کنیم و آنها را یکی یکی به هم وصل کنیم، نقطه ی آخرِ محورِ x به اولین نقطه ی محورِ y، و الی آخر. شکل ۳ به این ترتیب به دست آمده است. اگر تعدادِ این نقاط بی نهایت باشد، شکلِ ۴ به دست می آید.

فرض کنید آخرین نقطه های روی دو محور به فاصله ی L از مبدأ باشند. معادله ی منحنی $f(X)$ را که در شکلِ ۴ نشان داده شده است بیابید.



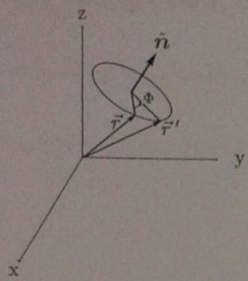
شکل ۴

۱۳) ظرفی به شکلِ سهمی $y = k\,x^2$ داریم که مطابقِ شکل تا ارتفاعِ h پر از آب است. اگر در دیواره ی چنین ظرفی سوراخِ کوچکی ایجاد شود، آب به صورتِ افقی با سرعتِ $y = \sqrt{2\,g\,H}$ از آن خارج می شود، که H فاصله ی سوراخ تا سطحِ آب است. محاسبه کنید این سوراخ باید کجا ایجاد شود تا فاصله ی افقی نقطه ای از زمین که آب روی آن می ریزد (که در شکل با d نشان داده شده است) حد اکثر شود. مسئله را با فرضِ $h = \frac{1}{8}\frac{1}{k}$ حل کنید. در حالتِ کلی، h در چه محدوده ای باشد تا مسئله جواب داشته باشد.



۴ـ می‌دانیم که ماتریس دوران یک جسم در جهت پادساعتگرد به اندازه‌ی θ حول محورهای x، y و z عبارتند از

$$R_{\hat{x}}(\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\ R_{\hat{y}}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix},\ R_{\hat{z}}(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

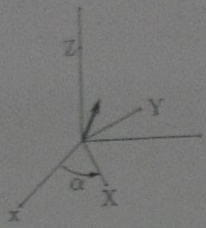


آ) با توجه به شکل مقابل اگر $\vec{r}$ بردار مکان یک نقطه از جسمی باشد که پس از دوران پادساعتگرد به اندازه‌ی Φ حول راستای دلخواهی که با بردار یکه $\hat{n}$ مشخص می‌شود به $\vec{r}'$ تبدیل شود، بردار $\vec{r}'$ را بر حسب $\vec{r}$، $\hat{n}$ و Φ بدست آورید.

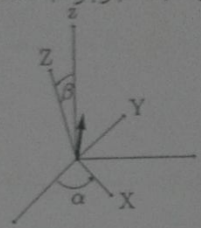
ب) اگر بردار یکه‌ی $\hat{n}$ بر حسب مؤلفه‌هایش به صورت $\hat{n}=n_1\hat{x}+n_2\hat{y}+n_3\hat{z}$ باشد، ماتریس دوران پادساعتگرد به اندازه‌ی Φ حول راستای $\hat{n}$، $R_{\hat{n}}(\Phi)$، را بدست آورید.

پ) روش دیگری برای بدست آوردن ماتریس دوران وجود دارد که به روش اویلر معروف است. در این روش به جای سه مختصه‌ی مستقل n_1، n_2، n_3 و Φ (با شرط $\hat{n}\cdot\hat{n}=1$) سه مختصه‌ی دیگر به نام زوایای اویلر α، β و γ داریم. برای بدست آوردن ماتریس دوران اویلر ابتدا یک دستگاه مختصات مانند XYZ به جسم می‌چسبانیم. دستگاه xyz همیشه سر جایش ثابت است ولی دستگاه XYZ می‌تواند با جسم بچرخد. در ابتدا فرض کنید محورهای X، Y و Z بر محورهای x، y و z منطبق است. اکنون سه دوران به صورت زیر در نظر بگیرید:

- ابتدا جسم را به اندازه‌ی α و پادساعتگرد حول محور z دستگاه ثابت xyz دوران می‌دهیم. در این صورت دستگاه XYZ به همراه جسم (یعنی بردار $\vec{r}$) به اندازه‌ی α می‌چرخد و به وضعیت نشان داده شده در شکل تبدیل می‌شود.



- در مرحله‌ی دوم مطابق شکل زیر جسم را به همراه دستگاه XYZ (که به آن چسبیده است) به اندازه‌ی β و پادساعتگرد حول محور X (که اکنون با محور x زاویه‌ی α دارد) دوران می‌دهیم. اکنون زاویه محور Z با z برابر β است و محور Y در صفحه‌ی xy قرار ندارد.



- در مرحله‌ی آخر جسم را به همراه دستگاه XYZ (که به آن چسبیده است) به اندازه‌ی γ و پادساعتگرد حول محور Z دوران می‌دهیم.

ت) حاصل این سه دوران را می‌توان با ماتریسی مانند $R(\alpha,\beta,\gamma)$ نشان داد. (عناصر) این ماتریس را بدست آورید.

ث) n_1، n_2، n_3 و Φ را بر حسب α، β و γ محاسبه کنید.

بسمه تعالی

امتحان دوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۸) ۸۸/۵/۸

وقت: ۵ ساعت

۱) دو ستاره ی ۱ و ۲ به شکل کره و به شعاع های R_1 و R_2 ($R_2 < R_1$) روی دایره های هم مرکز با شعاع های r_1 و r_2 با سرعت زاویه ای یکسان ω می چرخند. پاره خطی که دو ستاره را به هم وصل می کند همواره از مرکز مشترک دو دایره (O) عبور می کند به طوری که O بین دو ستاره واقع است. ناظر O_1 در فاصله ی دوری از دو ستاره است. خط واصل O_1 و O در امتداد محور Z است. صفحه ی XY عمود بر محور Z است. صفحه ی دو دایره با صفحه ی XY زاویه ی i می سازد. فرض کنید محور X در صفحه ی دایره هاست و مبداء مختصات دستگاه XYZ همان O است. فرض کنید ستاره ی ۱ در لحظه ی $t = 0$ روی محور X است.

آ) بردار مکان ستاره ی ۱ ($\mathbf{r}_1$) را برحسب زمان در دستگاه مختصات XYZ بنویسید.

ب) بردار مکان ستاره ی ۲ ($\mathbf{r}_2$) را برحسب زمان در دستگاه مختصات XYZ بنویسید.

ج) بردار مکان نسبی دو ستاره ($\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$) را برحسب زمان به دست آورید.

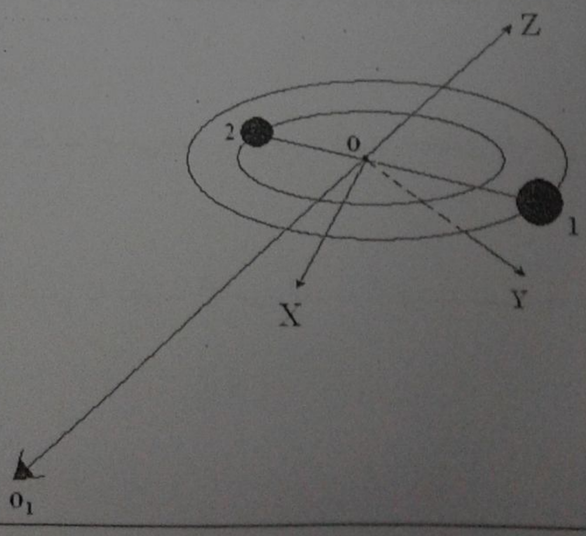
د) ناظر O_1 فاصله ی دو ستاره را به صورت تصویر بردار $\mathbf{r}$ در صفحه ی XY می بیند. این فاصله (d) را برحسب r_1 و r_2 و i و ω و t به دست آورید.

ه) در زمان t_1 از نظر ناظر O_1 دو ستاره مماس بیرونی می شوند. زمان t_1 را برحسب R_1 و R_2 و r_1 و r_2 و i و ω پیدا کنید.

