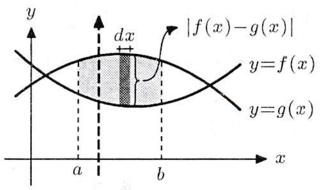
۶-۴ کاربردهای انتگرال معین

الف) مساحت

مساحت ناحیه محدود بین نمودار دو تابع پیوسته $y = f(x)$ و $y = g(x)$ که بین دو خط $x = a$ و $x = b$ قرار دارد، عبارت است از $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ و خصوصاً مساحت ناحیه محدود توسط نمودار f و محور x ها در فاصله $a \le x \le b$ برابر $\int_a^b |f(x)|dx$ است.



تذکر ۲۹. فرمول بالا بیان می‌کند، که برای محاسبه مساحت محدود شده توسط دو نمودار باید از اختلاف عرضهای آنها، انتگرال بگیریم. توجه کنید که فقط وقتی می‌توانیم از این فرمول کمک بگیریم که هر خط موازی محور عرضها از یکی از دو نمودار وارد ناحیه و از دیگری از ناحیه خارج گردد. در واقع مرز بالا و پایینی ناحیه، نمودارهای f و g باشند.

تذکر ۳۰. در این فرمول می‌توانید نقش x و y را تغییر دهید. در واقع اگر توضیحات بالا برای خطوط موازی محور x برقرار باشد، فرمول به صورت زیر قابل استفاده است.

$$\text{مساحت} = \int_{\text{حدود } y} \left|x_{\text{in}} - x_{\text{out}}\right| dy$$

که x_{in} و x_{out} معادله ورود و خروج (خطوط موازی محور x ها) به ناحیه است.

مثال ۴۵. مساحت ناحیه محدود توسط سهمی $x = y^۲ - ۱۲$ و خط $y = x$ را محاسبه کنید.

نقاط برخورد را برای تشخیص حدود انتگرال محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y = x \\ x = y^۲ - ۱۲ \end{cases} \implies y^۲ - y - ۱۲ = ۰ \implies y = -۳, ۴$$

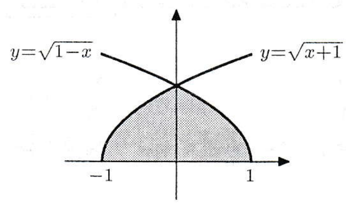
نوشتن انتگرال برحسب y ساده‌تر است.

$$\text{مساحت} = \int_{-۳}^{۴} \left|y^۲ - ۱۲ - y\right| dy = \int_{-۳}^{۴} (y - y^۲ + ۱۲)dy = \left(\frac{y^۲}{۲} - \frac{y^۳}{۳} + ۱۲y\right)\Big|_{-۳}^{۴} = \frac{۳۴۳}{۶}$$

مثال ۴۶

مساحت ناحیه محدود به نمودارهای $y = \sqrt{۱ - x}$ و $y = \sqrt{x + ۱}$ و محور x ها کدام است؟

روش اول. نقطه برخورد دو منحنی از تقاطع آنها به صورت $\sqrt{۱ + x} = \sqrt{۱ - x}$ برابر $x = ۰$ است. اما با توجه به نمودار خطوط موازی محور عرضها همواره از محور x وارد و در محدوده $۰ \le x \le ۱$ از $y = \sqrt{۱ - x}$ و در محدوده $-۱ \le x \le ۰$ از $y = \sqrt{۱ + x}$ خارج می‌شوند و لذا نمی‌توانیم عرض دو نمودار را از هم کم کنیم. در واقع باید مساحت محدود توسط هر نمودار با محور x و y را محاسبه و حاصل را با هم جمع نماییم. با توجه به اینکه با تبدیل $x \to -x$ توابع داده شده به هم تبدیل می‌شوند ناحیه نسبت به خط $x = ۰$ متقارن است و لذا کافی است، مساحت نیمه سمت راست را در ۲ ضرب نماییم.



$$\text{مساحت} = ۲\int_{۰}^{۱} \sqrt{۱-x}\,dx = -\frac{۴}{۳}(۱-x)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۴}{۳}$$

روش دوم. توجه کنید که خطوط موازی محور x ها در فاصله $۰ \le y \le ۱$ از $y = \sqrt{۱+x}$ یا $x = y^۲ - ۱$ به ناحیه وارد و از روی نمودار $y = \sqrt{۱-x}$ یا $x = ۱ - y^۲$ خارج می‌گردد، پس می‌توانیم مانند مثال قبل از اختلاف x ها یعنی $|y^۲ - ۱ - (۱ - y^۲)| = ۲(۱ - y^۲)$ روی فاصله $[۰, ۱]$ انتگرال بگیریم که همان جواب را خواهد داد.

تست ۹۵ سطح محدود به منحنی تابع $y = \frac{۱}{x^۲ - x}$ و محور x ها و دو خط $x = ۲$ و $x = ۴$ کدام است؟

(آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $\ln\frac{۲}{۳}$ ۲) $\ln\frac{۳}{۴}$ ۳) $\ln\frac{۳}{۲}$ ۴) $\ln\frac{۴}{۳}$

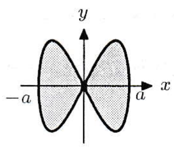
حل: گزینه ۳ درست است. چون برای $۲ < x < ۴$ داریم $y > ۰$ پس:

$$\text{مساحت} = \int_{۲}^{۴} \frac{dx}{x^۲ - x} = \int_{۲}^{۴}\left(\frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x}\right)dx = \ln\frac{x-۱}{x}\Big|_{۲}^{۴} = \ln\frac{۳}{۴} - \ln\frac{۱}{۲} = \ln\frac{۳}{۲}$$

تست ۹۶ سطح محصور به وسیله $y^۲ = ۴x^۲ - x^۴$ چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۱۶}{۳}$ ۳) $\frac{۳۲}{۳}$ ۴) ۵

حل: گزینه ۳ درست است. در حالت کلی برای $a > ۰$ سطح محصور به وسیله $y^۲ = a^۲x^۲ - x^۴$ را محاسبه می‌کنیم. چون در سؤال فقط یک نمودار مشخص شده، پس احتمالاً این نمودار خودش را قطع می‌کند. توجه کنید که $y^۲ = x^۲(a^۲ - x^۲)$ و لذا نمودار در فاصله $-a \le x \le a$ رسم می‌شود. این نمودار محور x ها را در نقاط $x = ۰, \pm a$ قطع می‌کند و چون با تبدیل $y \to -y$ ضابطه آن عوض نمی‌شود، نسبت به محور x ها متقارن است. یعنی کافی‌است مساحت محدود در بالای محور x را محاسبه و حاصل را در دو ضرب نماییم. از طرفی با تبدیل $x \to -x$ نیز ضابطه تغییر نمی‌کند، پس مساحت محدود توسط $y = \sqrt{a^۲x^۲ - x^۴}$ در ربع اول یعنی برای $۰ \le x \le a$ را محاسبه و حاصل را در ۴ ضرب می‌کنیم.



$$\text{مساحت} = ۴\int_{۰}^{a} \sqrt{a^۲x^۲ - x^۴}\,dx = ۴\int_{۰}^{a} x\sqrt{a^۲ - x^۲}\,dx = -\frac{۴}{۳}(a^۲ - x^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{۰}^{a} = \frac{۴}{۳}a^۳$$

به ازای $a = ۲$ پاسخ این تست $\frac{۳۲}{۳}$ است.

تست ۹۷ مساحت ناحیه محدود به نمودار دو تابع $y = |x|$ و $x = ۲ - y^۲$ کدام است؟

(ژئوفیزیک و سیستم ۸۱)

۱) $\frac{۱۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱۳}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱۳}{۴}$

حل: گزینه ۲ درست است. نقطه برخورد دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$y = |x| \implies x = ۲ - x^۲ \implies x^۲ + x - ۲ = ۰ \implies x = ۱, -۲$$

$$\text{مساحت} = \int_{-۲}^{۱}\left(\sqrt{۲-x} - |x|\right)dx = \int_{-۲}^{۰}\left(\sqrt{۲-x} + x\right)dx + \int_{۰}^{۱}\left(\sqrt{۲-x} - x\right)dx$$

$$\Longrightarrow \text{مساحت} = \left(-\frac{۲}{۳}(۲-x)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{x^۲}{۲}\right)\Big|_{-۲}^{۰} + \left(-\frac{۲}{۳}(۲-x)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{x^۲}{۲}\right)\Big|_{۰}^{۱}$$

$$= \left(-\frac{۴}{۳}\sqrt{۲} + \frac{۱۶}{۳} - ۲\right) + \left(-\frac{۲}{۳} - \frac{۱}{۲} + \frac{۴}{۳}\sqrt{۲}\right) = \frac{۱۳}{۶}$$

$\boxed{\text{تست ۹۸}}$ مساحت محدود به منحنی $y^۲ = ۲x + ۱$ و خط $x - y - ۱ = ۰$ کدام است؟ (هوا فضا۸۲)

۱) $۷\frac{۱}{۳}$ ۲) $۵\frac{۱}{۳}$ ۳) $۴\frac{۱}{۳}$ ۴) $۲\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. نقاط برخورد را به دست می‌آوریم.

$$y^۲ = ۲x + ۱ = ۲(y+۱) + ۱ \Longrightarrow y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Longrightarrow y = -۱, ۳$$

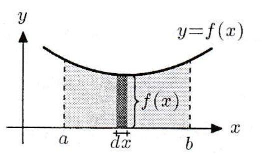
$$\text{مساحت} = \int_{-۱}^{۳} \left|\frac{y^۲ - ۱}{۲} - (y+۱)\right| dy = \int_{-۱}^{۳} \left(y + \frac{۳}{۲} - \frac{y^۲}{۲}\right) dy = \left(\frac{y^۲}{۲} + \frac{۳}{۲}y - \frac{y^۳}{۶}\right)\Big|_{-۱}^{۳} = \frac{۱۶}{۳} = ۵\frac{۱}{۳}$$

ب) حجم

۱) جسمی قائم در فضای سه بعدی طوری قرار دارد که هر صفحه عمود بر محور x ها جسم را در ناحیه‌ای (مقطع عرضی) به مساحت $A(x)$ قطع می‌کند. اگر در قاعده جسم داشته باشیم $a \leq x \leq b$، حجم جسم از رابطه $\int_a^b A(x)dx$ به‌دست می‌آید.

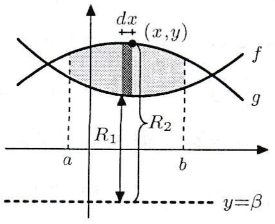
۲) (روش دیسک) اگر ناحیه محدود بین نمودار تابع پیوسته $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها دوران کند، حجم جسم حاصل برابر است با $\pi \int_a^b f^۲(x)dx$.
دقت کنید که در این حالت نباید محور دوران از داخل شکل عبور کند.

تذکر ۳۱. توجه کنید که وقتی المان مشخص شده به ضخامت dx در شکل، حول محور x دوران می‌کند، یک استوانه توپر به ارتفاع dx و شعاع قاعده $|f(x)|$ پدید می‌آید که دارای حجم $dV = \pi f^۲(x)\, dx$ است که با انتگرال‌گیری از آن بر بازه $[a,b]$ حجم کل جسم به‌دست می‌آید. بنابراین فرمول روش دیسک را به صورت زیر بیان می‌کنیم.



$$\text{حجم} = \pi \int_a^b (\text{شعاع دوران})^۲\, dx$$

نکته ۲۷. اگر ناحیه محدود بین دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ (که یکی سقف و دیگری کف ناحیه است.) حول خط $y = \beta$ دوران‌کند ، حجم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می‌آید.



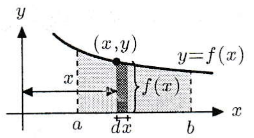
$$\text{حجم} = \pi \int_a^b (R_۲^۲ - R_۱^۲)\, dx$$

$$= \pi \int_a^b \left|\left(g(x) - \beta\right)^۲ - \left(f(x) - \beta\right)^۲\right| dx$$

توجه کنید که در این فرمول دو حجم از یکدیگر کم شده‌اند.

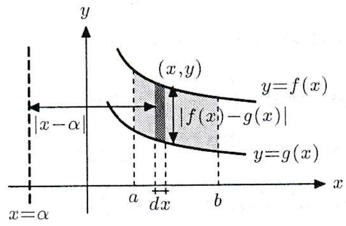
۳) (روش پوسته استوانه‌ای) اگر ناحیه محدود بین نمودار تابع پیوسته $f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ حول محور y ها دوران کند، حجم جسم حاصل برابر $2\pi \int_a^b |x||f(x)|dx$ است.
توجه کنید که محور دوران نباید از داخل شکل عبور کند و لذا a, b هم علامت هستند.

تذکر۳۲. وقتی المان مشخص شده در شکل که دارای فاصله $|x|$ از محور دوران و ارتفاع $|f(x)|$ است، حول محور y دوران می‌کند، یک پوسته استوانه به شعاع داخلی $|x|$ و شعاع خارجی $|x| + dx$ و ارتفاع $|f(x)|$ پدید می‌آید که دارای حجم $dV = 2\pi|x||f(x)|\, dx$ است. بنابراین فرمول این روش را به صورت زیر می‌توان بیان نمود.



$$\text{حجم} = 2\pi \int_a^b (\text{شعاع دوران}) \times (\text{ارتفاع}) \, dx$$

نکته ۲۸. اگر ناحیه محدود بین دو نمودار f و g و در فاصله $[a, b]$ (که یکی از نمودارها سقف و دیگری کف ناحیه است.) حول خط $x = \alpha$ دوران کند، شعاع دوران $|x - \alpha|$ و ارتفاع برابر $|f(x) - g(x)|$ و حجم برابر $2\pi \int_a^b |x - \alpha| \, |f(x) - g(x)|dx$ خواهد بود.



تذکر۳۳. در موارد بالا، المان را عمود بر محور x ها انتخاب کرده‌ایم، اما اگر المان عمود بر محور y باشد، کلیت فرمولهای بالا حفظ می‌شود ولی در واقع نقش x و y عوض می‌شود.

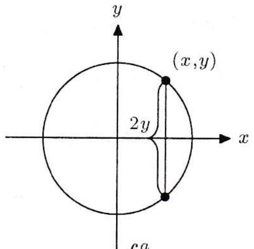
تذکر۳۴. در مواردی که فرمولهای حجم حاصل از دوران بیان شد، توصیه می‌شود به جای حفظ کردن فرمولهای حالت خاص، فرمولهای اشاره شده در تذکر ۳۱ و ۳۲ که بر اساس شعاع و محور دوران بیان شده‌اند را به خاطر بسپارید و در هر مسأله شعاع و ارتفاع دوران را مشخص کنید.

در کلیه مسائل دوران، محور دوران نباید از داخل شکل عبور کند. در حالتی‌که محور دوران از داخل شکل عبور کند، باید با رسم شکل و توجه به هندسه مسأله مقدار حجم را محاسبه نمود. در این مسائل استفاده مستقیم از فرمولهای بالا ممکن است نادرست باشد. اما در حالت خاصی که محور دوران محور تقارن شکل باشد، ناحیه توسط محور دوران به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود. حال اگر هر یک از دو نیمه شکل که در یک سمت محور دوران قرار دارد را دوران دهیم، جسم یکسانی را ایجاد می‌کنند و به عبارتی جسم مورد نظر دوبار ساخته می‌شود. بنابراین کافی است فقط نیمه‌ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را دوران داده و نباید پاسخ نهایی را در ۲ ضرب نماییم. به طور خلاصه:

نکته ۲۹. اگر محور دوران (در روش دیسک یا پوسته استوانه‌ای) محور تقارن ناحیه باشد، کافی است حجم حاصل از دوران نیمه‌ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را محاسبه کرده و نباید پاسخ نهایی را در ۲ ضرب نماییم.

مثال ۴۷. حجم جسمی قائم را بیابید که قاعده آن ناحیه محدود توسط دایره $x^۲ + y^۲ = a^۲$ و مقطع هر صفحه عمود بر محور x ها (موازی صفحه yz) با آن یک مربع باشد.($a > ۰$)

چون مقطع عرضی در این سؤال توصیف شده است، با توجه به هندسه مسأله باید مساحت مقطع را مشخص کنیم.

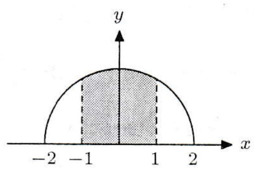


صفحه عمود بر محور x ها، قاعده را در خطی قطع می‌کند که از نقطه (x, y) می‌گذرد و طول آن $۲y$ است پس مربع مطرح شده در صورت سؤال دارای مساحت $A(x) = (۲y)^۲ = ۴(a^۲ - x^۲)$ است و چون حدود x در قاعده شکل بین $x = \pm a$ محدود است پس:

$$\text{حجم} = \int_{-a}^{a} A(x)dx = ۸ \int_{۰}^{a} (a^۲ - x^۲)dx = ۸\left(a^۲x - \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_{۰}^{a} = \frac{۱۶a^۳}{۳}$$

مثال ۴۸

اگر کره $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۴$ توسط دو صفحه $x = \pm ۱$ قطع شود، حجم شکلی که بین دو صفحه باقی می‌ماند را به دست آورید.



روش طبیعی حل چنین سؤال استفاده از انتگرال سه‌گانه است اما توجه کنید که شکل مورد نظر در اثر دوران قسمتی از نیمه بالایی دایره $x^۲ + y^۲ = ۴$ که بین دو خط $x = \pm ۱$ محدود شده است، حول محور x ها به دست می‌آید و لذا با توجه به روش دیسک:

$$\text{حجم} = \pi \int_{-۱}^{۱} y^۲ dx = \pi \int_{-۱}^{۱} (۴ - x^۲)dx = ۲\pi \int_{۰}^{۱} (۴ - x^۲)dx = \frac{۲۲\pi}{۳}$$

مثال ۴۹. ناحیه محدود به نمودار $f(x) = \sqrt{۱ + e^{x^۲}}$ و محور x ها و خطوط $x = \sqrt{\ln ۳}$ و $x = \sqrt{\ln ۸}$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را محاسبه نمایید.

با توجه به روش پوسته استوانه‌ای حجم برابر $۲\pi \int_{\sqrt{\ln ۳}}^{\sqrt{\ln ۸}} xy\, dx = ۲\pi \int_{\sqrt{\ln ۳}}^{\sqrt{\ln ۸}} x\sqrt{۱ + e^{x^۲}}\, dx$ است. برای محاسبه این انتگرال از تغییر متغیر $u^۲ = ۱ + e^{x^۲}$ و $u > ۰$ استفاده می‌کنیم.

$$۲udu = ۲xe^{x^۲}dx \implies x\sqrt{۱ + e^{x^۲}}\, dx = xu.\frac{۲udu}{۲xe^{x^۲}} = \frac{u^۲}{u^۲ - ۱}du = (۱ + \frac{۱}{u^۲ - ۱})du$$

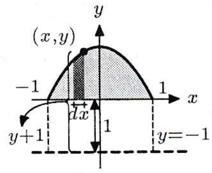
$$\implies \text{حجم} = ۲\pi \int_{۲}^{۳} (۱ - \frac{۱}{۱ - u^۲})du = ۲\pi\left(u - \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{u + ۱}{u - ۱}\right|\right)\Big|_{۲}^{۳} = ۲\pi + \pi \ln \frac{۳}{۲}$$

مثال ۵۰

ناحیه محدود به محور x ها و نمودار $f(x) = ۱ - x^۲$ حول خط $y = -۱$ دوران می‌کند، حجم حاصل را محاسبه کنید.

با توجه به اینکه محور دوران موازی محور x است، معمولاً از روش دیسک برای محاسبه حجم استفاده می‌شود. اما اگر به روش دیسک و پوسته استوانه‌ای دقت کنید، تفاوت عمده در این دو روش نحوه انتخاب المان است. اگر المان **عمود بر محور دوران انتخاب شود از روش دیسک و اگر موازی محور دوران باشد از روش پوسته استفاده می‌کنیم.**
این مسأله را با هر دو روش حل می‌کنیم.

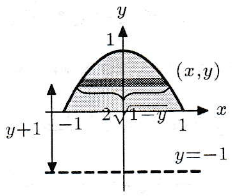
روش اول (روش دیسک): نقاط برخورد نمودار f و محور x ها، $x = \pm ۱$ است و محور دوران $y = -۱$ است. المان را عمود بر محور دوران و به ضخامت dx در نظر می‌گیریم. چون محدوده پایین شکل و محور دوران از هم فاصله دارند، دو حجم از هم کم می‌شوند. ابتدا ناحیه محدود به نمودار f و خط $y = -۱$ در فاصله $-۱ \le x \le ۱$ حول این خط دوران می‌کند و شعاع دوران $R_۲ = y - (-۱) = y + ۱$ است. سپس ناحیه محدود بین محور x ها و خط $y = -۱$ در فاصله $-۱ \le x \le ۱$ دوران می‌کند که شعاع دوران برابر $R_۱ = ۱$ می‌باشد.



$$\text{حجم} = \pi \int_{x=-۱}^{x=۱} (R_۲^۲ - R_۱^۲)\, dx = \pi \int_{-۱}^{۱} \Big((f(x)+۱)^۲ - ۱\Big) dx = \pi \int_{-۱}^{۱} \Big((۲ - x^۲)^۲ - ۱\Big) dx$$

$$= ۲\pi \Big(۴x - \frac{۴}{۳}x^۳ + \frac{۱}{۵}x^۵ - x\Big)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۵۶\pi}{۱۵}$$

روش دوم (پوسته استوانه‌ای): المان دوران را موازی محور دوران و به ضخامت dy در نظر می‌گیریم. در این صورت فاصله آن از محور دوران (شعاع دوران) برابر $y + ۱$ است. برای محاسبه ارتفاع دوران یعنی نوار مشخص شده در شکل، توجه کنید که اگر نقطه (x, y) را روی نمودار در نظر بگیریم، نقطه متناظر آن در ربع دوم $(-x, y)$ و لذا طول آن برابر $x - (-x) = ۲x = ۲\sqrt{۱ - y}$ است. ضمناً در این ناحیه $۰ \le y \le ۱$ ولذا:



$$\text{حجم} = ۲\pi \int_{y=۰}^{y=۱} (\text{شعاع دوران}) \times (\text{ ارتفاع }) \, dy = ۲\pi \int_{۰}^{۱} (y+۱) \times ۲\sqrt{۱ - y}\, dy$$

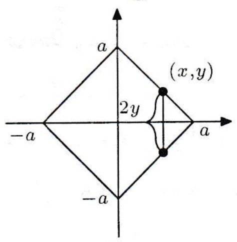
با استفاده از تغییر متغیر $t = ۱ - y$ یا $y = ۱ - t$ داریم:

$$\text{حجم} = ۴\pi \int_{۱}^{۰} (۲ - t)\sqrt{t}\, (-dt) = ۴\pi \int_{۰}^{۱} (۲t^{\frac{۱}{۲}} - t^{\frac{۳}{۲}})\, dt = \frac{۵۶\pi}{۱۵}$$

تست ۹۹ **حجم جسمی که قاعده آن مربع با رئوس به مختصات $(-۳, ۰)$ و $(۰, ۳)$ و $(۳, ۰)$ و $(۰, -۳)$ بوده و مقطع هر صفحه عمود بر محور x ها با سطح جسم یک نیم دایره باشد، کدام است؟** **(معدن ۸۰)**

۱) ۶π ۲) ۸π ۳) ۹π ۴) ۱۲π

حل: گزینه ۳ درست است. این سؤال را در حالت کلی برای جسمی قائم که قاعده آن مربع به رئوس $(\pm a, ۰)$ و $(۰, \pm a)$ و به عبارتی مربع $|x| + |y| = a$ و $a > ۰$ که مقطع هر صفحه عمود بر محور x ها با سطح آن یک نیم دایره باشد، حل می‌کنیم. صفحه عمود بر محور x ها، قاعده را در پاره‌خطی قطع می‌کند که طول آن برابر $۲y$ است. چون این پاره‌خط، قطر مقطع صفحه و جسم است پس مساحت مقطع $\frac{۱}{۲}\pi y^۲$ است. چون شکل نسبت به محور y ها متقارن است، محاسبه را برای



$x \geq ۰$ انجام داده و پاسخ را در دو ضرب می‌کنیم. معادله ضلعی از مربع که در ناحیه اول واقع است به صورت $x + y = a$ می‌باشد پس $A(x) = \frac{\pi}{۲}(a-x)^۲$ و حدود x در قاعده $۰ \leq x \leq a$ است.

$$\text{حجم} = ۲\int_۰^a A(x)dx = \pi\int_۰^a (a-x)^۲dx = -\frac{\pi}{۳}(a-x)^۳\Big|_۰^a dx = \frac{\pi}{۳}a^۳ \xrightarrow{a=۳} \text{حجم} = ۹\pi$$

تست ۱۰۰ ناحیه بین نمودار $y = \ln\frac{۱}{x}$ و محور x ها و محور y ها به دور محور x ها دوران کرده است. حجم جسمی که تولید می‌شود را به دست آورید. (عمران ـ آزاد ۸۱)

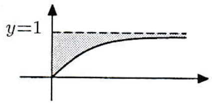
۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) π

حل: گزینه ۳ درست است. نمودار داده شده محور x ها را در $x = ۱$ قطع می‌کند پس:

$$\text{حجم} = \pi\int_۰^۱ y^۲dx = \pi\int_۰^۱ (-\ln x)^۲\, dx = \pi\Gamma(۳) = ۲\pi$$ (با توجه به رابطه ۴ ـ ۱۱ در صفحه ۳۰۱)

تست ۱۰۱ ناحیه نامتناهی که در ربع اول بین خم $y = \tanh x$ و مجانبش واقع است را حول محور x ها دوران داده‌ایم. حجم جسم حاصل برابر است با:

۱) π ۲) ۲π ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) $+\infty$



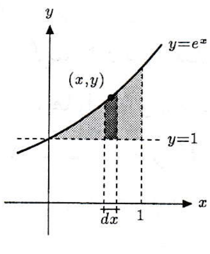
حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به نمودار $y = \tanh x$، در ربع اول خط $y = ۱$ مجانب افقی است و لذا ناحیه رنگ شده در شکل مورد نظر است. با توجه به روش دیسک دو حجم باید از یکدیگر کم شوند.

$$\text{حجم} = \pi\int_۰^{+\infty}(۱^۲ - \tanh^۲ x)dx = \pi\int_۰^{+\infty}\operatorname{sech}^۲x\, dx = \pi\tanh x\Big|_۰^{+\infty} = \pi\big(\tanh(+\infty) - \tanh(۰)\big)$$
$$= \pi(۱ - ۰) = \pi$$

تست ۱۰۲ حجم حاصل از دوران سطح محدود به نمودارهای $y = e^x$ و $y = ۱$ و $x = ۱$ حول محور x ها کدام است؟ (هوافضا ۸۱)

۱) $\pi(e^۲ - ۳)$ ۲) $\pi(e^۲ - ۲)$ ۳) $\frac{\pi}{۲}(e^۲ - ۲)$ ۴) $\frac{\pi}{۲}(e^۲ - ۳)$

حل: گزینه ۴ درست است. از روش دیسک استفاده می‌کنیم یعنی المان سطح را عمود بر محور دوران و به ضخامت dx می‌گیریم. چون محدوده‌های شکل از محور دوران فاصله دارند پس دو حجم از هم کم می‌شوند. ابتدا ناحیه محدود به نمودار $y = e^x$ و محور x ها و $۰ \leq x \leq ۱$ حول محور x دوران می‌کند، که شعاع دوران $R_۲ = e^x$ است و سپس حجم حاصل از دوران ناحیه بین $y = ۱$ و محور x ها و $۰ \leq x \leq ۱$ حول محور x از آن کم می‌شود.



