فاطمه سودانگری 90.1.27

سری اول تمرینات کنترل مدرن

(1)

$$x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|x_1\|_1 = \sum_i |x_i| = 2+3+1 = 6$$

$$\|x_1\|_2 = \sqrt{x^T . x} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14} = 3.74$$

$$\|x_1\|_\infty = \max_i |x_i| = |-3| = 3$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|x_2\|_1 = 1+1+1 = 3$$

$$\|x_2\|_2 = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{3} = 1.7$$

$$\|x_2\|_\infty = 1$$

(2

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2+c_1 \to c_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \to c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[+c_2+c_3]{-c_1+c_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow Rank(A_1) = 2$$

$$v(A) = n - Rank(A) = 3-2 = 1$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \boxed{x_1 = 1}^{*} \end{cases} \Rightarrow N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

* مرتبه ماتریس

$$A_2=\begin{bmatrix}4&1&-1\\3&2&0\\1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2\to C_1}\begin{bmatrix}1&4&-1\\2&3&0\\1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&-5&2\\0&-3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{-3}{5}r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&4&-1\\0&-5&2\\0&0&-1/5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{4/5\,r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&0&\frac{3}{5}\\0&-5&2\\0&0&-1/5\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{2}{5}c_2+c_3]{-\frac{3}{5}c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&-1/5\end{bmatrix}\xrightarrow[-5r_3]{-1/5\,r_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$Rank(A_2)=3$$

$$v(A)=n-Rank(A_3)=3-3=0$$ بوچ نداریم.

$$A_3=\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&4\\0&-1&-2&2\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\det(A_3)=0\Rightarrow Rank(A_3)\le 3\quad ①$$

در این ماتریس می‌توانیم حداقل یک ماتریس 3×3 که دترمینانش مخالف صفر است پیدا کنیم. مثلاً

$$B=\begin{bmatrix}2&3&4\\-1&-2&2\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times3}\Rightarrow Rank(A_3)\ge 3\quad ②$$

$$①,②\Rightarrow Rank(A)=3$$

$$v(A_3)=n-Rank(A_3)=4-3=1$$

$$A_3x=0$$

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&-1&-2&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=0\\-x_2-2x_3+2x_4=0\\x_4=0\end{cases}$$

$x_4=0$

$\boxed{x_1=1}$ *

$$\Rightarrow\begin{cases}2x_2+3x_3=-1\\-x_2-2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x_2=-2\\x_3=1\end{matrix}$$

$$N(A)=\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

(4) (الف)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

★ معادلات سازگار و دستگاه جواب دارد.

(ب)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 2/3 \\ x_2 = 1/3 \end{matrix}$$

★ این دو دسته در معادله سوم صدق نمی‌کند.

بنابراین معادلات سازگار نیستند و دستگاه جواب ندارد.

(5)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

$x_1 = -1$ ★ قرار می‌دهیم $\Rightarrow \begin{cases} -x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x_2 = 0}$ $\boxed{x_3 = 0}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$: (6)

$$(A_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 & 10 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$$

$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = 3$

ضلع جردن نداریم.

ولی ماتریس قطری دارد.

$$\hat{A}_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(A_2 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2-\lambda I) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$\lambda_{1,2} = 1 \quad , \lambda_3 = 2$

$$\lambda_{1,2} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Rank(A_2 - \lambda I) = 1 \\ \nu(A_2 - \lambda I) = n - R = 2 = \alpha \\ k - \alpha = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$ معادله تقسیم نمی‌شود

$$(A_2 - \lambda I) V_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_2 - \lambda_3 I) V_3 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \Rightarrow x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{J} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix}$$

$$(A_3 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 4 & 3 \\ 0 & 20-\lambda & 16 \\ 0 & -25 & -20-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_3 - \lambda I) = -\lambda^3 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{Rank}(A_3 - \lambda I) = 2 \\ \nu(A_3 - \lambda I) = 3-2 = 1 = \alpha \\ k - \alpha = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

دو معادله تقسیم با فضه دارم .

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 0 \\ 20y + 16z = 0 \\ -25y - 20z = 0 \end{cases} \quad \text{if } x = 1 \quad V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ 20y + 16z = 0 \\ -25y - 20z = 0 \end{cases} \quad \text{if } x = 1 \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ +4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 20 & 16 \\ 0 & -25 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4y + 3z = 1 \\ 20y + 16z = -4 \\ -25y - 20z = 5 \end{cases} \quad \text{if } x = 1 \quad V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1} \cdot A \cdot T = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A_4 - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_4 - \lambda I) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_{2,3} = 1$$

$$\lambda_{1,2,3} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{Rank}(A_4 - \lambda I) = 2 \\ \nu(A_4 - \lambda I) = 3 - 2 = 1 = \alpha \\ k - \alpha = 3 - 1 = 2 \rightarrow \end{cases}$$

؟ دو معادله تقسیم یافته نیاز داریم .