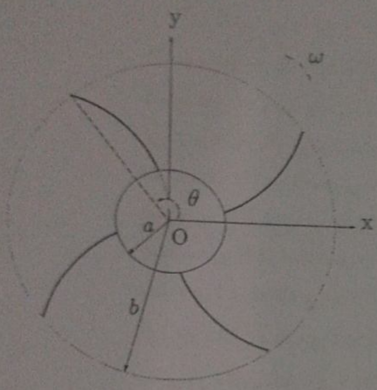
و) در زمان t_2 از نظر ناظر O_1 دو ستاره مماس داخلی می شوند. زمان t_2 را برحسب R_1 و R_2 و r_1 و r_2 و i و ω پیدا کنید.

ز) مؤلفه های Z سرعت های دو ستاره (V_{1z} و V_{2z}) را پیدا کنید و منحنی V_{1z} و V_{2z} را برحسب زمان روی یک نمودار رسم کنید.

توجه: جواب نهایی هر قسمت را در مستطیل مخصوص خود حتماً بنویسید وگرنه ...



۲) مطابق شکل، آب‌پاشی در صفحه‌ی قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی به شعاع a می‌چرخد. لوله‌هایی که آب از آن‌ها خارج می‌شود کمان‌هایی از دایره به شعاع R هستند که امتدادشان از نقطه‌ی O می‌گذرد. فاصله‌ی سرِ لوله‌های آب‌پاش تا نقطه‌ی O برابر b است ($b < R$). آب با سرعت ثابت v نسبت به آب‌پاش و مماس بر سرِ لوله از لوله خارج می‌شود.



پاسخ‌های آخر را تا حد امکان ساده کنید.

آ) بردار سرعت مطلق قطره‌ی آبی که از لوله (ای که با افق زاویه‌ی θ دارد) خارج می‌شود را نسبت به دستگاه مختصات ساکن xOy و بر حسب بردارهای یکه‌ی این دستگاه، زاویه‌ی θ و سایر پارامترهای داده شده بدست آورید.

ب) بردار شتاب مطلق قطره‌ی آبی که از لوله (ای که با افق زاویه‌ی θ دارد) خارج می‌شود را نسبت به دستگاه مختصات ساکن xOy و بر حسب بردارهای یکه‌ی این دستگاه، زاویه‌ی θ و سایر پارامترهای داده شده بدست آورید.

پ) بیشترین ارتفاعی که قطرات آب می‌توانند به آن برسند نسبت به نقطه‌ی $(x = 0, y = -b)$ چقدر است.

ت) بیشترین فاصله‌ی افقی که قطرات آب می‌توانند به آن برسند نسبت به نقطه‌ی $(x = 0, y = -b)$ چقدر است.

۳) دو پوسته‌ی رسانای کروی هم مرکز به شعاع‌های r_a و r_b به ترتیب پتانسیل ϕ_a و ϕ_b دارند. پوسته‌ی رسانای سومی به شعاع r_c و هم‌مرکز با دو پوسته‌ی قبلی و بین آن دو $(r_a < r_c < r_b)$ با بار الکتریکی Q قرار دارد.

آ) میدان الکتریکی را در فاصله‌ی r از مرکز این پوسته‌ها در هر یک از نواحی $r < r_a$، $r_a < r < r_c$، $r_c < r < r_b$ و $r > r_b$ بدست آورید.

ب) چگالی بار سطحی بر روی وجه داخلی و خارجی هر پوسته چقدر است؟

پ) پتانسیل الکتریکی را در هر یک از نواحی فوق بر حسب r بدست آورید.

ت) پتانسیل الکتریکی پوسته‌ی به شعاع r_c چقدر است؟

۴) شتاب گرانش زمین، با ارتفاع تغییر می کند. در این مسئله ارتفاع های کم از سطح زمین را در نظر می گیریم که در آنها می توان شتاب گرانش را به صورت $g - \epsilon h$ در نظر گرفت، که g شتاب گرانش در سطح زمین، h ارتفاع از سطح زمین، و ϵ خیلی کوچک است، طوری که می توان از توان دوم (و بالاتر) آن صرف نظر کرد. حال فرض کنید جسمی با سرعت اولیه ی V_0 با زاویه ی Θ نسبت به افق از سطح زمین پرتاب می شود.

الف) معادله ی مسیر پرتابه، y بر حسب x را بیابید. آیا مسیر متقارن است؟

ب) بردِ پرتابه را بیابید.

پ) اگر جسم به طور عمودی به سمت بالا پرتاب شود، زمان بازگشت آن به زمین و سرعت آن در این لحظه را بیابید.

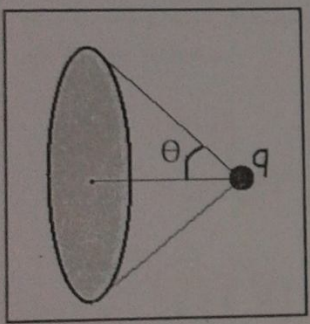
ت) زاویه ی پرتاب چه باشد تا برد بیشینه شود ؟

۵) می دانیم اگر بار نقطه ای q در مقابل صفحه ای دایره ای و روی محور تقارن آن قرار داشته باشد (مطابق شکل ۱) شار میدان الکتریکی گذرنده از صفحه ی دایره ای برابر است با:

$$\frac{q}{2\epsilon_0}(1-\cos\Theta)$$

که در آن، Θ زاویه ی گشودگی مخروطی است به رأس q و قاعده ی صفحه ی دایره ای.

حال فرض کنید دو بار الکتریکی نقطه ای q_1 و $-q_2$ در مقابل هم قرار گرفته اند. یک خط میدان الکتریکی را در نظر بگیرید که با زاویه ی α از $q1$ خارج می شود.

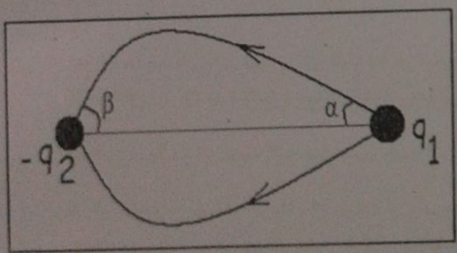


شکل ۱

الف) این خط میدان با چه زاویه ای وارد بار $-q_2$ می شود؟ (یعنی β را در شکل ۲ بیابید).

ب) معادله ی این خط میدان را به صورت $f(x,y)=0$ به دست آورید.

پ) حال فرض کنید تعداد دلخواهی(N) بار نقطه ای روی محور x ها قرار دارند. مقدار بارها q_i و مکان آنها x_i است.



شکل ۲

هر کدام از q_i ها می تواند مثبت یا منفی نیز باشد. مطلوب است محاسبه ی معادله ی خطوط میدان به صورت:

$f(x,y) =$ ثابت ،

بر حسب q_i ها و x_i ها .

ت) پاسخ قسمت الف را با استفاده از رابطه ی قسمت پ به دست آورید.

امتحان سوم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۸)

۸۸/۵/۱۵

وقت: ۴ ساعت

۱- باکتری ها و استفاده از اصطکاک

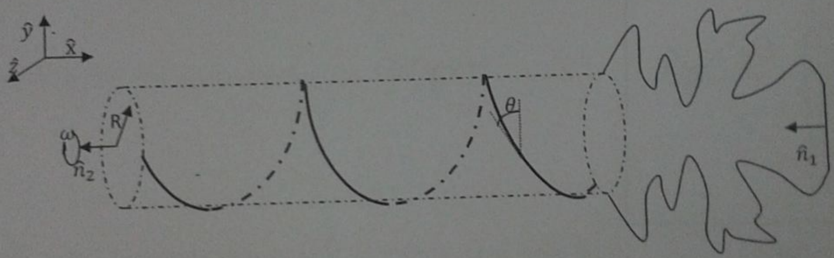
برای حرکت باکتری هایی که در آب زندگی می کنند، نیروی اصطکاک (با آب) نقش مهمی دارد. در این مسئله می خواهیم روشی را بررسی کنیم که به وسیله ی آن باکتری بتواند با استفاده از نیروی اصطکاک حرکت کند (حتی در خلاف جهت جریان آب!)