شعاع در این حالت $R_۱ = ۱$ است پس:

$$\text{حجم} = \pi\int_۰^۱(R_۲^۲ - R_۱^۲)dx = \pi\int_۰^۱(e^{۲x} - ۱)dx = \frac{\pi}{۲}(e^۲ - ۳)$$

تست ۱۰۳ حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار تابع $y=\cos x$ و $y=۰$ و $x=۰$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ حول محور oy کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\pi(\pi-۱)$ ۲) $\pi(\pi-۲)$ ۳) $\pi^{۲}$ ۴) $\pi(\pi+۱)$

حل: گزینه ۲ درست است. از روش پوسته استوانه‌ای:

$$\text{حجم}=۲\pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x\cos x dx=۲\pi\left(x\sin x\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}-\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\sin x dx\right)=۲\pi(\frac{\pi}{۲}-۱)=\pi(\pi-۲)$$

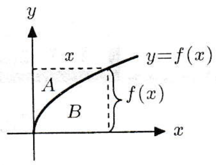
تست ۱۰۴ ناحیه محدود به نمودار $x=y^{۳}+y$ و محور عرضها و خط $y=۱$ حول محور y ها دوران می‌کند. حجم جسم حاصل کدام است؟

۱) $\frac{۹۱\pi}{۱۰۵}$ ۲) $\frac{۲۳\pi}{۳۵}$ ۳) $\frac{۱۸۴\pi}{۱۰۵}$ ۴) $\frac{۹۲\pi}{۱۰۵}$

حل: گزینه ۴ درست است. با وجود این که دوران حول محور y ها است، اما نمی‌توانیم از روش پوسته استوانه‌ای استفاده کنید. زیرا در این فرمول به $۲\pi\int xydx$ می‌رسیم، اما محاسبه y از معادله منحنی غیر ممکن است. برای استفاده از روش دیسک باید المان را عمود بر محور دوران یعنی افقی بگیریم. در اینصورت ضخامت آن برابر dy و فاصله از محور دوران و به عبارتی شعاع دوران برابر $x=y^{۳}+y$ می‌باشد. حدود y در ناحیه به صورت $۰\le y\le ۱$ است.

$$\text{حجم}=\pi\int_{۰}^{۱}(y^{۳}+y)^{۲}\,dy=\pi\int_{۰}^{۱}(y^{۶}+۲y^{۴}+y^{۲})\,dy=\frac{۹۲\pi}{۱۰۵}$$

تست ۱۰۵ یک منحنی به معادله $y=f(x)$ از مبدأ مختصات می‌گذرد، خطوط موازی محورهای مختصات که از یک نقطه دلخواه منحنی رسم می‌شوند مستطیلی را تشکیل می‌دهند که دو ضلع آن بر محورها قرار دارند، این مستطیل توسط منحنی به دو ناحیه A و B تقسیم می‌شوند که این دو ناحیه دارای این خاصیت هستند که حجم ناشی از دوران یکی از آنها حول محور x، n برابر حجم حاصل از دوران دیگری است. تابع f برابر است با:(مکانیک ۷۰)



۱) $f(x)=cx^{\frac{۲}{n}}$ یا $f(x)=cx^{۲n}$ ۲) $f(x)=cx^{\frac{n}{۲}}$ یا $f(x)=cx^{\frac{۱}{۲n}}$

۳) $f(x)=cx^{\frac{۳}{n}}$ یا $f(x)=cx^{۳n}$ ۴) $f(x)=cx^{\frac{n}{۳}}$ یا $f(x)=cx^{\frac{۱}{۳n}}$

حل: گزینه ۲ درست است. نقطه دلخواه روی منحنی را $(x,f(x))$ و حجم حاصل از دوران ناحیه‌های A و B حول محور x ها را V_A و V_B می‌نامیم. در این صورت فرض می‌کنیم $V_A=nV_B$ توجه کنید که $V_B=\pi\int_{۰}^{x}f^{۲}(t)dt$. اگر کل مستطیل یعنی $A\cup B$ را حول محور x ها دوران دهیم، استوانه به شعاع قاعده $f(x)$ و ارتفاع x پدید می‌آید که حجم آن $V=\pi f^{۲}(x)x$ است.

$$V=V_A+V_B=nV_B+V_B\implies V=(n+۱)V_B\implies \pi xf^{۲}(x)=(۱+n)\pi\int_{۰}^{x}f^{۲}(t)dt$$

$$\implies xf^{۲}(x)=(۱+n)\int_{۰}^{x}f^{۲}(t)dt$$

از دو طرف رابطه بالا نسبت به x مشتق می‌گیریم.

$$f^{۲}(x)+۲xf(x)f'(x)=(۱+n)f^{۲}(x) \Longrightarrow nf^{۲}(x)=۲xf(x)f'(x) \Longrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{n}{۲x}$$

$$\xrightarrow{\int} \ln f(x)=\frac{n}{۲}\ln x+k \xrightarrow{\exp} f(x)=cx^{\frac{n}{۲}}$$

چنانچه فرض شود $V_B=nV_A$ آنگاه $V_A=\frac{۱}{n}V_B$ و لذا $f(x)=cx^{\frac{۱}{۲n}}$ حاصل می‌شود.

ج) طول قوس منحنی

اگر f تابعی با مشتق مرتبه اول پیوسته باشد:

۱) طول قسمتی از نمودار $y=f(x)$ از $x=a$ تا $x=b$ برابر است با:

$$\int_{x=a}^{x=b} ds=\int_a^b \sqrt{۱+f'^{۲}(x)}dx$$

۲) طول قسمتی از نمودار $x=f(y)$ از $y=a$ تا $y=b$ برابر است با:

$$\int_{y=a}^{y=b} ds=\int_a^b \sqrt{۱+f'^{۲}(y)}dy$$

تذکر۳۵. عبارت تحت انتگرال در هر حالت را عنصر **طول قوس** می‌نامند و با ds نمایش می‌دهند.

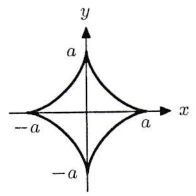
مثال ۵۱. طول قسمتی از نمودار $f(x)=\int_۰^x \sqrt{\sin t}\, dt$ را از $x=۰$ تا $x=\frac{\pi}{۲}$ بیابید.

$$f'(x)=\sqrt{\sin x} \Longrightarrow ds=\sqrt{۱+f'^{۲}(x)}dx=\sqrt{۱+\sin x}dx$$

$$\text{طول قوس}=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۱+\sin x}dx=۲$$ (تست ۱ در صفحه ۳۷۳ را ملاحظه کنید.)

مثال ۵۲ اگر $a>۰$ دلخواه باشد، طول قوس نمودار $x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}$ را به دست آورید.

توجه کنید که چون با تبدیل $y\to -y$ ضابطه تغییر نمی‌کند پس محور x محور تقارن شکل است و لذا نمودار مورد نظر تابع نمی‌باشد، پس مستقیماً از فرمول ds استفاده نمی‌کنیم. توجه کنید که چون با تبدیل $x\to -x$ یا $y\to -y$ معادله عوض نمی‌شود، منحنی نسبت به محورها متقارن است. پس می‌توان طول قوس قسمتی از شکل را که در ربع اول قرار دارد را محاسبه و جواب را در ۴ ضرب کنیم. ضابطه نمودار به شکل $y^{\frac{۲}{۳}}=a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}\geq ۰$ در می‌آید و با توجه به این که $y^{\frac{۲}{۳}}\geq ۰$ پس $x^{\frac{۲}{۳}}\leq a^{\frac{۲}{۳}}$ ولذا $۰\leq x\leq a$. برای محاسبه $ds=\sqrt{۱+y'^{۲}}\,dx$ از معادله منحنی مشتق ضمنی می‌گیریم.



$$y'=-\frac{\frac{۲}{۳}x^{-\frac{۱}{۳}}}{\frac{۲}{۳}y^{-\frac{۱}{۳}}}=-\frac{y^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۱}{۳}}} \Longrightarrow ۱+y'^{۲}=۱+\frac{y^{\frac{۲}{۳}}}{x^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{x^{\frac{۲}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}}{x^{\frac{۲}{۳}}}=\frac{a^{\frac{۲}{۳}}}{x^{\frac{۲}{۳}}}=a^{\frac{۲}{۳}}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

$$ds=a^{\frac{۱}{۳}}x^{-\frac{۱}{۳}}\,dx \Longrightarrow \text{طول قوس}=۴\int_۰^a ds=۴a^{\frac{۱}{۳}}\int_۰^a x^{-\frac{۱}{۳}}\,dx=۶a^{\frac{۱}{۳}}x^{\frac{۲}{۳}}\Big|_۰^a=۶a$$

تست ۱۰۶ طول خم $f(x)=\int_{\circ}^{x}\sqrt{\cos ۲t}dt$ از $x=\circ$ تا $x=\frac{\pi}{۴}$ کدام عدد است؟ (مکانیک ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل:

$$f'(x)=\sqrt{\cos ۲x} \implies ds=\sqrt{۱+f'^{۲}(x)}\,dx=\sqrt{۱+\cos ۲x}dx=\sqrt{۲\cos^{۲}x}dx=\sqrt{۲}\left|\cos x\right|dx$$

$$\text{طول قوس}=\sqrt{۲}\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}}\cos x dx=\sqrt{۲}\sin x\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}}=۱$$

تست ۱۰۷ طول منحنی $۲۴xy=x^{۴}+۴۸$ از نقطهٔ $x=۲$ تا نقطه $x=۴$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۲/۵ ۳) $\frac{۱۷}{٦}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{x^{۴}+۴۸}{۲۴x}=\frac{x^{۳}}{۲۴}+\frac{۲}{x} \implies y'=\frac{x^{۲}}{۸}-\frac{۲}{x^{۲}}$$

$$۱+y'^{۲}=۱+\left(\frac{x^{۲}}{۸}-\frac{۲}{x^{۲}}\right)^{۲}=\frac{x^{۴}}{٦۴}+\frac{۴}{x^{۴}}+\frac{۱}{۲}=\left(\frac{x^{۲}}{۸}+\frac{۲}{x^{۲}}\right)^{۲} \implies ds=\left(\frac{x^{۲}}{۸}+\frac{۲}{x^{۲}}\right)dx$$

$$\text{طول قوس}=\int_{۲}^{۴}\left(\frac{x^{۲}}{۸}+\frac{۲}{x^{۲}}\right)dx=\left(\frac{x^{۳}}{۲۴}-\frac{۲}{x}\right)\Big|_{۲}^{۴}=\frac{۱۷}{٦}$$

توجه کنید که در محاسبه $۱+y'^{۲}$ می‌توانیم از اتحاد $(a-b)^{۲}+۴ab=(a+b)^{۲}$ به ازای $a=\frac{x^{۲}}{۸}$ و $b=\frac{۲}{x^{۲}}$ استفاده کنیم.

تست ۱۰۸ طول منحنی به معادلهٔ $۹x^{۲}=۴y^{۳}$ از $(\circ,\circ)$ تا $(۲\sqrt{۳},۳)$ کدام است؟

(ریاضی ۷۴، عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) $۵\frac{۲}{۳}$ ۲) $۵\frac{۱}{۳}$ ۳) $۴\frac{۲}{۳}$ ۴) $۴\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. بهتر است منحنی را به صورت $x=\pm\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}$ در نظر بگیریم و چون طول آن برای $x>\circ$ خواسته شده است پس باید ضابطهٔ $x=\frac{۲}{۳}y^{\frac{۳}{۲}}$ را در نظر گرفت.

$$\frac{dx}{dy}=x'=\sqrt{y} \implies ds=\sqrt{۱+x'^{۲}}dy=\sqrt{۱+y}dy$$

$$\implies \text{طول قوس}=\int_{\circ}^{۳}\sqrt{۱+y}dy=\frac{۲}{۳}(۱+y)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_{\circ}^{۳}=\frac{۱۴}{۳}=۴\frac{۲}{۳}$$

د) سطح حاصل از دوران

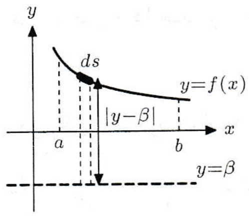
تابع f دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است. مساحت سطح جانبی ایجاد شده در اثر دوران قسمتی از آن در فاصله $a \leq x \leq b$ حول محور افقی یا قائمی که منحنی را قطع نمی‌کند برابر $2\pi\int_{x=a}^{x=b}$ (شعاع دوران) $\times\, ds$ است خصوصاً:

۱) اگر منحنی حول خط $y=\beta$ (و در حالت خاص محور x ها یعنی $y=0$) دوران کند، مساحت جانبی برابر است با:

$$2\pi\int_{x=a}^{x=b}|y-\beta|ds = 2\pi\int_a^b |f(x)-\beta|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

۲) اگر منحنی حول خط $x=\alpha$ (و در حالت خاص محور y ها یعنی $x=0$) دوران کند، مساحت جانبی برابر است با:

$$2\pi\int_{x=a}^{x=b}|x-\alpha|ds = 2\pi\int_a^b |x-\alpha|\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$



تذکر ۳۶. توجه کنید که وقتی المان طول قوس یعنی ds حول خط $y=\beta$ دوران می‌کند، سطح جانبی یک استوانه (به طور تقریبی) پدید می‌آید که شعاع قاعده آن برابر شعاع دوران یعنی $|y-\beta|$ و ارتفاعش برابر ds است و مساحت جانبی هر استوانه برابر محیط قاعده در ارتفاع است و لذا فرمول اشاره شده به دست می‌آید.

تذکر ۳۷. فرمول‌های بالا برای نمودار $x=f(y)$ در فاصله $y=a$ تا $y=b$ نیز قابل استفاده است به شرط آن که ds برابر $\sqrt{1+f'^2(y)}dy$ جایگذاری شود.

مثال ۵۳. سطح حاصل از دوران قسمتی از نمودار $f(x)=\frac{x^3}{3}+2$ از $x=0$ تا $x=1$ حول خط $y=2$ را محاسبه کنید.

هر نقطه (x,y) روی نمودار دارای فاصله $|y-2|=\frac{x^3}{3}$ از محور دوران است و لذا شعاع دوران برابر $\frac{x^3}{3}$ می‌باشد.

$f'(x)=x^2 \implies ds=\sqrt{1+x^4}dx$

$$\text{مساحت} = 2\pi\int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1+x^4}dx \overset{u=1+x^4}{=\!=\!=} \frac{\pi}{6}\int_1^2\sqrt{u}du = \frac{\pi}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{9}(2\sqrt{2}-1)$$

مثال ۵۴

خم (منحنی) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ و $a>0$ حول محور x دوران کرده است. مساحت رویه (سطح) دوار حاصل چقدر است؟

محور دوران از داخل شکل عبور می‌کند، اما چون با تبدیل $y \to -y$ ضابطه تغییر نمی‌کند، پس محور دوران محور تقارن است. به همین دلیل نیمه‌ای از شکل که بالای محور x قرار دارد در اثر دوران همان سطحی را ایجاد می‌کند که نیمه پایینی خواهد ساخت. بنابراین فقط برای $y\geq 0$ نمودار را دوران می‌دهیم.(و نباید پاسخ را در ۲ ضرب نماییم.)

چون با تبدیل $x \to -x$ ضابطه عوض نمی‌شود، قسمتی از شکل که در ربع اول قرار دارد را دوران داده و جواب را در دو ضرب می‌کنیم. با توجه به محاسبات مثال ۵۲ در صفحه ۳۱۳ داریم $a \leq x \leq ۰$ و $ds = a^{\frac{۱}{۳}} x^{-\frac{۱}{۳}} dx$.

$$\text{مساحت} = ۲ \times ۲\pi \int_{x=۰}^{x=a} |y| ds = ۴\pi a^{\frac{۱}{۳}} \int_{۰}^{a} (a^{\frac{۲}{۳}} - x^{\frac{۲}{۳}})^{\frac{۳}{۲}} x^{-\frac{۱}{۳}} dx \xlongequal{u=a^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}} -۶\pi a^{\frac{۱}{۳}} \int_{a^{\frac{۲}{۳}}}^{۰} u^{\frac{۳}{۲}} du$$

$$= -۶\pi a^{\frac{۱}{۳}} \times \frac{۲}{۵} u^{\frac{۵}{۲}} \Big|_{a^{\frac{۲}{۳}}}^{۰} = \frac{۱۲\pi}{۵} a^{۲}$$

تست ۱۰۹ مساحت سطح جانبی یک سطح دوار که از دوران قسمتی از سهمی $y = x^۲$، $۰ \leq x \leq \sqrt{۲}$ حول محور y ها حاصل می‌شود برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۱۳\pi}{۳}$ ۲) ۲π ۳) $\frac{۲۵\pi}{۱۱}$ ۴) $\frac{۴۱}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $ds = \sqrt{۱ + y'^۲} dx = \sqrt{۱ + ۴x^۲} dx$، پس:

$$\text{مساحت} = ۲\pi \int_{x=۰}^{x=\sqrt{۲}} |x| ds = ۲\pi \int_{۰}^{\sqrt{۲}} x\sqrt{۱ + ۴x^۲} dx \xlongequal{u=۱+۴x^۲} \frac{\pi}{۴} \int_{۱}^{۹} \sqrt{u} du = \frac{\pi}{۶} u^{\frac{۳}{۲}} \Big|_{۱}^{۹} = \frac{۱۳\pi}{۳}$$

تست ۱۱۰ مساحت رویه حاصل از دوران منحنی به معادله $y^۲ + ۴x = ۲\ln y$ از نقطه نظیر $y = ۱$ تا $y = ۳$ حول محور x ها چند برابر $\frac{\pi}{۳}$ است؟ (مواد ۷۸)

۱) ۱۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۵

حل: گزینه ۳ درست است. منحنی داده شده را به صورت $x = \frac{۱}{۲}\ln y - \frac{y^۲}{۴}$ می‌نویسیم و از فرمول $ds = \sqrt{۱ + (\frac{dx}{dy})^۲}\, dy$ استفاده می‌کنیم. چون $\frac{dx}{dy} = \frac{۱}{۲}(\frac{۱}{y} - y)$ پس:

$$ds = \sqrt{۱ + \frac{۱}{۴}(\frac{۱}{y} - y)^۲} dy = \frac{۱}{۲}\sqrt{(y + \frac{۱}{y})^۲} dy = \frac{۱}{۲}(y + \frac{۱}{y}) dy$$

$$\Longrightarrow \quad \text{مساحت سطح} = ۲\pi \int_{y=۱}^{y=۳} y ds = \pi \int_{۱}^{۳} (y^۲ + ۱) dy = \pi (\frac{y^۳}{۳} + y) \Big|_{۱}^{۳} = \frac{۳۲\pi}{۳}$$

هـ) جرم، مرکز جرم، مرکز هندسی [1]

۱) اگر قطعه سیمی در امتداد محور x ها و در فاصله $a \leq x \leq b$ قرار داشته باشد به طوری که چگالی خطی آن در نقطه‌ای که به فاصله x از مبدأ قرار دارد، برابر $\delta(x)$ باشد در این صورت:

i) جرم سیم برابر است با $\int_{a}^{b} \delta(x) dx$

ii) گشتاور جرم سیم نسبت به مبدأ برابر است با $\int_{a}^{b} x\delta(x) dx$

iii) مرکز جرم (مرکز ثقل) سیم عبارت است از $\overline{x} = \dfrac{\int_{a}^{b} x\delta(x) dx}{\int_{a}^{b} \delta(x) dx}$

---

[1] بررسی مفهوم فیزیکی مرکز جرم و فرمولهای کلی‌تر آن در صفحه ۳۲۴ و ۳۲۵ در جلد اول کتاب ریاضی عمومی ۲ مطرح می‌شود. فرمولی که در ریاضی ۲ مطرح می‌گردد به نحوی است که تمام موارد اشاره شده در این قسمت را پوشش می‌دهد و بنابراین ضرورتی برای حفظ کردن فرمولهای این قسمت وجود ندارد. مطرح کردن بحث مرکز هندسی در اینجا بیشتر با هدف استفاده کردن از آن در قضایای پاپوس هستند.

۲) اگر D ناحیه‌ای در صفحه باشد که به محور x ها و نمودار $y=f(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ محدود شده است و چگالی سطحی آن در نقطه (x,y) فقط تابعی از x و به صورت $\delta(x)$ باشد.

i) جرم ورقه D برابر است با $M=\int_a^b \delta(x)f(x)dx$

ii) گشتاور جرم ورقه نسبت به محور x ها برابر $M_x=\frac{1}{2}\int_a^b \delta(x)f^2(x)dx$ و نسبت به محور y ها برابر $M_y=\int_a^b xf(x)\delta(x)dx$ است.

iii) مرکز جرم (مرکز ثقل) ورقه D نقطه $G(\overline{x},\overline{y})$ است که $\overline{y}=\frac{M_x}{M}$ و $\overline{x}=\frac{M_y}{M}$

تذکر۳۸. اگر ناحیه D محصور بین نمودار f و g باشد در فرمول M_x به جای $f^2(x)$ باید $|f^2(x)-g^2(x)|$ و در فرمول M_y و M به جای $f(x)$ باید $|f(x)-g(x)|$ را قرار دهیم.

وقتی چگالی ورقه مقدار ثابتی باشد (ورقه **همگن** باشد)، در فرمولهای مرکز جرم $\delta(x)$ از فرمول‌های بالا حذف می‌شود و مخرج کسر در $\overline{x}$ و $\overline{y}$ مساحت D خواهد بود در این صورت مرکز جرم را **مرکزگون** یا **مرکز وار** یا **مرکز هندسی** ناحیه D می‌نامند.

نکته ۳۰. اگر ناحیه D دارای محور تقارن باشد، مرکز هندسی بر محور تقارن قرار می‌گیرد.

نکته ۳۱. فرض کنید ناحیه D اجتماع دو ناحیه مجزای D_1 و D_2 باشد، به طوریکه مرکز هندسی هر یک از ناحیه‌ها $G_1(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$ و $G_2(\overline{x}_2,\overline{y}_2)$ و مساحت آنها A_1 و A_2 باشد. در این صورت مرکز هندسی ناحیه D نقطه $G(\overline{x},\overline{y})$ است به طوریکه:

$$\overline{x}=\frac{\overline{x}_1A_1+\overline{x}_2A_2}{A_1+A_2} \quad \text{و} \quad \overline{y}=\frac{\overline{y}_1A_1+\overline{y}_2A_2}{A_1+A_2}$$

توجه کنید که فرمول بالا برای n ناحیه نیز قابل تعمیم است.

۳) اگر ناحیه D در صفحه xy که محدود به محور x ها و خطوط $x=a$ و $x=b$ و نمودار $y=f(x)$ است، حول محور x ها دوران کند، مرکز هندسی شکل حاصل بر محور x ها (محور دوران) قرار می‌گیرد و مؤلفه x آن عبارتست از $\overline{x}=\frac{M_{yz}}{V}$ که در آن $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ حجم حاصل از دوران و $M_{yz}=\pi\int_a^b xf^2(x)dx$ گشتاور جرم ناحیه نسبت به صفحه yz است.

در صورتی که ناحیه D حول محور y ها دوران کند، مرکز هندسی بر محور y ها قرار می‌گیرد در این صورت $\overline{y}=\frac{M_{xz}}{V}$ که $M_{xz}=\pi\int_a^b xf^2(x)dx$ و $V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$.

۴) اگر قطعه سیمی دارای معادله $y=f(x)$ باشد، مرکز هندسی قسمتی از آن از $x=a$ تا $x=b$ نقطه $(\overline{x},\overline{y})$ است که

$$\overline{x}=\frac{\int_{x=a}^{x=b} xds}{\int_{x=a}^{x=b} ds} \quad \text{و} \quad \overline{y}=\frac{\int_{x=a}^{x=b} yds}{\int_{x=a}^{x=b} ds}$$

مثال ۵۵. مرکز هندسی ناحیه محدود بین دو نمودار $y = x^۲$ و $y = x$ را بیابید.

نقاط برخورد دو نمودار از حل معادله $x^۲ = x$، $x = ۰, ۱$ است.

$$M_x = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ \left|f^۲(x) - g^۲(x)\right|dx = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ (x^۲ - x^۴)dx = \frac{۱}{۱۵}$$

$$M_y = \int_۰^۱ x\left|f(x) - g(x)\right|dx = \int_۰^۱ x(x - x^۲)\,dx = \frac{۱}{۱۲}$$

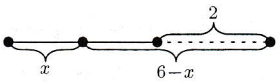
$$\text{مساحت} = M = \int_۰^۱ \left|f(x) - g(x)\right|dx = \int_۰^۱ (x - x^۲)dx = \frac{۱}{۶} \Longrightarrow \overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{۱}{۲}\,,\ \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{۲}{۵}$$

پس مرکز هندسی $G(\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۵})$ است.

تست ۱۱۱ چگالی در هر نقطه از یک سیم افقی به طول ۴ فوت متناسب با فاصله نقطه تا نقطه‌ای به فاصله ۲ از انتهای سیم (و در خارج سیم) است اگر چگالی در انتهای سیم ۵ باشد، جرم سیم کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) ۱۰   ۲) ۱۸   ۳) ۳۶   ۴) ۴۰

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به شکل هر نقطه‌ای که به فاصله x از ابتدای سیم باشد دارای فاصله $|۶ - x|$ از نقطه مورد نظر و لذا دارای چگالی $\delta(x) = k|۶ - x|$ است و چون $\delta(۴) = ۵$ پس $k = \frac{۵}{۲}$ و لذا $\delta(x) = \frac{۵}{۲}|۶ - x|$ پس:



$$\text{جرم} = \int_۰^۴ \delta(x)dx = \frac{۵}{۲}\int_۰^۴ |۶ - x|dx = \frac{۵}{۲}\int_۰^۴ (۶ - x)\,dx = ۴۰$$

تست ۱۱۲ مختصات مرکز ثقل سطح محصور $y^۲ = ۴x$ و $x = ۱$ و $y = ۰$ و $y \geq ۰$ برابر است با:

(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $G(\frac{۳}{۵}, \frac{۳}{۴})$ ۲) $G(\frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۳})$ ۳) $G(\frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۳})$ ۴) $G(\frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$

حل: گزینه ۱ درست است. منحنی به صورت $f(x) = ۲\sqrt{x}$ است.

$$M_y = \int_۰^۱ xf(x)dx = ۲\int_۰^۱ x^{\frac{۳}{۲}}dx = \frac{۴}{۵} \quad \text{و} \quad M_x = \frac{۱}{۲}\int_۰^۱ f^۲(x)dx = \int_۰^۱ ۲xdx = ۱$$

$$M = \int_۰^۱ f(x)dx = ۲\int_۰^۱ \sqrt{x}dx = \frac{۴}{۳} \Longrightarrow \overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{۳}{۵} \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{۳}{۴}$$

و) قضایای پاپوس

در بخشهای قبل روشهای محاسبه حجم و سطح حاصل از دوران حول محورهای مختصاتی یا خطوط موازی آنها بررسی شد. در حالت کلی برای محاسبات حجم و مساحت حاصل از دوران از قضایای پاپوس استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱۱. (قضیه اول پاپوس) اگر ناحیه D در صفحه حول محوری که از داخل آن عبور نمی‌کند دوران کند، حجم جسم حاصل از دوران برابر است با مساحت ناحیه D ضرب در محیط پیموده شده توسط مرکز هندسی ناحیه D. یعنی اگر فاصله مرکز هندسی تا محور دوران برابر d و مساحت آن A باشد:

$A \times 2\pi d$ = (فاصله مرکز هندسی ناحیه از محور دوران) × ۲π × (مساحت ناحیه) = حجم

قضیه ۱۲. (قضیه دوم پاپوس) اگر منحنی c در صفحه حول محوری که آن را قطع نمی‌کند دوران کند، مساحت سطح ایجاد شده در اثر دوران برابر است با طول قوس c ضرب در محیط پیموده شده توسط مرکز هندسی منحنی c. یعنی اگر فاصله مرکز هندسی منحنی c تا محور دوران برابر d و طول آن l باشد:

$l \times 2\pi d$ = (فاصله مرکز هندسی خم از محور دوران) × ۲π × (طول قوس خم) = مساحت سطح جانبی

مثال ۵۶. ناحیه محدود بین دو نمودار $y = x^2$ و $y = x$ را حول خط $y = x$ دوران می‌دهیم حجم جسم ایجاد شده را با استفاده از قضیه پاپوس به دست آورید.