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{if } z = 1$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{if } z = -1$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 1 \\ -x + y = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{if } z = -0.5$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$J = T^{-1} \cdot A_4 \cdot T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

$$(\lambda I - A_1) = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_1) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \;,\; \lambda_2 = -2 \;,\; \lambda_3 = -3$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 6 & 11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - v_2 = 0 & \text{if } v_3 = -1 \\ -v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 5v_3 = 0 \end{cases} \quad V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 6 & 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2v_1 - v_2 = 0 & \text{if } v_3 = -1 \\ -2v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 4v_3 = 0 \end{cases} \quad V_2 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ +1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 6 & 11 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3v_1 - v_2 = 0 & \text{if } v_3 = -1 \\ -3v_2 - v_3 = 0 \\ 6v_1 + 11v_2 + 3v_3 = 0 \end{cases} \quad V_3 = \begin{bmatrix} -1/9 \\ +1/3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A_2) = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -2 & 1 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_2) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \;,\; \lambda_{2,3} = -1.5 \pm 0.8j$$

فرم حقیقی ندارد و فرم متقارن جردن دارد.

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -v_1 - 2v_2 + v_3 = 0 \\ -v_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{if } v_3 = 1 \qquad V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{2,3} = -1.5 + 0.8i \Rightarrow \begin{bmatrix} -0.5+0.8i & -2 & 1 \\ 0 & 0.5+0.8i & 0 \\ -1 & 0 & 0.5+0.8i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (-0.5+0.8i)V_1 - 2V_2 + V_3 = 0 \\ (0.5+0.8i)V_2 = 0 \rightarrow V_2 = 0 \\ -V_1 + (0.5+0.8i)V_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{2,3} = \begin{bmatrix} -1-0.8i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0.8 \\ 0 & -0.8 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - A_3) = \begin{bmatrix} \lambda-7 & -4 & 8 \\ -4 & \lambda+8 & 1 \\ 4 & 1 & \lambda+8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A_3) = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 15\lambda - 985 = 0$$

$$\lambda_1 = 9.8 \quad , \lambda_2 = -9.8 \quad , \lambda_3 = -9$$

فرم حقیقی دارد.

$$\lambda_1 = 9.8 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2.8 & -4 & 8 \\ -4 & 17.8 & 1 \\ 4 & 1 & 17.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2.8V_1 - 4V_2 + 8V_3 = 0 \\ -4V_1 + 17.8V_2 + V_3 = 0 \\ 4V_1 + V_2 + 17.8V_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_2 = -9.8 \Rightarrow \begin{bmatrix} -16.8 & -4 & 8 \\ -4 & -1.8 & 1 \\ 4 & 1 & -1.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad V_1 = \begin{bmatrix} -4.7 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = -9 \Rightarrow \begin{bmatrix} -16 & -4 & 8 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.45 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.12 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 9.8 & 0 & 0 \\ 0 & -9.8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -13\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$ (8)

$$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda-4 & 13\\ 0 & -1 & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I-A)=\lambda^3-3\lambda^2-4\lambda=0$$

$$\lambda_1=0\ ,\ \lambda_2=-1\ ,\ \lambda_3=4$$

نرم‌افزار - بلوکی نوشته و ساعتم عقربه دارد.

$$\lambda_1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -4 & 13\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}x-y-z=0\\ -4y+13z=0\\ -y=0\end{cases} \rightarrow V_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2=-1 \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & -5 & 13\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}-z-y=0\\ -5y+13z=0\\ -y-z=0\end{cases} \quad \text{if } x=1 \Rightarrow V_2=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3=4 \Rightarrow \begin{bmatrix}5 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 13\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}5x-y-z=0\\ 13x=0\\ -y+4z=0\end{cases} \quad V_3=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\vec{A}=T^{-1}.A.T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow A^{100}=?$$ (9

$$\det(\lambda I-A)=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=0\ ,\ \lambda_{2,3}=1$$

$$F(A)=A^{100}$$

$$h(\lambda)=\beta_2\lambda^2+\beta_1\lambda+\beta_0\ ,\ F(\lambda)=\lambda^{100}$$

$$F^L(\lambda i) = h^L(\lambda i)$$

$$F(\lambda_1=0) = h(\lambda_1=0) = (0)^{100} \Rightarrow \beta_0 = 0$$

$$F(\lambda_2) = h(\lambda_2) \rightarrow \beta_2+\beta_1 = 1$$

$$F'(\lambda_2) = h'(\lambda_2) \rightarrow 2\beta_2+\beta_1 = 100 \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = -98 \\ \beta_2 = 99 \end{cases}$$

$$F(A) = A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{100} = h(A) = \beta_2 A^2 + \beta_1 A + \beta_0 \cdot I$$

$$= 99\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^2 - 98\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 99 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$e^{At} = ?$

$$F(A) = e^{At} \Rightarrow F(\lambda) = e^{\lambda t}$$

$$h(\lambda) = \beta_2 \lambda^2 + \beta_1 \lambda + \beta_0$$

$$F(\lambda_1=0) = h(\lambda_1=0) = e^0 = 1 = \beta_0$$

$$F'(\lambda_2) = h'(\lambda_2) \Rightarrow te^{\lambda t} = te^t = 2\beta_2+\beta_1+1$$

