طراحی کنترل کنندهٔ فیدبک حالت

مثال ۶-۱-۱ - سیستم داده شده در شکل ۶-۱ را در نظر بگیرید. تابع تبدیل سیستم حلقه باز $g(s)$ و تابع تبدیل جبرانساز فیدبک خروجی $g_c(s)$ است. اگر $g(s)$ سیستم مرتبه اول ناپایدار $1/(s-1)$ باشد، بدیهی است که با انتخاب جبرانساز استاتیکی $g_c(s)=k$، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته $T(s)$ عبارتست از

$$T(s)=\frac{1}{s+k-1}$$

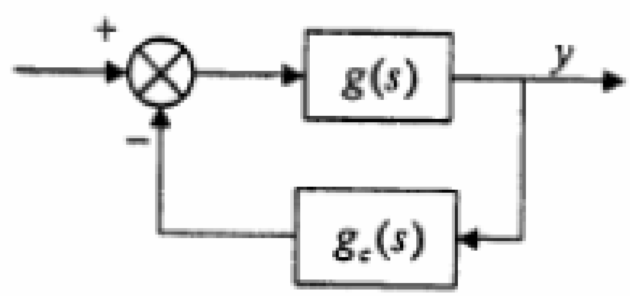
و با انتخاب مناسب بهره k سیستم حلقه بسته پایدار خواهد بود. حال اگر، تابع تبدیل حلقه باز مرتبه دوّم به صورت زیر باشد

$$g(s)=\frac{1}{s(s-1)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته، عبارتست از

$$T(s)=\frac{1}{s^2-s+k}$$

و به ازاء هیچ مقداری از k سیستم حلقه بسته پایدار نخواهد شد. در واقع، برای پایدارسازی این سیستم با فیدبک خروجی، باید مشتق خروجی $\dot{y}(t)$ را نیز فیدبک کنیم. در این حالت،



شکل ۶-۱ پایدارسازی با فیدبک خروجی

$$g_c(s)=k_1+k_2 s$$

و تابع تبدیل حلقه بسته، عبارتست از

$$T(s)=\frac{1}{s^2+(k_2-1)s+k_1}$$

بدیهی است که با انتخاب مناسب k_1 و k_2 پایدارسازی سیستم امکان‌پذیر است و هر معادله مشخصه مطلوب مرتبه دوّمی دست یافتنی است.

دقت کنید که پایدارسازی هر سیستم مرتبه دوّم ناپایداری با این جبرانساز فیدبک خروجی، ممکن است. حال اگر تابع تبدیل حلقه باز مرتبه سوم و به صورت زیر باشد

$$g(s)=\frac{1}{s^2(s-1)}$$

تابع تبدیل حلقه بسته، عبارتست از

$$T(s)=\frac{1}{s^3-s^2+k_2 s+k_1}$$

دراین حالت نیز سیستم حلقه بسته به ازاء هیچ مقداری از k_1 و k_2 پایدار نخواهد شد. اگر این بار از فیدبک مشتق دوّم خروجی برای اضافه کردن درجه آزادی به جبرانساز استفاده کنیم، خواهیم داشت

$$g_c(s)=k_1+k_2 s+k_3 s^2$$

و تابع تبدیل حلقه بسته عبارتست از

$$T(s)=\frac{1}{s^3+(k_3-1)s^2+k_2 s+k_1}$$

- نتیجه گیری: *پایدارسازی با فیدبک مشتق های پی در پی خروجی!!*

- مشاهده کلیدی ریسانن بر اساس دستاوردهای *کالمن* در فضای حالت:

تمام اطلاعات جاری سیستم در بردار حالت موجود است و هر آنچه از خروجی و مشتق هایش به دست می آید در متغیرهای حالت نیز یافت می شود. هر آن چه با فیدبک حالت نمی توان انجام داد با هیچ روش دیگری دست یافتنی نیست.

فیدبک حالت

سیستم خطی زیر را درنظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

که در آن x متغیر حالت n بعدی، u ورودی r بعدی و y خروجی m بعدی مـی باشـد. هـدف از طراحی کنترل کننده را می توان به صورت زیر برشمرد.

- پایداری داخلی
- تنظیم یا ردیابی
- حذف اثر اغتشاش
- کاهش اثر نویز
- عدم حساسیت به مدل

میدانیم روش اصلی در ارضاء همزمان خصوصیتهای فوق استفاده از حلقهٔ فیدبک است، که در کنترل مدرن، *فیدبک حالت* پیشنهاد می گردد. با توجه به خواص متغیر حالت x، که کلیهٔ اطلاعات ورودی در زمان قبل را به اطلاعات خروجی های آینده مرتبط می سازد، اگر کنترل کننده u را تابعی از x درنظر بگیریم توانمندی لازم جهت پایدار سازی سیستم همزمان با تنظیم یا حذف اغتشاش را می توان بدست آورد. در سیستمهای خطی این کنترل کننده را نیز تابعی خطی از x درنظر می گیریم.

$$u = -Kx$$

علامت منفی در اینجا تنها اشاره به مفهوم فیدبک منفی می باشد، ولـی چـون متغیـر x یکتـا نیست بسته به تحقق های مختلف از یک سیستم می تواند K مثبت یا منفی باشد و تنهـا بـه خاطر توجه به اهمیت فیدبک منفی در پایدارسازی سیستمها از علامـت منفـی اسـتفاده شـده است. در این نمایش K یک ماتریس $[K]_{r\times n}$ مـی باشـد، و کنتـرل کننـده از ترکیـب خطـی متغیرهای حالت سیستم تشکیل شده است. به منظور مقایسـۀ ایـن کنتـرل کننـده بـا کنتـرل کننده های کلاسیک با توجه به این نکته که متغیرهای حالت سیستم معمولا هم موقیعت x و هم سرعت $\dot{x}$ را در بر میگیرند، ترکیب خطی آنها فرم تعمیم یافته ای از کنترل کننـدۀ PD را تشکیل می دهد، که برروی کلیۀ متغیرهای حالت ترکیب شده است. در اینجـا مـاتریس K را ماتریس بهره فیدبک حالت می نامیم.