با توجه به مثال ۵۵ در صفحه قبل مرکز هندسی $G(\frac{1}{2}, \frac{2}{5})$ است که فاصله آن از محور دوران یعنی $y = x$ برابر $d = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{2}{5}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{10\sqrt{2}}$ است. پس با استفاده از قضیه اول پاپوس:

$$\text{حجم} = (2\pi d) \times A = 2\pi \frac{1}{10\sqrt{2}} \times \frac{1}{6} = \frac{\pi\sqrt{2}}{60}$$

مثال ۵۷. مرکز هندسی ناحیه داخل دایره $x^2 + y^2 = a^2$ که در بالای محور x ها قرار دارد یعنی ناحیه $x^2 + y^2 \le a^2 \ , \ y \ge 0$ را به دست آورید. $(a > 0)$

می‌توان از فرمول‌های قسمت (۲) در صفحه ۳۱۷ استفاده کرد [2]، اما ناحیه مورد نظر داخل دایره به شعاع a است. با توجه به تقارن آن نسبت به محور y ها، مرکز هندسی بر این محور واقع است و لذا $\bar{x} = 0$. برای محاسبه $\bar{y}$ می‌توانیم ناحیه مورد نظر را حول محور x ها دوران دهیم، تا کره‌ای به حجم $\frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل شود. چون فاصله مرکز هندسی از محور دوران یعنی محور x ها برابر $|\bar{y}| = \bar{y}$ و مساحت ناحیه برابر $\frac{\pi}{2}a^2$ است، با توجه به قضیه اول پاپوس:

$$\frac{4\pi}{3}a^3 = (\frac{\pi}{2}a^2)(2\pi\bar{y}) \implies \bar{y} = \frac{4a}{3\pi} \implies \text{مرکز هندسی} : G(0, \frac{4a}{3\pi})$$

مثال ۵۸. مرکز هندسی قسمتی از نمودار $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ که توسط محور x ها محدود شده است را به دست آورید.

می‌توان از فرمول‌های قسمت (۴) در صفحه ۳۱۷ استفاده کرد [3]، اما نمودار مورد نظر نیم دایره به شعاع a است. با توجه به تقارن آن نسبت به محور y ها، مرکز هندسی بر این محور واقع است و لذا $\bar{x} = 0$. از طرفی $|\bar{y}| = \bar{y}$ فاصله مرکز هندسی از محور x ها است و با دوران نیم دایره حول محور x ها کره به شعاع a به دست می آید و چون مساحت کره $4\pi a^2$ و محیط نیم‌دایره πa است با استفاده از قضیه دوم پاپوس:

$$4\pi a^2 = (\pi a)(2\pi\bar{y}) \implies \bar{y} = \frac{2a}{\pi}$$

پس $G(0, \frac{2a}{\pi})$ مرکز هندسی نمودار است.

تذکر۳۹. مرکز هندسی داخل هر نیمدایره دارای فاصله $\frac{4a}{3\pi}$ از قطر و مرکز هندسی هر نیمدایره دارای فاصله $\frac{2a}{\pi}$ از قطر دایره است.

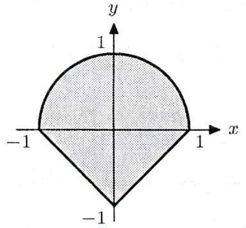
---

[2] پاسخ این سؤال با استفاده از انتگرال دوگانه در تست ۱۴ در صفحه ۱۳۹ در جلد دوم ریاضی ۲ مطرح شده است.

[3] پاسخ این سؤال با استفاده از انتگرال روی خم در تست ۱۵ در صفحه ۴۳۸ در جلد اول ریاضی ۲ مطرح شده است.

تذکر ۴۰. به تفاوت دو مثال بالا که بیانگر تفاوت مرکز هندسی در دو قضیه پاپوس است، توجه کنید. در مثال ۵۷ چون داخل شکل دوران می‌کند، حجم پدید می‌آورد و لذا از قضیه اول پاپوس استفاده کردیم. اما در مثال ۵۸ چون دایره یک خم است، در اثر دوران آن یک سطح حاصل می‌شود ولذا از قضیه دوم پاپوس استفاده نمودیم.

مثال ۵۹ مرکز هندسی ناحیه رنگ شده، در شکل مقابل (که از نیمدایره و مثلث تشکیل شده است) را بدست آورید.



ناحیه مورد نظر از دو ناحیه مجزای داخل نیمدایره و داخل مثلث تشکیل شده است. معادله نیمدایره $x^۲ + y^۲ = ۱$ و $y \geq ۰$ است و بنابراین مرکز هندسی داخل آن با توجه به مثال ۵۷ نقطه $G_۱(۰, \frac{۴}{۳\pi})$ و مساحت آن $A_۱ = \frac{\pi}{۲}$ می‌باشد. ناحیه مثلثی شکل دارای رئوس $(\pm۱, ۰)$ و $(۰, -۱)$ و مساحت $A_۲ = ۱$ بوده و مرکز هندسی آن میانگین همه رئوس است. در واقع اگر $G_۲(\overline{x}_۲, \overline{y}_۲)$ مرکز هندسی مثلث باشد:

$$\overline{x}_۲ = \frac{۱ + (-۱) + ۰}{۳} = ۰ \quad \text{و} \quad \overline{y}_۲ = \frac{۰ + ۰ + (-۱)}{۳} = -\frac{۱}{۳}$$

حال با توجه به نکته ۳۱ در صفحه ۳۱۷ مرکز هندسی ناحیه $G(\overline{x}, \overline{y})$ است که:[۴]

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_۱ A_۱ + \overline{x}_۲ A_۲}{A_۱ + A_۲} = ۰ \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{\overline{y}_۱ A_۱ + \overline{y}_۲ A_۲}{A_۱ + A_۲} = \frac{\frac{۴}{۳\pi} \times \frac{\pi}{۲} + (-\frac{۱}{۳}) \times ۱}{\frac{\pi}{۲} + ۱} = \frac{۲}{۳(\pi + ۲)}$$

تست ۱۱۳ مثلث به رئوس $O(۰, ۰)$ و $A(۱, ۱)$ و $B(۱, -۱)$ را حول خط $y = x + ۵$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل برابر است با:

۱) $\frac{۱۳\pi\sqrt{۲}}{۳}$ ۲) $\frac{۱۷\pi\sqrt{۲}}{۶}$ ۳) $\frac{۱۷\pi\sqrt{۲}}{۳}$ ۴) $\frac{۱۶\pi\sqrt{۲}}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. از قضیه اول پاپوس استفاده می‌کنیم. مرکز هندسی در مثلث میانگین همه رئوس است.

$$\overline{x} = \frac{x_A + x_B + x_O}{۳} = \frac{۱ + ۱ + ۰}{۳} = \frac{۲}{۳} \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{y_A + y_B + y_O}{۳} = \frac{۱ + (-۱) + ۰}{۳} = ۰$$

پس $G(\frac{۲}{۳}, ۰)$ مرکز هندسی شکل است. چون OA و OB بر هم عمود هستند(حاصل‌ضرب شیب آنها برابر -۱ است) پس مساحت مثلث برابر $۱ = \frac{\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}}{۲} = \frac{|OA||OB|}{۲}$ می‌باشد. فاصله مرکز هندسی از محور دوران یعنی $y - x - ۵ = ۰$ را محاسبه می‌کنیم.

$$d = \frac{|۰ - \frac{۲}{۳} - ۵|}{\sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲}} = \frac{۱۷}{۳\sqrt{۲}} \implies \text{حجم} = (\text{مساحت مثلث}) \times (۲\pi d) = \frac{۱۷\pi\sqrt{۲}}{۳}$$

تست ۱۱۴ اگر ناحیه داخل دایره $(x - b)^۲ + y^۲ = a^۲$ که $b > a > ۰$ حول محور y ها دوران کند، حجم جسم حاصل (چنبره) چقدر است؟

۱) $۲\pi^۲ a^۲ b$ ۲) $\pi^۲ a^۲ b$ ۳) $۲\pi a^۳$ ۴) $۴\pi^۲ ab$

حل: گزینه ۱ درست است. توجه کنید که قطرهای دایره محور تقارن آن هستند و لذا بنا به نکته ۳۰ در صفحه

---

[۴] پاسخ این سؤال با استفاده از انتگرال دوگانه در تست ۲۵ در صفحه ۴۸۶ در جلد دوم ریاضی ۲ مطرح شده است.

۳۱۷ مرکز هندسی بر قطرها و لذا بر تلاقی آنها قرار می‌گیرد. پس مرکز هندسی داخل دایره همان مرکز دایره است. لذا $G(b, ۰)$ مرکز هندسی ناحیه است که از محور دوران دارای فاصله $\overline{x} = b$ است. چون مساحت دایره $\pi a^۲$ می‌باشد، بنا به قضیه اول پاپوس:

$$\text{حجم} = (\pi a^۲)(۲\pi b) = ۲\pi^۲ a^۲ b$$

$\boxed{\text{تست ۱۱۵}}$ اگر دایره $(x-b)^۲ + y^۲ = a^۲$ که $b > a > ۰$ حول محور y ها دوران کند، مساحت جانبی جسم حاصل چقدر است؟

۱) $۲\pi^۲ a^۲ b$ ۲) $۴\pi^۲ ab$ ۳) $۲\pi a^۳$ ۴) $۲\pi b^۳$

حل: گزینه ۲ درست است. با بحثی که در تست قبل انجام شد، مرکز هندسی دایره همان مرکز دایره است. لذا $G(b, ۰)$ مرکز هندسی نمودار است که از محور دوران دارای فاصله $\overline{x} = b$ است. چون طول قوس (محیط) دایره $۲\pi a$ می‌باشد، بنا به قضیه دوم پاپوس:

$$\text{مساحت جانبی} = (۲\pi a)(۲\pi b) = ۴\pi^۲ ab$$

ز) منحنی پارامتری

یک معادله پارامتری به صورت $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ که $a \le t \le b$ نمایشگر نمودار یک منحنی در صفحه xy است که در صورت امکان با حذف پارامتر t معادله دکارتی آن به دست می‌آید. فرمولهایی که در قسمتهای قبل برای نمودار توابع مطرح کردیم، برای منحنی های پارامتری قابل استفاده‌اند و تغییر چندانی نمی‌کنند.

۱) مساحت محدود توسط منحنی پارامتری و خطوط $x = f(a)$ و $x = f(b)$ و محور x ها عبارتست از:

$$\int_{t=a}^{t=b} |y||dx| = \int_a^b |g(t)|\,|f'(t)|dt$$

۲) مساحت محدود توسط منحنی پارامتری و خطوط $y = g(a)$ و $y = g(b)$ و محور y ها از رابطه $\int_{t=a}^{t=b} |x||dy| = \int_a^b |f(t)|\,|g'(t)|dt$ به دست می‌آید.

نکته ۳۲. اگر منحنی مورد نظر برای $a \le t \le b$ بسته و پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، مساحت محدود توسط آن از هریک از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$\int_{t=a}^{t=b} x\,dy = -\int_{t=a}^{t=b} y dx = \frac{۱}{۲}\int_{t=a}^{t=b} x dy - y dx$$

تذکر ۴۱. اگر به جهت حرکت توجه نکنید، کافی است از آنچه حاصل می‌شود قدرمطلق بگیرید.

۳) طول قوس منحنی در این حالت از رابطه $\int_a^b \sqrt{f'^۲(t) + g'^۲(t)}dt$ به دست می‌آید. در این حالت $ds = \sqrt{f'^۲(t) + g'^۲(t)}dt$ المان طول قوس نامیده می‌شود.

۴) فرمول‌های حجم و مساحت حاصل از دوران و مرکز ثقل در اینجا نیز معتبر هستند به شرط آن که به جای x از $f(t)$ و به جای y از $g(t)$ و به جای ds از $\sqrt{f'^۲(t) + g'^۲(t)}dt$ استفاده کنیم.

مثال ۶۰. منحنی پارامتری $\begin{cases} x = a\cos^۳ t \\ y = a\sin^۳ t \end{cases}$ (که $a > ۰$) برای $۰ \leq t \leq ۲\pi$ داده شده است، مطلوب است:

الف) مساحت محدود توسط منحنی

ب) طول قوس

ج) سطح ایجاد شده در اثر دوران، حول محور x ها

د) مرکز هندسی قسمتی از نمودار که در ربع اول قرار دارد.

اگر t را بین معادلات داده شده حذف کنیم به رابطه $x^{\frac{۲}{۳}} + y^{\frac{۲}{۳}} = a^{\frac{۲}{۳}}$ می‌رسیم که با توجه به حدود t نمودار مورد نظر را باید به صورت کامل در نظر گرفت. قبلاً در مثالهای ۵۲ و ۵۴ طول قوس و مساحت سطح حاصل از دوران این نمودار را در حالت کلی محاسبه کرده‌ایم. اما در حالت پارامتری نیز آنرا محاسبه می‌کنیم.

الف) با توجه به توضیحاتی که قبلاً در مورد این نمودار داده شده است، می‌دانیم که به صورت متقارن در هر چهار ناحیه صفحه قرار دارد. بنابراین می‌توانیم مساحت را برای قسمتی که در ربع اول است ($۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$) محاسبه و جواب را در چهار ضرب کنیم. در صورت عدم توجه به تقارن، چون شکل بسته است، از نکته ۳۲ در صفحه قبل استفاده می‌کنیم.

$$\text{مساحت} = -\int_۰^{۲\pi} y dx = -\int_۰^{۲\pi} (a\sin^۳ t)(-۳a\cos^۲ t\sin t)dt = ۳a^۲\int_۰^{۲\pi} \sin^۴ t\cos^۲ t dt$$

با توجه به زوج بودن تابع تحت انتگرال نسبت به $\sin t$ و $\cos t$ می‌توان بازه انتگرال‌گیری را $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ در نظر گرفته و پاسخ را در چهار ضرب کنیم.(این عمل معادل با استفاده از تقارن نمودار نسبت به محورهای مختصات است.) برای محاسبه انتگرالی که به دست می‌آید از رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲ استفاده می‌کنیم.

$$۲x - ۱ = ۴ \quad \text{و} \quad ۲y - ۱ = ۲ \implies x = \frac{۵}{۲} \quad \text{و} \quad y = \frac{۳}{۲}$$

$$\implies \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۴ t\cos^۲ t\, dt = \frac{\Gamma(\frac{۵}{۲})\Gamma(\frac{۳}{۲})}{۲\Gamma(۴)} = \frac{(\frac{۳}{۲}.\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi})(\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi})}{۱۲} = \frac{\pi}{۳۲}$$

$$\implies \text{مساحت} = ۴ \times ۳a^۲ \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۴ t\cos^۲ t\, dt = \frac{۳\pi}{۸}a^۲$$

ب) مانند توضیحات قسمت قبل می‌توانیم از تقارن استفاده کنیم. اما بدون استفاده از تقارن داریم:

$$x' = -۳a\cos^۲ t\sin t \quad \text{و} \quad y' = ۳a\sin^۲ t\cos t$$

$$ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}dt = \sqrt{۹a^۲\sin^۲ t\cos^۴ t + ۹a^۲\sin^۴ t\cos^۲ t}dt = \sqrt{۹a^۲\sin^۲ t\cos^۲ t(\cos^۲ t + \sin^۲ t)}dt$$
$$= \sqrt{۹a^۲\sin^۲ t\cos^۲ t}dt = \frac{۳a}{۲}|\sin ۲t|dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_۰^{۲\pi} ds = \frac{۳a}{۲}\int_۰^{۲\pi} |\sin ۲t|dt \overset{\text{تقارن}}{=\!=} ۴ \times \frac{۳a}{۲}\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin ۲t dt = ۶a$$

ج) محور دوران محور تقارن است و با توجه به توضیحات نکته ۲۹ در صفحه ۳۰۸ فقط باید قسمتی از آن که بالای محور x است را دوران دهیم. پس باید $y \geq 0$ ولذا $0 \leq t \leq \pi$.

$$\text{مساحت جانبی} = 2\pi\int_{t=0}^{t=\pi}|y|ds = 2\pi\int_0^{\pi}(a\sin^3 t)(\frac{3a}{2}|\sin 2t|)dt = 6a^2\pi\int_0^{\pi}\sin^4 t|\cos t|\,dt$$

$$\overset{\text{تقارن}}{=\!=} 12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt = \frac{12a^2\pi}{5}\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{12a^2\pi}{5}$$

د) با توجه به اینکه معادله منحنی $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ است با تبدیل x به y و بر عکس ضابطه تغییر نمی‌کند، نمودار نسبت به $y = x$ متقارن است یعنی اگر $G(\overline{x},\overline{y})$ مرکز هندسی باشد، داریم $\overline{x} = \overline{y}$. توجه کنید که در ربع اول $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ و از (۴) در صفحه ۳۱۷ برای محاسبه $\overline{y}$ داریم:

$$\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} y ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t(\frac{3a}{2}\sin 2t)dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t dt = \frac{3}{5}a^2\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{5}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3a}{2}\sin 2t\,dt = \frac{3}{2}a \Longrightarrow \overline{y} = \frac{\int_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} y\,ds}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} ds} = \frac{\frac{3a^2}{5}}{\frac{3}{2}a} = \frac{2a}{5} \Longrightarrow G(\frac{2a}{5},\frac{2a}{5})$$

تست ۱۱۶ مساحت محدود به سیکلوئید به معادله $x = \theta - \sin\theta$ و $y = 1 - \cos\theta$ در یک دوره تناوب آن و محور x ها کدام است؟ (ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{5\pi}{2}$ ۳) 2π ۴) 3π

حل: گزینه ۴ درست است. چون $y = dx = 1 - \cos\theta \geq 0$ پس:

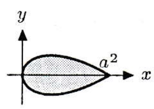
$$\text{مساحت} = \int_0^{2\pi} ydx = \int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = 3\pi$$

در محاسبه انتگرال بالا توجه کنید که چون دوره تناوب $\cos\theta$ و $\cos 2\theta$ به ترتیب برابر 2π و π است، از ویژگی ۱۳ در صفحه ۲۶۷ حاصل انتگرال این توابع یک دوره تناوب صفر می‌شود.

تست ۱۱۷ برای $a > 0$ دلخواه مساحت محدود توسط خم پارامتری $\begin{cases} y = t^3 - a^2 t \\ x = t^2 \end{cases}$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{15}a^5$ ۲) $\frac{8}{5}a^5$ ۳) $\frac{4}{15}a^5$ ۴) $\frac{8}{15}a^5$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به اینکه حدود t داده نشده است، پس منحنی باید خودش را قطع کند. توجه کنید که $y = t(t^2 - a^2)$ و لذا نمودار، محور x ها را در $t = 0, \pm a$ قطع می‌کند. نقطه $t = -a$ متناظر $A(a^2, 0)$ و $t = 0$ متناظر $O(0,0)$ و $t = a$ متناظر A است. یعنی در بازه زمانی $-a \leq t \leq 0$ نمودار از A به سمت نقطه O می‌رود(و چون برای $t \in [-a, 0]$ داریم $y \geq 0$ پس نمودار بالای محور x است) و در بازه زمانی $0 \leq t \leq a$ نمودار از O به سمت A بازمی گردد و این بار در پایین محور x قرار دارد، پس $-a \leq t \leq a$ یک نمودار محدود(بسته) را پدید می‌آورد. واضح است که در خارج این بازه، نمودار محدودی حاصل نمی‌شود. بنا بر نکته ۳۲ در صفحه ۳۲۱ مساحت برابر است با:



$$\text{مساحت} = -\int_{t=-a}^{t=a} ydx = -\int_{-a}^{a}(t^۳ - a^۲t)(۲tdt) = ۲\int_{-a}^{a}(-t^۴ + a^۲t^۲)\,dt = \frac{۸}{۱۵}a^۵$$

تست ۱۱۸ طول کمانی از خم به معادله $y = e^t \sin t$ و $x = e^t \cos t$ بین دو نقطه $t = ۰$ و $t = ۴$ کدام است؟
(ریاضی ۷۵)

۱) $e^۴ - ۱$ ۲) $۲(e^۴ - ۱)$ ۳) $\sqrt{۲}(e^۴ - ۱)$ ۴) $\sqrt{۲}(e^۴ + ۱)$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$x' = e^t(\cos t - \sin t) \text{ و } y' = e^t(\sin t + \cos t) \implies ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}dt = \sqrt{۲e^{۲t}}dt = \sqrt{۲}e^t dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_۰^۴ ds = \sqrt{۲}\int_۰^۴ e^t dt = \sqrt{۲}(e^۴ - ۱)$$

توجه کنید که برای محاسبهٔ عبارت زیر رادیکال در ds از اتحاد $(a-b)^۲ + (a+b)^۲ = ۲(a^۲ + b^۲)$ برای $a = e^t \cos t$ و $b = e^t \sin t$ استفاده کرده‌ایم.

تست ۱۱۹ اگر $۰ < \theta < \pi$، طول قوس سیکلوئید به معادلهٔ $\begin{cases} x = a(\theta + \sin\theta) \\ y = a(۱ - \cos\theta) \end{cases}$ بین مبدأ و نقطه (x, y) کدام است؟
(ریاضی ۸۰)

۱) axy ۲) $\sqrt{۸ay}$ ۳) $a\theta$ ۴) $۸ay$

حل: گزینه ۲ درست است. در مبدأ $\theta = ۰$ و در نقطه (x, y) فرض می‌کنیم $\theta = \theta_۰$.

$$x' = a(۱ + \cos\theta) \quad \text{و} \quad y' = a\sin\theta$$

$$ds = \sqrt{a^۲(۱+\cos\theta)^۲ + a^۲\sin^۲\theta d\theta} = a\sqrt{۱ + \cos^۲\theta + \sin^۲\theta + ۲\cos\theta}\,d\theta = a\sqrt{۲(۱+\cos\theta)}d\theta$$

$$= a\sqrt{۴\cos^۲\frac{\theta}{۲}}\,d\theta = ۲a|\cos\frac{\theta}{۲}|\,d\theta \implies \text{طول قوس} = \int_۰^{\theta_۰} ۲a\cos\frac{\theta}{۲}d\theta = ۴a\sin\frac{\theta_۰}{۲}$$

از طرفی $y = a(۱ - \cos\theta) = ۲a\sin^۲\frac{\theta}{۲}$ پس طول قوس $\sqrt{۸ay}$ است.

تست ۱۲۰ اگر منحنی پارامتری به معادلهٔ $\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(۱ - \cos\theta) \end{cases}$ و $۰ \le \theta \le ۲\pi$ و $a > ۰$ حول محور x ها دوران کند، مساحت شکل حاصل برابر است با:

۱) $\frac{۱۲۸\pi}{۳}a^۲$ ۲) $\frac{۱۶\pi}{۳}a^۲$ ۳) $\frac{۶۴\pi}{۳}a^۲$ ۴) $\frac{۳۲\pi}{۳}a^۲$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به (۴) در صفحه ۳۲۱ باید ds را محاسبه کنیم.

$$ds = \sqrt{\left(a(۱-\cos\theta)\right)^۲ + (a\sin\theta)^۲ d\theta} = \sqrt{a^۲(۱ + \cos^۲\theta + \sin^۲\theta - ۲\cos\theta)}\,d\theta$$

$$= a\sqrt{۲(۱-\cos\theta)}d\theta = a\sqrt{۴\sin^۲\frac{\theta}{۲}}\,d\theta = ۲a|\sin\frac{\theta}{۲}|\,d\theta = ۲a\sin\frac{\theta}{۲}\,d\theta \qquad (۰ \le \theta \le ۲\pi)$$

$$\text{مساحت جانبی} = ۲\pi\int_{t=۰}^{t=۲\pi}|y|\,ds = ۲\pi\int_۰^{۲\pi} a(۱-\cos\theta)(۲a\sin\frac{\theta}{۲}\,d\theta) = ۸a^۲\pi\int_۰^{۲\pi}\sin^۳\frac{\theta}{۲}\,d\theta$$

$$= ۸a^۲\pi\int_۰^{۲\pi}\sin\frac{\theta}{۲}(۱ - \cos^۲\frac{\theta}{۲})\,d\theta = ۸a^۲\pi(-۲\cos\frac{\theta}{۲} + \frac{۲}{۳}\cos^۳\frac{\theta}{۲})\Big|_۰^{۲\pi} = \frac{۶۴\pi}{۳}a^۲$$

خلاصه نکات مهم

۱) اگر $F(x)$ تابع اولیه $f(x)$ باشد، تمامی تابع اولیه‌های f برابر $F(x)+c$ خواهند بود و تابع اولیه‌ای از $f(x)$ که از نقطه (a,b) می‌گذرد و معادلاً در شرط $f(a)=b$ صدق می‌کند برابر $F(x)=b+\int_a^x f(t)\,dt$ است.

۲) برای محاسبه $\int\sqrt{1\pm\sin x}\,dx$ از اتحاد $1\pm\sin x=(\sin\frac{x}{2}\pm\cos\frac{x}{2})^2$ و برای محاسبه $\int\sqrt{1\pm\cos x}\,dx$ از اتحادهای $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ و $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ استفاده می‌کنیم.

۳) برای محاسبه $\int p(x)(ax+b)^\alpha dx$ که $p(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه است، قرار دهید $u=ax+b$.

۴) برای محاسبه انتگرال از توانهای زوج سینوس یا توانهای زوج کسینوس از فرمولهای کاهش توان استفاده می‌کنیم.

۵) برای محاسبه $\int\sin^m x\cos^n x\,dx$ وقتی شامل توان فرد باشد، از توان فرد یک واحد جداکرده و آنچه باقی می‌ماند را بر حسب یکی از دونسبت مثلثاتی می‌نویسیم.

۶) برای محاسبه انتگرال از حاصلضرب توانهای $\tan x$ و $\sec x$ از $u=\tan x$ یا $u=\sec x$ استفاده می‌کنیم.

۷) برای محاسبه انتگرال از حاصلضرب توانهای $\cot x$ و $\csc x$ از $u=\cot x$ یا $u=\csc x$ استفاده می‌کنیم.

۸) برای محاسبه انتگرال یک کسر گویا بر حسب سینوس و کسینوس قرار می‌دهیم $z=\tan\frac{x}{2}$ و داریم:

$$\sin x=\frac{2z}{1+z^2} \quad \text{و} \quad \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{و} \quad dx=\frac{2dz}{1+z^2}$$

۹) در محاسبه $\int\frac{dx}{a\sin^2 x+b\cos^2 x+c}$ صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ تقسیم و از $z=\tan x$ استفاده کنید.

۱۰) برای محاسبه انتگرال توابع رادیکالی، ایدهٔ حذف رادیکال استفاده می‌شود. خصوصاً در مواجه شدن با $\sqrt[n]{ax+b}$ قرار می‌دهیم $ax+b=u^n$

۱۱) در مواجه شدن با $\sqrt{a^2-x^2}$ و $\sqrt{a^2+x^2}$ و $\sqrt{x^2-a^2}$ به ترتیب از $x=a\sin\theta$ و $x=a\tan\theta$ و $x=a\sec\theta$ استفاده کرده و حدود θ را طوری می‌گیریم که تابع مثلثاتی دارای معکوس باشد.

۱۲) در مواجه شدن با کسرهای گویا(حاصل تقسیم دو چندجمله‌ای) چنانچه درجه صورت از مخرج کمتر باشد از روش تجزیه به کسرهای جزئی کمک می‌گیریم. به این ترتیب که مخرج را به ضرب عوامل اول سازنده آن، تجزیه کرده و متناظر هر عامل تعدادی کسر می‌نویسیم.

الف) بجای عبارت $(x-a)^k$ که $k\in\mathbb{N}$، مجموع k کسر به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ب) بجای عبارت $(x^{۲}+ax+b)^k$ که $\Delta < ۰$، k کسر زیر قرار می‌گیرد.

$$\frac{B_{۱}x+C_{۱}}{x^{۲}+ax+b}+\frac{B_{۲}x+C_{۲}}{(x^{۲}+ax+b)^{۲}}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^{۲}+ax+b)^k}$$

برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی را در مخرج کسر ضرب کرده و ضرایب چندجمله‌ایهای ایجاد شده در دو طرف را با هم مقایسه کنیم.