$$F(\lambda_2) = h(\lambda_2) \Rightarrow \quad et = \beta_2+\beta_1+1$$

$$\begin{cases} \beta_1 = e^t - 1 \\ \beta_2 = e^t(1-t) \end{cases}$$

$$e^{At} = \beta_2 A^2 + \beta_1 A + \beta_0 \cdot I$$

$$= e^t(1-t)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^t-1)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t - te^t & 2e^t - te^t - 1 & e^t - tet \\ 0 & 1 & 2e^t - tet - 1 \\ 0 & 0 & 2e^t - te^t \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&3&2\\3&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}$$ (10

$$(A-\lambda I)=\begin{bmatrix}2-\lambda&3&2\\3&1-\lambda&0\\2&0&2-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=-\lambda^3+5\lambda^2+5\lambda-18=0$$

$$\lambda_1=-2 \quad \lambda_{2,3}=\frac{-7\pm\sqrt{13}}{-2}$$

نامعین است .

$$B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

$$(B-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\lambda&0&-1\\0&-\lambda&0\\-1&0&2-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \det(B-\lambda I)=\lambda(\lambda^2-2\lambda-1)=0$$

$$\lambda_1=0 \quad \lambda_{2,3}=1\pm\sqrt{2}$$

نامعین است .

$$A_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}$$

$$\|A_1\|_F=6+11+6=23$$ (11

$$\|A_1\|_2=\max\sqrt{eig(A_1^T\cdot A_1)}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-6\\1&0&-11\\0&1&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}36&66&36\\66&122&66\\36&66&37\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}36-\lambda&66&36\\66&122-\lambda&66\\36&66&37-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_1^TA_1-\lambda I)=0$$

$$\|A_1\|_1 = 1+0+11 = 12$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \|A_2\|_\infty = 2+2 = 4$$

$$\|A_2\|_1 = 1+2+1 = 4$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 8-\lambda & -2 \\ -1 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A_2^T \cdot A_2 - \lambda I) = 0$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} \qquad \|A_3\|_\infty = 7+4+8 = 19$$

$$\|A_3\|_1 = 8+8+1 = 17$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -8 & -1 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 4 & -8 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 0 & -28 \\ 0 & 81 & -16 \\ -28 & -16 & 129 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 81-\lambda & 0 & -28 \\ 0 & 81-\lambda & -16 \\ -28 & -16 & 129-\lambda \end{bmatrix}$$

تمرینات کتاب :

(8-1) :

$$A_1=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-3&0\\0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-3&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-2c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Rank}(A_1)=2\\ \nu(A_1)=3-2=1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&-3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+2x_2=0\\2x_1+4x_2-3x_3=0\\x_3=0\end{cases}\qquad \gamma_1=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&2&2\\1&0&6\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_1+r_3}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&2&2\\0&2&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{c_3-c_2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&2&0\\0&2&-5\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&6\\0&2&0\\0&0&-5\end{bmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{5}r_3]{\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{-6c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Rank}(A_2)=3\\ \nu(A)=0\end{cases}$$

$$A_3=\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&8&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}r_1+r_2\\-3r_1+r_4\end{matrix}\xrightarrow{}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\\0&2&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-r_4}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&2&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{-r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[-2C_2+C_3]{-2C_1+C_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\text{Rank}(A_3)=2\\ \nu(A_3)=3-2=1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\-1&0&1\\0&2&1\\3&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\-x+z=0\\2y+z=0\\3x+8y+z=0\end{cases}$$

if $z=1$

$$v_1\quad\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}2&4&6&4&3\\0&1&4&5&6\\0&0&1&2&1\end{bmatrix}$$

$$\det(A_4)\neq 0$$

$$\begin{cases}\text{Rank}(A_4)=3\\ \nu(A_4)=5-3=2\end{cases}$$

: حواسیم راست $AX=0$ تشکیل دستگاه معادلات

$$v_1=\begin{bmatrix}-9\\3\\1\\-0.03\\1\end{bmatrix}\qquad v_2=\begin{bmatrix}0.7\\6\\7\\2\\1\end{bmatrix}$$

سری (10-1)

$$\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=2\\ x_1+2x_2+x_3=2\\ 4x_1-7x_2-5x_3=2\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&2\\1&2&1&2\\4&-7&-5&2\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}2&-1&-1&2\\0&2.5&1.5&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

if $x_3=0\Rightarrow\quad x_2=\frac{2}{5}\ ,\ x_1=\frac{6}{5}$

(ب

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2-x_3=1\\ 3x_1+3x_2-5x_3=1\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_3 = -2 \\ -8x_3 = -8 \end{cases} \rightarrow x_3 = 1 \quad , \text{if } x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 2$$

دستگاه بی‌شمار جواب دارد و یکی جواب آن $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ است.

