

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴

$$ax + 3 = 0 \Rightarrow ax = -3 \Rightarrow x = \frac{-3}{a} \xrightarrow{a > 0} x = -\frac{3}{a} < 0$$

$$2x - b = 0 \Rightarrow 2x = b \Rightarrow x = \frac{b}{2} \xrightarrow{b > 0} x = \frac{b}{2} > 0$$

با رسم جدول تعیین علامت داریم:

	$-\frac{3}{a}$		$\frac{b}{2}$	
$ax + 3$	-	○	+	+
$2x - b$	-	-	○	+
$\frac{ax + 3}{2x - b}$	+	○	-	+

باتوجه به جدول بالا مقدار عبارت مورد نظر تنها در بازه $-\frac{3}{a} < x < \frac{b}{2}$ کم تر از صفر است، پس داریم:

$$\begin{cases} -\frac{3}{a} < x < \frac{b}{2} \\ \frac{-3}{a} = \frac{-1}{3} \Rightarrow a = 9 \\ \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases} \Rightarrow ab = 36$$

۲ - گزینه ۲

$$||x| + 3| \leq 2 \rightarrow -2 \leq |x| + 3 \leq 2 \xrightarrow{-3} -5 \leq |x| \leq -1$$

از آنجایی که $|x|$ هرگز منفی نمی شود، معادله بالا جواب ندارد.

۳ - گزینه ۲

$$\frac{1}{2x^2 + x + 1} < \frac{1}{x^2 + 1}$$

عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است؛ چون در آن عدد ۱ با یک عبارت نامنفی جمع شده است.در عبارت $2x^2 + x + 1$ هم $a > 0$ و $\Delta < 0$ است؛ پس همواره نامنفی است. پس می توانیم طرفین نامعادله را معکوس کنیم و جهت نامساوی را تغییر دهیم:

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} 2x^2 + x + 1 > x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x+1) > 0 \Rightarrow \text{ریشه ها: } \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

x	-1	0
$x(x+1)$	+	-

$$\text{مجموعه جواب} = R - [-1, 0] \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 0 - (-1) = 1$$

۴ - گزینه ۳

میدانیم:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{سه می به معادله } y = ax^2 + bx + c \text{ همواره مثبت است هرگاه}$$

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{سه می به معادله } y = ax^2 + bx + c \text{ همواره منفی است هرگاه}$$

$$\begin{cases} a - 1 > 0 \Rightarrow a > 1 \\ \Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(a-1)(a) < 0 \Rightarrow 8 + 4a - 4a^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 > 0 \Rightarrow (a-2)(a+1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$

a	-1	2
$a - 2$	-	○
$a + 1$	-	○
$(a-2)(a+1)$	+	-

$$\Rightarrow a \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \quad (II)$$

$$I \cap II : a > 2$$

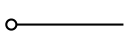
می‌دانیم: عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره پایین محور x است (منفی است) هرگاه: $\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

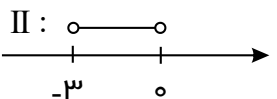
$$-3mx^2 + 2mx + 1 < 0$$

$$\begin{cases} a < 0 \Rightarrow -3m < 0 \Rightarrow m > 0 & (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2m)^2 - 4(-3m)(1) < 0 \Rightarrow 4m^2 + 12m < 0 \Rightarrow m(4m + 12) < 0 \\ \Rightarrow m(4m + 12) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 4m + 12 = 0 \Rightarrow 4m = -12 \Rightarrow m = -3 \end{cases} \end{cases}$$

	-3	0		
$4m^2 + 12m$	+	0	-	0
			+	

$$\Rightarrow -3 < m < 0 \quad (II)$$

I : 

II : 

$$\Rightarrow I \cap II = \emptyset$$

$$\frac{(-x^2 + x - 1)|x + 2|}{x^2 + 2x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-1) = -3 < 0 \Rightarrow \text{همواره منفی} \\ |x + 2| : x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ همواره مثبت} \\ x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \end{cases}$$