می دانیم برای استوانه ای بسیار کوچک به طول Δh و شعاع r، نیروی اصطکاک آب (وارد بر استوانه) عبارتست از:

$$\Delta\vec{F} = -\zeta_1 \Delta h\,(\vec{V}.\hat{z})\hat{z} - \zeta_2 \Delta h\,(\vec{V} - (\vec{V}.\hat{z})\hat{z})$$

که در آن $\vec{V}$ سرعت استوانه نسبت به آب است و ζ_1 و ζ_2 ثوابتی مشخص و $\hat{z}$ در راستای محور استوانه است.

شکل زیر باکتری مورد نظرمان را نشان می دهد. در همه ی قسمت ها فرض کنید بدن باکتری انعطاف ناپذیر است و تنها یک محور تقارن دارد ($\hat{n}_1$). تاژک این باکتری اندامک مارپیچی است (درواقع استوانه ای با سطح مقطع کوچک است) که حول استوانه ای (فرضی) به شعاع R پیچیده شده است؛ محور این استوانه ی فرضی را $\hat{n}_2$ می نامیم (انعطاف پذیری باکتری تنها در تعیین زاویه ی بین $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ است). موقعی که باکتری بخواهد حرکت کند، می تواند تاژک خود را حول $\hat{n}_2$ با سرعت زاویه ای ثابت ω بچرخاند. طول کل تاژک l است. خط مماس بر تاژک نیز با صفحه ی عمود بر $\hat{n}_2$ همیشه زاویه ی θ می سازد. فرض کنید تنها تاژک باکتری با آب اصطکاک دارد. پارامترهای ζ_1 و ζ_2 را نیز برای تاژک معلوم در نظر بگیرید



الف) اگر در یک لحظه سرعت باکتری نسبت به آب صفر باشد و تاژکش را حول $\hat{n}_2$ با سرعت زاویه ای ثابت ω بچرخاند، اندازه ی نیروی وارد بر آن را بیابید.

ب) با توجه به شکل برای جهت پیچش تاژک (به دور استوانه فرضی) و جهت $\vec{\omega}$ (که در راستای $\hat{x}$ است)، جهت نیروی اصطکاک وارد شده به تاژک باکتری را بنویسید (مطابق با دستگاه مختصات مشخص شده در شکل)

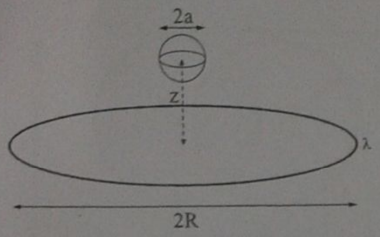
پ) اگر $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ در یک امتداد باشند و همچنین سرعت آب در همه جا صفر باشد، سرعت حد باکتری را بیابید.

ت) اگر باکتری در رودخانه ای باشد که سرعت آن از سرعت حد به دست آمده در قسمت قبل بیشتر باشد، برای اینکه زیست محیط کف رودخانه اش را از دست ندهد (= نسبت به کف رودخانه حرکت نکند)، مجبور است به فکر چاره ای برای نجات خودش باشد! به همین خاطرمجبوراست جهت $\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ را تنظیم کند. سرعت آب رودخانه را (نسبت به زمین) $v_0\hat{x}$ بگیرید. فرض کنید $\hat{n}_1$ با محور x زاویه ی α

بسازد و $\hat{n}_2$ با محور x زاویه ی β. همچنین فرض کنید باکتری در راستای عمود بر $\hat{n}_1$ نمی تواند حرکتی داشته باشد. چه رابطه ای بین α، β و پارامتر های مسئله باشد که $\ddot{x} < 0$؟ ($\hat{n}_1$ و $\hat{n}_2$ در صفحه ی x-y اند)

۲ـ نیروي وارد بر کره‌ي رسانا بوسیله‌ي حلقه‌ي باردار

کره‌ي رسانایی به شعاعِ a و بار الکتریکيِ صفر را در ارتفاع z بالاتر از مرکزِ یک حلقه‌ي باردار به شعاعِ R و چگاليِ بارِ خطيِ λ قرار داده‌ایم. حلقه در صفحه‌يِ xy قرار گرفته است.

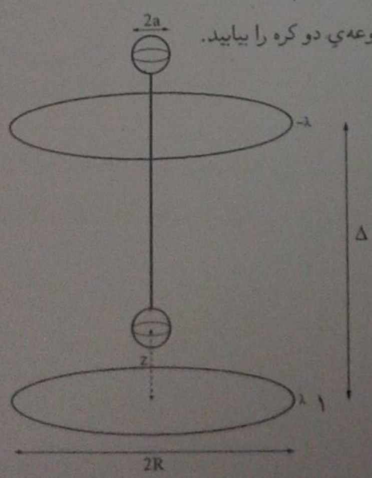


الف — مکان و مقدار بار تصویری در داخلِ کره را به‌دست آورید.

ب — با فرضِ اینکه $a \ll R$، $F(z)\hat{z}$ یا نیروی وارد شده به کره در جهت z را بدست آوردید.

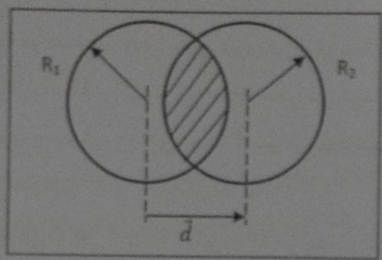
در بخشِ بعدی حلقه و کره‌يِ مشابهی را درست بالايِ این مجموعه قرار می‌دهیم. حلقه‌ي جدید چگاليِ بارِ خطيِ $-\lambda$ دارد و به اندازه‌يِ Δ بالاتر از مجموعه‌ي اول قرار دارد. کره‌يِ مربوط به حلقه‌يِ جدید را نیز بوسیله‌يِ یک سیم باریک و محکمِ رسانا به کره‌يِ پایینی متصل می‌کنیم به‌گونه ای که همیشه x و y مرکزهایِ دو کره یکی بوده، اما z کره‌يِ بالایی به اندازه‌يِ Δ بیشتر از z کره‌يِ پایینی باشد. سیم وظیفه‌ي هم‌پتانسیل ساختنِ دو کره را برعهده دارد، و بار الکتریکی قابل ملاحظه ای رويِ آن قرار نمی‌گیرد. با فرض اینکه $R \gg \Delta$ باشد و بتوان از تصویر متقابل کره ها در همدیگر و نیز تصویر حلقه‌ي نزدیک به هر کره در کره‌يِ دیگر، صرفنظر کرد:

پ — $\bar{F}(z)\hat{z}$، نیروي وارد به مجموعه‌ي دو کره را بیابید.



۳-

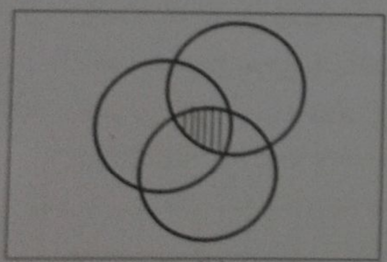
a) دو کره رسانا به شعاع های R_1 , R_2 به ترتیب با چگالی بار الکتریکی حجمی ثابت ρ_1 , ρ_2 را مطابق شکل (a) طوری کنار یکدیگر قرار می دهیم که در یک ناحیه هم پوشانی کنند؛ یعنی $d< R_1 + R_2$ که $\vec{d}$ بردار واصل مراکز کره از کره 1 به سمت کره 2 می باشد. شرطی بین پارامترهای مسئله بیابید که به ازای آن اندازه میدان الکتریکی در ناحیه هم پوشانی (ناحیه هاشور خورده در شکل (a)) ثابت باشد. در این شرایط جهت و راستای میدان را در ناحیه مذکور تعیین کنید.



شکل (a)

b) حال سه کره نارسانا به شعاع های R_1 , R_2 , R_3 به ترتیب با چگالی بار الکتریکی حجمی ثابت ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 را مطابق شکل (b) طوری کنار یکدیگر قرار می دهیم که در یک ناحیه هر سه هم پوشانی کنند(ناحیه هاشور خورده در شکل(b)). شرطی را بدست آورید که به ازای آن اندازه میدان الکتریکی در ناحیه مشترک بین هر سه کره ثابت باشد.

تعریف : بردار $\overrightarrow{d_{ij}}$ را بردار واصل مرکز کره های i, j در جهت از مرکز i به مرکز j تعریف می کنیم.