(2-2):

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+6 & -4 \\ 2 & s \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\frac{1}{s(s+6)+8}}_{A} \begin{bmatrix} s & 4 \\ -2 & s+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} = \Phi(s)$$

$$X(s) = \Phi(s) \cdot x(0) + \Phi(s) \cdot B \cdot U(s)$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{s}{A} & \frac{4}{A} \\ \frac{-2}{A} & \frac{s+6}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{s}$$

$$X(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 + 4}{s(s+4)(s+2)} \\ \frac{-3s + 6}{s(s+4)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0.5 + 4.5e^{-4t} - 3e^{-2t} \\ 0.75 + 2.25e^{-4t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(5-2)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}u(t) \quad , \quad y(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI-A)^{-1}\cdot B + D$$

$$\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+5 & 1\\ -3 & s+1\end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{(s+5)(s+1)+3}}_{A}\begin{bmatrix}s+1 & -1\\ 3 & s+5\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\frac{s+1}{A} & \frac{-1}{A}\\ \frac{3}{A} & \frac{s+5}{A}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+1}{A} & \frac{-1}{A}\\ \frac{3}{A} & \frac{s+5}{A}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{12s+59}{s^2+6s+2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12s+59}{s^2+6s+2}$$

(6-2)

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}x(t)$$

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}s & 0 & 0\\ 0 & s & 0\\ 0 & 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+1 & 0 & 0\\ 0 & s+4 & -4\\ 0 & 1 & s\end{bmatrix}$$

معکوس بگیری $\longrightarrow$

$$\Phi(s)=\begin{bmatrix}\frac{4}{s^3+5s^2-4} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-1}{s^3+5s^2-4} & \frac{4}{s^3+5s^2-4}\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow A^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad (7-2)$$

$$\Phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\dots$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&t&t\\0&0&t\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&t^2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&t&(t+\frac{1}{2}t^2)\\0&1&t\\0&0&1\end{bmatrix}=e^{At}$$

حل تمرین های فصل کنترل پذیری و رویت پذیری

(2-3) کنترل پذیری و رویت پذیری سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را بررسی کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$\Phi_c = \left[B \mid AB \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$Rank(\Phi_c) = 2$ full Rank

ماتریس کنترل پذیری سیستم full Rank است پس سیستم کنترل پذیر است.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$Rank(\Phi_o) = 2$ full Rank

ماتریس رویت پذیری سیستم full Rank است پس سیستم رویت پذیر کامل حالت است.

(3-3) معادله حالت سیستم زیر را بصورت کانونیکال کنترل پذیری تبدیل کرده و نمودکنترل ناپذیری را نشان می کنید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$Rank(\Phi_c) = 2$

سیستم کنترل پذیر کامل حالت نیست و یک مود کنترل ناپذیر دارد.

$$T=\left[\begin{array}{c|c} T_1 & T_2 \end{array}\right] \Rightarrow T=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A}=T^{-1}.A.T$$

$$\hat{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}=T^{-1}\cdot B$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حرم کانونیکال کنترل پذیری بصورت زیر است :

$$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc|c} \overbrace{0}^{A_{11}} & -4 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & \underbrace{1}_{A_{22}} \end{array}\right]x+\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]u$$

مد کنترل ناپذیر سیستم مقدار ویژه ماتریس A_{22} یعنی $(\lambda=1)$ است و پایدار ناپذیر است. همچنین مدهای کنترل پذیر آن $(\lambda_{1,2}=2)$ است. که همان مقادیر ویژه ماتریس A_{11} است .

(8-3) مدل فضای حالت سیستم عبارت است از :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$Y(t)=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}x$$

که مقادیر آن مقادیر α که سیستم را به وضعیت ناپذیر می کند پیدا کنید .

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\alpha-2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \alpha-3 & -2 & 0 \\ -\alpha-3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

برای اینکه ماتریس رویت پذیری، FullRank باشد
دترمینان آن، باید صفر نشود.

$$|\Phi_o| = 4\alpha - 28 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\alpha = 7}$$

(3-9) نشان دهید که سیستم توصیف شده با معادله حالت زیر کاملاً کنترل پذیر حالت است.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \Rightarrow \Phi_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$Rank(\Phi_c) = 2$
سیستم کنترل پذیر کامل حالت است.

(12-3) سیستم زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} u$$

کنترل پذیری کامل حالت را برای مقادیر مختلف a و b و c بررسی کنید.
برای اینکه سیستم کنترل پذیر کامل حالت باشد سطر آخر بلوک جردن (تک بلوک جردن) را پیدا کرده و سطر متناظر با این سطر در ماتریس B باید ناصفر باشد و بقیه درایه‌ها در ماتریس B می‌توانند صفر باشند.

a و b $\rightarrow$ هیچ می‌توانند باشند ، $c \neq 0$

(16-3) معادله سیستم عبارتست از

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

این سیستم کنترل پذیر است .

الف) بردارهایی که زیرفضای کنترل پذیر سیستم را Span می کنند تعیین کنید .

ب) با بکارگیری بردارهای تعریف شده در (الف) و تعریف بردارهای مناسب دیگر، معادلات حالت را بفرم کنترل پذیری تبدیل کرده، مودهای کنترل پذیر و کنترل ناپذیر سیستم را شناسایی کنید .

پ) رفتار این سیستم پایدار می پذیرد .