برای بررسی خواص این کنترل کننده، ابتدا سیستم حلقه بسته را در فضای حالت تشکیل می دهیم.

$$\dot{x} = (A - BK)x$$
$$y = Cx$$

که در آن $A_{cl} = A - BK$، نیز یک سیستم خطی غیر متغیر با زمان را نشان می دهد. اگر خاصیت پایداری داخلی سیستم مدنظر باشد، کافی است K را به گونه ای انتخاب کنیم که مقادیر ویژهٔ $A_{cl} = A - BK$ همگی در نیم صفحهٔ باز سمت چپ قرار گیرند $(\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0)$. این انتخاب علاوه بر ایجاد پایداری داخلی نشان می دهد که $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$ یعنی کلیهٔ متغیرهای حالت در حالت ماندگار به سمت صفر میل می کنند. لذا خروجی که ترکیب خطی از ورودی می باشد نیز به سمت صفر میل خواهد نمود.

$$y(t) = Cx(t) \rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

این بدان معنی است که تنظـیم نیـز توسـط ایـن کنتـرل کننـده بـه صـورت خودکـار انجـام می پذیرد. امّا کلیهٔ متغیر های حالت و خروجیهای سیستم به سمت مبدا یا حالت صفر تنظـیم می شوند. این در حالیست که در اغلب مسائل کاربردی سیستمهای کنترل، تنظیم خروجیهـای سیستم به سمت متغیرهای ثابت غیرصفر مدنظر می باشد. این مهم نیـز بـا تغییـر کـوچکی در پیاده سازی کنترل کننده حالت محقق می شود. که در آخر این فصل و در مبحث طراحی ردیاب مورد بررسی قرار میگیرد

فیدبک حالت در سیستم های SISO

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned}$$

معادله مشخصه سیستم:

$$|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$$

اگر قطب های سیستم ناپایدار بوده یا نیازهای طراحی را برآورده نکنند در صورت کنترل پذیر بودن سیستم می توان با اعمال فیدبک حالت قطب های سیستم را به مکان دلخواه(معادله مشخصه مطلوب) جابجا نمود

معادله مشخصه مطلوب $= s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \ldots \beta_1 s + \beta_0$

با تعریف بردار بهره فیدبک حالت و کنترل کننده فیدبک حالت:

$$k = \begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_n \end{bmatrix}$$

$$u(t) = -kx(t)$$

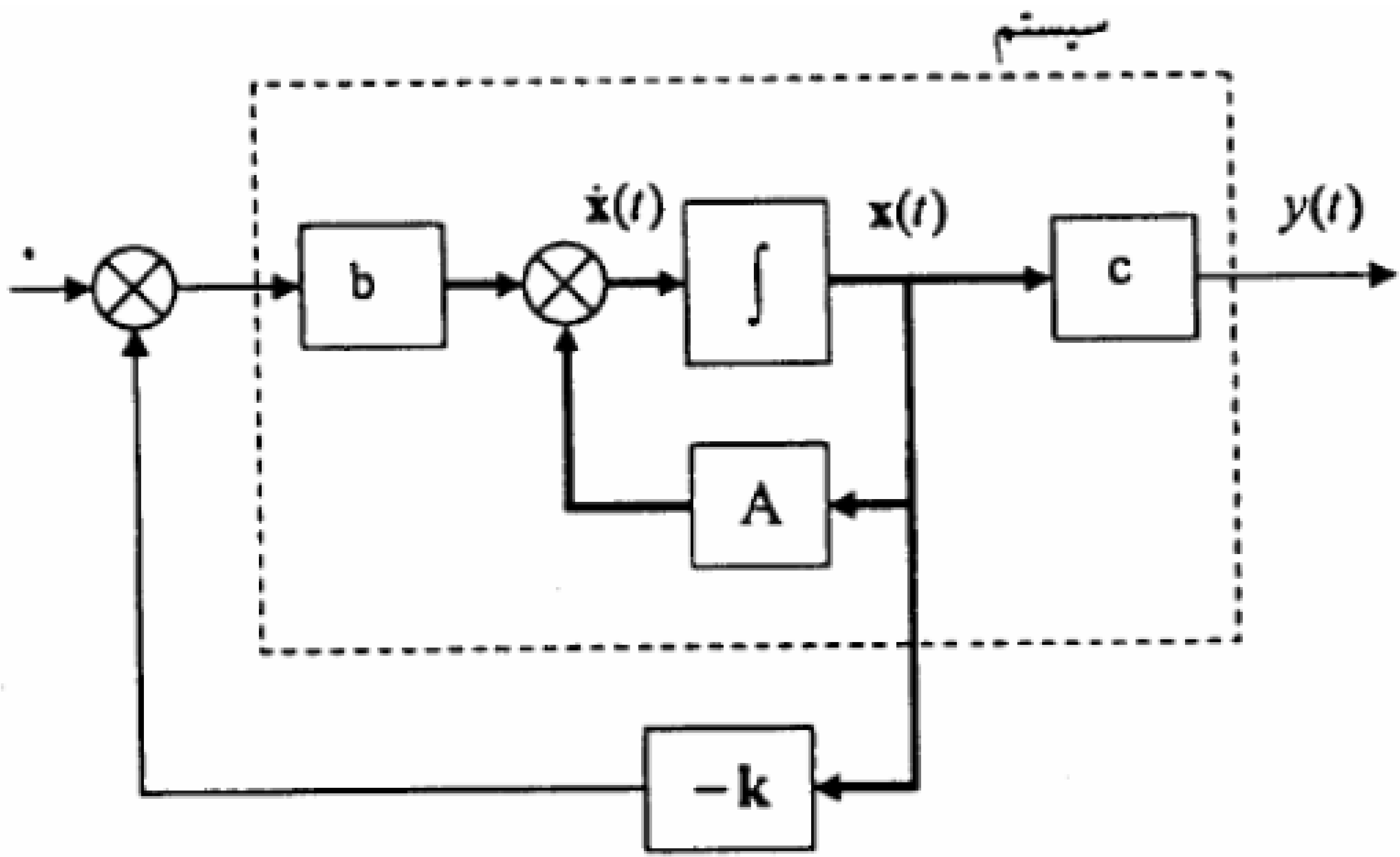
سیستم حلقه بسته:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

معادله مشخصه مطلوب $= \det(sI-[A-BK]) = \det(sI - A + Bk)$

K=?