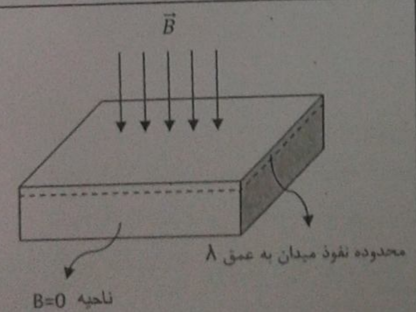

شکل (b)

c) فرض کنید شرط قسمت b) برقرار است. در صورتی که میدان در ناحیه هم پوشانی برراستای $\overrightarrow{d_{13}}$ عمود باشد، نسبت بین چگالی ها را بدست آورید ؛ به عبارت دیگر $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ را در رابطه $\frac{\rho_1}{\alpha_1} = \frac{\rho_2}{\alpha_2} = \frac{\rho_3}{\alpha_3}$ برحسب $\overrightarrow{d_{ij}}$ ها بیابید.

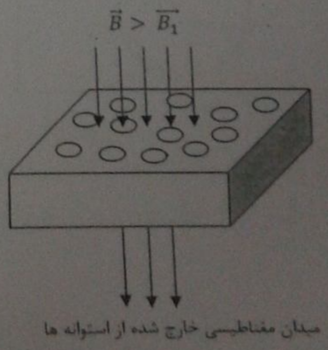
d) حالتی را در نظر بگیرید که در آن N کره به شعاع های R_1 تا R_N به ترتیب با چگالی بار های حجمی ثابت ρ_1 تا ρ_N چنان در کنار یکدیگر قرار گرفته اند که در یک ناحیه همگی هم پوشانی می کنند. با توجه به قسمت a) و b) شرطی را بیابید که اندازه میدان در این ناحیه هم پوشانی ثابت باشد.

۴ - برخی اجسام رسانا در دماهای خیلی پایین (نزدیکی صفر مطلق) رفتار جالبی از خود نشان می دهند. بدین صورت که مقاومت الکتریکی در این دماها صفر می شود. این رفتار جسم را ابررسانایی می نامیم. از جمله ویژگی های جسم ابررسانا این است که میدان مغناطیسی درون آن صفر است. در این مسئله قصد داریم ویژگی های این رفتار را بررسی کنیم.

تیغه ای رسانا را مطابق شکل 1 در نظر بگیرید که در یک میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}$ (عمود بر تیغه) قرار دارد. میدان مغناطیسی در ابررسانا صفر است و فقط در سطح آن نفوذ می کند (به عمق λ). با افزایش میدان مغناطیسی ، با رسیدن به یک میدان بحرانی B_1، میدان مغناطیسی به صورت باریکه هایی استوانه ای شکل در تیغه نفوذ می کند (شکل 2). با افزایش B از این مقدار و رسیدن به یک مقدار بحرانی B_2، خاصیت ابررسانایی به یک باره فرو می ریزد و میدان مغناطیسی وارد تیغه می شود و جسم رفتار معمولی (رسانا) خود را پیش می گیرد. این رفتار را ابررسانایی نوع 2 می نامیم. در برخی مواد میدان بحرانی B_1 مشاهده نمی شود و با افزایش میدان بدون نفوذ باریکه ها به یکباره جسم ابررسانایی خود را از دست می دهد. این دسته مواد را ابررسانای نوع 1 می نامیم.



شکل 1



شکل 2

دو کمیت اساسی و تعیین کننده نوع ابررسانا λ (عمق نفوذ)و ξ (طول همدوسی ناشی از رفتار کوانتمی) می باشند که هردو دارای بعد طول اند. میدان های $B_{1,2}$ را اصطلاحا میدان های بحرانی می گویند. میدان های بحرانی به ثوابت فیزیکی زیر احتمالا وابسته اند که عبارتند از:

ثابت پلانک کاهیده $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}\, Js$

ثابت گذردهی الکتریکی خلا $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\, \frac{C^2}{Nm^2}$

ثابت گذردهی مغناطیسی خلا $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\, \frac{N}{A^2}$

بار الکترون $e = 1.60 \times 10^{-19}\, C$

a) با استفاده از تحلیل ابعادی،میدان های بحرانی را بر حسب ثوابت فیزیکی فوق و λ وξ بیابید. رابطه را تا حد امکان ساده کنید و به صورت $B_{1,2} = kf(\pi_1, \pi_2, \dots)$ در آورید که در آن k یک ضریب با بعد میدان مغناطیسی وπ_i ها کمیت های بی بعد مستقل اند.

b) با توجه به این حقیقت که B_1 متناسب با λ^{-2} و B_2 متناسب با ξ^{-2} است و هردو از ε_0 مستقل اند، روابط B_1 و B_2 را به طور صریح بدست آورید. پاسخ می تواند حداکثر یک ضریب بی بعد داشته باشد که آن را برابر واحد بگیرید.

c) بنابر تعریف انواع ابررسانا، در نوع 1 بایستی B_1 بزرگتر از B_2 باشد تا عملا حالت نفوذ باریکه ها وجود نداشته باشد و در نوغ 2 هم که به وضوح $B_1 < B_2$ است. با توجه به قسمت b) نامساوی هایی بر حسب λ وξ برای هر نوع ابررسانا بیابید.

d) برای فلز Sn مقادیر عددی زیر موجود است. با استفاده از فرمول های B_1 و B_2 که در قسمت b) به دست آوردید، آن ها را محاسبه کرده، سپس طبق قسمت c) تعیین کنید که ابررسانایی از چه نوعی است؟

$$\lambda = 3.4\, nm \qquad , \xi = 23\, nm$$

بسمه تعالی

امتحان چهارم المپیاد فیزیک (تابستان ۸۸)

۸۸/۵/۲۲

وقت: ۵ ساعت

1) تعداد n میله باردار هر یک با چگالی طولی یکنواخت λ و طول L را طوری می چینیم که یک سر آنها روی مبدا مختصات و سرهای دیگر روی رأسهای یک nضلعی منتظم در صفحه x-y قرار بگیرد.

الف) میدان الکتریکی روی محور z را حساب کنید.

ب) میدان الکتریکی را در نقطه (r,φ,z) که $r<<z$ هست تا مرتبه اول بر حسب r محاسبه کنید.

ج) مؤلفه میدان در جهت z را تا مرتبه دوم بر حسب r بدست آورید.

د) در حد nهای بزرگ چگالی بار سطحی را به طور تقریبی بدست آورید.

2) دو جسم به جرم های M و m در $t=0$ با فاصله اولیه l در حال سکون قرار دارند. از این لحظه با نیروی $F=Cosnt$ جرم M را به طرف m هل می دهیم. ضریب بازگشت بین دو جسم ε است.

$\varepsilon = |v_{n+1}-u_{n+1}|/|V_n-U_n|$

v_n: سرعتM بلافاصله پس از برخورد nام

u_n: سرعتm بلافاصله پس از برخورد nام

V_n: سرعتM بلافاصله قبل از برخورد nام

U_n: سرعتm بلافاصله قبل از برخورد nام

T_n: زمان بین برخورد nام و $n+1$ ام

از ابعاد اجسام صرف نظر کنید.

الف) T_n و U_n و V_n را بر حسب v_n و u_n حساب کنید.

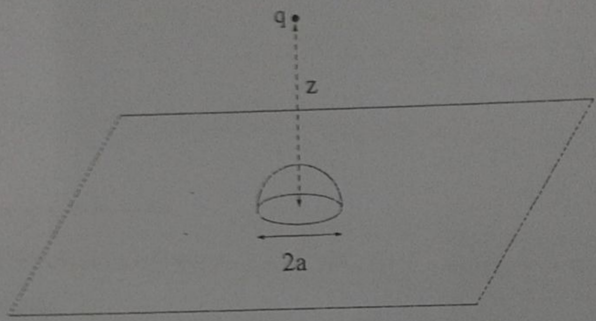
ب) سرعت نسبی دو جسم و سرعت مرکز جرم را بلافاصله پس از برخورد nام را به طور صریح بر حسب n حساب کنید.

ج) سرعت های u_n و v_n را حساب کنید.