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Rank } (\Phi_c) = 1$$

سیستم کنترل ناپذیراست و دو مود کنترل ناپذیر و یک مود کنترل پذیر دارد .

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & \vdots & T_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1} \cdot B$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

فرم کانونیکال کنترل پذیری بصورت زیر است :

$$\dot{x} = \overbrace{\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]}^{\begin{matrix} A_{11} \\ \\ A_{22} \end{matrix}} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

مد کنترل ناپذیر سیستم مقادیر ویژه ماتریس A_{22}

یعنی ($\lambda_{1,2} = -0.5 \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$) است و پایدار پذیر است . همچنین مد کنترل پذیر سیستم

مقدار ویژه ماتریس A_{11} یعنی ($\lambda = 1$) است .

حل تمرین های فصل چهارم (تحقق) :

(4-1) : برای تابع تبدیل داده شده زیر

$$g(s) = \frac{1}{s+3}$$

الف) یک تحقق کنترل پذیر و رویت ناپذیر پیدا کنید .

برای رویت ناپذیری باید صورت و مخرج تابع تبدیل را در عبارتی ضرب کنیم . در اینصورت سیستم دارای صفر و قطب مکان است و در فرم کانونیکال کنترل پذیری ، رویت ناپذیر می گردد .

$$g(s) = \frac{(s+A)}{(s+3)(s+A)} = \frac{s+A}{s^2+(3+A)s+3A}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3A & -(3+A) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} A & 1 \end{bmatrix} x$$

ب) یک تحقق کنترل ناپذیر و رویت پذیر پیدا کنید .

تحقق کنترل ناپذیر و رویت پذیر دوگان تحقق بالا است .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -3A \\ 1 & -(3+A) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} A \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

ج) تحقق کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر پیدا کنید .

تحقق کنترل ناپذیر و رویت ناپذیر را می توان با تحقق سری موازی بدست آورد .

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} x$$

$$\frac{s+A}{(s+3)(s+A)} = \frac{1}{s+3} + \frac{0}{s+A}$$

$$b_1 c_1 = k_1 \Rightarrow b_1 c_1 = 1 \Rightarrow b_1 = c_1 = 1$$

$$b_2 c_2 = k_2 \Rightarrow b_2 c_2 = 0 \Rightarrow b_2 = 0 \ , \ c_2 = 0$$

برای اینکه سیستم کنترل نایذیر و رویت نایذیر شود باید b_2 و c_2 هردو صفر شوند.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -A \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

(3-4) : الف) تحقق های کانونیکال کنترل کننده و کنترل پذیری تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$g(s) = \frac{2}{(s+1)^2(s+3)}$$

$$g(s) = \frac{2}{s^3 + 5s^2 + 7s + 3}$$

۱) تحقق کانونیکال کنترل کننده :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

۲) تحقق کانونیکال کنترل پذیری :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$$

ب) تحقق های کانونیکال رویتگیر و رویت پذیری تابع تبدیل زیر را بدست آورید.

$$g(s) = \frac{s^3 + 3s^2 + 17s + 8}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$g(s) = \frac{s^3+8s^2+17s+8}{s^3+6s^2+11s+6}$$

$$g(s) = 1 + \frac{2s^2+6s+2}{s^3+6s^2+11s+6}$$

۱) تحقق کانونیکال کنترلر:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + 1.u$$

۲) تحقق کانونیکال کنترلر پذیری:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 18 \\ 36 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + 1.u$$

(4-5) : حداقل دو تحقق برای ماتریس های تابع تبدیل زیر بدست آورید.

الف)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

(ب)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+s+3} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s^2+s+3)(s+1)} \begin{bmatrix} (s+1) \\ (s^2+s+3) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

(ب)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{25}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2(s+2)(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} 25^2(s+1)(s+4) \\ (s^2+2s+2)(s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{s^6+11s^5+45s^4+85s^3+74s^2+24s}\begin{bmatrix} 2s^4+10s^3+8s^2 \\ s^4+7s^3+18s^2+22s+12 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -74 & -85 & -45 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 10 & 2 & 0 \\ 12 & 22 & 18 & 7 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)(s+3)} & \frac{s^2+2s+2}{s(s+1)^2(s+4)} \end{bmatrix} \quad (=$$

$$\frac{1}{s(s+1)^2(s+3)(s+2)(s+4)}\begin{bmatrix} s(s+1)(s+4)(2s+3) & (s+2)(s+3)(s^2+2s+2) \end{bmatrix}$$

$$D(s) = s^6 + 11s^5 + 45s^4 + 85s^3 + 74s^2 + 24s$$

$$B_1(s) = 2s^4 + 13s^3 + 23s^2 + 12s$$

$$B_2(s) = s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 22s + 12$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -74 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 22 \\ 23 & 18 \\ 13 & 7 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(6-4) : یک تحقق می‌نیمال برای ماتریس‌های تابع تبدیل زیر بدست آورید .