دیاگرام حلقه بسته:



مثال

سیستم ناپایدار زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

بردار بهره فیدبک حالت K را چنان طراحی کنید که قطب های مطلوب در s=-1 و s=-2 قرار گیرند

پاسخ:

$$A_{cl} = A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 1+k_2 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A_{cl}) = \det \begin{bmatrix} s-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & s+k_2 \end{bmatrix} = s^2 + (k_2 - k_1)s + k_1 = 0$$

معادله مشخصه مطلوب $= (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 5 \end{cases}$$

محاسبه بهره فیدبک حالت با استفاده از فرم کانونیکال کنترل پذیری

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1}\end{bmatrix}x(t)$$

$$u(t)=-kx(t)=\begin{bmatrix}-k_1 & -k_2 & \cdots & -k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\ \vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-k_1&-k_2&\cdots&-k_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t)=\boxed{\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0-k_0&-a_1-k_1&-a_2-k_2&\cdots&-a_{n-1}-k_{n-1}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}$$

$$\left|sI-\boxed{(A+BK)}\right|=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\ldots\ldots\beta_0$$ معادله مشخصه مطلوب

$$s^n+(a_{n-1}+k_{n-1})s^{n-1}+(a_{n-2}+k_{n-2})s^{n-2}+\ldots\ldots+(a_0+k_0)=s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\beta_{n-2}s^{n-2}+\ldots\ldots+\beta_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_0 = \beta_0 - a_0 \\ k_1 = \beta_1 - a_1 \\ k_2 = \beta_2 - a_2 \\ . \\ . \\ . \\ k_{n-1} = \beta_{n-1} - a_{n-1} \end{cases} \qquad \Rightarrow : K = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \ldots\ldots k_{n-1} \end{bmatrix}$$

مراحل طراحی:

✓ گام ۱: تبدیل به صورت کانونیکال کنترل کننده

با اعمال تبدیل همانندی $T = \Phi_c.\Phi_{cc}^{-1}$ به سیستم (۱) $\dot{X} = AX + BU$ می توان معادلات سیستم را به فرم کانونیکال کنترل پذیری (۲) $\dot{X} = A_c X + B_c U$ نوشت که Φ_c ماتریس کنترل پذیری سیستم (۱) و Φ_{cc} ماتریس کنترل پذیری سیستم (۲) می باشد. با فرض $|sI - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0$ داریم.

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0........ & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & .... & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B_c = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

✓ گام ۲: محاسبه بردار بهره حالت از صورت کانونیکال کنترل کننده

✓ گام ۳: محاسبه بردار بهره حالت برای صورت اولیه با عکس

- مراحل طراحی:

$$A\,,\mathbf{B}$$

$$\Downarrow$$

$$A_c = T^{-1} A T\,, b_c = T^{-1}\mathbf{B}$$

$$\Downarrow$$

$$k_c$$

$$\Downarrow$$

$$k = k_c T^{-1} = k_c \Phi_{cc} \Phi_c^{-1}$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A - \mathbf{B} k) = \det(A_c - \mathbf{B_c} k_c)$$

مثال ۶-۲-۳- سیستم زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} ۱ & ۶ & -۳ \\ -۱ & -۱ & ۱ \\ -۲ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}u(t)$$

معادله مشخصه سیستم عبارتست از

$$a(s)=|\ \lambda I-A\ |=\lambda^{۳}-۳\lambda+۲=(\lambda-۱)^{۲}(\lambda+۲)$$

و لذا ناپایدار است. اگر معادله مشخصه مطلوب را به صورت زیر تعریف کنیم

$$(\lambda+۱)(\lambda+۲)(\lambda+۳)=\lambda^{۳}+۶\lambda^{۲}+۱۱\lambda+۶$$

خواهیم داشت

$$\beta=[۶ \quad ۱۱ \quad ۶] \text{ و } a=[۰ \quad -۳ \quad ۲]$$

ماتریس کنترل‌پذیری سیستم رتبه کامل است:

$$\Phi_c=[b\ \ Ab\ \ A^{۲}b]=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & -۲ \\ ۱ & -۱ & -۳ \\ ۱ & ۰ & -۱۰ \end{bmatrix}$$

$$A_c=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ b_c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و لذا

$$\Phi_{cc}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

و ماتریس تبدیل (A, b) به صورت (A_c, b_c) از معادله (۶-۲-۲۷) بدست می‌آید:

$$T=\Phi_c\,\Phi_{cc}^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ -6 & -1 & 1 \\ -13 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از طرفی، با توجه روابط (۶-۲-۲۴) به سادگی داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_c &= [-2+6 \quad 3+11 \quad 0+6] \\ &= [4 \quad 14 \quad 6] \end{aligned}$$

لذا بردار بهره فیدبک برای (A,b) از معادله (۶-۲-۲۸)، بدست می‌آید

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}_c\Phi_{cc}\Phi_c^{-1}=[5 \quad 6 \quad -5]$$

۶-۹- معادلات فضای حالت سیستمی عبارتند از

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} -۴ & -۴ & -۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۶ & ۹ & ۲ \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} -۱ \\ ۰ \\ ۲ \end{bmatrix}u(t)$$

(الف) معادلات حالت و خروجی این سیستم را به صورت کانونیکال کنترل‌کننده تبدیل کنید.