۱۳) برای محاسبه ضریب A_k در حالت (الف) از رابطه $A_k = \lim\limits_{x\to x_{۰}}(x-x_{۰})^k f(x)$ استفاده می‌کنیم.

۱۴) در مواجه شدن با حاصلضرب چندجمله‌ای در نمایی و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هیپربولیک و لگاریتم یا حاصلضرب توابع نمایی در سینوس و کسینوس از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم.

۱۵) انتگرال توانهای فرد $\sin ax$ و $\cos ax$ بر بازه‌هایی که طول آن برابر ضریبی از دوره تناوب است، صفر می‌شود.

۱۶) انتگرال هر تابع فرد (و پیوسته) بر بازه متقارن برابر صفر است.

۱۷) (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال)

برای مشتق گرفتن از انتگرال از روابط زیر استفاده می‌کنیم.

۱) $$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$$

۲) $$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t,x)\,dt = u'(x)f(u(x),x) - v'(x)f(v(x),x) + \int_{v(x)}^{u(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)\,dt$$

۱۸) برای محاسبه انتگرال توابع چند ضابطه‌ای (مثلاً تابع قدر مطلق یا جزء صحیح) انتگرال داده شده را به صورت مجموع انتگرال‌هایی می‌نویسیم که بر هر بازه انتگرال گیری توابع مورد نظر دارای فقط یک ضابطه باشد. بنابراین کاندیدای شکستن بازه در مورد توابع براکتی، نقاطی هستند که تابع داخل جزء صحیح در آنها برابر عددی صحیح و در مورد توابع قدرمطلقی، کاندیدای این کار ریشه‌های عبارات داخل قدرمطلق هستند.

۱۹) برای محاسبه حد مجموع ریمان (وقتی تعداد جملات مجموع برابر n باشد) جمله عمومی عبارت داده شده را برابر $\frac{۱}{n}f(c_k)$ قرار داده و آنرا در n ضرب کرده و در آن $\frac{k}{n}$ ایجاد کنیم. پس از شناسایی c_k که معمولاً برابر $\frac{k}{n}$ انتخاب می‌شود و تبدیل $x \to c_k$ تابع $f(x)$ حاصل می‌شود و پاسخ سؤال $\int_{۰}^{۱} f(x)dx$ می‌باشد. توجه کنید که c_k می‌تواند هر عددی در بازه $[\frac{k-۱}{n},\frac{k}{n}]$ انتخاب شده باشد.

۲۰) برخی روابط و فرمولهای مهم در انتگرال معین

۱) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

۲) $$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)dx$$

۳) $\int_{0}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx = \frac{a}{2}$

۴) $\int_{0}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\pi} f(\sin x)\,dx$

۵) f تابعی زوج است $\Longrightarrow \int_{0}^{\frac{n\pi}{2}} f(\sin x)dx = n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

۶) f تابعی زوج است $\Longrightarrow \int_{0}^{\frac{n\pi}{2}} f(\cos x)dx = n\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

۷) f یکنوای اکید است $\Longrightarrow \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx = bf(b) - af(a)$

۸) $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(-x)}dx = a$

۲۱) برخی از انتگرالهایی که در سؤالات زیاد مطرح می‌شوند.

۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx = \frac{\pi}{4}$

۲) $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{a-\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} \qquad a > 1$

۳) $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}dx = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \qquad 0 < p < 1$

۴) $\int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{a}{s^2+a^2}$

۵) $\int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\cos ax\,dx = \frac{s}{s^2+a^2}$

۶) $\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ و $a > 0$

۷) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-sx}\sin ax\,dx = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$

۸) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-sx}\cos ax\,dx = \frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$

۲۲) در انتگرالهایی که بیش از یک ناسرگی دارند، همگرایی فقط وقتی رخ می‌دهد که انتگرال در همه ناسرگی‌ها همگرا باشد.

۲۳) انتگرال ناسره $\int_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ (که $a > 0$ می‌باشد) برای $p > 1$ همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست.

۲۴) انتگرال ناسره $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x^p}$ (که $a > 0$ می‌باشد) برای $p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست.

۲۵) انتگرال ناسره $\displaystyle\int_{x_\circ}^{a}\frac{dx}{(x-x_\circ)^p}$ ($a > x_\circ$) برای $p < ۱$ همگرا و برای $p \geq ۱$ واگراست.

۲۶) (**آزمون مقایسه**) اگر $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ و $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ فقط در نقطه $x_\circ$ ناسره بوده و در همسایگی نقطه ناسرگی داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq \circ$ در این صورت:

الف) همگرایی $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ همگراست.

ب) واگرایی $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ نتیجه می‌دهد که $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ واگراست.

۲۷) (**آزمون هم ارزی**) اگر $f(x)$ فقط در $x_\circ$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim g(x)$ آنگاه $\displaystyle\int_a^b f dx$ و $\displaystyle\int_a^b g dx$ از لحاظ وضع همگرایی یکسان هستند.

۲۸) اگر $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ فقط در بینهایت ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \dfrac{۱}{x^p}$ چنانچه $p > ۱$ انتگرال همگرا و برای $p \leq ۱$ واگراست.

۲۹) اگر $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ فقط در $x = x_\circ$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \dfrac{۱}{(x-x_\circ)^p}$ چنانچه $p < ۱$ انتگرال همگرا و برای $p \geq ۱$ واگراست.

۳۰) اگر $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ همگرا باشد، آنگاه $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ همگرا(همگرای مطلق) است.

۳۱) برای محاسبه انتگرال ناسره بجز در حالتی که نقطه ناسرگی داخل بازه است، نیازی به توجه به ناسرگی نیست و آنرا مانند انتگرال معین محاسبه می‌کنیم. ولی در جایگذاری ناسرگی در تابع اولیه در صورت نیاز باید حد را جایگزین مقدار نماییم.

۳۲) تابع گاما با رابطه $\displaystyle\int_\circ^{+\infty} t^p e^{-t}\ dt = \Gamma(p+۱) = p!$ برای $p > -۱$ تعریف شده و دارای رابطه بازگشتی $\Gamma(p+۱) = p\Gamma(p)$ است.

۳۳) فرمولهایی که با تابع گاما در ارتباط هستند.

$$۱)\quad \int_\circ^۱ (-\ln x)^p\ dx = \Gamma(p+۱) \qquad p > -۱$$

$$۲)\quad \int_\circ^۱ x^m(\ln x)^n\ dx = \frac{(-۱)^n\Gamma(n+۱)}{(m+۱)^{n+۱}} = \frac{(-۱)^n n!}{(m+۱)^{n+۱}} \qquad m,n > -۱$$

۳) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2p+1}\, dx = \frac{1}{2}\Gamma(p+1) \qquad p > -1$

۴) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

۵) $\int_0^{+\infty} e^{-st} t^p\, dt = \frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}} \qquad p > -1$

۶) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \qquad 0 < p < 1$

۷) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(\frac{\pi p}{2})} \qquad 0 < p < 1$

۸) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\sin(\frac{\pi p}{2})} \qquad 0 < p < 1$

۹) $\int_0^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad x, y > 0$

۱۰) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta d\theta = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma(x+y)} \qquad x, y > 0$

۳۴) مساحت ناحیه محدود توسط نمودارهای $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ که در این فاصله خط موازی محور y ها از یکی از دو نمودار وارد و از دیگری خارج گردد برابر $\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$ است.

۳۵) جسمی قائم در فضای سه بعدی طوری قرار دارد که هر صفحه عمود بر محور x ها جسم را در ناحیه‌ای (مقطع عرضی) به مساحت $A(x)$ قطع می‌کند. اگر در قاعده جسم داشته باشیم $a \le x \le b$، حجم از رابطه $\int_a^b A(x)dx$ به‌دست می‌آید.

۳۶) (روش دیسک) اگر ناحیه محدود بین نمودار توابع پیوسته $y = f(x)$ و محور x ها و دو خط $x = a$ و $x = b$ حول محور x ها دوران کند و محور دوران از داخل شکل عبور نکند حجم جسم حاصل برابر $\pi \int_a^b f^2(x)dx$ است.

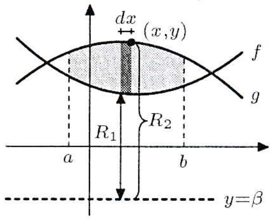
این فرمول را به صورت زیر هم می‌توان نوشت.

$$\text{حجم} = \pi \int_a^b (\text{شعاع دوران})^2\, dx$$

۳۷) (روش پوسته استوانه‌ای) اگر ناحیه محدود بین نمودار تابع پیوسته $f(x)$ و محور x ها دو خط $x = a$ و $x = b$ حول محور y ها دوران کند،(a و b هم علامت هستند) حجم جسم حاصل برابر $2\pi \int_a^b |x||f(x)|dx$ است. این فرمول را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

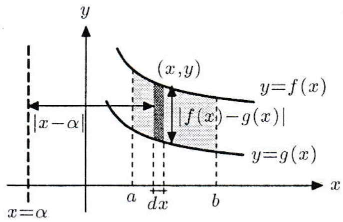
$$\text{حجم} = 2\pi \int_a^b (\text{شعاع دوران}) \times (\text{ارتفاع})\, dx$$

۳۸) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ (که یکی سقف و دیگری کف ناحیه است.) حول خط $y = \beta$ دوران کند ، حجم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید.



$$\text{حجم} = \pi \int_a^b (R_2^2 - R_1^2)\, dx$$
$$= \pi \int_a^b \left| \big(g(x) - \beta\big)^2 - \big(f(x) - \beta\big)^2 \right| dx$$

۳۹) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار f و g و در فاصله $[a,b]$ (که یکی از نمودارها سقف و دیگری کف ناحیه است.) حول خط $x = \alpha$ دوران کند، فرمول به صورت $2\pi \int_a^b |x-\alpha|\, |f(x) - g(x)| dx$ خواهد بود.



۴۰) اگر محور دوران (در دوران یک ناحیه حول یک محور) محور تقارن ناحیه باشد، کافی است حجم حاصل از دوران نیمه‌ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را محاسبه کرده و نباید پاسخ نهایی را در ۲ ضرب نماییم.

۴۱) طول قسمتی از نمودار $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ برابر $\int_{x=a}^{x=b} ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx$ است.

۴۲) مساحت سطح جانبی ایجاد شده در اثر دوران قسمتی از نمودار $y = f(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ حول محور افقی یا قائمی که منحنی را قطع نمی‌کند برابر $2\pi \int_{x=a}^{x=b}$ (شعاع دوران) $\times\, ds$ است.

۴۳) اگر محور دوران (در دوران یک نمودار حول یک محور) محور تقارن نمودار باشد، کافی است سطح جانبی حاصل از دوران نیمه‌ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را محاسبه کرده و نباید پاسخ نهایی را در ۲ ضرب نماییم.

۴۴) قطعه سیمی در امتداد محور x ها و در فاصله $a \le x \le b$ طوری قرار دارد که چگالی خطی آن در نقطه x، $\delta(x)$ است. جرم سیم برابر است با $\int_a^b \delta(x)dx$ می‌باشد.

۴۵) D ناحیه‌ای در صفحه است که به محور x ها و نمودار $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود شده باشد.

مرکز هندسی این ناحیه $G(\overline{x}, \overline{y})$ است که:

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b x f(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx} \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}$$

۴۶) اگر ناحیه D دارای محور تقارن باشد، مرکز هندسی بر محور تقارن قرار می‌گیرد.

۴۷) فرض کنید ناحیه D اجتماع دو ناحیه مجزای D_1 و D_2 باشد، به طوریکه مرکز هندسی هر یک از ناحیه‌ها $G_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ و $G_2(\overline{x}_2, \overline{y}_2)$ و مساحت آنها A_1 و A_2 باشد. در این صورت مرکز هندسی ناحیه D نقطه $G(\overline{x}, \overline{y})$ است به طوریکه:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x}_1 A_1 + \overline{x}_2 A_2}{A_1 + A_2} \quad \text{و} \quad \overline{y} = \frac{\overline{y}_1 A_1 + \overline{y}_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

۴۸) (**قضیه اول پاپوس**) اگر ناحیه D در صفحه حول محوری که از داخل آن عبور نمی‌کند دوران کند، حجم جسم حاصل از دوران برابر است با:

(فاصله مرکز هندسی ناحیه از محور دوران) $\times 2\pi \times$ (مساحت ناحیه) = حجم

۴۹) (**قضیه دوم پاپوس**) اگر منحنی c در صفحه حول محوری که آن را قطع نمی‌کند دوران کند، مساحت سطح ایجاد شده در اثر دوران برابر است با:

(فاصله مرکز هندسی خم از محور دوران) $\times 2\pi \times$ (طول قوس خم) = مساحت سطح جانبی

۵۰) مساحت محدود توسط منحنی پارامتری $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ و خطوط $x = f(a)$ و $x = f(b)$ و محور x ها برابر $\int_a^b |y(t)|\,|x'(t)|dt = \int_{t=a}^{t=b} |y|dx$ است.

۵۱) اگر منحنی پارامتری $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ مورد نظر برای $a \leq t \leq b$ بسته و در جهت مثلثاتی باشد، مساحت محدود توسط آن برابر $\frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} xdy - ydx = -\int_{t=a}^{t=b} ydx = \int_{t=a}^{t=b} x\, dy$ می‌باشد.

۵۲) المان طول قوس برای خم پارامتری $x = x(t)\ ,\ y = y(t)$ برابر $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt$ است.

تستهای تکمیلی فصل ۴ ـ مبحث انتگرال (سؤالات سطح ۱)

مبحث انتگرال نامعین

۱. اگر $\int f(x)dx = \frac{۱}{۳}x\sqrt{x}$ آن‌گاه مشتق $f(\frac{۱}{x^۲})$ برای $x > ۰$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{x^۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲x^۲}$ ۳) $-\frac{۱}{x^۵}$ ۴) $\frac{۱}{x}$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع اولیه $f(x)$، $F(x) = \frac{۱}{۳}x\sqrt{x}$ است و لذا $f(x) = F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{۲}$.

$$f'(x) = \frac{۱}{۴\sqrt{x}} \implies \frac{d}{dx}f(\frac{۱}{x^۲}) = -\frac{۲}{x^۳}f'(\frac{۱}{x^۲}) = -\frac{۲}{x^۳} \times \frac{۱}{۴}x = -\frac{۱}{۲x^۲}$$

۲. حاصل $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^۲-۱}}$ برای $x > ۰$ برابر است با: (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $\text{Arcsin}\sqrt{x^۲-۱}+c$ ۲) $\text{Arcsin}\sqrt{x}+c$ ۳) $\text{Arctan}\sqrt{x}+c$ ۴) $\tan^{-۱}\sqrt{x^۲-۱}+c$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به فرمول (۲۵) در صفحه ۲۴۶ جواب $\sec^{-۱}x + c$ است اما:

$$\alpha = \sec^{-۱}x \implies x = \sec\alpha \implies \tan^۲\alpha = \sec^۲\alpha - ۱ = x^۲ - ۱ \implies \alpha = \tan^{-۱}\sqrt{x^۲-۱}$$

۳. فرض کنید $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g(۱) = ۱$ برای $x > ۰$، $g'(x^۲) = x^۳$ در این صورت $g(۴)$ برابر است با: (ریاضی ۷۹)

۱) $\frac{۶۲}{۵}$ ۲) $\frac{۶۳}{۵}$ ۳) $\frac{۶۴}{۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۵}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$g'(x^۲) = x^۳ \implies g'(x) = x^{\frac{۳}{۲}} \implies g(x) = \int x^{\frac{۳}{۲}}dx = \frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}} + c$$

چون $g(۱) = ۱$ پس $c = \frac{۳}{۵}$ و لذا $g(x) = \frac{۲}{۵}x^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۳}{۵}$ پس $g(۴) = \frac{۲}{۵}(۳۲) + \frac{۳}{۵} = \frac{۶۷}{۵}$.

مبحث تکنیکهای انتگرال گیری

۴. $\int \sqrt[۳]{۱+۳\sin x}\cos x dx$ برابر است با: (مواد ۷۶)

۱) $(۱+۳\sin x)^{\frac{۴}{۳}} + c$ ۲) $\frac{۱}{۴}(۱+۳\sin x)^{\frac{۴}{۳}} + c$

۳) $(۱+۳\sin x)^۴ + c$ ۴) $(۱+۳\sin x)^۵ + c$

حل: گزینه ۲ درست است. از جانشینی $u = ۱ + ۳\sin x$ و $du = ۳\cos x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۳}\int \sqrt[۳]{u}du = \frac{۱}{۴}u^{\frac{۴}{۳}} + c = \frac{۱}{۴}(۱+۳\sin x)^{\frac{۴}{۳}} + c$$

۵. انتگرال تابع $y = x^۳e^{x^۴}$ کدام است؟ (سیستم ۷۸)

۱) $\frac{۱}{۴}e^{x^۴} + c$ ۲) $\frac{۱}{۳}e^{x^۳} + c$ ۳) $\frac{۱}{۴}x^۴e^{x^۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}x^۳e^{x^۳}$

حل: گزینه ۱ درست است. از تغییر متغیر $u = x^۴$ و $du = ۴x^۳dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int x^{۳}e^{x^{۴}}dx = \frac{۱}{۴}\int e^{u}du = \frac{۱}{۴}e^{u} + c = \frac{۱}{۴}e^{x^{۴}} + c$$

۶. حاصل $\int \frac{xdx}{\sqrt[۳]{x^{۲}-۱}}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $\frac{۳}{۴}(x^{۲}-۱)^{\frac{۲}{۳}} + c$ ۲) $\frac{۳}{۴}(x^{۲}-۱)^{\frac{۱}{۳}} + c$ ۳) $\frac{۳}{۲}(x^{۲}-۱)^{\frac{۲}{۳}} + c$ ۴) $\frac{۳}{۲}(x^{۲}-۱)^{\frac{۱}{۳}} + c$

حل: گزینه ۱ درست است. قرار دهید $u = x^{۲} - ۱$ و لذا $du = ۲xdx$.

$$\text{انتگرال} = \int \frac{\frac{۱}{۲}du}{\sqrt[۳]{u}} = \frac{۱}{۲}\int u^{-\frac{۱}{۳}}du = \frac{۳}{۴}u^{\frac{۲}{۳}} + c = \frac{۳}{۴}(x^{۲}-۱)^{\frac{۲}{۳}} + c$$

۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}}$ برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۱}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}}$

۳) $\frac{۱}{۲}\sqrt{x+۱} - \frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{\sqrt{x+۱}} - \frac{۱}{\sqrt{x-۱}}\right)$

حل: گزینه ۲ درست است. با ضرب صورت و مخرج در $\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}$ داریم:

$$\frac{۱}{۲}\int \left(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}\right)dx = \frac{۱}{۳}(x+۱)^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}(x-۱)^{\frac{۳}{۲}} + c$$

۸. مقدار $\int \frac{e^{x}}{۱+e^{x}}dx$ برابر است با: (نماد L، لگاریتم در مبنای e است.) (مواد ۷۶)

۱) $۱+e^{x}+c$ ۲) $L(۱-e^{x})+c$ ۳) $Le^{x}+c$ ۴) $L(۱+e^{x})+c$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$۱+e^{x} = u \quad \text{و} \quad du = e^{x}dx \Longrightarrow \text{انتگرال} = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + c = L(e^{x}+۱) + c$$

۹. اگر $F(\theta) = \int \frac{\cos\theta d\theta}{۱+\sin\theta}$ حاصل $F(\theta)$ با شرط $F(\circ) = \circ$ کدام است؟ (سیستم ۸۰)

۱) $\ln(۲-\cos\theta)$ ۲) $\ln(۱+\sin\frac{\theta}{۲})$ ۳) $\ln(۱-\sin\theta)$ ۴) $\ln(۱+\sin\theta)$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$u = ۱+\sin\theta \quad \text{و} \quad du = \cos\theta d\theta \Longrightarrow F(\theta) = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln(۱+\sin\theta) + c$$

$F(\circ) = (\ln ۱) + c = \circ$ پس $c = \circ$.

۱۰. کدام گزینه جواب $\int \sin x\cos x dx$ <u>نیست</u>؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $-\frac{۱}{۲}\cos^{۲}x + c$ ۲) $\frac{۱}{۲}\cos^{۲}x + c$ ۳) $-\frac{۱}{۴}\cos ۲x + c$ ۴) $\frac{۱}{۲}\sin^{۲}x + c$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\int \sin x\cos x dx = \frac{۱}{۲}\int \sin ۲x dx = -\frac{۱}{۴}\cos ۲x + c$$

اما چون $\cos ۲x = ۲\cos^{۲}x - ۱$ پس جواب به صورت $-\frac{۱}{۲}\cos^{۲}x + c$ هم نوشته می‌شود و چون $\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^{۲}x$ جواب انتگرال را به صورت $\frac{۱}{۲}\sin^{۲}x + c$ هم می‌توان نوشت.

۱۱. حاصل $\int x^{4x}(\ln x + 1)dx$ کدام است؟ (آمار ۷۸)

۱) $\frac{1}{4}x^{4x} + c$ ۲) $4x\ln x + c$ ۳) $4xe^{4x\ln x} + c$ ۴) $\frac{1}{4}x(\ln x + 1) + c$

حل: گزینه ۱ درست است. قرار دهید $u = x^{4x}$

$$\ln u = 4x\ln x \implies \frac{du}{u} = (4\ln x + 4)dx \implies du = 4x^{4x}(1 + \ln x)dx$$

$$\implies \text{انتگرال} = \frac{1}{4}\int du = \frac{1}{4}u + c = \frac{1}{4}x^{4x} + c$$

۱۲. اگر $F(x) = \int f(x)dx$، آنگاه $\int f(1 - 2x)dx$ برابر است با: (ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{1}{2}F(1 - 2x)$ ۲) $-\frac{1}{2}F(1 - 2x)$ ۳) $-2F(1 - 2x)$ ۴) $F(1 - 2x)$

حل: گزینه ۲ درست است. قرار دهید $u = 1 - 2x$ و $du = -2dx$.

$$\text{انتگرال} = -\frac{1}{2}\int f(u)du = -\frac{1}{2}F(u) + c = -\frac{1}{2}F(1 - 2x) + c$$

۱۳. تابع اولیه $\sin^4 x$ عبارت است از:

۱) $-\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$ ۲) $\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{3}{8}x$

۳) $-\frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$ ۴) $\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به روش کاهش مرتبه:

$$\int \sin^4 x dx = \int (\frac{1 - \cos 2x}{2})^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)dx\right) = \frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

۱۴. مقدار انتگرال $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)^2$ ۲) $2\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)^2$

۳) $\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1)$ ۴) $2\sqrt{x} + 2\ln(\sqrt{x} + 1)$

حل: گزینه ۲ درست است. برای حذف رادیکال قرار دهید $u > 0$, $x = u^2$ و $dx = 2udu$.

$$\text{انتگرال} = \int \frac{2udu}{1 + u} = \int (2 - \frac{2}{u + 1})du = 2u - 2\ln(u + 1) + c = 2\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x} + 1) + c$$

۱۵. برای محاسبه $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 25}}$ کدامیک از تغییر متغیرهای زیر مناسب‌تر است؟ (مدیریت نساجی ۸۲)

۱) $x = 5\cos\theta$ ۲) $x = 5\sin\theta$ ۳) $x = 5\tan\theta$ ۴) $x = 5\sec\theta$

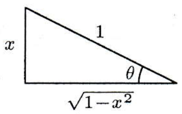
حل: گزینه ۴ درست است. به دلیل ظاهر شدن $\sqrt{x^2 - 25}$ از $x = 5\sec\theta$ استفاده می‌کنیم.

۱۶. تابع اولیه $f(x) = \int \frac{dx}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ۲) $-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ۳) $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ۴) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$x = \sin\theta \quad \text{و} \quad dx = \cos\theta d\theta \implies f(x) = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^{۳}\theta} = \int \sec^{۲}\theta d\theta = \tan\theta + c$$



اگر ضلع روبرو به زاویه θ را x و وتر مثلث را ۱ قرار دهیم، آنگاه تغیر متغیر $x = \sin\theta$ ایجاد می‌شود و با توجه به مثلث روبرو $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{۱ - x^{۲}}}$ و لذا $f(x) = \frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}} + c$.

۱۷. انتگرال $\int xe^x dx$ برابر کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $(x+۱)e^x + c$ ۲) $(x-۱)e^x + c$ ۳) $\frac{x}{x+۱}e^x + c$ ۴) $\frac{x+۱}{x}e^x + c$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $u = x$ و $dv = e^x dx$ آنگاه $du = dx$ و $v = e^x$.

$$\text{انتگرال} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = (x-۱)e^x + c$$

۱۸. اگر $F(x) = \int x\sin x dx$ مقدار $F(\frac{\pi}{۲}) - F(\circ)$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) $\circ$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۲} - ۱$ ۴) ۱

حل: گزینه ۴ درست است. قرار دهید $u = x$ و $dv = \sin x dx$ و لذا $du = dx$ و $v = -\cos x$.

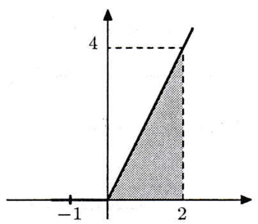
$$F(x) = \int x\sin x dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$$

$$\implies F(\frac{\pi}{۲}) - F(\circ) = (\circ + ۱ + c) - (\circ + \circ + c) = ۱$$

مبحث انتگرال معین

۱۹. حاصل $\int_{-۱}^{۲}(x + |x|)dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و سیستم ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶



حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(x) = x + |x| \geq \circ$ پس مساحت محصور زیر نمودار f، بالای محور x ها و دو خط $x = -۱$ و $x = ۲$ را محاسبه می‌کنیم. چون $f(x) = \begin{cases} \circ & x < \circ \\ ۲x & x \geq \circ \end{cases}$ پس:

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۲}(۲)(۴) = ۴$$

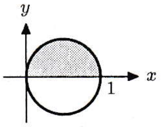
۲۰. مقدار انتگرال $\int_{\circ}^{۱}\sqrt{x - x^{۲}}dx$ کدام است؟ (مکانیک ۷۵)

۱) $\frac{\pi}{۸}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{\pi}{۴} - ۱$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. باید مساحت محدود توسط $y = \sqrt{x - x^{۲}}$ و محور x ها و دو خط $x = \circ$ و $x = ۱$ را به دست آوریم. توجه کنید که:

$$y^{۲} + x^{۲} = x \implies y^{۲} + (x - \frac{۱}{۲})^{۲} = \frac{۱}{۴}$$



که معادله دایره به مرکز $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و شعاع $\frac{۱}{۲}$ است و چون $y \geq ۰$ پس نیمه بالایی دایره مدنظر می‌باشد. پس باید مساحت نیم‌دایره به شعاع $\frac{۱}{۲}$ را محاسبه کنیم.

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\pi = \frac{\pi}{۸}$$

روش دوم. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۴) در صفحه ۳۰۱:

$$\text{انتگرال} = \int_{۰}^{۱} x^{\frac{۱}{۲}}(۱-x)^{\frac{۱}{۲}}dx = \beta\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۳}{۲}\right) = \frac{\Gamma(\frac{۳}{۲})\Gamma(\frac{۳}{۲})}{\Gamma(۳)} = \frac{(\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi})^{۲}}{۲!} = \frac{\pi}{۸}$$

۲۱. هرگاه $f(x) = \int_{۱}^{x} \frac{dt}{۱+t^{۲}}$ و $f(۴) - f(۲) < A$ بهترین مقدار ممکن برای عدد A کدام است؟

(سیستم ۷۹)

۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f(۴) - f(۲) = \int_{۱}^{۴} - \int_{۱}^{۲} = \int_{۱}^{۴} + \int_{۲}^{۱} = \int_{۲}^{۴}$ پس هدف یافتن کران بالای $\int_{۲}^{۴} \frac{dt}{۱+t^{۲}}$ است و لذا از خاصیت ٦ در صفحه ٢٦٦ باید کران بالای $g(t) = \frac{۱}{۱+t^{۲}}$ بر بازه $[۲, ۴]$ محاسبه شود.

$$۲ \leq t \leq ۴ \implies ۱+t^{۲} \geq ۵ \implies g(t) = \frac{۱}{۱+t^{۲}} \leq \frac{۱}{۵} \implies \int_{۲}^{۴} g(t)dt < \frac{۱}{۵}(۴-۲) = \frac{۲}{۵}$$

۲۲. انتگرال $\int_{-\pi}^{\pi} x^{۵}\cos^{۷} x dx$ برابر است با:

(معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) ∞ ۲) صفر ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) ۱

حل: گزینه ۲ درست است. چون تابع تحت انتگرال فرد و بازه انتگرال‌گیری متقارن است، حاصل صفر می‌شود.