الف

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{s}{s+1} & \frac{s+1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{D} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+3} \\ \frac{-1}{s+1} & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{bmatrix} s+3 & s+1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} -(s+2) & -s+1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array}\right] u$$

$$y = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u$$

(ب)

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2} & \frac{2s+1}{s^2} \\ \frac{s+3}{s^2} & \frac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & \frac{2s+1}{s^2} \\ \frac{s+3}{s^2} & \frac{2}{s} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 2s+1 \end{bmatrix} \\ \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s+3 & 2s \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] x + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{array}\right] u$$

$$Y=\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]x+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}u$$

(8-4) : چهار تحقق کانونیکال برای $\frac{1}{s^4}$ بدست آورید.

۱) فرم کانونیکال کنترل کننده :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x$$

۲) فرم کانونیکال رویتگر :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}x$$

۳) فرم کانونیکال جردن یا مودال :

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \quad , \quad y=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}x$$

۴) فرم کانونیکال کنترل پذیر:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

۵) فرم مدی - مواری:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

این تحقق کنترل پذیر و رویت پذیر است.

حل تمرین های فصل پایداری

(5-1) قطعیت علامت صورت های درجه دوم $V(x) = x^T \cdot A \cdot x$ که درآن ماتریس A بصورت های زیر داده شده است را تعیین کنید.

(الف)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \Delta_3 = |A| = 10$$

A مثبت نیمه معین است. [$\Delta_3 > 0$ و $\Delta_2 = 0$، $\Delta_1 \geq 0$]

(ب)

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad , \Delta_3 = |A| = 48$$

A مثبت معین است ($\Delta_3 > 0$ ، $\Delta_2 > 0$ ، $\Delta_1 > 0$).

(پ)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -12 \qquad , \Delta_3 = |A| = -30$$

A نامعین است.

(ت)

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8 \qquad , \Delta_3 = |A| = 0$$

A نامعین است.

(2-5): برای دستگاه زیر

$$V(x) = 6kx_1^2 + 2kx_1x_2 + 41x_2^2 + 12x_2x_3 + x_3^2$$

شان دهید که $V(x)$ برای همان بازه‌ای از k که $V(x)$ معین است منفی معین باشد.
معین شان دهید که سیستم ها پایدار مجانبی هستند.

(الف)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & -2 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -kx_1 - x_2 - 2x_3$$

$$\dot{V}(x) = 12kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 + 2kx_1 \cdot x_3 + 82x_2 \cdot x_3 + 12x_3^2$$
$$+ 12x_2(-kx_1 - x_2 - 2x_3) + 2x_3(-kx_1 - x_2 - 2x_3)$$

$$\dot{V}(x) = (2k-12)x_2^2 + 56x_2 \cdot x_3 + 8x_3^2$$

شرط پایداری مجانبی : $\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow 2k-12 < 0 \Rightarrow k < 6$

شرط پایداری مجانبی و مراتبی : $\dot{v}(x) \leq 0 \Rightarrow 2k - 12 \leq 0 \Rightarrow \boxed{k \leq 6}$

$$\dot{v}(x) = 0 \Rightarrow (2k-12)x_2^2 + 56 x_2 . x_3 + x_3^2 = 0$$

بنابراین $\dot{v}(x)$ دارای ریشه صفر است و به ازای $x_1 \neq 0$ و $x_2 = 0$ و $x_3 = 0$

$\dot{v}(x)$ به ازای (مسیرهایی) از سیستم رعایت زیر معادله $\dot{x}_3 = -kx_1 - x_2 - 2x_3$ تنها زمانی برقرار است که x_1 صفر باشد پس سیستم پایدار مجانبی مراتبی است.

(ب

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -5 & -6 \end{bmatrix} x$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -kx_1 - 5x_2 - 6x_3$$

$$\dot{v}(x) = 12kx_1 . x_2 + 2kx_2^2 + 2kx_1 . x_3 + 82x_2 . x_3 + 12x_3^2$$
$$+ 12x_2(-kx_1 - 5x_2 - 6x_3) + 2x_3(-kx_1 - 5x_2 - 6x_3)$$

$$\dot{v}(x) = (2k - 60)x_2^2$$

شرط پایداری مجانبی : $\dot{v}(x) < 0 \Rightarrow 2k - 60 < 0 \Rightarrow \boxed{k < 30}$

شرط پایداری مجانبی مراتبی : $\dot{v}(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{k \leq 30}$

$$\dot{v}(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\dot{V}(x)$ به ازای $x_1 \neq 0$ و $x_3 \neq 0$ و $x_2 = 0$ صفر می‌شود. لذا پایداری مجانبی $V(x)$ نیز مسیر بسته سیستم نیست زیرا معادله $\dot{x}_3 = -kx_1 - 5x_2 - 6x_3$ تنها زمانی برقرار است که x_1 صفر باشد.