(ب) بهره فیدبک حالت $\mathbf{k}$ را چنان تعیین کنید تا قطب ناپایدار این سیستم را به ۳- انتقال داده و سایر قطب‌ها را تغییر ندهد.

فرمول آکرمن

در این روش بهرهٔ فیدبک حالت از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$k = q_n^T \alpha(A)$$

که در آن $p_d(s)=\alpha(s)$ چند جمله ای مشخصهٔ مطلوب است و q_n^T در واقع آخرین سطر ماتریس کنترل پذیری $\mathbb{C}^{-1}$ می باشد.

$$q_n^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbb{C}_c^{-1}$$

در این روش اطلاع صریحی از چند جمله ای مشخصهٔ سیستم $a(s)=\det(sI-A)$ مورد نیاز نمی باشد

قضیهٔ تغییر ناپذیری صفرهای انتقال

فرض کنید z یک صفر انتقال سیستم حلقه باز زیر باشد.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

کنترل فیدبک حالت $u = -Kx + u_{ex}$ را درنظر بگیرید. در اینحالت z صفر انتقال سیستم حلقه بسته نیز می باشد (سیستمی که y را به u_{ex} ارتباط خواهد داد). **مشروط بر آنکه قطب های حلقه بسته در مکان صفرهای حلقه باز جایابی نشوند**

نکته:

در اثر اعمال فیدبک حالت کنترل پذیری سیستم تغییر نکرده و اگر قطب های حلقه بسته در مکان صفرهای حلقه باز جایابی نشوند رویت پذیری هم تغییر نخواهد کرد

فیدبک حالت در سیستم های چند ورودی

بردار بهره فیدبک حالت ⇦ ماتریس بهره فیدبک حالت

ماتریس بهره فیدبک حالت ⇦ درجات آزادی در طراحی سیستم کنترل فیدبک حالت

درجات آزادی در طراحی ⇦

- ✓ جایابی مقاوم قطب
- ✓ جایابی بهینه قطب
- ✓ جایابی قطب با در نظر گرفتن مواردی از قبیل حساسیت
- ✓ جایابی ساختار ویژه

مثال

بهرۀ فیدبک حالت را برای سیستم زیر به گونه ای تعیین کنید، که قطبهای حلقه بستۀ سیستم منطبق با $p_d(s)$ گردد.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$p_d(s)=a_c(s)=(s+1)^2=s^2+2s+1$$

توجه کنید که در اینحالت دو ورودی وجود دارد لذا ماتریس بهرۀ K ، ۲×۲ می باشد.

$$A-BK=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-k_{11} & 1-k_{12}\\ -1-k_{21} & 2-k_{22}\end{bmatrix}$$

و لذا معادلۀ مشخصۀ سیستم حلقه بسته عبارتست از:

$$s^2+(k_{11}-2+k_{22})s-(1+k_{21})(-1+k_{12})+k_{11}(2-k_{22})$$

لذا دو معادله و چهارمجهول برای جایابی قطب وجود دارد.

$$\begin{cases}k_{11}-2+k_{22}=2\\ -(1+k_{21})(-1+k_{12})+k_{11}(2-k_{22})=1\end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{11} - 2 + k_{22} = 2 \\ -(1+k_{21})(-1+k_{12}) + k_{11}(2-k_{22}) = 1 \end{cases}$$

لذا بی نهایت حالت برای ماتریس K متصور است از جمله

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تعدد جوابها به ما اجازه می دهد، که علاوه بر جایابی قطب ها، مسائل دیگـری را در انتخـاب K در نظر گیریم، که در روشهای کنترل بهینه بعضی از این روشها مورد بررسی قرار می گیـرد.

طراحی سیستم های ردیاب با فیدبک حالت

سیستم های پایدارساز یا رگلاتور:

- ✓ پایدارسازهای سیستم های قدرت
- ✓ موشک های بدون چرخش
- ✓ صفحه های پایدار
- ✓ سیستم تعلیق خودرو
- ✓ آونگ وارونه و ...

سیستم های ردیاب یا تعقیب مدل:

- ✓ ردیابی سرعت زاویه ای در ماشین های الکتریکی
- ✓ ردیابی پروفایل های حرارتی
- ✓ موشک های هدایت شونده
- ✓ ردیابی مسیر در کنترل هواپیما و ...

- روش های طراحی سیستم های ردیاب با فیدبک حالت
  - ✓ پیش جبران سازی استاتیکی یا ساختار دو درجه آزادی
  - ✓ کنترل انتگرالی

- **طراحی پیش جبران سازی استاتیکی در مسیر ورودی مرجع**

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) \longrightarrow \text{سیستم}$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = r \longrightarrow \text{هدف طراحی}$$

$$0 = Ax(\infty) + Bu(\infty) \qquad u(\infty) = ?$$

$$r = y(\infty) = Cx(\infty)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

$$\dot{x}(t) = A[x(t) - x(\infty)] + B[u(t) - u(\infty)]$$

$$y(t) - r = C[x(t) - x(\infty)]$$

$$\dot{x}'(t) = Ax'(t) + Bu'(t)$$

$$y'(t) = Cx'(t)$$

$$u'(t) = -Kx'(t)$$

$$\dot{x}'(t) = Ax'(t) + Bu'(t)$$

$$y'(t) = Cx'(t)$$

$$\dot{x}'(t) = (A - BK)x'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty}[y(t) - r] = 0$$

- سیگنال کنترلی ؟

$$u'(t) = -Kx'(t)$$

$$\Rightarrow u(t) - u(\infty) = -K[x(t) - x(\infty)]$$

$$\Rightarrow u(t) = -Kx(t) + u(\infty) + Kx(\infty) = -Kx(t) + u_a \qquad u_a = ?$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Bu_a$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = (A - BK)x(\infty) + Bu_a$$

$$\Longrightarrow \quad x(\infty) = (A - BK)^{-1} Bu_a$$

$$(\lim_{t \to \infty}[y(t) - r] = 0) \quad \Longrightarrow \quad r = -C(A - BK)^{-1} Bu_a$$