۲۳. مقدار انتگرال $\int_{-۳}^{۳} x۲^{x^{۲}}dx$ کدام است؟

(سیستم ۸۰)

۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۴ ۴) $۱+\ln ۲$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع تحت انتگرال فرد و بازه متقارن است و لذا انتگرال آن صفر می‌شود.

۲۴. اگر $F(x) = \int_{۰}^{\sqrt{x}} (۱+t)^{\frac{۱}{۲}} dt$ مقدار $F'(x)$ در $x = ۴$ کدام است؟

(سیستم ۸۰)

۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به قضیه اساسی:

$$F'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۱+\sqrt{x})^{\frac{۱}{۲}} \implies F'(۴) = \frac{۱}{۴}\sqrt{۳}$$

۲۵. اگر $f(x) = \int_{۰}^{\sqrt{x}} e^{t^{۲}} dt$ آن‌گاه $f'(۱)$ کدام است؟

(آمار ۷۹)

۱) $۲e$ ۲) e ۳) $\frac{e}{\sqrt{۲}}$ ۴) $\frac{e}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}e^{(\sqrt{x})^{۲}} = \frac{e^{x}}{۲\sqrt{x}} \implies f'(۱) = \frac{e}{۲}$$

۲۶. اگر $f(x)=\int_{1}^{x^2}\sin(t^2)dt$ مقدار $f(1)f'(1)$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) $3\cos(1)$ ۲) $3\sin(1)$

۳) $3\sin(1)\cos(1)$ ۴) 0

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به خاصیت (۳) در صفحه ۲۶۶:

$$f(1)=\int_{1}^{1}\sin t^2 dt=0 \implies f(1)f'(1)=0$$

۲۷. $f(x)=\int_{0}^{x}e^{2t}\sqrt{1+9t^4}dt$ و $g(x)=x^n e^{2x}$، اگر $\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f'(x)}{g(x)}\right|=3$ آنگاه n برابر است با: (آمار ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به قضیه اساسی حساب دیفرانسیل $f'(x)=e^{2x}\sqrt{1+9x^4}$.

$$\text{حد}=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{e^{2x}\sqrt{1+9x^4}}{x^n e^{2x}}\right| \overset{\text{همارزی}}{=\!=\!=} \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{3x^2}{x^n}\right|=3 \implies n=2$$

۲۸. اگر $f(x)=e^{g(x)}$ و $g(x)=\int_{2}^{x}\frac{tdt}{1+t^3}$ مقدار $f'(2)$ کدام است؟ (مواد ۸۲)

۱) 0 ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{4}{9}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f'(x)=g'(x)e^{g(x)} \quad \text{و} \quad g'(x)=\frac{x}{1+x^3} \implies f'(2)=g'(2)e^{0}=\frac{2}{9}$$

۲۹. $\frac{d}{dx}\left(\int_{x}^{x+1}\frac{dt}{1+t^2}\right)$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۷۹)

۱) $\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}$ ۲) $\frac{2}{1+x^2}$

۳) $\frac{1}{2(1+x^2)}$ ۴) $\frac{1+x}{1+(1+x)^2}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به نتیجه ۴ در صفحه ۲۶۸، اگر $u(x)=x+1$ و $v(x)=x$:

$$\text{مشتق}=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+x^2}$$

۳۰. اگر $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{dt}{1+t^2}$ مقدار $f'(\frac{\pi}{4})$ کدام است؟

۱) 0 ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ۴) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{1+\cos^2 x}-\frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \implies f'(\frac{\pi}{4})=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

۳۱. اگر $y=x^{\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt}$ باشد، مشتق آن در $x=1$ برابر است با: (سیستم ۷۳)

۱) ۱ ۲) ۰ ۳) ۱- ۴) مشتق ندارد.

حل: گزینه ۲ درست است. از مشتق لگاریتمی استفاده میکنیم.

$$\ln y=(\ln x)\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt \implies \frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\int_{1}^{x}e^{-t^2}dt+e^{-x^2}\ln x \overset{x=1}{=\!=\!=} 0+0=0 \implies y'=0$$

۳۲. اگر $f(x) = \int_{0}^{\sin x} xe^{-t^2}dt$، آنگاه $f'(\pi)$ برابر است با: (ریاضی ۷۴)

۱) $-\pi$ ۲) π ۳) $\pi - e$ ۴) $\pi + e$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قضیه اساسی:

$$f'(x) = (\cos x)xe^{-\sin^2 x} + \int_{0}^{\sin x} e^{-t^2}dt \implies f'(\pi) = -\pi + \int_{0}^{0} e^{-t^2}dt = -\pi$$

۳۳. در صورتی که $I(\alpha) = \int_{-1}^{1} \sin(\alpha x^2)dx$ باشد، مقدار $\frac{dI}{d\alpha}$ برابر است با: (هسته‌ای ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\alpha x^2)dx$ ۲) $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-1}^{1} x \cos(\alpha x^2)dx$

۳) $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-1}^{1} \alpha \sin(\alpha x^2)dx$ ۴) $\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-1}^{1} \alpha x^2 \cos(\alpha x^2)dx$

حل: گزینه ۱ درست است. با استفاده از نتیجه ۵ در صفحه ۲۶۸:

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial\alpha}\sin(\alpha x^2)dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cos(\alpha x^2)dx$$

۳۴. اگر $F(x) = \int_{0}^{e^x} y\ln y dy$ مشتق مرتبه دوم $F(x)$ به ازای $x = 1$ کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $2e$ ۲) $3e$ ۳) $3e^2$ ۴) $2e^2$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$F'(x) = e^x(e^x \ln e^x) = xe^{2x} \implies F''(x) = e^{2x}(1 + 2x) \implies F''(1) = 3e^2$$

۳۵. چنانچه $f(x) = \int_{0}^{x} (1 - t^3)^{-\frac{1}{2}}dt$ باشد آنگاه: (نساجی ـ آزاد ۸۰، مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $2(1 + x^3)f''(x) = 3x^2 f'(x)$ ۲) $2(1 - x^3)f''(x) = 3x^2 f'(x)$

۳) $2(1 + x^3)f'(x) = 3x^2 f''(x)$ ۴) $2(1 - x^3)f(x) = 3x^2 f''(x)$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$f'(x) = (1 - x^3)^{-\frac{1}{2}} \implies f''(x) = \frac{3}{2}x^2(1 - x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\implies \frac{f''(x)}{f'(x)} = \frac{3}{2} \times \frac{x^2(1 - x^3)^{-\frac{3}{2}}}{(1 - x^3)^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3x^2}{2(1 - x^3)} \implies 2(1 - x^3)f''(x) = 3x^2 f'(x)$$

۳۶. اگر $f(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1 + \cos t}dt$ حاصل $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) 0 ۲) ∞ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\text{حد} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2}$$

۳۷. مقدار $I=\lim_{x\to ۰}\dfrac{\int_۰^x t^۴\sin t dt}{x^٦}$ برابر است با: (مدیریت نساجی ۸۰)

۱) ۱ ۲) $+\infty$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{٦}$

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ است. از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$I=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۴\sin x}{٦x^۵}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۵}{٦x^۵}=\frac{۱}{٦}$$

۳۸. اگر f تابعی پیوسته باشد آنگاه $I=\lim_{x\to x_۱}\dfrac{x}{x-x_۱}\int_{x_۱}^x f(t)dt$ برابر است با:

۱) $f'(x_۱)$ ۲) ۰ ۳) $f(x_۱)$ ۴) $x_۱f(x_۱)$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\lim_{x\to x_۱}\frac{x\int_{x_۱}^x f(t)dt}{x-x_۱}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to x_۱}\frac{\int_{x_۱}^x f(t)dt+xf(x)}{۱}=۰+x_۱f(x_۱)=x_۱f(x_۱)$$

۳۹. حاصل $\lim_{x\to ۱}\dfrac{x^۲}{x-۱}\int_۱^{x^۲}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{۴}t)}{t}dt$ کدام است؟ (ریاضی ۷۹)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۲ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲\int_۱^{x^۲}\frac{\sin(\frac{\pi}{۴}t)}{t}dt}{x-۱}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x\int_۱^{x^۲}\frac{\sin(\frac{\pi}{۴}t)}{t}dt+۲x^۳\frac{\sin(\frac{\pi}{۴}x^۲)}{x^۲}}{۱}=۰+۲\sin\frac{\pi}{۴}=\sqrt{۲}$$

۴۰. مقدار $\lim_{x\to ۰}\left(\dfrac{۱}{x-\sin x}\int_۰^x \tan^۲ t dt\right)$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۴ درست است. حد به صورت $۰\times\infty$ است. از هوپیتال کمک می‌گیریم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\int_۰^x \tan^۲ t dt}{x-\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\tan^۲ x}{۱-\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲}{\frac{۱}{۲}x^۲}=۲$$

۴۱. مقدار $I=\lim_{x\to ۰}\dfrac{\left(\int_۰^x e^{t^۲}dt\right)^۲}{\int_۰^x e^{۲t^۲}dt}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

حل: گزینه ۲ درست است. حد به صورت $\frac{۰}{۰}$ است.

$$I\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to ۰}\frac{۲e^{x^۲}\int_۰^x e^{t^۲}dt}{e^{۲x^۲}}=۰$$

۴۲. مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{2x}\sin t\,dt}{\int_{\cos x}^{1}t\,dt}$ برابر است با: (معدن ۷۴)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۳ درست است. حد به صورت $\frac{0}{0}$ است. با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال:

$$\text{حد} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x-\sin x}{-(-\sin x)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-x}{x}=3$$

۴۳. در مورد تابع $f(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{dt}{3+t^2}$ کدام گزینه صحیح است؟ (آمار ۸۲)

۱) f تابعی است اکیداً صعودی ۲) f تابعی است اکیداً نزولی

۳) تابع f دارای یک نقطه ماکزیمم مطلق است. ۴) تابع f دارای یک نقطه می‌نیمم مطلق است.

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به گزینه‌ها باید $f'(x)$ را تشکیل دهیم.

$$f'(x)=\frac{1}{3+x^2}-\frac{(-1)}{3+(-x)^2}=\frac{2}{3+x^2}>0\implies f \text{ صعودی اکید است.}$$

۴۴. معادله $\int_0^x f(x)dx=e^{2x}-2$ در کدامیک از روابط زیر صدق می‌کند؟ (عمران ۷۳)

۱) $f(x)=e^{2x}$ ۲) برای هیچ $f(x)$ برقرار نیست.

۳) $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$ ۴) $f(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x})$

حل: گزینه ۲ درست است. اگر $x=0$ در دو طرف رابطه قرار داده شود، داریم $0=1-2=-1$ که نادرست است پس هیچ تابعی در معادلهٔ داده شده صدق نمی‌کند.

۴۵. تابع پیوسته f را چنان بیابید که در معادلهٔ $f(\alpha)=2+\int_0^1(\alpha+x)f(x)dx$ صدق کند. (ریاضی ۸۲)

۱) $f(x)=-12+24x$ ۲) $f(x)=12-24x$ ۳) $f(x)=-14-12x$ ۴) $f(x)=-12-24x$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر از عبارت داده شده نسبت به α مشتق بگیریم، رابطه $f'(\alpha)=\int_0^1 f(x)dx$ حاصل می‌شود که نشان می‌دهد مشتق f عددی ثابت است و لذا $f(x)=ax+b$.(با توجه به گزینه‌ها نیز این موضوع واضح است!)

$$a\alpha+b=2+\int_0^1(\alpha+x)(ax+b)dx=2+\left(\frac{a}{3}x^3+\frac{a\alpha+b}{2}x^2+b\alpha x\right)\Big|_0^1=\frac{a}{3}+\frac{a\alpha+b}{2}+b\alpha+2$$

$$\implies\begin{cases}a=\dfrac{a}{2}+b\\ b=\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{2}+2\end{cases}\implies a=-24 \text{ و } b=-12$$

۴۶. شیب مماس بر منحنی $y=f(x)$ در هر نقطه از آن برابر معکوس مربع طول آن نقطه است. اگر این منحنی از نقطه $(1,1)$ بگذرد، معادله مجانب افقی آن کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $y=-2$ ۲) $y=-1$ ۳) $y=0$ ۴) $y=2$

حل: گزینه ۴ درست است. در نقطه (x,y) روی نمودار داریم:

$$y' = \frac{1}{x^2} \implies y = -\frac{1}{x} + c \implies f(x) = -\frac{1}{x} + c$$

چون منحنی از $(1,1)$ می‌گذرد پس $f(1) = 1$ و لذا $f(x) = -\frac{1}{x} + 2$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 2$ پس $y = 2$ معادله مجانب افقی آن است.

۴۷. ضریب زاویه قائم بر منحنی تابع $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن به صورت $\frac{1}{2x - x^2}$ است. اگر نمودار آن از مبدأ مختصات بگذرد $f(3)$ کدام است؟ (کشاورزی ۷۷، فلسفه ۷۸)

۱) -2 ۲) 0 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است. ضریب زاویه قائم در هر نقطه $-\frac{1}{y'}$ است پس:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{1}{2x - x^2} \implies y' = x^2 - 2x \implies f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + c$$

و چون نمودار از مبدأ می‌گذرد، $f(0) = 0$ و لذا $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ پس $f(3) = 9 - 9 = 0$.

۴۸. ضریب زاویه مماس بر منحنی $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ دو برابر حاصل ضرب طول و عرض آن نقطه است. ضابطهٔ $f(x)$ برابر کدام است؟ (مخازن ۷۸)

۱) axe^x ۲) $a\ln x^2$ ۳) ae^{x^2} ۴) $a(\ln x)^2$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$y' = 2xy \implies \frac{dy}{dx} = 2xy \implies \frac{dy}{y} = 2xdx \overset{\int}{\implies} \ln y = x^2 + c \implies y = e^{x^2+c} = e^{x^2}\cdot e^c = ae^{x^2}$$

۴۹. ضریب زاویه قائم بر نمودار تابع $y = f(x)$ در هر نقطه $M(x,y)$ واقع بر آن برابر با جذر طول آن نقطه است. اگر نمودار تابع محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند، $f(4)$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) -2 ۲) -1 ۳) 1 ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است.

$$-\frac{1}{y'} = \sqrt{x} \implies y' = -\frac{1}{\sqrt{x}} \implies f(x) = -2\sqrt{x} + c$$

چون نمودار از نقطه $(0,3)$ عبور می‌کند، $f(x) = 3 - 2\sqrt{x}$ و لذا $f(4) = 3 - 4 = -1$.

۵۰. حاصل $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $\ln 3$ ۲) $\ln 3 - 1$ ۳) $\frac{1}{2}\ln 3$ ۴) $\frac{1}{2} - \ln 3$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به فرمول انتگرال گیری ۱۲ در صفحه ۲۴۶:

$$\text{انتگرال} = \ln|\tan\frac{x}{2}|\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} = \ln(\tan\frac{\pi}{3}) - \ln(\tan\frac{\pi}{4}) = \ln\sqrt{3} - \ln 1 = \frac{1}{2}\ln 3$$

۵۱. حاصل $\int_0^1 \tanh x dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $-\ln(\cosh 1)$ ۲) $-\ln(\sinh 1)$ ۳) $\ln(\sinh 1)$ ۴) $\ln(\cosh 1)$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به فرمول انتگرال‌گیری ۱۷ در صفحه ۲۴۶:

$$\text{انتگرال} = \ln(\cosh x)\Big|_{0}^{1} = \ln(\cosh 1) - \ln 1 = \ln(\cosh 1)$$

۵۲. مقدار متوسط تابع $f(x) = \sin x$ روی بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ۱ درست است. مقدار متوسط f بر بازه $[a, b]$ عبارتست از $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ پس:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1 \implies \text{مقدار متوسط} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

۵۳. مقدار متوسط تابع $f(x) = 2^x$ روی فاصله $[0, 1]$ چقدر است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) 0 ۲) 1 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{\ln 2}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_0^1 = \frac{2}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \implies \text{مقدار متوسط} = \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{1-0} = \frac{1}{\ln 2}$$

۵۴. حاصل $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$\text{انتگرال} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \tan^{-1}(x+1)\Big|_{-1}^{0} = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$$

۵۵. حاصل انتگرال $\int_0^1 \frac{xdx}{x+2}$ کدام است؟ (برنامه‌ریزی شهری ۷۳، ریاضی ۷۴)

۱) $1 + 2\ln\frac{2}{3}$ ۲) $1 - 2\ln\frac{2}{3}$ ۳) $1 - \ln 2$ ۴) $\ln 3 - 1$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)dx = \left(x - 2\ln(x+2)\right)\Big|_0^1 = 1 - 2\ln 3 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln\frac{2}{3}$$

۵۶. $\int_1^2 5^{2(x-1)}dx$ برابر است با: (معماری کشتی ۸۰)

۱) $\frac{12}{\ln 5}$ ۲) $\frac{6}{\ln 5}$ ۳) $\frac{\ln 5}{12}$ ۴) $\frac{\ln 5}{6}$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $u = 2(x-1)$ و $du = 2dx$

$$\text{انتگرال} = \frac{1}{2}\int_0^2 5^u du = \frac{5^u}{2\ln 5}\Big|_0^2 = \frac{1}{2\ln 5}(25 - 1) = \frac{12}{\ln 5}$$

۵۷. حاصل $\int_1^e x^{-1}\ln x dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷، صنایع غذایی ۷۹)

۱) e ۲) $\frac{e}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است. با تغییر متغیر $u = \ln x$ داریم:

$$\int_{1}^{e}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_{0}^{1}u\,du=\frac{1}{2}u^{2}\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

۵۸. حاصل $\int_{e}^{e^{2}}\frac{dx}{x\ln^{3}x}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷)

۱) $\frac{3}{8}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. از تغییر متغیر $u=\ln x$ داریم:

$$\text{انتگرال}=\int_{1}^{2}\frac{du}{u^{3}}=\int_{1}^{2}u^{-3}du=-\frac{1}{2}u^{-2}\Big|_{1}^{2}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{8}$$

۵۹. حاصل $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{3x\,dx}{\sqrt{1-x^{4}}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{6}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $u=x^{2}$ و $du=2x\,dx$:

$$\text{انتگرال}=\frac{3}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-u^{2}}}=\frac{3}{2}\sin^{-1}u\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6}-0\right)=\frac{\pi}{4}$$

۶۰. مقدار انتگرال معین $\int_{0}^{\sqrt{2}}\frac{x\,dx}{x^{4}+2x^{2}+4}$ کدام است؟ (معدن ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{3}$ ۲) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$ ۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$ ۴) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $u=x^{2}$ و $du=2x\,dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int_{0}^{2}\frac{\frac{1}{2}du}{u^{2}+2u+4}=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}\frac{du}{(u+1)^{2}+3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{u+1}{\sqrt{3}}\Big|_{0}^{2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3}-\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi\sqrt{3}}{36}$$

۶۱. مقدار انتگرال $I=\int_{1}^{2}\frac{x+3x^{2}}{\sqrt{x^{2}+2x^{3}+5}}dx$ برابر است با: (سیستم ۸۰)

۱) $2-\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}-1$ ۳) $3-\sqrt{2}$ ۴) $5-2\sqrt{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $u=x^{2}+2x^{3}+5$ آن‌گاه $du=2(3x^{2}+x)dx$ پس:

$$I=\frac{1}{2}\int_{8}^{25}\frac{du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int_{8}^{25}u^{-\frac{1}{2}}du=\sqrt{u}\Big|_{8}^{25}=5-2\sqrt{2}$$

۶۲. مقدار انتگرال معین $\int_{1}^{2}x^{x}(\ln x+1)dx$ برابر است با: (شیمی نساجی ۷۹)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۳

حل: گزینه ۴ درست است. اگر از تغییر متغیر $u=x^{x}$ استفاده کنیم، با مشتق‌گیری لگاریتمی $du=x^{x}(1+\ln x)dx$:

$$\text{انتگرال}=\int_{1}^{4}du=4-1=3$$

۶۳. مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x}\cos x dx$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}(\sqrt{27}+\sqrt{8})$ ۳) $\frac{3}{2}(\sqrt{27}-\sqrt{8})$ ۴) $\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

حل: گزینه ۴ درست است. اگر $u=2+\sin x$ آن گاه $du=\cos x dx$.

$$\text{انتگرال} = \int_{2}^{3}\sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{3} = \frac{2}{3}(\sqrt{27}-\sqrt{8}) = \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$$

۶۴. حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}dx$ برابر کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{2}-1$ ۳) $2(1-\sqrt{2})$ ۴) $2(\sqrt{2}-1)$

حل: گزینه ۴ درست است. از تغییر متغیر $u=1+\cos x$ و $du=-\sin x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{2}^{1}\frac{-du}{\sqrt{u}} = \int_{1}^{2}u^{-\frac{1}{2}}du = 2\sqrt{u}\Big|_{1}^{2} = 2(\sqrt{2}-1)$$

۶۵. حاصل $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\cot x dx$ برابر کدام است؟ (سیستم ۷۹)

۱) $-\frac{1}{2}\ln^2 2$ ۲) $-\frac{1}{2}\ln 2$ ۳) $\frac{1}{2}\ln 4$ ۴) $\frac{1}{2}\ln 2$

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $u=\ln(\sin x)$ آنگاه $du=\cot x dx$ پس:

$$\text{انتگرال} = \int_{-\ln 2}^{0} udu = \frac{1}{2}u^2\Big|_{-\ln 2}^{0} = -\frac{1}{2}(-\ln 2)^2 = -\frac{1}{2}\ln^2 2$$

۶۶. مقدار انتگرال $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) π ۴) $\frac{3\pi}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. در تست ۳۷ در صفحه ۲۷۵ قرار دهید $m=\frac{1}{2}$.

۶۷. مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2\theta}{2+\tan^2\theta}d\theta$ کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\sqrt{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. از تغییر متغیر $u=\tan\theta$ و $du=(1+\tan^2\theta)d\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1}\frac{du}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{0}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶۸. مقدار $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^4 x}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $\frac{\pi}{2}$ ۳) π ۴) ۱

حل: گزینه ۱ درست است. اگر $u=\sin^2 x$ و $du=2\sin x\cos x dx=\sin 2x dx$ آنگاه:

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1}\frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1}u\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

۶۹. حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1-\sin x}$ کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $1+\sqrt{3}$ ۲) $-1+\sqrt{3}$ ۳) $2-\sqrt{3}$ ۴) $1-\sqrt{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. صورت و مخرج عبارت تحت انتگرال را در $1+\sin x$ ضرب می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \tan x \sec x)dx = (\tan x + \sec x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}+1$$

۷۰. مقدار $\int_{0}^{1} \frac{x(x^2+1)}{x^4+1}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۷۷)

۱) $\frac{1}{4}(\ln 2 + \frac{\pi}{2})$ ۲) $\frac{1}{2}(\ln 2 + \frac{\pi}{2})$ ۳) $\frac{1}{4}(\ln 4 + \frac{\pi}{4})$ ۴) $\frac{1}{2}(\ln 2 + \frac{\pi}{4})$

حل: گزینه ۱ درست است.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1} \left(\frac{x^3}{x^4+1} + \frac{x}{x^4+1}\right)dx = \left(\frac{1}{4}\ln(x^4+1) + \frac{1}{2}\tan^{-1} x^2\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}$$

۷۱. هرگاه $\int_{1}^{2} f(x)dx = 3$ آنگاه مقدار $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})dx$ کدام است؟ (آمار و ریاضی ۷۸)

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) $\frac{3}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. از تغییر متغیر $u = \frac{1}{x}$ و $du = -\frac{1}{x^2}dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x})dx = \int_{2}^{1} f(u)(-du) = \int_{1}^{2} f(u)du = 3$$

۷۲. حاصل $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ کدام است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\text{Arctane} - \frac{\pi}{4}$ ۲) $\text{Arctane} - 1$

۳) $\text{Arctane}^{-1} - \frac{\pi}{4}$ ۴) $\text{Arctane}^{-1} - 1$

حل: گزینه ۱ درست است. صورت و مخرج کسر را در e^x ضرب می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} \overset{u=e^x}{=\!=\!=} \int_{1}^{e} \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u\Big|_{1}^{e} = \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$

۷۳. مقدار $\int_{0}^{2} \sqrt{x^7+x^4}dx$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) ۱ ۲) $\sqrt{23}$ ۳) $\frac{17}{3}$ ۴) $\frac{52}{9}$

حل: گزینه ۴ درست است.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{2} x^2\sqrt{x^3+1}dx \overset{u=x^3+1}{=\!=\!=} \frac{1}{3}\int_{1}^{9} \sqrt{u}du = \frac{2}{9}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{1}^{9} = \frac{2}{9}(27-1) = \frac{52}{9}$$

۷۴. اگر f تابعی پیوسته باشد، حاصل $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ برابر کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$ ۲) $-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ ۳) $-\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$ ۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. از تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{۲} - x$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{\frac{\pi}{۲}}^{۰} f\left(\cos(\frac{\pi}{۲} - u)\right)(-du) = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin u)du$$

روش دوم. با توجه به ویژگی ۱۰ در صفحه ۲۶۶ با تبدیل $x \to \frac{\pi}{۲} - x$ داریم:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\cos x)dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f\left(\cos(\frac{\pi}{۲} - x)\right)dx = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(\sin x)dx$$

۷۵. مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^{۳} ۲x dx$ برابر است با:

۱) ۰   ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۱ درست است. هدف محاسبه انتگرال از توان فرد کسینوس است پس:

$$\text{انتگرال} = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos ۲x(۱ - \sin^{۲} ۲x)dx = \frac{۱}{۲}\left(\sin ۲x - \frac{۱}{۳}\sin^{۳} ۲x\right)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = ۰$$

۷۶. مقدار متوسط تابع $y = \sin^{۲} wt$ در فاصله $۰ \leq t \leq \frac{۲\pi}{w}$ چند است؟ (ریاضی ۷۹)

۱) ۰   ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) ۱   ۴) $\frac{\pi}{w}$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{w}} \sin^{۲} wtdt = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\frac{۲\pi}{w}} (۱ - \cos ۲wt)dt = \frac{۱}{۲}(\frac{۲\pi}{w}) = \frac{\pi}{w} \implies \text{مقدار متوسط} = \frac{\frac{\pi}{w}}{\frac{۲\pi}{w}} = \frac{۱}{۲}$$

۷۷. تحت چه شرایطی رابطه $\int_{۰}^{۲\pi} \cos mx \cos nx dx = ۰$ برقرار است؟ (معدن ۸۲)

۱) اگر n و m فقط اعداد صحیح باشند.

۲) اگر n و m فقط اعداد صحیح و نامساوی باشند.

۳) برای کلیه مقادیر n و m برقرار است.

۴) به‌ازای هیچ مقدار از n و m برقرار نیست.

حل: گزینه ۲ درست است. از فرمول تبدیل ضرب به جمع استفاده می‌کنیم.

$$I_{mn} = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۲\pi} \left(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right)dx$$

چون توابع ظاهر شده در انتگرال دارای دوره تناوب اصلی $\frac{۲\pi}{m \pm n}$ هستند پس برای $n, m \in \mathbb{Z}$ که نابرابر باشند، ۲π نیز دوره تناوب آنها است و لذا برای بنا به ویژگی ۱۳ در صفحه ۲۶۷ انتگرال صفر است.