(5-3) سیستم و تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -1 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$V(x) = 2kx_1^2 + 2kx_1 \cdot x_2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = -kx_1 - x_2$$

$$\dot{V}(x) = 4kx_1 \cdot \dot{x}_1 + 2k\dot{x}_1 \cdot x_2 + 2k\dot{x}_2 \cdot x_1 + 2x_2 \cdot \dot{x}_2 + 2x_3 \cdot \dot{x}_3$$

$$\dot{V}(x) = 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 + 2kx_1 \cdot x_3 + 2x_2 \cdot x_3 + 2x_3(-kx_1 - x_2)$$

$$\dot{V}(x) = 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2$$

پایداری مجانبی : $\dot{V}(x) < 0 \Rightarrow 4kx_1 \cdot x_2 + 2kx_2^2 < 0 \Rightarrow k < 0$

پایداری مجانبی غیرخطی : $\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow k \leq 0$

(6-5) : یک تابع لیاپانوف برای سیستم زیر پیدا کرده و پایداری آن را تعیین نمایید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x$$

$$A^T \cdot P + P \cdot A = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y = -1 \\ x - 4y + 2z = 0 \\ 2y - 6z = -1 \end{cases}$$

$$y = \frac{5}{16} \quad , \quad x = \frac{9}{8} \quad , \quad z = \frac{13}{48}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{9}{8} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{13}{48} \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \frac{9}{8} > 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} P \text{ مثبت معین است} \\ \text{پس سیستم پایدار مجانبی است.} \end{array}$$

حل مسائل فصل سیزدهم حالت

(6-14) یک هلیکوپتر در حال توقف در آسمان را می‌توان توسط معادلات زیر توصیف کرد:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.02 & -1.4 & 9.8 \\ -0.01 & -0.4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

الف) مقدار های حلقه باز را تعیین کنید.

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} s+0.02 & 1.4 & -9.8 \\ 0.01 & s+0.4 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} = 0$$

$$s^3 + 0.42s^2 + 0.02s + 0.09 = 0$$

$$s_1 = -0.65 \quad , \quad s_2 = 0.11 + 0.36j \quad , \quad s_3 = 0.11 - 0.36j$$

ب) قانون مدیریت حالت را برای جابجایی مقدار های $s = -2$ و $s = -1 \pm j$ بدست آورید.

مطلوب $\Delta(s)$: $(s+2)(s+1-j)(s+1+j)$

مطلوب $\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$

$$\det(sI - A + Bk) = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s+0.02 & 1.4 & -9.8 \\ 0.01 & s+0.4 & 0 \\ 0 & -1 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9.8 \\ 6.3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.06 & 0.47 & 1 \end{bmatrix}$$

(۶-8): سیستم‌های زیر را در نظر گرفته، با بکارگیری هر یک حالت و روش‌های ارائه شده برای تعیین بهره هر یک قطب‌های حلقه بسته را در مکان‌های مطلوب جایگزین نمایید:

(الف)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad \text{قطب‌های مطلوب: } \{-3, -2, -2\}$$

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ -2 & -1 & s+3 \end{bmatrix} = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

سیستم اصلی $\Delta(s)$: $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

مطلوب $\Delta(s) = (s+2)^2(s+3) \Rightarrow$ مطلوب $\Delta(s) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$

$\det(sI - A + BK)$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 0 \\ -1 & s+2 & 0 \\ -2 & -1 & s+3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.22 & -5.2 & 3.5 \end{bmatrix}$$

(ب)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad \text{قطب‌های مطلوب: } \{-1 \pm 2j, -6\}$$

سیستم اصلی $\Delta(s) = s^3 - 3s^2 + s + 2$

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+1+2j)(s+1-2j)(s+6)$

$\Delta(s)$ مطلوب $= s^3 + 8s^2 + 17s + 30$

$$K = [\beta - \alpha] = [(30-2) \quad (17-1) \quad (8+3)]$$

$$K = [28 \quad 16 \quad 11]$$

(ب) مقادیر مطلوب: $\{-1, \pm j\}$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

$$\det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -2 \\ -1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} = \Delta(s)$$ سیستم اصلی

$\Delta(s)$ سیستم اصلی $= s^3 + 2s^2 - s + 6$

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+1)(s-j)(s+j) = s^3 + s^2 + s + 1$

$$\det(sI - A + BK)$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+2 & -1 & -2 \\ -1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1.2 & 0.6 \\ 0 & -1.6 & 0.8 \end{bmatrix}$$

(ج):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \qquad \text{مقادیر مطلوب} = \{ \pm j, -2 \}$$

معادله مشخصه $\Delta(s) = \det(sI - A) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix}$

معادله مشخصه $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 - 3s - 6$

مطلوب $\Delta(s) = (s+j)(s-j)(s+2) = s^3 + 2s^2 + s + 2$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$\det \left\{ \begin{bmatrix} s+2 & -1 & 0 \\ 1 & s+2 & -2 \\ 2 & 0 & s-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ K_4 & K_5 & K_6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad K = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9-6 : معادلات فضای حالت سیستم

عبارتند از :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

الف) معادلات حالت و خروجی این سیستم را به فرم کانونی کنترل کننده تبدیل کنید.