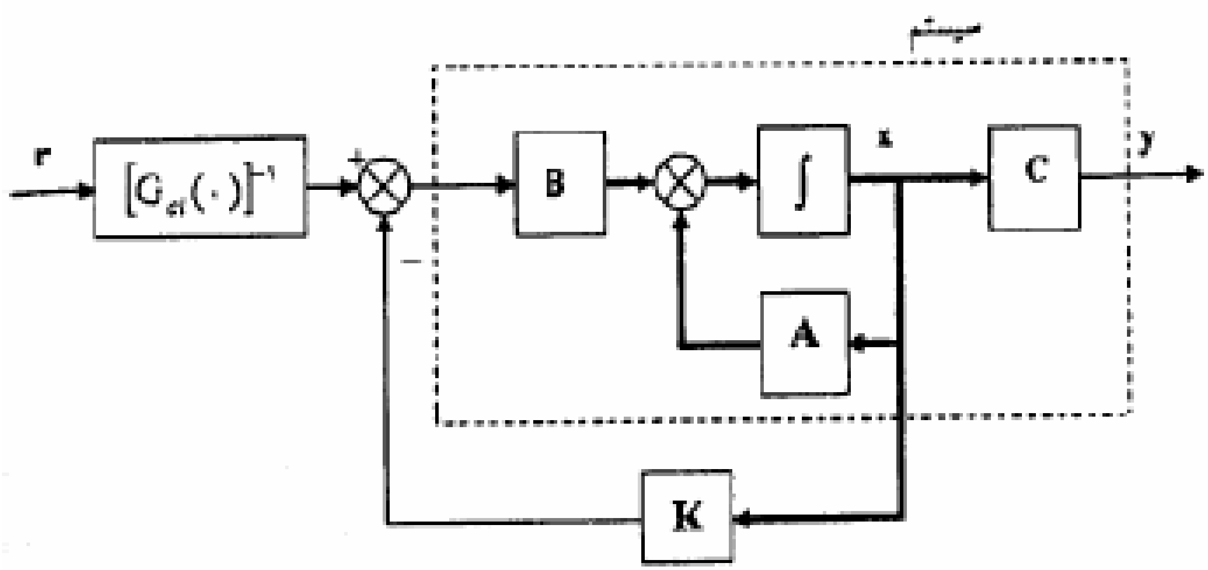
$$\Longrightarrow \quad u_a = [-C(A - BK)^{-1} B]^{-1} r$$

$$G_{cl}(s) = C[sI - A + BK]^{-1}B \quad \Rightarrow \quad G_{cl}(0) = -C[A - BK]^{-1}B$$

$$\Rightarrow \quad u_a = [G_{cl}(0)]^{-1}r$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = -Kx(t) + [G_{cl}(0)]^{-1}r$$

✓ دیاگرام بلوکی:



شکل ۶-۳ سیستم ردیاب با پیش جبرانساز ورودی مرجع

- چند نکته کلیدی
  - ✓ تعمیم طراحی به حالت سیستم های چند متغیره
  - ✓ شرایط لازم و کافی طراحی در سیستم های اسکالر و چند متغیره
  - ✓ سیستم های غیر مربعی
  - ✓ ردیابی مطلوب در حالت ماندگار
  - ✓ سادگی در طراحی و پیاده سازی
  - ✓ نامقاوم بودن در برابر: تغییرات پارامترها و اغتشاشات

طراحی فیدبک حالت با کنترل انتگرال

کنترل تناسبی و کنترل انتگرالی

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

سیستم

$$\dot{q}(t) = r - y(t) = r - Cx(t)$$

حالت انتگرالی

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{B}} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

آیا سیستم ($\overline{A}\ ,\overline{B}$) کنترل پذیر است؟

$$\begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{A}\,\overline{B} & \cdots & (\overline{A})^{n-1}\overline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^nB \\ 0 & -CB & -CAB & \cdots & -CA^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & A\Phi_c \\ 0 & -C\Phi_c \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\begin{bmatrix} B & A \\ 0 & -C \end{bmatrix}} \ \underline{\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Phi_c \end{bmatrix}}$$

رتبه کامل است

شرط لازم و کافی بودن سیستم افزوده
شده رتبه کامل بودن این ماتریس است

$$u(t) = \begin{bmatrix} -K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} \longrightarrow$$ کنترل کننده فیدبک حالت

$$\Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \dot{q}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} [r - y(t)] = 0 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} y(t) = r$$