	-2	0		
$-x^2 + x - 1$	-	-	-	-
$ x + 2 $	+	0	+	+
$x^2 + 2x$	+	0	-	0
			+	

$$\Rightarrow -2 < x < 0$$

$\frac{(-x^2 + x - 1) x + 2 }{x^2 + 2x}$	-	+	+	-
	-	+	-	-

۷ - گزینه ۱. با توجه به جدول می‌بینیم که در $x = a$, $y = 0$ می‌شود. پس داریم:

$$(2a + b)a - 6a - 3b = 0 \Rightarrow (2a + b)a = 6a + 3b$$

$$\Rightarrow a(2a + b) = 3(2a + b) \xrightarrow{\div (2a+b)} a = 3$$

از طرفی ضریب x باید مثبت باشد تا جدول فوق را تشکیل دهد، بنابراین:

$$2a + b > 0 \Rightarrow 6 + b > 0 \Rightarrow b > -6$$

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{x-3}{(x-1)(x-3)} - \frac{(x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} > 0$$

x	1	3	
$(x-1)(x-3)$	+	-	0
			+

$$\Rightarrow x < 1 \cup x > 3$$

$\frac{-2}{(x-1)(x-3)}$	-	+	+
	-	+	-

$$\frac{x-1}{x+1} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{x+1} < 0$$

$$2x^2+x+1=0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7 \Rightarrow \Delta < 0$$

X	-1	
$2x^2+x+1$	+	+
$x+1$	-	+
$\frac{2x^2+x+1}{x+1}$	-	+

$\Rightarrow x < -1$

۱۰ - گزینه ۲ باید نامعادله $2x^2 - ax + 2 > x + 1$ را حل کنیم:

$$2x^2 - ax - x + 1 > 0 \Rightarrow 2x^2 - x(a+1) + 1 > 0$$

عبارت درجه ۲ فوق زمانی همواره مثبت است که $\Delta < 0$ باشد و ضریب x^2 در آن مثبت باشد (که هست) بنابراین فقط $\Delta < 0$ را اعمال می‌کنیم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-(a+1))^2 - 4 \times 2 \times 1 < 0 \Rightarrow (a+1)^2 - 8 < 0 \Rightarrow (a+1)^2 < 8 \Rightarrow \sqrt{8} > a+1$$

$$|a+1| < \sqrt{8} \Rightarrow |a+1| < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} < a+1 < 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2}-1 < a < 2\sqrt{2}-1$$

۱۱ - گزینه ۲

$$(x+2)^2 = 0 \rightarrow x+2=0 \rightarrow x=-2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$$

$$(-x^2+x)^2 = 0 \rightarrow -x^2+x=0 \rightarrow x(-x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

ریشه‌های مخرج

X	-2	0	1	2
$(x+2)^2$	+	+	+	+
x^2-3x+2	+	+	+	+
$(-x^2+x)^2$	-	-	+	-
$P(x)$	-	-	+	-

$$\text{مجموعه جواب} = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{-2\}$$

۱۲ - گزینه ۲

$$|x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a, \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

می‌دانیم:

$$\left| \frac{3x-1}{2} - 1 \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{3x-1}{2} - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 3$$

$$\Rightarrow -2 \leq 3x-1 \leq 6 \Rightarrow -1 \leq 3x \leq 7 \Rightarrow \frac{-1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}$$

اعداد طبیعی این بازه برابرند با $\{1, 2\}$ بنابراین مجموعه جواب شامل ۲ عدد طبیعی است.

۱۳ - گزینه ۱

$$|x-2| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} x-2 \geq 3 \Rightarrow x \geq 5 \\ \text{یا} \\ x-2 \leq -3 \Rightarrow x \leq -1 \end{cases}$$

$$|x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a, \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

می‌دانیم:

X	-1	5
ax^2+bx+c	+	-

با توجه به حدود به دست آمده، جدول تعیین علامت زیر خواهد بود:

با توجه به جدول، $x = -1$ و $x = 5$ دو ریشه معادله هستند بنابراین معادله به صورت $(x-5)(x+1) = 0$ است. بنابراین:

$$(x-5)(x+1) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow a+b = -9$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\text{جواب معادله درجه دوم } ax^2 + bx + c = 0 \text{ از رابطه } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ بدست می‌آید.}$$