د) زمانی که طول می کشد تا دو جسم هم سرعت شوند T و طول پیموده شده توسط m را بدست آورید. مقدارکل انرژی تلف شده Q را بیابید.

۴- بار جمع شده در یک برجستگیِ سطحی

سطحِ صفحه‌ي رساناي بی نهایت بزرگی را تغییر داده‌ایم، به شکلی که نیم‌کره‌ای رسانا به شعاعِ a در وسطِ آن بوجود آمده‌است (شکلِ پایین). نیمکره نیز با بقیه‌ي صفحه هم‌پتانسیل می‌باشد. بار نقطه‌ايِ q را به فاصله‌يِ z بالاتر از مرکزِ این نیم‌کره قرار می‌دهیم.



الف – پتانسیلِ الکتریکی را در تمامِ فضا بیابید.

ب – چگالیِ بارِ سطحی که در بالایِ نیم‌کره، $x = y = 0, z = a$، جمع شده‌است را محاسبه نمایید.

پ – بار خالصی که رویِ سطحِ نیمکره قرار گرفته‌است را حساب کنید.

ت – کار لازم برای بالابردنِ این بارِ تا $z = \infty$ را محاسبه کنید.

۲- مجموعه زیر را در نظر بگیرید. مطابق شکل، جسم (1) با بار $Q>0$ وجرم خیلی زیاد M درارتفاع عمودی H تحت میدان الکتریکی یکنواخت E قرار دارد. جسم (2) به جرم m و سرعت v_0 در راستای عمودی چنان حرکت می کند که بین جسم (1) و سطح افقی در تناوب است. فرض کنید $m<<M$ و در محاسبات از $\frac{m}{M}$ صرف نظر کنید. با گذر زمان طولانی جسم (1) در یک ارتفاع متوسط h_0 از سطح افقی قرار گرفته و جسم (2) به سرعت نهایی V می رسد.

در این مسئله گرانش وجود ندارد و فرض کنید $\frac{QE}{M}H \ll v_0^2$.

a) ارتفاع متوسط h_0 را بر حسب V و دیگر پارامترهای مسئله بیابید. (در این قسمت کلیه برخورد ها را کاملا کشسان در نظر بگیرید.)

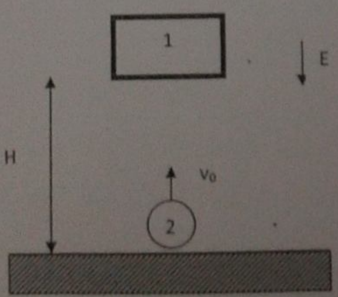
راهنمایی: نیروی متوسط وارد بر جسم (1) را محاسبه کنید.

b) حال برخورد جسم (2) با سطح افقی را ناکشسان فرض کنید؛ یعنی سرعت جسم (2) بعد از برخورد با سطح را $(1-\varepsilon)$ برابر سرعت قبل از برخورد گرفته و $\varepsilon<<1$. برخورد جسم (1) و (2) را کشسان در نظر بگیرید.

تغییرات ارتفاع بر حسب زمان $(\frac{dh}{dt})$ را برحسب V و دیگر پارامترها را تا مرتبه اول ε به دست آورید. در طول تغییر ارتفاع، فرض کنید سیستم همواره در حال تعادل است و شرط قسمت a) برقرار است.

c) با استفاده از معادلات قسمت های a) و b) یک معادله دیفرانسیل برای $h(t)$ بر حسب زمان به دست آورید. این معادله را به ازای آن که مبدا زمان $(t=0)$ در هنگام $h=h_0$ منظور گردد، حل کنید و $h(t)$ را بیابید. هم چنین زمان رسیدن جسم (1) را به سطح افقی (T) را محاسبه کنید.

d) در این قسمت ، کلیه برخورد ها را کشسان بگیرید. جسم (1) در حال تعادل قسمت a) را به آرامی، طوری که همواره سیستم در حال تعادل باشد، از ارتفاع h_0 به ارتفاع $h_1=3h_0$ می بریم. سرعت جسم(2) را بیابید. $(V_1=?)$



۵ـ ذره‌ای به جرمِ m تحتِ تاثیرِ نیرویِ مرکزی‌یِ $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(r)\mathbf{e}_r$ و نیرویِ مقاومتِ $\mathbf{f} = -b\mathbf{v}$ است. $\mathbf{r}$ بردارِ فاصله از مرکزِ نیرو، $\mathbf{v}$ بردارِ سرعتِ ذره، و b مقداری ثابت است. r و θ مختصات در دستگاهِ قطبی و $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ بردارهایِ یکه‌یِ متناظر با آن‌ها هستند. ذره در مسیری به دورِ مرکزِ نیرو می‌گردد.

$\boxed{\text{پاسخ‌هایِ خود را حتماً در پاسخ‌نامه هم وارد کنید.}}$

a) معادله‌یِ دیفرانسیلی برایِ تحولِ زمانی‌یِ $J := r^2\dot{\theta}$ به دست آورید. با حلِ آن $J(t)$ را بر حسبِ مقدارِ اولیه‌اش J_0، t، و پارامترهایِ ثابتِ مسئله b، و m به دست آورید.

b) فرض کنید در ابتدا ذره در $r = R$ و با سرعتِ اولیه‌یِ $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{e}_\theta$ است. مقداری حدّی برایِ نیرویِ مرکزی مثلِ F_c وجود دارد که اگر $F(R)$ بزرگ‌تر از آن باشد ذره ابتدا از مبدأ دور می‌شود. F_c چه‌قدر است؟ جوابِ خود را بر حسبِ پارامترهایِ مسئله J_0، m، R و b به دست آورید. فرض کنید $F(R) > F_c$. ذره در ابتدا با چه شتابِ $\ddot{r}$ از مرکز دور می‌شود. جوابِ خود را بر حسبِ F_c، v_0، m، R و b به دست آورید.

c) ذره با گذشتِ زمانِ T یک دور حولِ مرکزِ نیرو می‌زند، و در این مدت r عوض می‌شود. $\bar{r^2}$، متوسطِ r^2 در یک دور، را بر حسبِ J_0، m، b و T به دست آورید.

بسمه تعالی

امتحان جامع الکترومغناطیس (تابستان ۸۸)

وقت: ۵ ساعت

۸۸/۹/۲۵

۱ـ

i. دو کره رسانا به شعاع های R_1 و R_2 ($R_2 > R_1$) طوری قرار گرفته اند که کره کوچکتر در داخل کره بزرگتر با خط المرکزین به طول b باشد (مطابق شکل) و توسط یک سیم رسانا به هم متصل اند. مبدا مختصات را مرکز کره بزرگتر می گیریم. بار نقطه ای $q_1>0$ در داخل کره به شعاع R_1 در فاصله d از مرکز آن قرار گرفته است. بار نقطه ای $q_2>0$ در نقطه z_0 روی محور z قرار دارد.

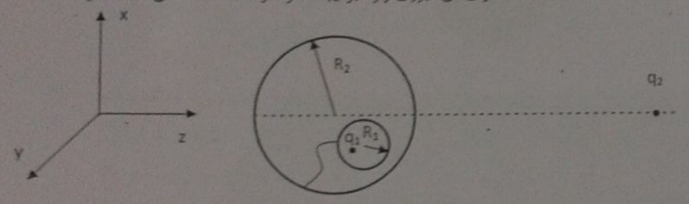
در دستگاه مختصات دکارتی، مختصات نقاط مهم به شرح زیر است:

مرکز کره به شعاع R_1 در $\left(-b\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, b\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ و بار q_1 با بردار $\left(-d\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -d\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ نسبت به مرکز کره R_1 قرار گرفته است.

a) بردار میدان الکتریکی را در تمام فضا بیابید.

b) بردار نیروی وارد بر بار q_1 و q_2 را محاسبه کنید.

c) معادله ای بین پارامتر های مسئله بیابید که به ازای آن نیروی وارد بر q_2 صفر شود. (تا حد امکان ساده شود)



ii. در این قسمت می خواهیم ظرفیت خازنی معادل مجموعه کره و صفحه نامتناهی را به روش تصاویر به دست آوریم.
در یک مجموعه دوتایی رسانا، رسانای 1 دارای پتانسیل V_1 و بار Q_1، رسانای 2 با پتانسیل V_2 و بار Q_2 به صورت زیر به هم مربوط اند:

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 \quad , \quad Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 \qquad (*)$$

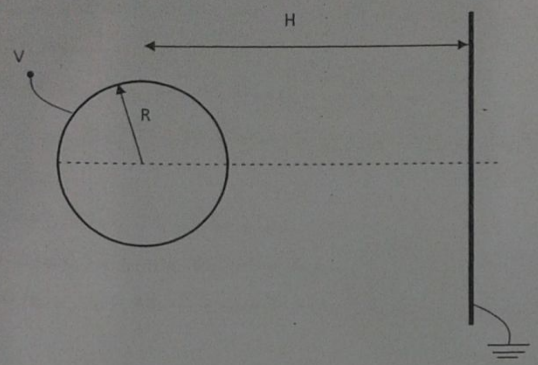
که در آن C_{ij} ظرفیت خازنی نامیده می شود. ($C_{12} = C_{21}$ را ظرفیت خازنی متقابل رسانای 1 و 2 می نامند.) و انرژی کل مجموعه به صورت زیر به دست می آید:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} C_{ij}V_jV_i$$

یک صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین و یک کره رسانا به شعاع R متصل به پتانسیل V در نظر بگیرید. کره به فاصله H از صفحه قرار دارد. فرض کنید $\frac{R}{H} \ll 1$ و کلیه محاسبات را تا اولین مرتبه ناصفر $\left(\frac{R}{H}\right)$ انجام دهید.

a) با استفاده از روش تصاویر بارکل روی صفحه نامتناهی را حساب کنید.

b) با توجه به رابطه (*) C_{12} (ظرفیت متقابل کره و صفحه) را بیابید.

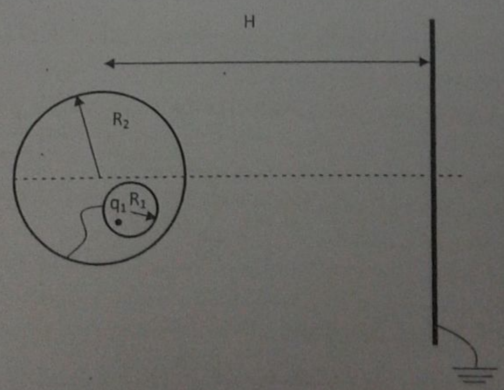


iii. مجموعه دو کره رسانای قسمت i. بدون بار q_2 را در برابر صفحه رسانای نامتناهی متصل به زمین و در فاصله H از آن قرار می دهیم.

a) پتانسیل کره های رسانا و بار القایی روی صفحه چقدر است؟

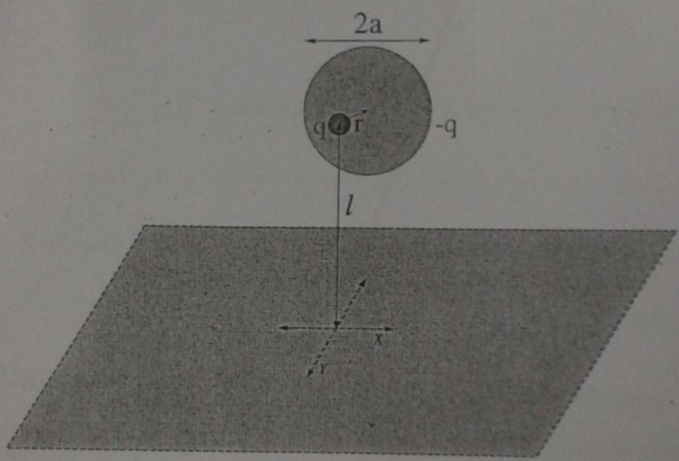
b) انرژی پتانسیل الکتریکی ناشی از برهمکنش صفحه و کره ها را بیابید.

c) نیروی بین صفحه و مجموعه کره ها را محاسبه کنید.



۲ - جذبِ یک اتم خنثی توسطِ رسانا بواسطه‌ي افت و خیز دوقطبي الکتریکی

یک اتم با تقارن کروی در فاصله‌ي l از صفحه‌ای رسانا قرار گرفته است. ابعاد صفحه بسیار بزرگتر از l می‌باشد. اتم را به‌صورتِ یک هسته‌ي سنگین با بارِ $+q$ و یک ابرِالکترونی با چگالي بارِ همگن و بارِ کلِ $-q$ مُدِل می‌کنیم. هسته‌ي سنگینِ اتم در جای خود ساکن است. اما ابرِالکترونی می‌تواند نسبت به هسته جابجا شود. نام این بردار جابجایی را $\vec{r} = (x, y, z)$ می‌نامیم (فرض می‌کنیم که $|\vec{r}| \ll l, a$).



الف — نیرویی که به ابرِالکترونی و نیز نیرویی که به هسته وارد می‌شود را تا مرتبه‌ي دوم (نسبت به x, y, z) بیابید.

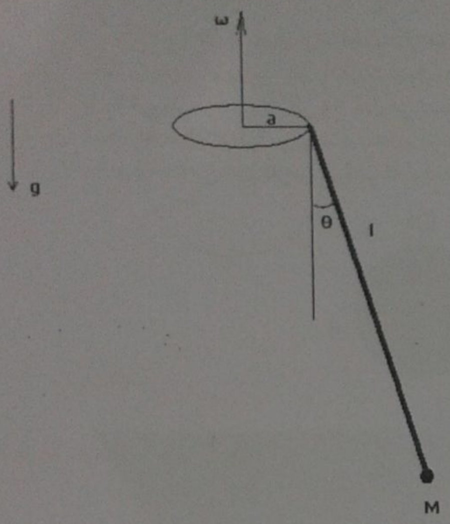
ب — U انرژي کل این مجموعه را، تا اولین مرتبه‌ي غیرِ صفر، بیابید.

در صورتِ محاسبه‌ي صحیح، می‌توانیم U را به‌صورتِ $F_x(x) + F_y(y) + F_z(z)$ بنویسیم، که هرکدام از تابع‌هاي F_x، F_y و F_z تنها تابعی از یک متغیر می‌باشند. اگر تمام این مجموعه در تعادلِ دمایی با محیطی با دماي T قرار گیرد، ابرِالکترونی شروع به نوسان‌هاي تصادفی نسبت به هسته می‌کند. می‌توان نشان داد که سه تابعِ F_x، F_y و F_z مقدارِ متوسطی برابر با $K_B T/۲$ پیدا می‌کنند که $K_B = ۱.۳۸ * ۱۰^{-۲۳} J/Kelvin$ و T دماي محیط بر حسبِ کلوین می‌باشند.

پ — حال با استفاده از این اطلاعات مقدار متوسطِ نیرویی که به مجموعه‌ي اتم در جهتِ صفحه وارد می‌شود را بر حسبِ $k_B T$ محاسبه نمایید. (محاسبه تا اولین مرتبه‌ي غیر صفر و بصورتِ پارامتری مورد نظر می‌باشد.)

۳-

آونگی از میله ای بدون جرم به طول l و جرم نقطه ای M ساخته شده است. تکیه گاه این آونگ با سرعت زاویه ای ثابت ω در خلاف جهت g روی دایره ای افقی به شعاع a دوران می کند.



الف) معادله ای برای زاویه تعادل θ_0 هنگامی که آونگ در صفحه g و شعاع گذرنده از تکیه گاه قرار دارد بیابید.