۷۸. مقدار انتگرال $\int_{۱}^{۲} \frac{x+۱}{\sqrt{x+۲}}dx$ برابر است با: (مکانیک ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

حل: گزینه ۱ درست است. از تغییر متغیر $u = x + ۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{۳}^{۴} \frac{u-۱}{\sqrt{u}}du = \int_{۳}^{۴} (u^{\frac{۱}{۲}} - u^{-\frac{۱}{۲}})du = \left(\frac{۲}{۳}u^{\frac{۳}{۲}} - ۲\sqrt{u}\right)\Big|_{۳}^{۴} = \frac{۴}{۳}$$

۷۹. حاصل $\int_{0}^{1} x\sqrt{x+1}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $\frac{1}{5}(\sqrt{2}+1)$ ۲) $\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۳) $\frac{2}{15}(\sqrt{2}+1)$ ۴) $\frac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$

حل: گزینه ۲ درست است. از تغییر متغیر $u = x+1$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{1}^{2}(u-1)\sqrt{u}du = \int_{1}^{2}(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})du = (\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}})\Big|_{1}^{2} = \frac{8}{5}\sqrt{2} - \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15} = \frac{4}{15}(\sqrt{2}+1)$$

۸۰. حاصل $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{8}$

حل: گزینه ۱ درست است. از تغییر متغیر $u > 0$, $x = u^2$ و $dx = 2udu$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1} \frac{2du}{1+u^2} = 2\tan^{-1}u\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}$$

۸۱. حاصل انتگرال $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۸)

۱) $4-\ln 9$ ۲) $9-\ln 4$ ۳) $4+\ln 9$ ۴) $9+\ln 4$

حل: گزینه ۱ درست است. برای حذف رادیکال از تغییر متغیر $x = u^2$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{2} \frac{2udu}{1+u} = 2\int_{0}^{2}\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = 2\left(u - \ln(u+1)\right)\Big|_{0}^{2} = 2(2-\ln 3) = 4 - \ln 9$$

۸۲. حاصل $\int_{0}^{1} x^3\sqrt{1-x^2}dx$ چقدر است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $\frac{2}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\pi - 2$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. از تغییر متغیر $x = \sin\theta$ و $dx = \cos\theta d\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^2\theta d\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta d\theta = -(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{1}{5}\cos^5\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

روش دوم. از تغییر متغیر $u = 1-x^2$ و $du = -2x\,dx$ استفاده می‌کنیم.

$$x^3\sqrt{1-x^2}dx = x^2\sqrt{1-x^2}(xdx) = -\frac{1}{2}(1-u)\sqrt{u}du = -\frac{1}{2}(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}})\,du$$

$$\Longrightarrow \quad \text{انتگرال} = -\frac{1}{2}\int_{1}^{0}(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{3}{2}})du = -\frac{1}{2}(\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}})\Big|_{1}^{0} = \frac{2}{15}$$

۸۳. حاصل $\int_{0}^{2} \frac{x^2+1}{x+1}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $\ln 3$ ۲) $2\ln 3$ ۳) $3\ln 2$ ۴) $2\ln 2$

حل: گزینه ۲ درست است. تابع تحت انتگرال، تابع گویا است که درجه صورت از مخرج بیشتر است پس صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم، تا $\frac{x^۲+۱}{x+۱} = x - ۱ + \frac{۲}{x+۱}$ حاصل شود.

$$\text{انتگرال} = \int_۰^۲ \left(x - ۱ + \frac{۲}{x+۱}\right)dx = \left(\frac{x^۲}{۲} - x + ۲\ln(x+۱)\right)\Big|_۰^۲ = ۲\ln ۳$$

۸۴. مقدار انتگرال معین $\int_۲^۵ \frac{dx}{x^۲+x}$ کدام است؟ (معدن ۸۱)

۱) $\ln\frac{۵}{۳}$ ۲) $\ln\frac{۴}{۵}$ ۳) $\ln\frac{۳}{۵}$ ۴) $\ln\frac{۵}{۴}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون مخرج کسر به صورت $x(x+۱)$ و اختلاف دو عامل، عدد ثابت ۱ است، با توجه به نکته (۱۰ ـ الف) در صفحه ۲۵۷:

$$\frac{۱}{x^۲+x} = \frac{۱}{x} - \frac{۱}{x+۱} \implies \text{انتگرال} = \ln\frac{x}{x+۱}\Big|_۲^۵ = \ln\frac{۵}{۶} - \ln\frac{۲}{۳} = \ln\frac{۵}{۴}$$

۸۵. حاصل $\int_۲^۳ \frac{dx}{x^۲(۱-x^۲)}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲} + \ln ۳)$ ۲) $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲}\ln\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۳} + \ln ۲)$ ۴) $\frac{۱}{۶}(۱ + \ln ۶)$

حل: گزینه ۲ درست است. شکل تجزیه کسر برای تابع تحت انتگرال به صورت $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^۲} + \frac{C}{x-۱} + \frac{D}{x+۱}$ است، اما با توجه به اینکه $x^۲$ و $۱-x^۲$ در عدد ثابت ۱ اختلاف دارند، تجزیه کسر را به صورت $\frac{۱}{x^۲(x^۲-۱)} = \frac{۱}{x^۲-۱} - \frac{۱}{x^۲}$ می‌نویسیم و لذا $\frac{۱}{x^۲(۱-x^۲)} = \frac{۱}{x^۲} + \frac{۱}{۱-x^۲}$.

$$\text{انتگرال} = \int_۲^۳ \left(\frac{۱}{۱-x^۲} + \frac{۱}{x^۲}\right)dx = \left(\frac{۱}{۲}\ln\frac{x+۱}{x-۱} - \frac{۱}{x}\right)\Big|_۲^۳ = \frac{۱}{۲}\ln\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۶}$$

۸۶. حاصل $\int_۰^۱ xe^{-x}dx$ کدام است؟ (کشاورزی ۷۷، آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $\frac{۱}{e} - ۱$ ۲) $\frac{۲}{e} - ۱$ ۳) $۱ - \frac{۲}{e}$ ۴) $۱ - \frac{۱}{e}$

حل: گزینه ۳ درست است. از جزء به‌جزء با $dv = e^{-x}dx$ و $u = x$ استفاده می‌کنیم پس $v = -e^{-x}$ و $du = dx$.

$$\text{انتگرال} = -xe^{-x}\Big|_۰^۱ + \int_۰^۱ e^{-x}dx = -e^{-۱} - e^{-x}\Big|_۰^۱ = -۲e^{-۱} + ۱$$

۸۷. حاصل $\int_۰^\pi x\cos ۳x dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $-\frac{۲}{۹}$ ۲) $-\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

حل: گزینه ۱ درست است. از روش جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم $dv = \cos ۳x dx$ و $u = x$ پس $v = \frac{۱}{۳}\sin ۳x$ و $du = dx$.

$$\text{انتگرال} = \frac{x}{۳}\sin ۳x\Big|_۰^\pi - \frac{۱}{۳}\int_۰^\pi \sin ۳x dx = ۰ + \frac{۱}{۹}\cos ۳x\Big|_۰^\pi = -\frac{۲}{۹}$$

۸۸. انتگرال $\int_۰^۱ \ln(۱+x)dx$ کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) -۱ ۲) $۲\ln ۲$ ۳) $۲\ln ۲ - ۱$ ۴) $۲\ln ۲ + ۱$

حل: گزینه ۳ درست است. با استفاده از قاعده انتقال اگر $x \to x - ۱$:

$$\text{انتگرال} = \int_1^2 \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 dx = 2\ln 2 - 1$$

۸۹. اگر $\int_0^1 x^2 e^x dx = A - 2\int_0^1 xe^x dx$ آنگاه عدد A کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $\frac{e}{2}$ ۲) e ۳) $e-1$ ۴) $2e$

حل: گزینه ۲ درست است. با استفاده از روش جزء به‌جزء $A = x^2e^x\Big|_0^1 = e$.

۹۰. حاصل $\int_1^e x\ln x dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $\frac{e^2-1}{2}$ ۲) $\frac{e^2+1}{2}$ ۳) $\frac{e^2-1}{4}$ ۴) $\frac{e^2+1}{4}$

حل: گزینه ۴ درست است. با استفاده از روش جزء به‌جزء با انتخاب $dv = xdx$ و $u = \ln x$ داریم $v = \frac{x^2}{2}$ و $du = \frac{dx}{x}$.

$$\text{انتگرال} = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

۹۱. اگر $A = \int_1^2 \frac{2^x}{x}dx$ مقدار $\int_1^2 \frac{2^x}{x^2}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $2 + A\ln 2$ ۲) $1 + \ln A$ ۳) $A\ln 2$ ۴) $A + \ln 2$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $dv = \frac{dx}{x^2}$ و $u = 2^x$ آنگاه $v = -\frac{1}{x}$ و $du = 2^x\ln 2 dx$:

$$\int_1^2 \frac{2^x}{x^2}dx = -\frac{2^x}{x}\Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{2^x\ln 2}{x}dx = \left(-\frac{4}{2} + \frac{2}{1}\right) + (\ln 2)A = A\ln 2$$

۹۲. حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^3 x}dx$ کدام است؟ (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{1}{2}(\frac{2}{3} + \ln\sqrt{3})$ ۲) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \ln\sqrt{3})$ ۳) $2(\frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{3})$ ۴) $2(\sqrt{3} + \ln\sqrt{3})$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به قسمت ب از مثال ۱۰ در صفحه ۲۵۹:

$$\text{انتگرال} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\left(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 0\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \ln\sqrt{3}\right)$$

۹۳. مقدار انتگرال $\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ برابر است با: (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) e ۴) $2e$

حل: گزینه ۲ درست است. از تغییر متغیر $x = t^2$ و سپس جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_0^1 \underbrace{2t}_{u}\, \underbrace{e^t dt}_{dv} = 2te^t\Big|_0^1 - 2\int_0^1 e^t dt = 2e - 2e^t\Big|_0^1 = 2$$

۹۴. مقدار $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin\sqrt{x}dx$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا از تغییر متغیر $x = t^2$ و $dx = 2tdt$ و سپس از جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \underbrace{۲t}_{u}\,\underbrace{\sin t dt}_{dv} = -۲t\cos t\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} + ۲\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos t dt = ۰ + ۲ = ۲$$

۹۵. حاصل $\int_{۰}^{۱} x^{۲}e^{x}dx$ کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $e-۲$ ۲) $e+۲$ ۳) $e-۱$ ۴) $e+۱$

حل: گزینه ۱ درست است. از تعمیم جزء به جزء برای محاسبه این انتگرال استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول مقابل داریم:

	مشتق	انتگرال
$\oplus$	$x^{۲}$	e^{x}
$\ominus$	$۲x$	e^{x}
$\oplus$	۲	e^{x}
$\ominus$	۰	e^{x}

$$\text{انتگرال}=(x^{۲}-۲x+۲)e^{x}\Big|_{۰}^{۱} = e-۲$$

۹۶. اگر $f''(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)=f(b)=۰$ حاصل $\int_{a}^{b} xf''(x)dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $af'(a)-bf'(b)$ ۲) $af'(b)-bf'(a)$

۳) $bf'(b)-af'(a)$ ۴) $bf'(a)-af'(b)$

حل: گزینه ۳ درست است. در روش جزء به‌جزء با انتخاب $dv=f''(x)dx$ و $u=x$ داریم $v=f'(x)$ و $du=dx$:

$$\text{انتگرال}=xf'(x)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} f'(x)dx = bf'(b)-af'(a)-\left(f(x)\Big|_{a}^{b}\right) = bf'(b)-af'(a)$$

۹۷. مقدار $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} [x]\cos x dx$ برابر است با: (۸۱ MBA)

۱) $۱-\frac{۱}{۲}\sin ۱$ ۲) $۱-\sin ۱$ ۳) $۱+\sin ۱$ ۴) $۱+\frac{۱}{۲}\sin ۱$

حل: گزینه ۲ درست است. تنها عدد صحیح در فاصله $[۰,\frac{\pi}{۲}]$، $x=۱$ است پس:

$$\text{انتگرال}=\int_{۰}^{۱} ۰dx + \int_{۱}^{\frac{\pi}{۲}} \cos x dx = \sin x\Big|_{۱}^{\frac{\pi}{۲}} = ۱-\sin ۱$$

۹۸. به ازای چه مقدار $x\in[۲,۳]$ تساوی $\int_{۰}^{x}[t]^{۲}dt = ۲(x-۱)$ برقرار است؟ (عمران ۷۸)

۱) $x=\frac{۵}{۲}$ ۲) $x=\frac{۷}{۴}$ ۳) $x=\frac{۸}{۳}$ ۴) $x=۳$

حل: گزینه ۱ درست است. در بازه انتگرال گیری اعداد صحیح $x=۱,۲$ قرار دارند.

$$\text{انتگرال}=\int_{۰}^{۱} ۰dx + \int_{۱}^{۲} ۱^{۲}dx + \int_{۲}^{x} ۲^{۲}dx = ۱+۴(x-۲) = ۲(x-۱) \implies ۲x=۵ \implies x=\frac{۵}{۲}$$

۹۹. اگر n عدد صحیح و مثبت باشد آنگاه $\int_{۰}^{n}[t]dt$ کدام است؟([ ] نشان دهندهٔ جزء صحیح) (تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{n(n+۱)}{۲}$ ۲) $\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}$ ۳) $\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}$ ۴) $\frac{n(n-۱)}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. چون ضابطه $[t]$ در نقاط صحیح تغییر می‌کند.

$$\text{انتگرال} = \int_{0}^{1} 0\,dt + \int_{1}^{2} 1\,dt + \cdots + \int_{n-1}^{n} (n-1)dt = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

۱۰۰. انتگرال $\int_{-1}^{2} |x^3 - x|dx$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) ۲/۷۵ ۲) ۴ ۳) ۱۴۵ ۴) ۳

حل: گزینه ۱ درست است. ریشه عبارتهای داخل قدرمطلق $x = 0, \pm 1$ است و بنابراین:

$$\text{انتگرال} = \int_{-1}^{0} |x^3 - x|dx + \int_{0}^{1} |x^3 - x|dx + \int_{1}^{2} |x^3 - x|dx$$

با تعیین علامت عبارت داخل قدرمطلق، مشخص می‌شود که $x^3 - x$ برای $1 < x < 2$ و $-1 < x < 0$ مثبت و برای $0 < x < 1$ منفی است.

$$\text{انتگرال} = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)dx + \int_{1}^{2} (x^3 - x)dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{1}^{2} = \frac{11}{4} = 2/75$$

۱۰۱. مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} d(x|x|)$ کدام است؟ (ریاضی ۷۶)

۱) ۰ ۲) ۲ ۳) $2(1 + e^{-1})$ ۴) $2(1 - e^{-1})$

حل: گزینه ۴ درست است. عبارت داخل قدرمطلق در $x = 0$ تغییر علامت می‌دهد.

$$\text{انتگرال} = \int_{-1}^{0} e^{-x^2} d(-x^2) + \int_{0}^{1} e^{-x^2} d(x^2) = \int_{-1}^{0} -2xe^{-x^2} dx + \int_{0}^{1} 2xe^{-x^2} dx$$

$$= e^{-x^2}\Big|_{-1}^{0} - e^{-x^2}\Big|_{0}^{1} = (1 - e^{-1}) - (e^{-1} - 1) = 2(1 - e^{-1})$$

۱۰۲. حاصل $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n}$ وقتی $n \to +\infty$ با استفاده از تعریف انتگرال کدام است؟

(هسته‌ای ۷۶، آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $\frac{2}{\pi}$ ۲) $\frac{1}{\pi}$ ۳) ۳ ۴) ۲

حل: گزینه ۱ درست است. چون مجموع دارای n جمله است پس $\frac{1}{n}f(c_k) = \frac{1}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$ و $c_k = \frac{k}{n}$ پس:

$$f(x) = \sin(\pi x) \implies \text{حد} = \int_{0}^{1} \sin(\pi x)dx = -\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{\pi}$$

۱۰۳. مقدار $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$ برابر است با:

(معدن ۷۳، آمار ۸۰، تاسیسات آبیاری ـ آزاد ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\ln 2$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون تعداد جملات مجموع برابر n است.

$$\frac{1}{n}f(c_k) = \frac{1}{n+k} \implies f(c_k) = \frac{n}{n+k} = \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \quad \text{و} \quad c_k = \frac{k}{n} \to x \implies f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$\implies \text{حد} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_{0}^{1} = \ln 2$$

۱۰۴. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n}{n}}}{n}$ برابر است با: (علوم کامپیوتر ۸۱، عمران ـ آزاد ۸۱)

۱) e ۲) ۱ ۳) $e-1$ ۴) $\frac{1}{e}$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $\frac{1}{n}f(c_k)=\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}$ پس $f(c_k)=e^{\frac{k}{n}}$ ولذا:

$$f(x)=e^x \implies \text{حد}=\int_0^1 e^x dx=e-1$$

۱۰۵. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$ (معدن ۷۶)

۱) $\ln 2$ ۲) $\frac{\ln 2}{2}$ ۳) ۰ ۴) $\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. تعداد جملات مجموع برابر n است.

$$\frac{1}{n}f(c_k)=\frac{k}{n^2+k^2}\implies f(c_k)=\frac{nk}{n^2+k^2}=\frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2} \text{ و } c_k=\frac{k}{n}\to x\implies f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

$$\text{حد}=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$$

۱۰۶. مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\ldots(1+\frac{n}{n})}$ برابر کدام است؟ (ریاضی ۷۴، آمار ۸۱)

۱) $\ln 3-1$ ۲) $\ln 4-1$ ۳) $\ln 3+1$ ۴) $\ln 4+1$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به ویژگی‌های لگاریتم:

$$\ln\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})\ldots(1+\frac{n}{n})}=\frac{1}{n}\Big(\ln(1+\frac{1}{n})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n})\Big)$$

که همان مجموع تست ۶۴ در صفحه ۲۸۴ و جواب آن $2\ln 2-1=\ln 4-1$ است.

تذکر۱. روش دیگر حل این سؤال را در تست ۳۷ در صفحه ۵۷۳ ملاحظه نمایید.

۱۰۷. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4}{3}\left(\sqrt[3]{\dfrac{n+1}{n^4}}+\sqrt[3]{\dfrac{n+2}{n^4}}+\cdots+\sqrt[3]{\dfrac{n+n}{n^4}}\right)$ برابر است با: (ریاضی ۸۱)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) $\sqrt[3]{4}-1$ ۴) $2\sqrt[3]{2}-1$

حل: گزینه ۴ درست است. عبارت مورد نظر مجموع $\frac{1}{n}f(c_k)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{n+k}{n^4}}$ است پس:

$$\implies f(c_k)=\frac{4}{3}n\sqrt[3]{\frac{n+k}{n^4}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{n+k}{n}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{1+\frac{k}{n}}\implies f(x)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{1+x}$$

$$\implies \text{حد}=\frac{4}{3}\int_0^1\sqrt[3]{1+x}\,dx=(1+x)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1=2^{\frac{4}{3}}-1=2\sqrt[3]{2}-1$$

مبحث انتگرال ناسره(مجازی)

۱۰۸. مقدار $\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4}$ کدام است؟ (معدن ـ آزاد ۸۱، سیستم ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال ناسره نوع اول است.

$$\text{انتگرال} = \frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{x}{۲})\Big|_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۲}\big(\tan^{-۱}(+\infty) - \tan^{-۱}(۰)\big) = \frac{\pi}{۴}$$

۱۰۹. $\int_{۰}^{+\infty} \frac{xdx}{x^۴ + ۹}$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۶}$ ۳) $\frac{\pi}{۱۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $t = x^۲$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{۰}^{+\infty} \frac{\frac{۱}{۲}dt}{t^۲ + ۹} = \frac{۱}{۶}\tan^{-۱}\frac{t}{۳}\Big|_{۰}^{+\infty} = \frac{۱}{۶}(\frac{\pi}{۲} - ۰) = \frac{\pi}{۱۲}$$

۱۱۰. اگر $m > ۰$، مقدار $\frac{d}{dm}\int_{۰}^{+\infty} e^{-mx}dx$ کدام است؟ (ریاضی ۸۰)

۱) $-\frac{۱}{m^۲}$ ۲) $-\frac{۱}{m}$ ۳) $\frac{۱}{m^۲}$ ۴) $\frac{۱}{m}$

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال نمایی است و چون $m > ۰$، همگراست.

$$\int_{۰}^{+\infty} e^{-mx}dx = -\frac{۱}{m}e^{-mx}\Big|_{۰}^{+\infty} = -\frac{۱}{m}(۰ - ۱) = \frac{۱}{m} \implies \text{مشتق} = -\frac{۱}{m^۲}$$

۱۱۱. مقدار $I = \int_{۰}^{+\infty} \frac{dx}{(x^۲ + a^۲)^۲}$ مساوی است با: (معماری کشتی ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{a^۳}$ ۲) $\frac{\pi a^۳}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۴a^۳}$ ۴) $\frac{\pi}{۲a^۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $x = a\tan\theta$ استفاده می‌کنیم.

$$I = \int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{a\sec^۲\theta}{a^۴\sec^۴\theta}d\theta = \frac{۱}{a^۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۲\theta d\theta = \frac{۱}{۲a^۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱ + \cos ۲\theta)d\theta = \frac{\pi}{۴a^۳}$$

۱۱۲. حاصل $\int_{۲}^{+\infty} \frac{dx}{x^۲ - x}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۹)

۱) $-۲\ln ۲$ ۲) $۲\ln ۲$ ۳) $-\ln ۲$ ۴) $\ln ۲$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به نکته (۱۰ ـــ الف) در صفحه ۲۵۷ کسر داده شده به صورت $\frac{۱}{x^۲ - x} = \frac{۱}{x(x-۱)} = \frac{۱}{x-۱} - \frac{۱}{x}$ قابل تجزیه است.

$$\text{انتگرال} = \ln\left|\frac{x-۱}{x}\right|\Big|_{۲}^{+\infty} = \ln ۱ - \ln\frac{۱}{۲} = \ln ۲$$

۱۱۳. حاصل $\int_{۱}^{+\infty} \frac{dx}{x^۳ + x}$ کدام است؟ (مکانیک ۷۷)

۱) $\ln\sqrt{۲}$ ۲) $\ln ۲$ ۳) $۱ - \ln ۲$ ۴) $۱ - \ln\sqrt{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. از نکته (۱۰ ـ ب) در صفحه ۲۵۷ کسر به صورت $\frac{۱}{x(x^۲+۱)} = \frac{۱}{x} - \frac{x}{x^۲+۱}$ تجزیه می‌شود.

$$\text{انتگرال} = \left(\ln|x| - \frac{۱}{۲}\ln(x^۲+۱)\right)\Big|_{۱}^{+\infty} = \ln\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}\Big|_{۱}^{+\infty} = \ln ۱ - \ln\frac{۱}{\sqrt{۲}} = \ln\sqrt{۲}$$

۱۱۴. مقدار انتگرال $\int_{۰}^{\infty} \frac{۲x^۲ - ۱}{x^۴ + ۵x^۲ + ۴}dx$ برابر است با: (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۲\pi}{۳}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. مخرج کسر $x^۴ + ۵x^۲ + ۴ = (x^۲+۱)(x^۲+۴)$ است پس:

$$\frac{۲x^۲-۱}{x^۴+۵x^۲+۴}=\frac{۲x^۲-۱}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}=\frac{Ax+B}{x^۲+۱}+\frac{Cx+D}{x^۲+۴}$$

اما دقت کنید که $\frac{۳}{x^۲+۴}-\frac{۱}{x^۲+۱}=\frac{۳(x^۲+۱)-(x^۲+۴)}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}=\frac{۲x^۲-۱}{(x^۲+۱)(x^۲+۴)}$ پس:

$$\text{انتگرال}=\int_۰^{+\infty}\Big(\frac{۳}{x^۲+۴}-\frac{۱}{x^۲+۱}\Big)dx=\Big(\frac{۳}{۲}\tan^{-۱}\frac{x}{۲}-\tan^{-۱}x\Big)\Big|_۰^{+\infty}=\frac{۳}{۲}(\frac{\pi}{۲})-\frac{\pi}{۲}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۱۵. اگر $\int_۰^{+\infty}x^{-\frac{۱}{۲}}e^{-x}dx=\sqrt{\pi}$ باشد، آنگاه مقدار $\int_۰^{+\infty}x^{\frac{۱}{۲}}e^{-x}dx$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $\frac{۱}{\pi}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۳) π ۴) $۲\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است.

روش اول. از روش جزء به‌جزء استفاده می‌کنیم.

$$u=x^{\frac{۱}{۲}} \text{ و } dv=e^{-x}dx \implies du=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}dx \text{ و } v=-e^{-x}$$

$$\text{انتگرال}=-x^{\frac{۱}{۲}}e^{-x}\Big|_۰^{+\infty}+\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}x^{-\frac{۱}{۲}}e^{-x}dx=۰+\frac{۱}{۲}\sqrt{\pi}=\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$$

روش دوم. در تعریف تابع گاما قرار دهید $p=\frac{۱}{۲}$ تا حاصل $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}=\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲})=\Gamma(\frac{۱}{۲}+۱)$ به دست آید.

۱۱۶. مقدار انتگرال $\int_۰^{+\infty}e^{-xt}\cos t\,dt$ برابر است با: (هسته‌ای ـ آزاد ۸۱، سیستم ـ آزاد ۸۲)

۱) $\frac{x}{x+۱}$ ۲) $\frac{۱}{x^۲+۱}$ ۳) $\frac{x^۲}{x^۲+۱}$ ۴) $\frac{x}{x^۲+۱}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به رابطه (۴ ـ ۵) در صفحه ۲۹۲ به ازای $s=x$ و $a=۱$ حاصل برابر $\frac{x}{x^۲+۱}$ است.

۱۱۷. حاصل $\int_۰^{+\infty}e^{-۳t}\sin t\cos t\,dt$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۹)

۱) $\frac{۳}{۲۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۳}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

حل: گزینه ۲ درست است. انتگرال مورد نظر برابر $I=\frac{۱}{۲}\int_۰^{+\infty}e^{-۳t}\sin ۲t\,dt$ است. در رابطه (۴ ـ ۴) در صفحه ۲۹۲ قرار دهید $a=۲$ و $s=۳$ تا حاصل $\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۲}{۹+۴}=\frac{۱}{۱۳}$ به دست آید.

۱۱۸. $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(x^۲)dx$ برابر است با: (کامپیوتر ۷۵)

۱) $\int_{-\infty}^{+\infty}۲e^{x}dx$ ۲) $\int_۰^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ ۳) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{۲e^{x}}{۵!}dx$ ۴) $\int_۰^{+\infty}\frac{\sin x}{۲\sqrt{x}}dx$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به زوج بودن $\sin(x^۲)$ حاصل برابر $۲\int_۰^{+\infty}\sin(x^۲)dx$ است که با تغییر متغیر $u=x^۲$ و $du=۲xdx$ داریم:

$$\text{انتگرال}=۲\int_۰^{+\infty}\sin u\frac{du}{۲\sqrt{u}}=\int_۰^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$$

تذکر ۲. انتگرال $\int_{0}^{+\infty} \sin(x^{2})dx$ به **انتگرال فرنل** موسوم است. ثابت کردیم مقدار آن برابر $\frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ است که با توجه به مثال ۳۳ در صفحه ۲۹۰ به ازای $p=\frac{1}{2}$ همگرای مشروط می‌باشد. در خودآزمایی ۲۷ در صفحه ۴۱۱ راهنمایی لازم برای محاسبه مقدار این انتگرال ارائه شده است.