می‌دانیم:

$$2x^2 - 5x < 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 < 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ x = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

x	$-\frac{1}{2}$	3
$2x^2 - 5x - 3$	$+\circ - \circ +$	

$$\Rightarrow x\left(\frac{-1}{2}, 3\right)$$

۱۵ - گزینه ۳

$$\left| \frac{|x-1|}{3} + 1 \right| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq \frac{|x-1|}{3} + 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq \frac{|x-1|}{3} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq |x-1| \leq 3 \Rightarrow |x-1| \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \Rightarrow x \in [-2, 4]$$

$$|u| \geq a \xrightarrow{a>0} \begin{cases} u \geq a \\ u \leq -a \end{cases} \quad \text{۱۶ - گزینه ۲ می‌دانیم:}$$

$$\left| \frac{3x-3-4x-2}{6} \right| \geq \frac{1}{3} \Rightarrow \left| \frac{-x-5}{6} \right| \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-x-5}{6} \geq \frac{1}{3} \xrightarrow{\times 6} -x-5 \geq 2 \Rightarrow -x \geq 7 \Rightarrow x \leq -7 \\ \text{یا} \\ \frac{-x-5}{6} \leq -\frac{1}{3} \xrightarrow{\times 6} -x-5 \leq -2 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3 \end{cases}$$

۱۷ - گزینه ۳ ابتدا ریشه را بدست می‌آوریم.

$$(a-1)x+1=0 \Rightarrow (a-1)x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{a-1}$$

جدول تعیین علامت:

x	$-\frac{1}{a-1}$
$(a-1)x+1$	مخالف علامت a-1
	موافق علامت a-1

اگر $a=1$ باشد عبارت همواره برابر با یک می‌شود و منفی نمی‌شود.اگر $a-1$ عدد حقیقی باشد، آنگاه عبارت در یک بازه منفی و در یک بازه مثبت می‌شود که شرط همواره منفی رعایت نمی‌شود.

۱۸ - گزینه ۴

$$x^2 - 2004 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 2004 \Rightarrow -\sqrt{2004} \leq x \leq \sqrt{2004}$$

۱۹ - گزینه ۱

$$(x^2 + \sqrt{2}x + 2)(x^2 - 4) = 0$$

ابتدا ریشه‌ها را بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \end{cases} \\ x^2 + \sqrt{2}x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 2 - 8 = -6 \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

x	-2	2
$x^2 + \sqrt{2}x + 2$	+	+
$x^2 - 4$	+	-
کل	+	-

$$\rightarrow x \in [-2, 2]$$

۲۰ - گزینه ۱

$$-1 \leq 3x-2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq 3x \leq 3 \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

۲۱ - گزینه ۱

$$3 - \frac{x}{2} > 1 \Rightarrow 2 > \frac{x}{2} \Rightarrow x < 4$$

فقط دو عدد اول ۲ و ۳ از ۴ کوچکترند.

۲۲ - گزینه ۳

$$3x - 3 < 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 < 2x - 2 \Rightarrow x < 1 \\ 2x - 2 < x - 1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$

۲۳ - گزینه ۱

$$2x^2 - x - 1 < 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+3}{4} = 1 \\ x = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

x	-1/2	1
2x ² -x-1	+ o -	+ o +

$$\Rightarrow \left. \begin{matrix} \text{مجموعه جواب} \\ \text{فرض} \end{matrix} \right\} = \left(-\frac{1}{2}, 1 \right) \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ - ۲۴

$$\begin{cases} A + 3B > 18 \\ 3A + B < 12 \end{cases} \xrightarrow{\times(-3)} \begin{cases} A + 3B > 18 \\ -9A - 3B > -36 \end{cases} \xrightarrow{+(-A)} -8A > -18 \xrightarrow{\div(-8)} A < \frac{18}{8} \Rightarrow A < \frac{9}{4}$$