اثر اغتشاشات ثابت بر سیستم حلقه بسته

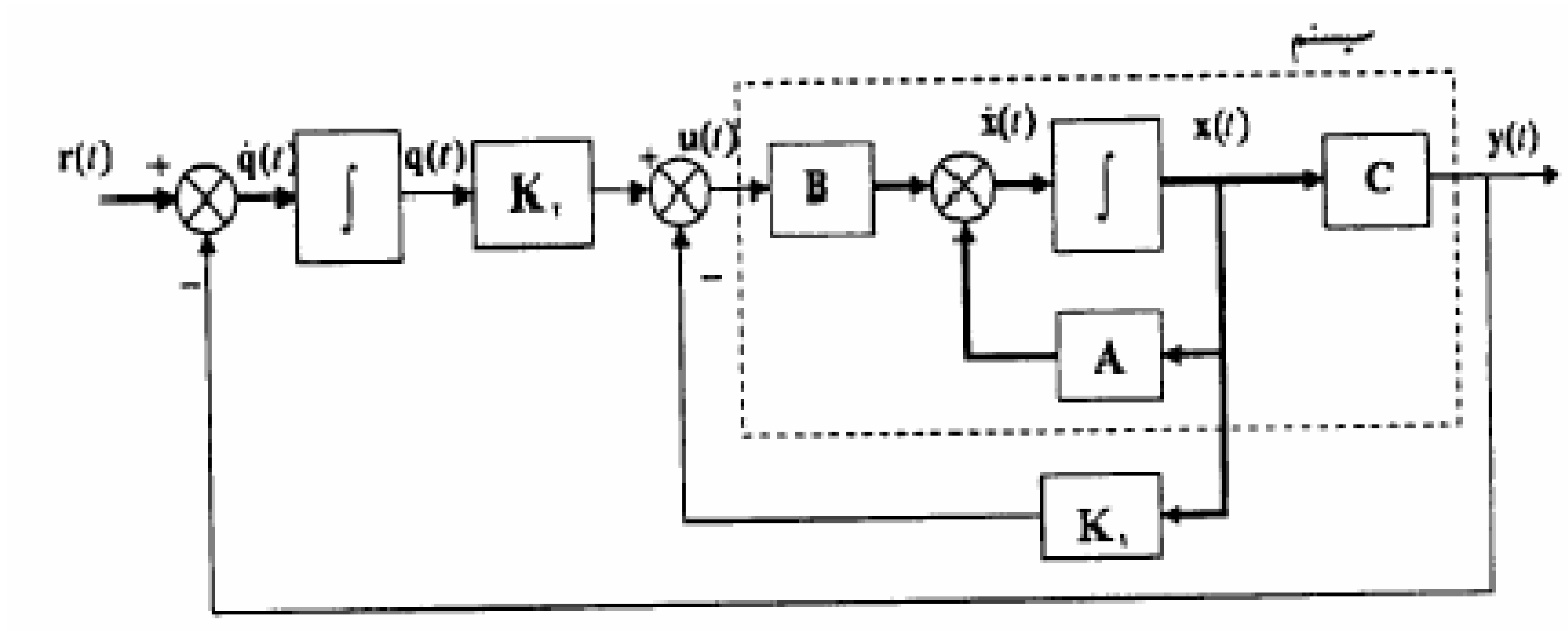
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d \longrightarrow$$ سیستم حلقه باز با اغتشاش

$$u(t) = \begin{bmatrix} -K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

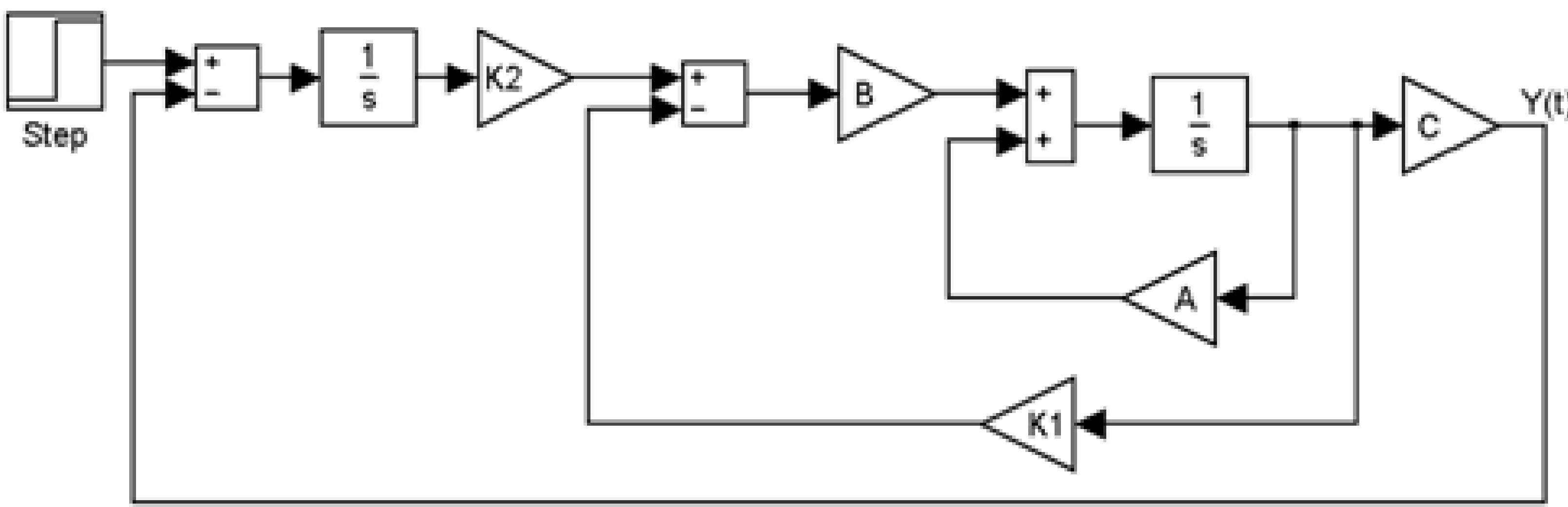
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \dot{q}(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} [r - y(t)] = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y(t) = r$$