۱۱۹. حاصل $\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{0}^{1-\lambda}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال داده شده برابر $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$ است که در $x=1$ ناسره است.

$$\text{انتگرال} = \text{Arcsin}x\Big|_{0}^{1} = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

۱۲۰. مقدار انتگرال $\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$ برابر است با: (انرژی ـ آزاد ۸۲)

۱) π ۲) $-\pi$ ۳) 2 ۴) -2

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. عبارت زیر رادیکال را مربع کامل می‌کنیم.

$$\text{انتگرال} = \int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{-x^{2}+4x-3}} = \int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^{2}}} = \sin^{-1}(x-2)\Big|_{1}^{3} = \frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

روش دوم. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۶) در صفحه ۳۰۲ به ازای $a=1$ و $b=3$ داریم:

$$\text{انتگرال} = \int_{1}^{3}(x-1)^{-\frac{1}{2}}(3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = (3-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}\times\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi$$

۱۲۱. حاصل $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}$ کدام است؟ (هسته‌ای ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال دارای دو نوع ناسرگی در $a=1$ و $b=+\infty$ است.

$$\text{انتگرال} = \sec^{-1}x\Big|_{1}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

۱۲۲. انتگرال $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{2}}$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) صفر ۲) بی‌نهایت ۳) -2 ۴) 2

حل: گزینه ۲ درست است. انتگرال مورد نظر در $\pm\infty, 0$ ناسرگی دارد و در $x=0$ چون $p=2>1$، بنا به نکته ۲۱ در صفحه ۲۸۷ انتگرال ناسره، واگرا می‌شود.

۱۲۳. مقدار $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{2}-4x+3}$ برابر است با: (مکانیک ۷۰)

۱) $\frac{1}{2}\ln 3$ ۲) $\ln 3$ ۳) $-\frac{1}{2}\ln 3$ ۴) انتگرال واگراست.

حل: گزینه ۴ درست است. توجه کنید که مخرج کسر در $x=1$ صفر می‌شود و انتگرال ناسره است و در $x=1$ داریم $\frac{1}{x^{2}-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}\sim\frac{1}{-2(x-1)}$ پس چون $p=1$، انتگرال واگراست.

۱۲۴. اگر $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$ که $m,n\in\mathbb{N}$ همگرا باشد، کدام رابطه صحیح است؟ (آمار ۸۰)

۱) $n>m+1$ ۲) $m>n+1$ ۳) $m>n+\frac{1}{2}$ ۴) $n>m+\frac{1}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. انتگرال در $+\infty$ ناسره است و داریم:

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \sim \frac{x^{2m}}{x^{2n}} = \frac{1}{x^{2n-2m}}$$

بنا به نکته (۲۳ ـ الف) در صفحه ۲۸۸ شرط همگرایی در بینهایت این است که $2n-2m>1$ پس $n>m+\frac{1}{2}$.

۱۲۵. با فرض $p<q$، انتگرال $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^p+x^q}$ به ازای چه مقادیری از p و q همگراست؟ (مکانیک ۷۹)

۱) $|p|\le 1$ ۲) $q\le 1$ ۳) $|q|<2$ ۴) $p\le 1<q$

حل: گزینه ۲ درست است. انتگرال در $x=0$ ناسره است و با توجه به شرط $p<q$ داریم $\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^p}$ پس شرط همگرایی این است که $p<1$ پس اگر $q\le 1$ آن‌گاه $p<1$ و انتگرال همگرا می‌شود.

تذکر۳. توجه کنید که شرط $q\le 1$ همه مقادیر ممکن برای همگرایی را شامل نمی‌شود. مثلاً اگر $p=\frac{1}{2}$ و $q=2$ انتگرال همگراست. در واقع شرط داده شده در گزینه (۲) شرط کافی و $p<1$ شرط لازم و کافی برای همگرایی می‌باشد.

۱۲۶. به ازای چه مقدار a، انتگرال $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x(\ln x)^a}$ همگراست؟ (عمران ۷۹)

۱) $|a|=1$ ۲) $a>1$ ۳) $a<1$ ۴) هر مقدار a

حل: گزینه ۳ درست است. چون در $x=1$ داریم $\ln x\sim x-1$ پس $\frac{1}{(x-1)^a}\sim\frac{1}{x(\ln x)^a}$ و بنا به نکته (۲۳ ـ ب) در صفحه ۲۸۸ شرط همگرایی این است که $a<1$.

تذکر۴. روش دیگر استفاده از $u=\ln x$ و تبدیل انتگرال به p انتگرال $\int_{0}^{\ln 2}\frac{du}{u^a}$ است که برای $a<1$ همگراست.

۱۲۷. کلیه مقادیر ممکن برای پارامتر a برای آن که انتگرال $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^a}$ همگرا شود، عبارت است از:

۱) $a<1$ ۲) $a>1$ ۳) $a>0$ ۴) هر مقدار a

حل: گزینه ۲ درست است. با استفاده از تغییر متغیر $u=\ln x$ و $du=\frac{dx}{x}$ به انتگرال ناسره $\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{du}{u^a}$ می‌رسیم که برای $a>1$ همگراست.

مبحث تابع گاما و بتا

۱۲۸. اگر $\Gamma(n)=\int_{0}^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx$ آنگاه $\Gamma(5)+\Gamma(4)$ برابر است با: (مکانیک ۷۷)

۱) ۲۴ ۲) ۲۰ ۳) ۱۸ ۴) ۳۰

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به این که $\Gamma(n+1)=n!$ برای $n\in\mathbb{N}$ پس:

$$\Gamma(5)+\Gamma(4)=4!+3!=24+6=30$$

۱۲۹. اگر $(\frac{۱}{۲})! = \frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ باشد، مقدار $(\frac{۳}{۲})!$ برابر است با: (عمران ۷۰)

۱) $\frac{۳\sqrt{\pi}}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi\sqrt{\pi}}{۲}$ ۳) $\frac{۳\sqrt{\pi}}{۴}$ ۴) هیچکدام

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به این که $\Gamma(p+۱) = p!$ و رابطه بازگشتی:

$$(\frac{۳}{۲})! = \Gamma(\frac{۵}{۲}) = \Gamma(\frac{۳}{۲}+۱) = \frac{۳}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}+۱) = \frac{۳}{۲}.\frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \frac{۳\sqrt{\pi}}{۴}$$

۱۳۰. حاصل $\Gamma(-\frac{۱}{۲})$ وقتی $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) $-\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۲) $-۲\sqrt{\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\Gamma(p+۱) = p\Gamma(p)$ با قرار دادن $p = -\frac{۱}{۲}$:

$$\Gamma(\frac{۱}{۲}) = -\frac{۱}{۲}\Gamma(-\frac{۱}{۲}) \implies \Gamma(-\frac{۱}{۲}) = -۲\sqrt{\pi}$$

۱۳۱. حاصل $\int_{۰}^{+\infty} xe^{-x}dx$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱، سیستم ۸۱)

۱) $\frac{۱}{e}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) e

حل: گزینه ۲ درست است. حاصل برابر $\Gamma(۱+۱) = \Gamma(۲) = ۱! = ۱$ است.

۱۳۲. حاصل انتگرال $\int_{۰}^{+\infty} x^{٦}e^{-۲x}dx$ عبارت است از: (مکانیک ۷۱)

۱) $\frac{٦!}{۲}$ ۲) $\frac{٦!}{۲^٦}$ ۳) $\frac{٦!}{۲^۷}$ ۴) $٦!$

حل: گزینه ۳ درست است. کافی است در نکته ۲۵ در صفحه ۳۰۱ قرار دهیم $p = ٦$ و $s = ۲$ پس

$$\text{انتگرال} = \frac{\Gamma(۷)}{۲^۷} = \frac{٦!}{۲^۷}$$

۱۳۳. اگر $F(x) = \int_{x}^{۱} \ln t dt$، حد عبارت $F(x)$ وقتی $x \to ۰^+$ کدام است؟ (مخازن هیدروکربوری، هسته‌ای ۷۸)

۱) $-e$ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) e

حل: گزینه ۲ درست است. هدف در واقع محاسبه $\int_{۰}^{۱} \ln t dt$ است که در $t = ۰$ ناسره است.

روش اول. با استفاده از جزء به‌جزء و انتخاب $u = \ln t$ و $dv = dt$:

$$F(x) = (t\ln t - t)\Big|_{x}^{۱} = -۱ - x\ln x + x$$

و چون $\lim_{x\to ۰^+} x\ln x = ۰$ پس $\lim_{x\to ۰^+} F(x) = -۱$.

روش دوم. انتگرال مورد نظر برابر $-\int_{۰}^{۱} (-\ln t)^{۱}\, dt = -\Gamma(۱+۱) = -\Gamma(۲) = -۱! = -۱$ می‌باشد.

۱۳۴. مقدار $\int_{۰}^{۱} \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$ چقدر است؟ (سیستم ۷۹، مکانیک ۸۱، تکنولوژی نساجی ۸۲)

۱) $\sqrt{\pi}$ ۲) $\sqrt{۲\pi}$ ۳) $\frac{\sqrt{\pi}}{۲}$ ۴) $۲\sqrt{\pi}$

حل: گزینه ۱ درست است.

روش اول. از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم.

$t=-\ln x \Longrightarrow x=e^{-t} \Longrightarrow dx=-e^{-t}dt$

$(x=0 \Longrightarrow t=-\ln(0^+)=+\infty)$ و $(x=1 \Longrightarrow t=\ln 1=0)$

$$\text{انتگرال}=\int_{+\infty}^{0}\frac{-e^{-t}dt}{\sqrt{t}}=\int_{0}^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

روش دوم. از رابطه (۴ ـ ۱۱) در صفحه ۳۰۱ برای $p=-\frac{1}{2}$ استفاده می‌کنیم.

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}=\int_{0}^{1}(-\ln x)^{-\frac{1}{2}}dx=\Gamma(-\frac{1}{2}+1)=\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

۱۳۵. مقدار انتگرال $\int_{0}^{1}x\ln x dx$ (مدیریت و تکنولوژی نساجی ۸۱، ژئوفیزیک ۸۲)

۱) برابر صفر است. ۲) برابر $\frac{1}{4}$ است ۳) برابر $-\frac{1}{4}$ است ۴) وجود ندارد.

حل: گزینه ۳ درست است. توجه کنید که چون $\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=0$ پس این انتگرال ناسره نمی‌باشد.

روش اول. با روش جزء به جزء:

$$u=\ln x \text{ و } dv=xdx \Longrightarrow \int_{0}^{1}x\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_{0}^{1}-\int_{c}^{1}\frac{x}{2}dx=-\frac{1}{4}$$

دقت کنید که در محاسبه عبارت بالا از $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=0$ استفاده نمودیم.

روش دوم. مانند مثال ۴۱ در صفحه ۳۰۱ از $t=-\ln x$ و $x=e^{-t}$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{انتگرال}=\int_{+\infty}^{0}e^{-t}(-t)(-e^{-t})dt=-\int_{0}^{+\infty}te^{-2t}\,dt=-\frac{\Gamma(2)}{2^2}=-\frac{1}{4}$$ (نکته ۲۵ در صفحه ۳۰۱)

۱۳۶. مقدار $\int_{1}^{+\infty}e^{-x^2+2x}dx$ **برابر است با:** (ریاضی ۸۱)

۱) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{\pi}}{2e}$ ۳) $e\sqrt{\pi}$ ۴) $e\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

حل: گزینه ۴ درست است. باید مسأله را به محاسبه $\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du$ تبدیل کنیم که مقدار آن $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ است.

$$\text{انتگرال}=\int_{1}^{+\infty}e^{-(x^2-2x)}dx=\int_{1}^{+\infty}e^{1-(x-1)^2}dx=\int_{1}^{+\infty}e\,e^{-(x-1)^2}dx\overset{u=x-1}{=\!=\!=}e\int_{0}^{+\infty}e^{-u^2}du$$
$$=e\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

۱۳۷. حاصل $A=\int_{0}^{+\infty}e^{-\eta^3}d\eta$ **کدامیک از گزینه‌ها می‌باشد؟** (پلیمر ـ آزاد ۸۲)

۱) $\Gamma(\frac{1}{3})$ ۲) $\Gamma(\frac{3}{4})$ ۳) $\Gamma(3)$ ۴) $\Gamma(\frac{4}{3})$

حل: گزینه ۴ درست است. برای ایجاد تابع گاما قرار می‌دهیم $t=\eta^3$ و در این صورت $\eta=t^{\frac{1}{3}}$ و لذا $d\eta=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$.

$$A=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}e^{-t}dt=\frac{1}{3}\Gamma(-\frac{2}{3}+1)=\frac{1}{3}\Gamma(\frac{1}{3})=\Gamma(\frac{1}{3}+1)=\Gamma(\frac{4}{3})$$

۱۳۸. در صورتی که بدانیم $\Gamma(n+1)=n!$، $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ مقدار انتگرال $\int_0^1 x^2(1-x)^4dx$ برابر است با: (کامپیوتر ۷۰، عمران ۷۰)

۱) $\frac{1}{105}$ ۲) $\frac{2}{105}$ ۳) $\frac{1}{210}$ ۴) $-\frac{1}{105}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $p-1=2$ و $q-1=4$ پس $p=3$ و $q=5$.

$$\text{انتگرال}=\beta(3,5)=\frac{\Gamma(3)\Gamma(5)}{\Gamma(5+3)}=\frac{2!4!}{7!}=\frac{1}{105}$$

۱۳۹. مقدار $\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) π

حل: گزینه ۱ درست است. انتگرال را به صورت $\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}\,dx$ می‌نویسیم. که برابر $\beta(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ است. اما:

$$\beta(\frac{1}{2},\frac{3}{2})=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{3}{2})}=\frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}\sqrt{\pi})}{1}=\frac{\pi}{2}$$

۱۴۰. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$ برابر است با: (معماری کشتی ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

حل: گزینه ۳ درست است. از رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲ استفاده می‌کنیم.

$$2x-1=3\ ,\ 2y-1=0\implies x=2 \text{ و } y=\frac{1}{2}\implies \text{انتگرال}=\frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{5}{2})}=\frac{1\times\sqrt{\pi}}{2(\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi})}=\frac{2}{3}$$

۱۴۱. مقدار انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 t\cos^5 tdt$ کدام است؟ (آمار ۷۹)

۱) ۶۰ ۲) $\frac{1}{60}$ ۳) ۳۶۰ ۴) $\frac{1}{360}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲:

$$2x-1=2y-1=5\implies x=y=3\implies \text{انتگرال}=\frac{\Gamma(3)\Gamma(3)}{2\Gamma(6)}=\frac{2!2!}{2(5!)}=\frac{1}{60}$$

۱۴۲. حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\cos^5\theta d\theta$ عبارت است از: (مکانیک ۷۳)

۱) $-\frac{8}{315}$ ۲) $\frac{8}{315}$ ۳) $\frac{16}{315}$ ۴) $-\frac{16}{315}$

حل: گزینه ۲ درست است. از رابطه (۴ ـ ۱۵) در صفحه ۳۰۲ استفاده می‌کنیم.

$$2x-1=4 \text{ و } 2y-1=5\implies x=\frac{5}{2} \text{ و } y=3$$

$$\text{انتگرال}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(3)}{2\Gamma(\frac{11}{2})}=\frac{\Gamma(\frac{5}{2})2!}{2\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})\right)}=\frac{8}{315}$$

۱۴۳. مقدار انتگرال معین $I = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^3 dx$ کدام است؟ (مکانیک ۸۱)

۱) $\frac{36}{35}$ ۲) $\frac{32}{63}$ ۳) $\frac{64}{105}$ ۴) $\frac{32}{35}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به رابطه (۴ ـ ۱۶) در صفحه ۳۰۲ به ازای $x = y = 4$ و $a = -1$ و $b = 1$ داریم:

$$I = \int_{-1}^{1} (1+x)^3 (1-x)^3 dx = \Big(1 - (-1)\Big)^{4+4-1} \frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} = 2^7 \times \frac{3! \times 3!}{7!} = \frac{32}{35}$$

البته بدون استفاده از رابطه مذکور و با کمک بسط $(1 - x^2)^3$ نیز این انتگرال قابل محاسبه است.

مبحث کاربردهای انتگرال معین

۱۴۴. مساحت محدود بین نمودار تابع $x^2 y + 4y - 12 = 0$ و محورهای مختصات و خط $x = 2$ کدام است؟
(ژئوفیزیک ۷۶)

۱) $\frac{2\pi}{3}$ ۲) $\frac{4\pi}{3}$ ۳) $\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{4}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به معادله داده شده $y = \frac{12}{x^2 + 4}$ و چون محور y ها دارای معادله $x = 0$ است.

$$\text{مساحت} = \int_0^2 \frac{12}{x^2 + 4} dx = 6 \tan^{-1} \frac{x}{2}\Big|_0^2 = 6\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$

۱۴۵. سطح محدود به نمودار تابع $y = \tan x$ و محور x ها و خط $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) $\ln 2$ ۲) $1 + \ln 2$ ۳) $2 \ln 2$ ۴) $-1 + 2 \ln 2$

حل: گزینه ۱ درست است. چون محور x ها نمودار را در $x = 0$ قطع می‌کند:

$$\text{مساحت} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = -\ln(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln \frac{1}{2} + \ln 1 = \ln 2$$

۱۴۶. سطح محدود به منحنی $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ و محور x ها روی بازه $[0, \frac{4}{3}]$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{5}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) 1

حل: گزینه ۳ درست است. از تغییر متغیر $u = x^2 + 1$ و $du = 2x dx$ استفاده می‌کنیم.

$$\text{مساحت} = \int_0^{\frac{4}{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{25}{9}} u^{-\frac{1}{2}} du = \sqrt{u}\Big|_1^{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

۱۴۷. مساحت محدود به نمودار تابع $y = \ln \sqrt{x}$ و محور x ها و خط $x = e$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۷)

۱) 1 ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) $e - \frac{1}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $f(x) = \ln \sqrt{x}$ در $x = 1$ محور x ها را قطع می‌کند:

$$\text{مساحت} = \int_1^e \ln \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \ln x dx \overset{\text{جزء به جزء}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}(x \ln x - x)\Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

۱۴۸. سطح محصور بین منحنی $y = \sin x$ و محور x ها در فاصله $0 \le x \le 2\pi$ برابر است با: (مواد ۷۶)

۱) 0 ۲) 2 ۳) 5 ۴) 4

حل: گزینه ۴ درست است. چون $\sin x$ در فاصله مورد نظر تغییر علامت می‌دهد.

$$\text{مساحت} = \int_{\circ}^{\mathsf{r}\pi} |\sin x| dx \xlongequal{\text{تقارن}} \mathsf{f} \int_{\circ}^{\frac{\pi}{\mathsf{r}}} \sin x dx = \mathsf{f}$$

۱۴۹. اگر منحنی $y = ۲e^{-x}$ را در فاصله $[\circ, +\infty)$ ادامه دهیم مساحت محدود به این منحنی، محور y ها و محور x ها در فاصله $[\circ, +\infty)$ برابر است با: (مدیریت نساجی ۸۲)

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ∞ ۴) مساحت غیرقابل محاسبه است.

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\text{مساحت} = \int_{\circ}^{+\infty} ۲e^{-x} dx = -۲e^{-x}\Big|_{\circ}^{+\infty} = ۲$$

۱۵۰. سطح محدود به نمودار تابع $y = x^۲ - ۲x$ و محور x ها کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۸)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۵}{۴}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. حدود انتگرال، نقاط برخورد نمودار و محور x ها یعنی $x = \circ, ۲$ است.

$$\text{مساحت} = \int_{\circ}^{۲} |x^۲ - ۲x| dx = \int_{\circ}^{۲} (۲x - x^۲) dx = \left(x^۲ - \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_{\circ}^{۲} = \frac{۴}{۳}$$

۱۵۱. مساحت سطح محصور بین منحنی $y = \text{Arctan}x$، محور x ها و خط $x = ۱$ کدام عدد است؟

(معدن ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\ln\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴} + \ln\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\pi}{۴} - \ln\sqrt{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است. مساحت برابر $A = \int_{\circ}^{۱} \tan^{-۱} x dx$ است. و با توجه به محاسبات مثال ۲۸ در صفحه ۲۸۴ پاسخ گزینه (۴) است.

۱۵۲. مساحت ناحیه محدود به محور y ها، خط $x = \frac{\pi}{۴}$ و بالای نمودار $y = \sin x$ و زیر نمودار $y = \cos x$ کدام است؟ (ریاضی ۷۵)

۱) $\sqrt{۲} - ۱$ ۲) $۲\sqrt{۲} - \frac{۱}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲} - \frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۲} + \frac{۱}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. در فاصله $\circ \leq x \leq \frac{\pi}{۴}$ داریم $\cos x \geq \sin x$:

$$\text{مساحت} = \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}} (\cos x - \sin x) dx = (\sin x + \cos x)\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۴}} = \sqrt{۲} - ۱$$

۱۵۳. اندازه مساحت محصور بین منحنی‌های $y = e^x$ و $y = e^{۲x}$ و $\circ \leq x \leq ۱$ برابر است با:

(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) $\frac{(e-۱)^۲}{۲}$ ۲) $\frac{(e+۱)^۲}{۲}$ ۳) $\frac{e^۲ + ۲e}{۲}$ ۴) $\frac{e^۲ - ۲e}{۲}$

حل: گزینه ۱ درست است. چون $e^{۲x} \geq e^x$ پس:

$$\text{مساحت} = \int_{\circ}^{۱} (e^{۲x} - e^x) dx = \left(\frac{۱}{۲}e^{۲x} - e^x\right)\Big|_{\circ}^{۱} = \left(\frac{e^۲}{۲} - e - \frac{۱}{۲} + ۱\right) = \frac{(e-۱)^۲}{۲}$$

۱۵۴. مساحت ناحیه واقع در صفحه مختصات و محدود به خطوط به معادله‌های $x = -۱$ و $x = ۱$ و $y = ۲x - ۱$ و سهمی به معادله $y = ۳x^۲$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۱)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\text{مساحت} = \int_{-۱}^{۱} (۳x^۲ \underbrace{-۲x}_{\text{فرد}} + ۱)dx = ۲\int_{۰}^{۱}(۳x^۲+۱)dx = ۲(x^۳+x)\Big|_{۰}^{۱} = ۴$$

۱۵۵. مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x^۲ + ۱$ و $y = ۵$ واقع در ناحیه اول محورهای مختصات کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) $\frac{۲۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶}{۳}$ ۴) $\frac{۸}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. نقطه برخورد دو نمودار از حل معادله $x^۲ + ۱ = ۵$ برابر $x = \pm ۲$ است اما چون مساحت در ناحیه اول خواسته شده پس $x = ۲$ قابل قبول است.

$$\text{مساحت} = \int_{۰}^{۲} |x^۲ + ۱ - ۵|dx = \int_{۰}^{۲}(۴ - x^۲)dx = \left(۴x - \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_{۰}^{۲} = \frac{۱۶}{۳}$$

۱۵۶. اگر $f(x) = ax$ و $g(x) = x^۳$ و $a > ۰$ ثابت، آنگاه مساحت سطح محصور بین دو منحنی برابر است با: (عمران ۷۶)

۱) ۰ ۲) a ۳) $\frac{۱}{۲}a^۲$ ۴) $a^۲$

حل: گزینه ۳ درست است. ابتدا نقطه تقاطع دو منحنی را محاسبه می‌کنیم.

$$x^۳ = ax \implies x = ۰, \pm\sqrt{a}$$

$$\text{مساحت} = \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} |x^۳ - ax|dx = ۲\int_{۰}^{\sqrt{a}}(ax - x^۳)dx = ۲\left(\frac{a}{۲}x^۲ - \frac{x^۴}{۴}\right)\Big|_{۰}^{\sqrt{a}} = \frac{a^۲}{۲}$$

۱۵۷. مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $x = y^۲$ و $y = x^۲$ کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۲)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۴ درست است. تقاطع دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$y = x^۲ \;,\; x = y^۲ \implies x^۴ = y^۲ = x \implies x = ۰, ۱$$

$$\text{مساحت} = \int_{۰}^{۱} |\sqrt{x} - x^۲|dx = \int_{۰}^{۱}(\sqrt{x} - x^۲)dx = \left(\frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۱}{۳}x^۳\right)\Big|_{۰}^{۱} = \frac{۱}{۳}$$

۱۵۸. سطح محصور بین دو منحنی $xy = ۱$ و $۲x + y = ۳$ برابراست با: (سیستم ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۳}{۴} - ۲\ln ۲$ ۲) $\frac{۳}{۴} + \ln ۲$ ۳) $۲ + \ln ۲$ ۴) $\frac{۳}{۴} - \ln ۲$

حل: گزینه ۴ درست است. نقطه برخورد دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$y = \frac{۱}{x} \implies ۲x + \frac{۱}{x} = ۳ \implies ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \implies x = ۱, \frac{۱}{۲}$$

$$\text{مساحت} = \int_{\frac{۱}{۲}}^{۱} \left|۳ - ۲x - \frac{۱}{x}\right|dx = (۳x - x^۲ - \ln x)\Big|_{\frac{۱}{۲}}^{۱} = \frac{۳}{۴} + \ln\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۴} - \ln ۲$$

۱۵۹. اندازه سطح محصور بین منحنی‌های $\sqrt{x}+\sqrt{y}=۱$ و $x+y=۱$ برابر است با: (مکانیک ۷۴)

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۳

حل: گزینه ۲ درست است. نقطه تقاطع دو منحنی را محاسبه می‌کنیم.

$$x+(۱-\sqrt{x})^۲=۱ \implies ۲x-۲\sqrt{x}=۰ \implies x=۰,۱$$

$$\text{مساحت} = \int_۰^۱ |(۱-x)-(۱-\sqrt{x})^۲|dx = ۲\int_۰^۱ |\sqrt{x}-x|dx = ۲\int_۰^۱ (\sqrt{x}-x)dx = \frac{۱}{۳}$$

۱۶۰. مساحت بین نمودار تابع $۱ \le x \le ۳$ و $f(x)=\sin[x]$ و محور x ها کدام است؟ (سیستم ۸۲)

۱) $\cos ۱ - \cos ۳$ ۲) $\sin ۱ + \sin ۲$ ۳) $\sin ۳ + \sin ۱$ ۴) $\cos ۱ - \cos ۲$

حل: گزینه ۲ درست است.

$$\text{مساحت} = \int_۱^۳ |\sin[x]|dx = \int_۱^۲ |\sin ۱|dx + \int_۲^۳ |\sin ۲|dx = \sin ۱ + \sin ۲$$

۱۶۱. سطح محدود بین نمودار $f(x)=\frac{x^۳+۲}{x^۲}$ و مجانب مایل آن و خطوط $x=۱$ و $x=b$ را با S نمایش می‌دهیم. حاصل $\lim_{b\to+\infty} S$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) $+\infty$

حل: گزینه ۳ درست است. چون $f(x)=x+\frac{۲}{x^۲}$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{x^۲}=۰$ پس بنا به نکته ۲۳ در صفحه ۸۲ خط $y=x$ مجانب مایل f است. اگر $b>۱$ داریم:

$$S=\int_۱^b \left(\frac{x^۳+۲}{x^۲}-x\right)dx = \int_۱^b \frac{۲}{x^۲}\,dx = -\frac{۲}{x}\Big|_۱^b = ۲-\frac{۲}{b} \implies \lim_{b\to+\infty} S = ۲$$

۱۶۲. مساحت ناحیه محصور بین خط راست $y=\frac{۱}{۲}x$ و سهمی $y^۲=۸-x$ برابر است با: (معدن ـ آزاد ۸۲)

۱) ۱۲ ۲) ۴۵ ۳) ۳۶ ۴) ۱۱

حل: گزینه ۳ درست است. ساده‌تر است که مساحت را برحسب dy بنویسیم.

$$y^۲=۸-x \text{ و } y=\frac{۱}{۲}x \implies y^۲=۸-۲y \implies y^۲+۲y-۸=۰ \implies y=-۴,۲$$

$$\text{مساحت} = \int_{-۴}^۲ \left|۸-y^۲-۲y\right|dy = \int_{-۴}^۲ (۸-y^۲-۲y)dy = (۸y-\frac{y^۳}{۳}-y^۲)\Big|_{-۴}^۲ = ۳۶$$

۱۶۳. مساحت ناحیه محصور بین سهمی $x=y^۲+۲$ و خط راست $y=x-۸$ عبارت است از: (معدن ـ آزاد ۸۱)

۱) $\frac{۱۲۵}{۶}$ ۲) ۱۱۱ ۳) $\frac{۱۴۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱۱}{۳}$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا نقطه برخورد خط و سهمی را به دست می‌آویم.

$$y+۸=y^۲+۲ \implies y^۲-y-۶=۰ \implies y=-۲,۳$$

با توجه به این که سهمی به صورت $x=f(y)$ است:

$$\text{مساحت} = \int_{-۲}^۳ \left|y^۲+۲-(y+۸)\right|dy = \int_{-۲}^۳ (y-y^۲+۶)dy = \left(\frac{y^۲}{۲}-\frac{y^۳}{۳}+۶y\right)\Big|_{-۲}^۳ = \frac{۱۲۵}{۶}$$

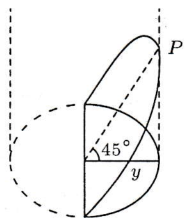
۱۶۴. سطح محصور بین محورها و نمودار $y = \sin^{-1}(x-1)$ و خط $y = \frac{\pi}{2}$ برابر است با:

۱) $2 + \frac{\pi}{2}$ ۲) $1 + \frac{\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{2} - 1$ ۴) $2 - \frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به ظاهر شدن تابع معکوس، بهتر است از فرمول مساحت برحسب y استفاده کنیم.