ب) حال ضربه کوچکی به آونگ وارد می کنیم تا حول نقطه تعادل θ_0 نوسان کند. در این حالت دو زاویه زیر را برای این جسم تعریف می کنیم:

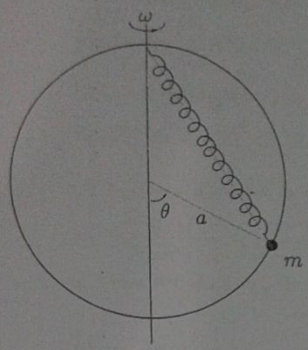
زاویه آونگ با راستای g : $\theta=\theta_0+\psi$

زاویه بین تصویر آونگ در صفحه افقی وشعاع گذرنده از محور آونگ : φ

معادلات حرکت جفت شده ψ و φ را برای نوسانات کوچک بیابید. $(\psi,\varphi<<\theta_0)$

ج) فرض کنید حرکت آونگ روی صفحه حاصل از راستای g و شعاع گذرنده از تکیه گاه محدود شده است. (ثابت $\varphi=0$) فرکانس نوسانات کوچک مربوط به ψ را تا مرتبه اول a/l بیابید. (بر حسب g وω و a و l) (در این بخش فرض کنید $a/l<<1$)

۴- مهره‌ای به جرم m مقید است بدون اصطکاک بر روی حلقه‌ای به شعاع a بلغزد. یک سرِ فنرِ سبکی که ثابت آن k و طول عادی آن a است به جرم m متصل و سرِ دیگر آن به بالاترین نقطه‌ی حلقه وصل شده است. حلقه حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد.



آ) شتاب زاویه‌ای، $\ddot{\theta}$، را بر حسب m، a، g، k، ω و θ بدست آورید.

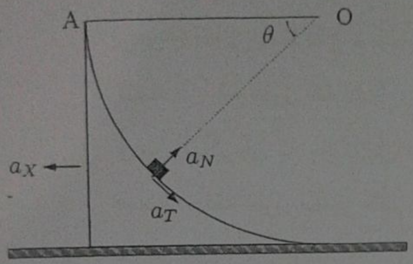
ب) نیروی وارد بر m از طرف حلقه را بر حسب m، a، g، k، ω، θ و $\dot{\theta}$ بدست آورید.

پ) در این مسأله به معادله‌ای مانند $ma^2\dot{\theta}^2/2 + V_{\text{eff}}(\theta) =$ ثابت برسید که $V_{\text{eff}}(\theta)$ پتانسیل مؤثر نامیده می‌شود.

ت) θ های مربوط به مکان تعادل جرم m روی حلقه‌ی چرخان از چه معادله‌ای بدست می‌آیند؟

ث) به ازای $\omega = 0$ و بر حسب مقادیر مختلف $\frac{k}{m}$ مکان تعادل پایدار جرم m روی حلقه را محاسبه و بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک جرم m را حول نقطه‌ی تعادل پایدار بدست آورید. $V_{\text{eff}}(\theta)$ را بر حسب θ رسم کنید.

ج) به ازای $k = 0$ و بر حسب مقادیر مختلف ω مکان تعادل پایدار جرم m روی حلقه‌ی چرخان را محاسبه و بسامد زاویه‌ای نوسان‌های کوچک جرم m را حول نقطه‌ی تعادل پایدار بدست آورید. $V_{\text{eff}}(\theta)$ را بر حسب θ رسم کنید.



۵ـ مطابق شکل، سطح‌شیب‌داری به جرم M که مقطع آن ربع دایره ای به مرکز O و شعاع a است روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد. مکعب کوچکی به جرم m را از نقطه‌ی A بدون سرعت اولیه رها می‌کنیم. از اصطکاک بین جرم m و سطح‌شیب‌دار نیز صرفنظر کنید. در وضعیت نشان داده شده در شکل و بر حسب m، M، a، g و θ:

آ) شتاب شعاعی جرم m نسبت به سطح‌شیب‌دار، a_N، را بدست آورید.

ب) شتاب مماسی جرم m نسبت به سطح‌شیب‌دار، a_T، را بدست آورید.

پ) شتاب مطلق سطح‌شیب‌دار، a_X، را بدست آورید.

ت) نیروی قائم وارد بر m از طرف سطح‌شیب‌دار را بدست آورید.

ث) سرعت سطح‌شیب‌دار وقتی m به سطح افقی می‌رسد چقدر است؟

۶-

جرم m به فنر بسیار سختی به طول l متصل است. انتهای دیگر فنر به نقطه آویز O بسته شده و دستگاه در صفحه قائم حرکت می کند. زاویه دستگاه از حالت قائم را θ و فاصله جرم m از نقطه آویز را $r = l(1+\rho)$ بگیرید. در حالی که فنر افقی است $(\theta = \pi/2)$ و طول عادی دارد دستگاه را از حال سکون رها می کنیم. فرض کنید $\omega \equiv \sqrt{g/l}$.

a) معادلات حرکت در صفحه قائم را بر حسب مختصات قطبی (r, θ) بنویسید ودر تقریب صفرم نسبت به پارامتر $\alpha = mg/kl$ معادله حرکت $\theta_0(t)$ را به دست آورید. لازم به ذکر است که در این تقریب داریم $\rho_0 = 0$. فرض کنید حل این معادله با شرط اولیه منظور شده تابع معلوم $F(t)$ باشد.

فرض کنید $\theta = \theta_0 + \theta_1 + \cdots$ و $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots$ که شاخص ها مرتبه تقریب نسبت به پارامتر α را نشان می دهد.

b) $\rho_1(t)$ و $\dot{\theta}_0^2(t)$ را به دست آورید.

c) معادله حرکت $\theta_1(t)$ را به دست آورید و آن را حل کنید.

d) $\rho_2(t)$ را به دست آورید.

جواب‌هاي خود را حتماً در جعبه‌هاي مربوطه درپاسخ‌نامه وارد کنید.

دقت کنید که کلیه جوابها باید برحسب α، ω و F (و نه $\dot{F}$ و $\ddot{F}$) نوشته شوند.

بسمه تعالی

ادامه ی امتحان نهایی المپیاد فیزیک (تابستان ۸۸)

وقت: ۵ سا...

...۸/۵/۲۶

۷-

الف) میدانِ الکتریکی را روی عمودمنصفِ میله ای به طولِ L و بارِ یکنواختِ q در فاصله ی S از مرکزِ میله بیابید.

صفحه ای نارسانا و مربعی شکل به طولِ ضلعِ L و ضخامتِ ناچیز در نظر بگیرید که بارِ Q روی آن به صورتِ یکنواخت توزیع شده است.

ب) میدانِ الکتریکی را در نقطه ای که در فاصله ی Z بالای مرکزِ مربع قرار دارد بیابید.

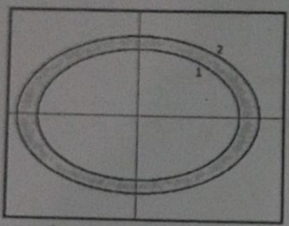
ج) اگر ابعادِ صفحه بی نهایت بود میدان در این نقطه چه قدر می شد؟

د) اولین جمله ی تصحیحی میدان نسبت به کمیتِ Z/L را برای صفحه ی محدود بیابید.(یعنی اختلافِ پاسخ های قسمت های ب و ج ، تا اولین مرتبه ی ناصفرِ Z/L).

راه نمایی:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = Sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$$

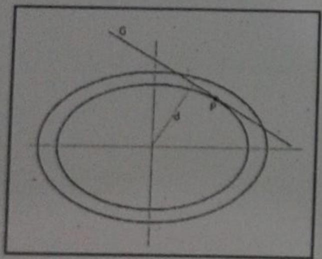
۸- یک بیضی وار به معادله ی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ در نظر بگیرید. حجم آن برابر است با : $(\frac{4\pi}{3})abc$.
فرض کنید با یک تبدیلِ تجانس با نسبتی بزرگتر اما خیلی نزدیک به یک، بیضی وارِ دیگری به دست آید که اندکی بزرگتر از اولی است. نمایی دو بعدی از آنها در شکلِ ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. بیضی وار اصلی(۱) و متجانس آن (۲)

تجانس یعنی همه ی مولفه های طول در عددی ضرب شوند، و نقطه ای مثلِ (x,y,z) روی بیضی وار به نقطه ی (x',y',z') تصویر شود. ۳ نیم قطرِ اصلی بیضی وارِ اول a و b و c و بیضی وارِ دوم $a+\delta a$ و $b+\delta b$ و $c+\delta c$ هستند، و شرطِ تجانس ایجاب می کند : $\frac{\delta a}{a}=\frac{\delta b}{b}=\frac{\delta c}{c}$.
نقطه ی دلخواهِ P را روی سطحِ بیضی وارِ اول در نظر بگیرید. صفحه ای را که در این نقطه بر بیضی وار مماس می شود G می نامیم. فاصله ی عمودی G از مبدأ را d می نامیم (شکل ۲) . اگر P' نقطه ی متناظرِ P باشد، برای آن نقطه نیز این دو را G' و d' می نامیم. فرض کنید $d'=d+\delta d$.