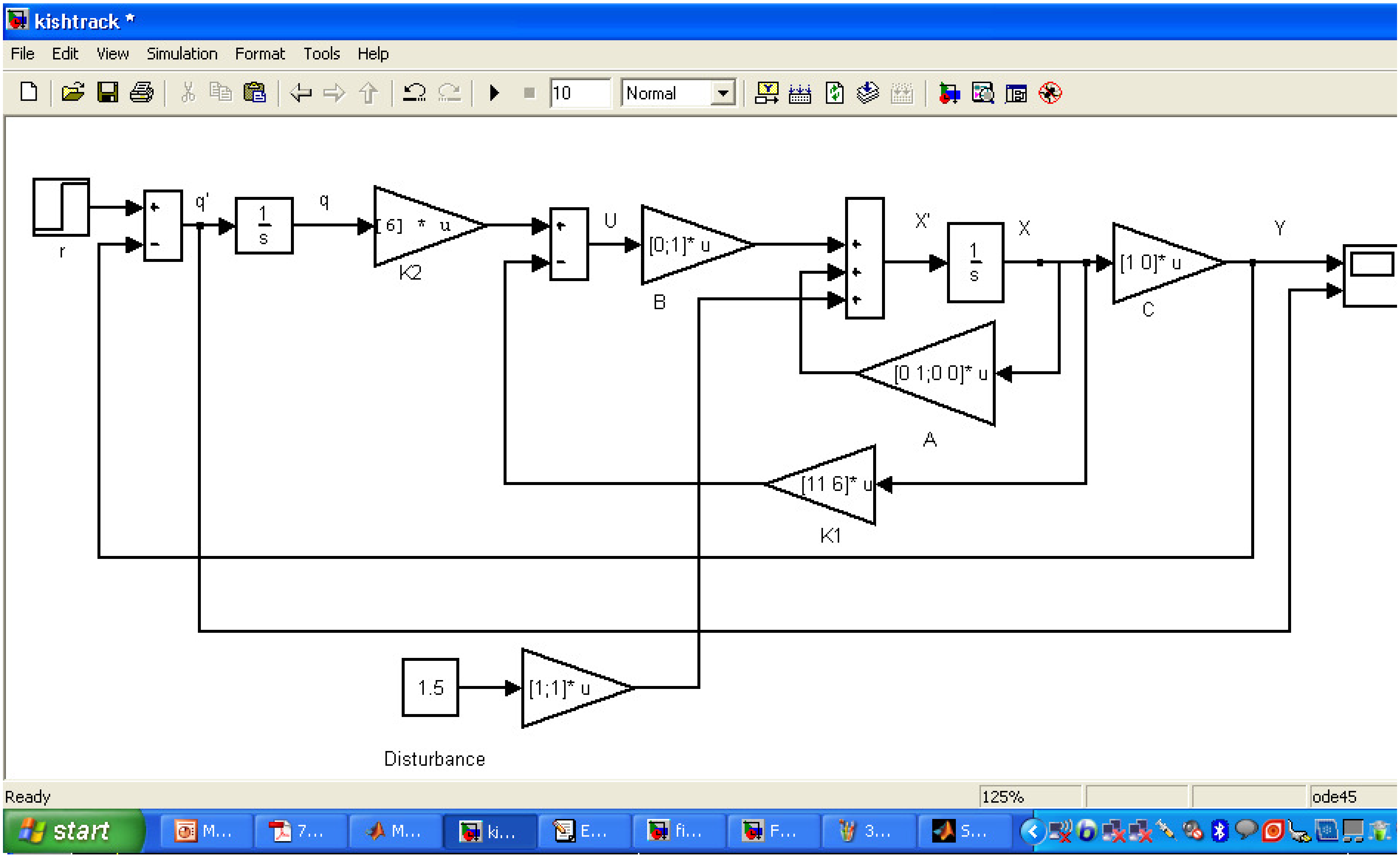
- دیاگرام بلوکی سیستم فیدبک حالت با کنترل انتگرال

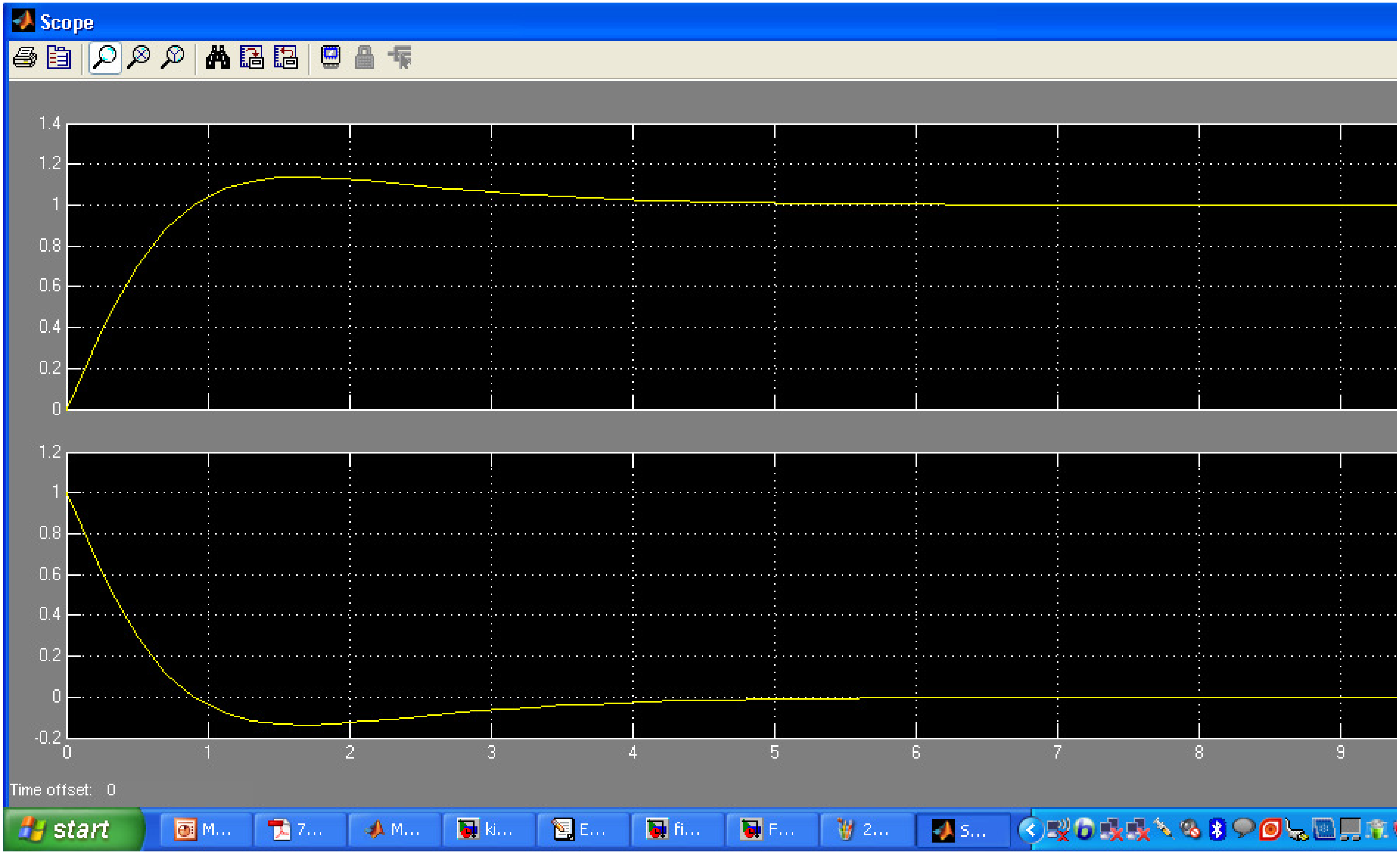


۶. بلوک دیاگرام یک سیستم فیدبک حالت با کنترل انتگرالی بصورت زیر داده شده است. K_1 و K_2 را چنان تعیین کنید که خروجی ورودی پله را بدون خطا دنبال کند.