۲۵ - گزینه ۲

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow |x| \leq 0 \Rightarrow -a \leq x \leq a}$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{x-1}{2} - 1 \leq 3$$

$$\xrightarrow{+1} -2 \leq \frac{x-1}{2} \leq 4 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x-1 \leq 8 \xrightarrow{+1} -3 \leq x \leq 9$$

حال $3 + 2x$ را روی این نامساوی‌ها می‌سازیم:

$$\xrightarrow{\times(-2)} 6 \geq -2x \geq -18 \xrightarrow{+3} 9 \geq -2x + 3 \geq -15 \xrightarrow{\text{مرتب می‌کنیم}} -15 \leq -2x + 3 \leq 9$$

پس از مقایسه با $A \leq -2x + 3 \leq B$ در می‌یابیم که:

$$\begin{cases} A = -15 \\ B = 9 \end{cases} \rightarrow A + B = -15 + 9 = -6$$

۲۶ - گزینه ۱

عبارت درجه دوم $P(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $a > 0$, $\Delta < 0$ همواره مثبت است.عبارت $x^2 + x + 1$ همواره مثبت است؛ چون در این عبارت $\Delta < 0$ و $a > 0$ است؛ پس می‌توان مخرج‌ها را نادیده گرفت، بدون آنکه جهت نامعادله عوض شود:

$$|3x - 2| \leq 5 \xrightarrow{+2} -5 \leq 3x - 2 \leq 5 \xrightarrow{+2} -3 \leq 3x \leq 7$$

$$\xrightarrow{\div 3} -1 \leq x \leq \frac{7}{3} \rightarrow x \in \left[-1, \frac{7}{3} \right]$$

۲۷ - گزینه ۱ مخرج کسر یعنی $|x| + 1$ به ازای همه مقادیر x مثبت است؛ پس:

$$1 - 2x < 0 \rightarrow -2x < -1 \rightarrow x > \frac{1}{2} \rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty \right)$$

۲۸ - گزینه ۴

$$\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{4-2x}{x^2} \geq 2 \Rightarrow \frac{4-2x}{x^2} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{-2x^2 - 2x + 4}{x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4 = 0 \xrightarrow{-2} x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

x	-2	0	1
-2x ² -2x+4	- o +	+ o +	+ o -
x ²	+	+	+
-2x ² -2x+4	- o +	+ o +	+ o -
x ²	+	+	+

شامل ۳ عدد صحیح است. $\{-2, 1\} - \{0\}$ مجموعه جواب $\Rightarrow$

$$|x| > a \Rightarrow x > a \vee x < -a, \quad |x| < a \Rightarrow -a < x < a$$

می‌دانیم:

$$||x| - 2| < 3 \Rightarrow -3 < |x| - 2 < 3$$

$$I = |x| - 2 < 3 \Rightarrow |x| < 5 \Rightarrow -5 < x < 5$$

$$II: -3 < |x| - 2 \Rightarrow |x| > -1 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$I \cap II: -5 < x < 5: \quad x \in \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \rightarrow 9 \text{ عدد صحیح}$$

$$h > 10 \Rightarrow -t^2 + 3t + 10 > 10 \Rightarrow -t^2 + 3t > 0 \Rightarrow t(-t + 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 0 & 3 \\ \hline -t+3 & - & + \\ t & + & - \end{array} \Rightarrow 0 < t < 3 \Rightarrow t \in (0, 3) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow b - a = 3$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۶ - ۱	۱۱ - ۲	۱۶ - ۲	۲۱ - ۱	۲۶ - ۱
۲ - ۲	۷ - ۱	۱۲ - ۲	۱۷ - ۳	۲۲ - ۳	۲۷ - ۱
۳ - ۲	۸ - ۳	۱۳ - ۱	۱۸ - ۴	۲۳ - ۱	۲۸ - ۴
۴ - ۳	۹ - ۱	۱۴ - ۴	۱۹ - ۱	۲۴ - ۳	۲۹ - ۲
۵ - ۴	۱۰ - ۲	۱۵ - ۳	۲۰ - ۱	۲۵ - ۲	۳۰ - ۲