معادله مشخصه $\Delta(s) = |(sI - A)| = 0$

$$\det \begin{bmatrix} s+4 & 4 & 2 \\ -1 & s & -1 \\ -6 & -9 & s-2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underset{\text{معادله}}{\Delta(s)} = s^3 + 2s^2 - s - 2$$

$$T = \Phi_c \cdot W$$

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{B} = T^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

ب) بهره ضد یک حالت K را چنان تعیین کنید تا قطب ناپایدار سیستم به -3 انتقال داده و سایر قطب‌ها را تغییر ندهد.

قطب‌های سیستم : $S_1 = 1$ ، $S_2 = -1$ و $S_3 = -2$

قطب ناپایدار

مطلوب $\Delta(s) = (s+1)(s+2)(s+3) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$

$$\det(sI - A + BK) = 0$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s+4 & 4 & 2 \\ -1 & s & -1 \\ -6 & -9 & s-2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$K = \begin{bmatrix} 20 & 28 & 12 \end{bmatrix}$$

حل مسائل فصل طراحی جبران کننده

(7-1) معادلات حالت و خروجی سیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = [\alpha \quad 1]\, x$$

الف) به ازای چه مقادیری از α می‌توان یک رویتگر برای این سیستم طراحی کرد.

برای طراحی یک رویتگر شرط لازم و کافی این است که سیستم رویت‌پذیر باشد.

پس برای مقادیری از α که سیستم را رویت‌ناپذیر می‌کند نمی‌توان رویتگر طراحی نمود.

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ \alpha+2 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\det(\Phi_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 - \alpha - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = -1 \, , \, 2}$$

ب) برای $\alpha = 0$ یک بردار رویتگر L چنان پیدا کنید که خطای تخمین با مقادیر ویژه -1 و -2 به سمت صفر میل کند.

$$\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = [0 \quad 1]\, x$$

معادله مشخصه سیستم اصلی $\Delta(s) = |sI - A| = \det \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 - s - 2$

مطلوب $\Delta(s) = (s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2$

$$\det(sI - A + LC)$$

$$\det\left\{ \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ -2 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} [0 \quad 1] \right\} = (s-1)(s+L_2) - (2+2L_1) = 0$$

$$s^2 + (L_2 - 1)s + (-L_2 + 2L_1 - 2) = 0$$

$$L_2 - 1 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_2 = 4} \qquad -L_2 + 2L_1 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_1 = 4}$$

(2-7): برای سیستم زیر:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

یک رویتگر با مقادیر ویژه در -6 و -5 طراحی کنید.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow Rank(\Phi_o) = Full = 2$$

سیستم رویت پذیر کامل حالت است

پس می توان رویتگر طراحی نمود.

معادله مشخصه سیستم اصلی $\Delta(s) = |sI - A| = 0 \Rightarrow \Delta(s) = s^2 - 4$

مطلوب $\Delta(s) = (s+6)(s+5) = s^2 + 11s + 30$

$$det(sI - A + LC) = 0$$

$$det\left\{ \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow s^2 + L_1 s + L_2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_1 = 11 \\ L_2 = 34 \end{cases}$$

اگر بجای معادله خروجی بالا معادله زیر را داشتیم:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \end{bmatrix} x$$

برای چه مقادیری از α می توانیم رویتگری برای سیستم طراحی کنیم.

$$\Phi_o = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 4\alpha & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det(\Phi_o) = 1 - 4\alpha^2$$

برای اینکه بتوانیم رویتگر طراحی کنیم سیستم باید رویت پذیر باشد و برای اینکه رویت پذیر باشد باید $det(\Phi_o) \neq 0$ شود.

$$1 - 4\alpha^2 \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \pm 1/2$$

بنابراین به ازای هر مقداری از α غیر از $\pm 1/2$ سیستم رویت پذیر است و می توان برای آن رویتگر طراحی نمود.

(3-7) : سیستم توصیف شده با معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} x$$

یک رویتگر طراحی کنید که خطای تخمین را حداقل با سرعت e^{-10t} به سمت صفر میل کند.

چون می‌خواهیم حداقل سرعت تخمین e^{-10t} باشد لذا استفاده‌های مطلوب برای رویتگر را $s=-10$ و $s=-12$ در نظر می‌گیریم.

$\Delta(s)$ مطلوب $= (s+10)(s+12) = s^2 + 22s + 120$

$$\det(sI - A + LC)$$

$$= \det\left\{ \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= s^3 + (2L_1 - 1 - L_2)s + 2L_1 L_2$$

$$L_2 = \begin{cases} -15 \\ -8 \end{cases} \quad , \quad L_1 = \begin{cases} -19 \\ -15.5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -15 \end{bmatrix} \quad OR \quad \begin{bmatrix} -15.5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(8-7) : سیستم داده شده با معادلات حالت و خروجی زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad , \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

مطلوب $\Delta(s) = \det(sI - A)$

$$= \det\begin{bmatrix} s+1 & 2 & 2 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix} = s^3 + 3s^2 + s - 3 = \Delta(s)$$ مطلوب

مطلوب $\Delta(s) = (s+2)^2(s+3) = s^3 + 7s^2 + 16s + 12$

$$\det[sI - A + LC] =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} s+1 & 2 & 2 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 0 & s+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$