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , B\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$




kishtrack *
File Edit View Simulation Format Tools Help
10
Normal
r
q'
1
s
q
[6] * u
K2
U
[0;1]* u
B
X'
1
s
X
[1 0]* u
C
Y
[0 1;0 0]* u
A
[11 6]* u
K1
1.5
[1;1]* u
Disturbance
Ready
125%
ode45
start


Scope
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Time offset: 0
start

۶-۸) سیستم زیر را درنظر بگیرید.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

الف) کنترل پذیری سیستم را چک کنید.

ب) بهره فیدبک حالت لازم را برای جایابی قطبهای حلقه بسته برروی $s_1=-2$ و $s_{2,3}=-1\pm j$ بدست آورید.

ج) قسمت ب را با استفاده از روش بس- گیورا و فرمول آکرمن محاسبه کنید.

که در آن x_1 = سرعت افقی، x_2 = نرخ فراز، x_3 = زاویه فراز و u = زاویه انحراف گردنده[1] می‌باشد.

(الف) قطب‌های حلقه باز را تعیین کنید.

(ب) قانون فیدبک حالت را برای جایابی قطب‌ها در $s=-2$ و $s=-1\pm j$ بدست آورید.

(پ) یک کنترل کننده ردیاب سرعت برای این سیستم طراحی کنید.

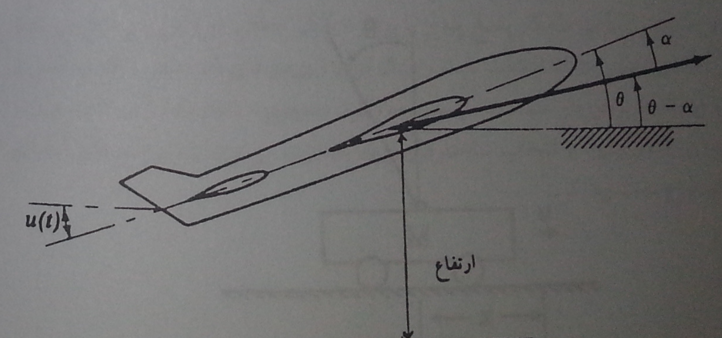
۶-۵- هلیکوپتر مسئله ۶-۴ را با یک باد مخالف ثابت (ولی ناشناخته) درنظر بگیرید. دراین حالت جریان باد d به صورت $[0 \;\; -0/01 \;\; -0/02]^T$ به معادلات سیستم اضافه می‌گردد. یک سیستم کنترل فیدبک حالت با کنترل انتگرال برای سیستم طراحی کنید. با بکارگیری فیدبک حالت، قطب انتگرال‌گیر در $s=0$ را به $s=-1$ انتقال دهید و سایر قطب‌ها را در -2 و $-1\pm j$ نگه دارید.

۶-۶- پرواز افقی یک هواپیما (نشان داده شده در شکل ۶-۱۱) را در حالت نزدیک ماندگار می‌توان با معادلات زیر مدل کرد:

$$\tau\dot{\gamma}=\alpha$$

$$\ddot{\theta}=-\omega_0^2(\alpha-Qu)$$

$$\dot{h}=v\gamma$$



شکل ۶-۱۱ سیستم مسئله ۶-۶

۱- Rotor tilt

که در آن $\gamma=\theta-\alpha$ (زاویه مسیر پرواز نسبت به افق)، θ= انحراف زاویه فراز، α = انحراف زاویه حمله، v = اندازه سرعت نسبت به زمین (ثابت فرض شده است)، u = انحراف بالابر (کنترل)، Q= موثری بالابر (ثابت)، τ = ثابت زمانی بالا رفتن و ω_0= فرکانس طبیعی غیر میرا در حرکت فراز (ثابت). مطلوب است که در مقابل اغتشاشات باد عمودی $h\approx 0$ باقی بماند.

(الف) با استفاده از یک ارتفاع سنج برای اندازه‌گیری h نشان دهید که با فیدبک خطای تناسبی $u=-kh$ سیستم حلقه بسته به ازاء هیچ مقداری از k پایدار نخواهد شد.

(ب) با استفاده از یک ژیرسکوپ برای اندازه‌گیری θ نشان دهید که می‌توان سیستم را با کنترل کننده فیدبک حالت $u=-k_1h-k_2\theta$ پایدار کرد.

۶-۷- سیستم خطی توصیف شده باتابع تبدیل زیر را درنظر بگیرید

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{10}{s(s+1)\ (s+2)}$$

کنترل‌کننده فیدبک حالت، چنان طراحی کنید که مقادیر ویژه سیستم حلقه بسته در $-1\pm j$ و -2 قرار گیرند.

۶-۸- سیستم‌های زیر را درنظر گرفته، با بکارگیری فیدبک حالت و روش‌های ارائه شده برای تعیین بهره فیدبک، قطب‌های حلقه بسته را در مکانهای مطلوب جایگزین نمائید:

(الف)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}10\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-3,\ -2,\ -2\}$.

(ب)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-6,\ -1\pm 2j\}$.

(پ)
$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}u(t)$$

مجموعه قطب‌های مطلوب $\{-1,\ j,\ -j\}$.