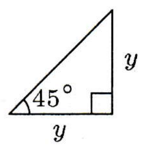
$$y = \sin^{-1}(x-1) \implies x = 1 + \sin y \implies \text{مساحت} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin y) dy = \frac{\pi}{2} + 1$$

۱۶۵. جسم زیر (که قسمتی از یک استوانه است) دارای قاعدهٔ نیم‌دایره به شعاع واحد بوده و زاویه صفحه P و صفحه قاعده جسم 45° می‌باشد. حجم این جسم کدام است؟ (آمار ۸۰)



۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{5}$

حل: گزینه ۳ درست است. دایره مقطع را $x^2 + y^2 = 1$ و قطر آن‌را محور x ها می‌گیریم. اگر صفحه عمود بر محور x ها را در نظر بگیریم، قاعده جسم را در پاره‌خطی به طول y قطع می‌کند و چون زاویه 45° است پس مقطع صفحه موردنظر با جسم، مثلثی قائم الزاویه و متساوی الساقین است.



بنابراین مساحت سطح مقطع برابر $A(x) = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(1 - x^2)$ است.

$$\text{حجم} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

۱۶۶. حجم حاصل از دوران سطح محدود به منحنی $y = \sqrt{1 + x^2}$ و $0 \le x \le 3$ و محور x ها، حول محور x ها کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۰)

۱) 6π ۲) 8π ۳) 12π ۴) 15π

حل: گزینه ۳ درست است. چون دوران حول محور x است، از روش دیسک استفاده می‌کنیم.

$$\text{حجم} = \pi\int_0^3 y^2 dx = \pi\int_0^3 (1 + x^2)dx = \pi(x + \frac{x^3}{3})\Big|_0^3 = 12\pi$$

۱۶۷. سطح محصور بین منحنی $y = e^x$ و محور x ها و خطوط $x = 0$ و $x = \ln 3$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم حادث کدام است؟ (مکانیک ـ آزاد ۷۵)

۱) 4π ۲) 5π ۳) 3π ۴) 2π

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به روش دیسک:

$$\text{حجم} = \pi\int_0^{\ln 3} y^2 dx = \pi\int_0^{\ln 3} e^{2x} dx = \frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ln 3} = \frac{\pi}{2}(9 - 1) = 4\pi$$

۱۶۸. سطح محدود به منحنی تابع $y = \sqrt{1 - \cos x}$ و محور x ها در فاصله $[0, 2\pi]$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم، حجم حادث کدام است؟ (صنایع غذایی ۷۹)

۱) π ۲) 2π ۳) π^2 ۴) $2\pi^2$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به روش دیسک:

$$\text{حجم} = \pi\int_{۰}^{۲\pi} y^{۲}dx = \pi\int_{۰}^{۲\pi}(۱-\cos x)dx = \pi(x-\sin x)\Big|_{۰}^{۲\pi} = ۲\pi^{۲}$$

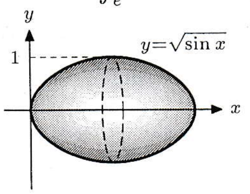
۱۶۹. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به منحنی $y=\dfrac{۱}{\sqrt{x\ln x}}$ در فاصلهٔ $[e,e^{۲}]$ حول محور x ها برابر است با:
(ریاضی ۸۰)

۱) π ۲) $\pi(\ln ۲ - ۱)$ ۳) $\pi\ln ۲$ ۴) ۲π

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به روش دیسک:

$$\text{حجم} = \pi\int_{e}^{e^{۲}} y^{۲}dx = \pi\int_{e}^{e^{۲}} \frac{dx}{x\ln x} \overset{u=\ln x}{=\!=\!=} \pi\int_{۱}^{۲}\frac{du}{u} = \pi\ln u\Big|_{۱}^{۲} = \pi\ln ۲$$

۱۷۰. حجم جسم دوار زیر کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۸۲)



۱) π ۲) ۲π

۳) $\dfrac{۳\pi}{۲}$ ۴) $\dfrac{\pi}{۲}$

حل: گزینه ۲ درست است. چون $\sin\pi = ۰$ و با توجه به شکل، جسم از دوران $y=\sqrt{\sin x}$ برای $۰\le x\le\pi$ حول محور x ها ایجاد می‌شود.

$$\text{حجم} = \pi\int_{۰}^{\pi} y^{۲}dx = \pi\int_{۰}^{\pi}\sin x dx = ۲\pi$$

۱۷۱. منحنی $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ را که $a,b>۰$ حول محور x ها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل برابر است با:
(معدن ۷۳)

۱) $\frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$ ۲) $\frac{۴}{۳}\pi a^{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۳}\pi b^{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. محور دوران از داخل شکل عبور کرده است، اما این محور در واقع محور تقارن شکل است پس بنا به نکته ۲۹ در صفحه ۳۰۸ باید فقط نیمه بالایی را دوران داده و حجم را محاسبه کنیم. محل تلاقی بیضی با محور x ها، $x=\pm a$ است پس:

$$\text{حجم} = \pi\int_{-a}^{a} y^{۲}dx = \pi\int_{-a}^{a} b^{۲}\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)dx = ۲\pi b^{۲}\int_{۰}^{a}\left(۱-\frac{x^{۲}}{a^{۲}}\right)dx = \frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}$$

نکته ۱. در اثر دوران بیضی $\dfrac{x^{۲}}{a^{۲}}+\dfrac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ حول محور x ها بیضیگونی به حجم $\frac{۴}{۳}\pi ab^{۲}$ و در اثر دوران بیضی حول محور y ها بیضیگونی به حجم $\frac{۴}{۳}\pi a^{۲}b$ حاصل می‌شود.

۱۷۲. حجم جسم حاصل از دوران منحنی $y=\dfrac{۱}{x}$ حول محور x ها از $x=۱$ تا $+\infty$ برابر است با:
(علوم کامپیوتر ۷۹، سیستم ۸۰)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $+\infty$ ۴) π

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به روش دیسک:

$$\text{حجم} = \pi\int_{۱}^{+\infty} y^{۲}dx = \pi\int_{۱}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}} = -\frac{\pi}{x}\Big|_{۱}^{+\infty} = \pi$$

۱۷۳. تصور کنید که R سطح محصور در زیر منحنی $xy = ۹$ در ربع اول مختصات و سمت راست خط $x = ۱$ باشد. اگر این سطح را حول محور x ها بگردانیم، حجم حادث برابر است با: (سیستم ـ آزاد ۸۱ و ۸۲)

۱) π ۲) ۹π ۳) ۳π ۴) ۸۱π

حل: گزینه ۴ درست است. معادله منحنی $y = \frac{۹}{x}$ است.

$$\text{حجم} = \pi\int_{۱}^{+\infty} y^{۲}dx = ۸۱\pi\int_{۱}^{+\infty}\frac{dx}{x^{۲}} = ۸۱\pi\left(-\frac{۱}{x}\right)\Big|_{۱}^{+\infty} = ۸۱\pi$$

۱۷۴. حجم جسم دواری که از دوران ناحیه R محصور بین منحنی تابع $f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}+x+۱}}$ و خطوط $x = ۰$ و $x = ۱$ حول محور x ها پدید می‌آید، کدام است؟ (معماری کشتی ۸۲)

۱) $\frac{\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$ ۲) $\frac{۴\pi\sqrt{۳}}{۹}$ ۳) $\frac{۲\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$ ۴) $\frac{۴\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۱۵}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به روش دیسک:

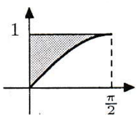
$$\text{حجم} = \pi\int_{۰}^{۱} f^{۲}(x)dx = \pi\int_{۰}^{۱}\frac{dx}{(x+\frac{۱}{۲})^{۲}+\frac{۳}{۴}} = \frac{\pi}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\tan^{-۱}\left(\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}\right)\Big|_{۰}^{۱}$$

$$= \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}\left(\tan^{-۱}\sqrt{۳} - \tan^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right) = \frac{۲\pi}{\sqrt{۳}}\left(\frac{\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}\right) = \frac{\pi^{۲}}{۳\sqrt{۳}} = \frac{\pi^{۲}\sqrt{۳}}{۹}$$

۱۷۵. ناحیه A محصور به منحنی $y = \sin x$ و $y = ۱$ و $x = ۰$ (در ربع اول) را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل چقدر است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\pi^{۲}}{۸}$

حل: گزینه ۳ درست است. با توجه به اینکه محور دوران از مرزهای شکل فاصله دارد باید دو حجم را از هم کم کنیم. حجم حاصل از دوران $y = ۱$ و $y = \sin x$ را با استفاده از روش دیسک محاسبه و از هم کم می‌کنیم. چون نقطه برخورد نمودار مثلثاتی و خط $y = ۱$ برابر $x = \frac{\pi}{۲}$ است.



$$\text{حجم} = \pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱-\sin^{۲}x)dx = \pi\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\cos^{۲}x\,dx = \frac{\pi}{۲}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(۱+\cos ۲x)dx$$

$$= \frac{\pi}{۲}\left(x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x\right)\Big|_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} = \frac{\pi^{۲}}{۴}$$

۱۷۶. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به نمودار تابع $y = ۴x^{۲}$ و $y = ۴x$ حول محور ox کدام است؟ (ژئوفیزیک ۷۶)

۱) $\frac{۳۲\pi}{۱۳}$ ۲) $\frac{۳۲\pi}{۱۵}$ ۳) $\frac{۲۸\pi}{۱۵}$ ۴) $\frac{۲۸\pi}{۱۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. ابتدا نقطه برخورد دو منحنی را به دست می‌آوریم.

$$۴x = ۴x^{۲} \implies x = ۰, ۱ \implies \text{حجم} = \pi\int_{۰}^{۱}\left|(۴x)^{۲}-(۴x^{۲})^{۲}\right|dx = ۱۶\pi\int_{۰}^{۱}(x^{۲}-x^{۴})dx = \frac{۳۲\pi}{۱۵}$$

۱۷۷. حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq ۰ \\ ۱ & x = ۰ \end{cases}$ و محور y ها و $x = \pi$ حول محور y ها کدام است؟ (علوم کامپیوتر ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{e}$ ۲) π ۳) ۲π ۴) ۴π

حل: گزینه ۴ درست است. دوران حول محور y است. از روش پوسته استوانه‌ای داریم:

$$\text{حجم} = ۲\pi \int_۰^\pi xydx = ۲\pi \int_۰^\pi \sin xdx = ۴\pi$$

۱۷۸. ناحیه بین منحنی $y = \sqrt{۱ + x^۲}$ و محور x ها $(۱ \leq x \leq ۳)$ را حول محور y ها دوران داده‌ایم. حجم جسم مربوطه برابر است با: (مدیریت نساجی ۸۱)

۱) $\pi(\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۸})$ ۲) $\frac{\pi}{۲}(\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۸})$

۳) $\frac{\pi}{۳}(\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۸})$ ۴) $\frac{۲}{۳}\pi(\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۸})$

حل: گزینه ۴ درست است. دوران حول محور y است، از روش پوسته استوانه‌ای داریم:

$$\text{حجم} = ۲\pi \int_۱^۳ xydx = ۲\pi \int_۱^۳ x\sqrt{۱ + x^۲}dx = \frac{۲\pi}{۳}(۱ + x^۲)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۱^۳ = \frac{۲\pi}{۳}(\sqrt{۱۰۰۰} - \sqrt{۸})$$

۱۷۹. حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی‌های $y = x$ و $y = x^۲$ حول محور y ها عبارت است از: (معدن ـ آزاد ۸۲)

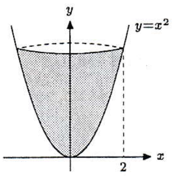
۱) $\frac{\pi}{۶}$ ۲) π ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{\pi}{۳}$

حل: گزینه ۱ درست است. از روش پوسته‌ای استفاده می‌کنیم. نقاط برخورد را محاسبه می‌کنیم.

$$y = x^۲ \ , \ y = x \implies x^۲ = x \implies x = ۰, ۱$$

$$\text{حجم} = ۲\pi \int_۰^۱ x(x - x^۲)dx = ۲\pi\left(\frac{x^۳}{۳} - \frac{x^۴}{۴}\right)\Big|_۰^۱ = \frac{\pi}{۶}$$

۱۸۰. حجم دوار در شکل زیر کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)



۱) ۸π ۲) ۶π

۳) ۴π ۴) $\frac{۱۶\pi}{۳}$

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به شکل، جسم از دوران ناحیه محدود به نمودار $y = x^۲$ و خط $y = ۴$ در ربع اول حول محور y ها حاصل می‌شود.

$$\text{حجم} = ۲\pi \int_۰^۲ x(۴ - x^۲)dx = ۲\pi(۲x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴)\Big|_۰^۲ = ۸\pi$$

۱۸۱. طول قوس منحنی $y = \sqrt{۱ - x^۲}$ از نقطه $x = ۰$ تا $x = ۱$ کدام است؟ (مکانیک ۷۸)

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۳}$ ۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) π

حل: گزینه ۳ درست است. چون منحنی داده شده یعنی $x^۲ + y^۲ = ۱$، دایره است، مساله یافتن محیط، $\frac{۱}{۴}$ دایره به شعاع یک و لذا برابر $\frac{۱}{۴}(۲\pi) = \frac{\pi}{۲}$ است.

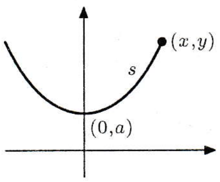
۱۸۲. طول قوس از منحنی $y = \frac{۲}{۳}x\sqrt{x}$ از نقطه $x = ۰$ تا $x = ۳$ کدام است؟ (آبیاری و زه‌کشی ۷۸)

۱) $\frac{۱۳}{۳}$ ۲) $\frac{۱۴}{۳}$ ۳) ۵ ۴) ۶

حل: گزینه ۲ درست است. جزء طول قوس یعنی ds را محاسبه می‌کنیم. چون $y = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}$:

$$y' = \sqrt{x} \implies ds = \sqrt{۱ + x}dx \implies \text{طول قوس} = \int_۰^۳ \sqrt{۱ + x}dx = \frac{۲}{۳}(x + ۱)^{\frac{۳}{۲}}\Big|_۰^۳ = \frac{۱۴}{۳}$$

۱۸۳. فرض کنید s، مطابق شکل زیر، برابر طول قوس منحنی $y = a\cosh\frac{x}{a}$ از پایین‌ترین نقطه آن، یعنی $(۰, a)$ تا نقطهٔ (x, y) باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ برابر است با: (ریاضی ۸۲)



۱) $\frac{s}{a}$ ۲) $\frac{s}{۲a}$

۳) as ۴) $۲as$

حل: گزینه ۱ درست است. ابتدا طول قوس نمودار از $(۰, a)$ تا (x, y) را می‌یابیم.

$$y' = \sinh\frac{x}{a} \implies ds = \sqrt{۱ + \sinh^۲\frac{x}{a}}dx = \sqrt{\cosh^۲\frac{x}{a}}dx = \cosh\frac{x}{a}dx$$

$$s = \text{طول قوس} = \int_۰^x \cosh\frac{t}{a}dt = a\sinh\frac{t}{a}\Big|_۰^x = a\sinh\frac{x}{a} \implies y' = \sinh\frac{x}{a} = \frac{s}{a}$$

۱۸۴. طول منحنی $y = \frac{۲}{۳}(x^۲ + ۱)^{\frac{۳}{۲}}$ از نقطه $x = ۱$ تا نقطه $x = ۴$ کدام است؟ (آمار ۷۷)

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

حل: گزینه ۴ درست است. چون $y' = ۲x(x^۲ + ۱)^{\frac{۱}{۲}}$ پس:

$$ds = \sqrt{۱ + y'^۲}\,dx = \sqrt{۱ + ۴x^۲(x^۲ + ۱)}dx = \sqrt{(۲x^۲ + ۱)^۲}dx = (۲x^۲ + ۱)dx$$

$$\implies \text{طول قوس} = \int_۱^۴ (۲x^۲ + ۱)dx = \left(\frac{۲}{۳}x^۳ + x\right)\Big|_۱^۴ = ۴۵$$

۱۸۵. $\overline{x}$ مؤلفه x مرکز ثقل ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^۲$ و $y = ۰$ و $x = ۱$ کدام است؟ (هسته‌ای ۸۰)

۱) ۱ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$M_y = \int_۰^۱ xf(x)dx = \int_۰^۱ x^۳dx = \frac{۱}{۴}\,,\; M = \int_۰^۱ f(x)dx = \int_۰^۱ x^۲dx = \frac{۱}{۳} \implies \overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{۳}{۴}$$

۱۸۶. عرض مرکز ثقل سطح محدود به منحنی $y = \sqrt{۱ - x}$ و محورهای مختصات کدام است؟

(آبیاری و زه‌کشی ۷۷)

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

حل: گزینه ۲ درست است. محل برخورد نمودار با محور x ها، $x = ۱$ است پس:

$$\begin{cases} M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)dx = \frac{1}{4} \\ M = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \end{cases} \Longrightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{8}$$

۱۸۷. مرکز ثقل ناحیه همگن محدود به منحنی $y = \cos x$ و محور x ها در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ از محور x ها چقدر فاصله دارد؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۲)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{\pi}{8}$ ۴) $\frac{\pi}{6}$

حل: گزینه ۳ درست است. اگر $G(\bar{x}, \bar{y})$ مرکز ثقل باشد، فاصله آن از محور x ها برابر $|\bar{y}| = \bar{y}$ است.

$$M_x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{4} \quad \text{و} \quad M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \Longrightarrow \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\pi}{8}$$

۱۸۸. عرض مرکز ثقل سطح همگن محدود به منحنی $y = \sqrt{1-x^2}$ و محور x ها کدام است؟ (مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۷)

۱) $\frac{2}{3\pi}$ ۲) $\frac{4}{3\pi}$ ۳) $\frac{5}{3\pi}$ ۴) $\frac{8}{3\pi}$

حل: گزینه ۲ درست است. در مثال ۵۷ در صفحه ۳۱۹ قرار دهید $a = 1$.

۱۸۹. $\bar{y}$ مؤلفه y مرکز ثقل حجم حاصل از دوران ناحیه محدود به تابع با ضابطه $y = x^2$ و $y = 0$ و $x = 1$ حول محور oy کدام است؟ (ژئوفیزیک ۸۰)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{5}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{5}$

حل: گزینه ۱ درست است. حجم جسم دوار را از روش پوسته استوانه‌ای محاسبه می‌کنیم.

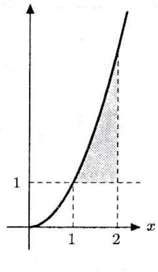
$$V = 2\pi\int_0^1 xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 x^3dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad M_{xz} = \pi\int_0^1 xf^2(x)dx = \pi\int_0^1 x^5dx = \frac{\pi}{6}$$

$$\Longrightarrow \bar{y} = \frac{M_{xz}}{V} = \frac{1}{3}$$

۱۹۰. مؤلفه x مرکز ثقل حجم حاصل از دوران ناحیه محدود توسط $y = x^2$ و خطوط $y = 1$ و $x = 2$ در ناحیه اول صفحه مختصات حول محور x ها عبارت است از:

۱) $\frac{40}{31}$ ۲) $\frac{45}{31}$ ۳) $\frac{20}{13}$ ۴) $\frac{45}{26}$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به (۳) در صفحه ۳۱۷:



$$V = \pi\int_1^2 \left|f^2(x) - g^2(x)\right|dx = \pi\int_1^2 (x^4 - 1)dx = \frac{26\pi}{5}$$

$$M_{yz} = \pi\int_1^2 x|f^2(x) - g^2(x)|\,dx = \pi\int_1^2 (x^5 - x)dx = 9\pi$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{45}{26}$$

۱۹۱. سیم نازکی را به صورت نیم دایره خم کرده‌ایم به طوری که معادله آن به صورت $y = \sqrt{a^۲ - x^۲}$ می‌باشد. فاصله مرکز ثقل سیم از محور x برابر است با: (معماری کشتی ۸۰)

۱) $\overline{y} = \frac{۳}{\pi}a$ ۲) $\overline{y} = \frac{a}{\pi}$ ۳) $\overline{y} = \frac{۲}{\pi}a$ ۴) $\overline{y} = \frac{۳}{۲\pi}a$

حل: گزینه ۳ درست است. مثال ۵۸ در صفحه ۳۱۹ را ملاحظه کنید.

۱۹۲. مساحت محدود به منحنی $x = t + t^۲$ و $y = t - t^۲$ و $۰ \leq t \leq ۱$ (با محور x ها) چقدر است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

حل: گزینه ۳ درست است. مساحت محدود با محور x ها عبارت است از:

$$\text{مساحت} = \int_{t=۰}^{t=۱} |y|\,|dx| = \int_۰^۱ (t-t^۲)(۱+۲t)dt = \int_۰^۱ (t+t^۲-۲t^۳)dt = \frac{۱}{۳}$$

۱۹۳. سطح محدود به منحنی $x = ۲\cos t$ و $y = ۳\sin t$ و $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ و محورهای مختصات کدام است؟

(صنایع غذایی ۷۹)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) π ۴) ۲π

حل: گزینه ۲ درست است. با توجه به این که $\frac{y^۲}{۹} + \frac{x^۲}{۴} = ۱$ معادله بیضی است و $x, y \geq ۰$ پس باید مساحت قسمتی از بیضی را به دست آوریم که در ربع اول واقع است و لذا مساحت برابر $\frac{۳\pi}{۲} = (\pi \times ۳ \times ۲)\frac{۱}{۴}$ است.

۱۹۴. مساحت محصور با منحنی $y = ۲\sin^۳ t$ و $x = \cos^۳ t$ برابر است با: (نساجی ـ آزاد ۸۰)

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۴}$ ۴) $\frac{۳\pi}{۴}$

حل: گزینه ۴ درست است. محاسبات را مانند مثال (۶۰ ـ الف) در صفحه ۳۲۲ انجام دهید. در این صورت به $۶\int_۰^{۲\pi} \sin^۴ t\cos^۲ t dt = ۲۴\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin^۴ t\cos^۲ t$ می‌رسیم که با توجه به مثال ۶۰ حاصل برابر $\frac{۳\pi}{۴}$ خواهد بود.

۱۹۵. طول منحنی پارامتری c به معادلهٔ $x = \cos^۲ t$ و $y = \sin^۲ t$ وقتی $۰ \leq t \leq \frac{\pi}{۲}$ کدام است؟

(ژئوفیزیک، سیستم، هسته‌ای و نفت ۸۱)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۲ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۴

حل: گزینه ۱ درست است. با توجه به اینکه $x + y = ۱$ پس باید طول قسمتی از خط $x + y = ۱$ بین $(۱, ۰)$ و $(۰, ۱)$ را به دست آوریم که برابر فاصله این دو نقطه یعنی $\sqrt{۲}$ است.

۱۹۶. طول قوس منحنی به معادلات $\begin{cases} x = ۲\sin t + \cos t \\ y = \sin t - ۲\cos t \end{cases}$ از نقطه نظیر $t = ۰$ تا نقطه نظیر $t = \frac{\pi}{۲}$ برابر کدام است؟

(مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۷۹)

۱) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۲) ۲π ۳) ۳π ۴) $\frac{\pi\sqrt{۵}}{۲}$

حل: گزینه ۴ درست است.

روش اول. عنصر طول قوس را محاسبه می‌کنیم.

$$ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}\,dt = \sqrt{(۲\cos t - \sin t)^۲ + (\cos t + ۲\sin t)^۲}\,dt = \sqrt{۵}\,dt$$

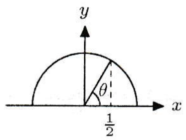
$$\text{طول قوس} = \int_{t=۰}^{t=\frac{\pi}{۲}} ds = \int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sqrt{۵}\,dt = \frac{\pi\sqrt{۵}}{۲}$$

روش دوم. توجه کنید که معادله منحنی به صورت $x^۲ + y^۲ = ۵$ یعنی یک دایره است. نقطه $t = ۰$ متناظر $A(۱, -۲)$ و نقطه $t = \frac{\pi}{۲}$ متناظر $B(۲, ۱)$ است. به سادگی می‌توان بررسی کرد OA و OB بر هم عمودند و لذا هدف یافتن طول یک ربع دایره از نقطه $(۱, -۲)$ تا $(۲, ۱)$ و برابر $\frac{\pi\sqrt{۵}}{۲} = \frac{۱}{۴}(۲\pi\sqrt{۵})$ است.

۱۹۷. طول قوسی از منحنی تابع $f(x) = \sqrt{۱ - x^۲}$ از نقطه $x = ۰$ تا $x = \frac{۱}{۲}$ کدام است؟ (صنایع غذایی ۸۲)

۱) $\frac{\pi}{۳}$ ۲) $\frac{\pi}{۴}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{\pi}{۸}$

حل: گزینه ۳ درست است.



روش اول. منحنی داده شده، دایره به شعاع یک است و با توجه به شکل $\cos\theta = \frac{۱}{۲}$ پس $\theta = \frac{\pi}{۳}$. چون کمان مورد نظر در فاصله $۰ \le x \le \frac{۱}{۲}$ قرار دارد پس روبرو به متمم θ یعنی $\frac{\pi}{۲} - \theta = \frac{\pi}{۶}$ است. اما طول کمان روبرو به زاویه α در دایره به شعاع R برابر $R\alpha$ و لذا $\frac{\pi}{۶}$ پاسخ سؤال است.

روش دوم. منحنی مورد نظر به صورت $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ نوشته می‌شود. $۰ \le x \le \frac{۱}{۲}$ متناظر $\frac{\pi}{۳} \le t \le \frac{\pi}{۲}$ است، پس:

$$ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}\,dt = \sqrt{(-\sin t)^۲ + (\cos t)^۲}\,dt = dt \implies \text{طول قوس} = \int_{\frac{\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۲}} dt = \frac{\pi}{۶}$$

۱۹۸. طول قوسی از منحنی $x = t^۲$ و $y = \frac{۱}{۳}t^۳ - t$ بین دو نقطه $t = ۰$ و $t = ۳$ چقدر است؟

(آبیاری و زه‌کشی ۸۲)

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۲

حل: گزینه ۴ درست است. منحنی پارامتری است.

$$ds = \sqrt{x'^۲ + y'^۲}dt = \sqrt{۴t^۲ + (t^۲ - ۱)^۲}dt = \sqrt{(t^۲ + ۱)^۲}dt = (t^۲ + ۱)dt$$

$$\text{طول قوس} = \int_۰^۳ (t^۲ + ۱)dt = \left(\frac{t^۳}{۳} + t\right)\Big|_۰^۳ = ۱۲$$

۱۹۹. طول کمانی از منحنی c به معادله $۰ \le t \le ۲\pi$ و $y = ۴\sin^۳ t$ و $x = ۴\cos^۳ t$ برابر است با:

(تأسیسات آبیاری ـ آزاد ۷۹)

۱) ۱۶π ۲) ۸π ۳) ۲۴ ۴) ۱۲π

حل: گزینه ۳ درست است. در مثال (۶۰ ـ ب) در صفحه ۳۲۲ قرار دهید $a = ۴$.