الف) با توجه به تجانس، δd را بر حسبِ d و a و b و c و δa و δb و δc بنویسید.



شکل۲. معرفی صفحه ی G و d

ب) d را بر حسبِ x و y و z بیابید.

فرض کنید کلِ حجمِ ناحیه ی کوچکِ میانِ این دو بیضی وار ، δv باشد و بارِ کلِ Q در این ناحیه محصور شده باشد.

پ) δv را بر حسبِ پارامتر های بیضی وار و δd و d بیابید.

ت) نشان دهید G و G' موازی اند.

تعریف می کنیم: $\rho=\frac{Q}{\delta v}$. تابعی به نامِ $\sigma(x,y,z)$ را به صورتِ $\rho\times\delta d$ تعریف می کنیم.

ث) $\sigma(x,y,z)$ را بیابید.

تابعی که در قسمتِ قبل به دست می آید چگالی بارِ سطحی یک بیضی وارِ رسانا بر حسبِ مکان است که روی آن بارِ کلِ Q قرار داشته باشد.

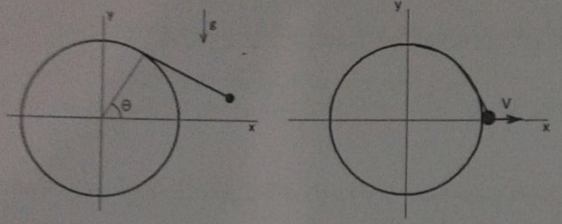
ج) فرض کنید کابلِ رسانای بسیار طویلی با سطحِ مقطعِ بیضی به نیم قطر های a و b داریم که بارِ واحدِ طولِ آن λ است. اگر محورِ سیم در امتدادِ محورِ Z باشد چگالی بارِ سطحی را روی سیم بیابید.

چ) فرض کنید قرصِ فلزی بیضوی شکلی با نیم قطر های a و b در صفحه ی xy دارای بارِ کلِ Q است. چگالی بارِ سطحی را بر حسبِ x و y بیابید.

ح) قسمتِ قبل را برای یک قرصِ فلزی دایره ای شکل به شعاعِ R حل کنید.

خ) پتانسیلِ دیسکِ قسمتِ ح را بر حسبِ Q و R حساب کنید .

۶ـ ریسمانی به دورِ استوانه ی ثابتی به شعاعِ R چندین بار پیچیده شده است. جرم m به سرِ ریسمان متصل است. در لحظه ی اول وضعیت مطابقِ شکلِ ۱ است. در این لحظه به جرمِ m سرعتِ افقی بزرگِ V به سمتِ راست داده می شود. در کلِ مسئله فرض کنید سرعت آن قدر زیاد است که ریسمان شل نمی شود.



شکل ۲   شکل ۱

الف) در لحظه ای که نقطه ی جدا شدنِ ریسمان از استوانه با افق زاویه ی Θ می سازد، x و y جرم m را بر حسبِ Θ بیابید.

ب) در این لحظه مشتقِ اول و دومِ زمانی x و y را بر حسبِ Θ و مشتقاتِ زمانی آن بیابید.

پ) معادلاتِ نیرو را برای جسم در راستای افقی و عمودی بنویسید.

ت) با استفاده از قسمت های قبل معادله ی دیفرانسیلی برای Θ به دست آورید و مشتقِ زمانی Θ را به صورتِ تابعی از Θ بیابید.

ث) با استفاده از معادله ی قسمتِ قبل و با فرضِ بزرگ بودنِ سرعت، Θ را بر حسبِ زمان تا اولین مرتبه ی ناصفرِ $\frac{gR}{V^2}$ به دست آورید.

راه نمایی:

پاسخِ معادله ی دیفرانسیلی به شکل $\frac{dy}{dx} + p(x)\ y = q(x)$ برابر است با:

$\frac{1}{\mu(x)} [\ \int \mu(x).\ q(x).\ dx \quad + \ C\ ]$

که در آن C ثابت است و از شرایطِ اولیه تعیین می شود و $\mu(x)$ برابر است با: $\exp(\int p(x).dx)$

۱۰ -

الف) ثابت کنید سطوحِ هم پتانسیل ناشی از یک میله ی باردار به طولِ L بیضی وار های دورانی هستند که دو کانونِ آنها بر دو انتهای میله منطبق است.(بیضی مکانِ هندسی نقاطی است که مجموعِ فواصلشان از دو کانون عددِ ثابتی باشد. بیضی وارِ دورانی از دورانِ بیضی حولِ قطرِ اصلی ایجاد می شود).

اگر آرایشی از تعدادی جسمِ رسانا داشته باشیم که بار های q_i روی سطحِ آنها باشد و پتانسیلِ آنها V_i باشد، رابطه ای خطی بینِ بار و پتانسیلِ آنها به این ترتیب برقرار است:

$$V_i = \sum_j P_{ij} q_j$$

که P_{ij} را ضریبِ پتانسیلِ متقابلِ رسانای i ام و j ام می نامیم. ضرایبِ پتانسیل فقط به هندسه و چینشِ رسانا ها بستگی دارند و با عوض کردنِ بار یا پتانسیلِ رسانا ها P_{ij} ها تغییر نمی کنند.در ضمن $P_{ji} = P_{ij}$.

ب) بارِ نقطه ای q به فاصله ی z از مرکزِ کره ای به شعاعِ R به مرکزِ مبدأ مختصات قرار دارد. کره را رسانای 1 و بارِ q را یک رسانای خیلی کوچک به شماره ی 2 در نظر بگیرید. P_{11} و P_{12} را بیابید. حال اگر کره به زمین وصل شود چه باری روی آن القا می شود؟

پ) یک بیضی وارِ دورانی به نیم قطرِ بزرگِ a و نیم قطرِ کوچکِ b به زمین وصل شده است. بارِ نقطه ای q بیرونِ بیضی وار و در مکانِ دلخواهِ (x,y,z) قرار دارد. کلِ بارِ القایی روی بیضی وار را بیابید.

راه نمایی:

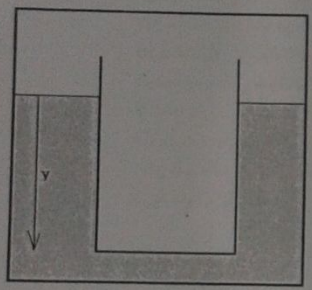
$$\int Sec\theta \,.d\theta = Ln(Sec\theta + Tan\theta)$$

۱۱ـ در این مسئله می خواهیم غرق شدنِ یک کشتی را مدل کنیم. مکعب مستطیلی به سطحِ مقطعِ A و جرمِ m در نظر بگیرید که در مایعی به چگالی ρ شناور است.

الف) ارتفاعِ y را در حالتِ تعادل بیابید.

ب) فرض کنید آب با نرخِ حجمِ ثابتِ b از کفِ کشتی به داخلِ آن نشت می کند. y را بر حسب زمان بیابید.

پ) فرض کنید آب با نرخِ حجمِ کوچکِ $\epsilon\sqrt{y}$ داخلِ کشتی نشت می کند. y را تا مرتبه ی دومِ ϵ بر حسبِ زمان حساب کنید.



راه نمایی: پاسخِ معادله ی دیفرانسیلی به شکلِ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha + \beta t + \lambda\, Sin(\omega_0 t)$$

به صورتِ مقابل است:

$$x = A\, Sin(\omega_0 t) + B\, Cos(\omega_0 t) + g(t)$$

که در آن A و B ثوابتی اند که از روی شرایطِ اولیه معلوم می شوند و g(t) تابعی است که این گونه به دست می آید:

عبارتِ $a + bt + c\,t\, Sin(\omega_0 t) + d\,t\, Cos(\omega_0 t)$ را در معادله به جای x(t) قرار دهید و ضرایبِ a،b،c وd را با برابر قرار دادنِ ضرایبِ توان های یکسانِ t یا توابعِ سینوس و کسینوس در دو طرفِ تساوی به دست آورید. این عبارت با این ضرایب، g(t) است.