انتگرال معین و نامعین :

۱–برای محاسبه $\int \sqrt{1 \pm \sin x}dx$ از اتحاد $1 \pm \sin x = (\sin\frac{x}{2} \pm \cos\frac{x}{2})^2$ و برای محاسبه $\int \sqrt{1 \pm \cos x}\, dx$ از اتحاد های $1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ و $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ استفاده کنید .

۲– برای محاسبه $\int p(x)(ax+b)^n dx$ که $p(x)$ یک چند جمله ای دلخواه است قرار دهید $u = ax+b$.

۳– برای محاسبه انتگرال از توان های زوج سینوس یا کسینوس و یا حاصل ضربی از این دو از فرمول کاهش توان که در نکته اول گفته شده استفاده کنید .

۴–برای محاسبه $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ وقتی که حداقل یکی از توان ها فرد باشد ، از توان فرد یک واحد جدا کرده بقیه عبارت را بر حسب عبارت مثلثاتی دیگر می نویسیم و از تغییر متغیر عکس آن عبارت جدا کرده استفاده می کنیم . یعنی اگر $\sin x$ را جدا کردیم u را برابر $\cos x$ می گیریم و برعکس .

۵–برای محاسبه $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$ اگر m فرد باشد ، $\tan x \sec x$ را جدا کرده و توان باقی مانده از تانژانت را که یک عدد زوج است بر حسب $\sec x$ می نویسیم و از تغییر متغیر $u = \sec x$ استفاده می کنیم .

۶– با مفروضات نکته بالا اگر n زوج باشد ، $\sec^2 x$ را جدا می کنیم و توان باقی مانده از سکانت را که عددی زوج است بر حسب تانژانت می نویسیم و از تغییر متغیر $u = \tan x$ بهره می بریم .

۷– برای محاسبه $\int \cot^m x \csc^n x\, dx$ مانند نکات بالا عمل می کنیم با این تفاوت که به جای تانژانت از کتانژانت و به جای سکانت از کسکانت استفاده می کنیم .

۸–برای محاسبه انتگرال یک کسر گویا بر حسب سینوس و کسینوس قرار می دهیم $z = \tan\frac{x}{2}$ و به این ترتیب داریم :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad , \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad , \quad dx = \frac{2dx}{1+z^2}$$

۹–برای محاسبه $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x + c}$ صورت و مخرج را بر $\cos^2 x$ تقسیم کرده و سپس از تغییر متغیر $u = \tan x$ استفاده کنید .

۱۰- برای محاسبه $\int \frac{a\sin x + b\cos x}{c\sin x + d\cos x}dx$ که $c, d \neq 0$، قرار دهید $a\sin x + b\cos x = \alpha(c\sin x + d\cos x) + \beta(c\cos x - d\sin x)$ و مقادیر α و β را از دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} c\alpha - d\beta = a \\ d\alpha + c\beta = b \end{cases}$ به دست آورید . در این صورت حاصل انتگرال فوق برابر $\alpha x + \beta \ln|c\sin x + d\cos x|$ می شود .

۱۱–برای محاسبه انتگرال توابع رادیکالی باید به نحوی کل عبارت زیر رادیکال را به یک عبارت مربع کامل تبدیل کنیم تا بتوانیم مقدار انتگرال را محاسبه کنیم . خصوصا برای $\sqrt[n]{ax+b}$ از تغییر متغیر $u = ax + b$ استفاده کنید .

۱۲–در مواجه شدن با $\sqrt{a^2 - x^2}$ و $\sqrt{a^2 + x^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$ به ترتیب از $x = a\sin\theta$ ، $x = a\tan\theta$ و $x = a\sec\theta$ استفاده کرده و حدود θ را طوری انتخاب کنید که تابع مثلثاتی دارای معکوس باشد .

۱۳–در مواجه شدن با کسرهای گویا چنانچه درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد از روش تجزیه کسرهای جزئی کمک می گیریم . به این ترتیب که مخرج را به عوامل سازنده آن ، تجزیه کرده و متناظر هر عامل کسر می نویسیم . اگر درجه صورت از مخرج بیشتر بود ابتدا صورت را بر مخرج تقسیم کرده و باقی مانده آن را با روش زیر تجزیه کسر می کنیم .

الف) به جای عبارت $(x-a)^k$ که $k \in N$ ، مجموع k کسر به شکل زیر نوشته می شود :

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

ب) به جای عبارت $(x^2 + ax + b)^k$ که $\Delta < 0$ ، k کسر زیر را قرار می دهیم :

$$\frac{B_1 x + C_1}{x^2 + ax + b} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots + \frac{B_k x + C_k}{(x^2 + ax + b)^k}$$

برای محاسبه ضرایب کافی است دو طرف تساوی را در مخرج کسر ضرب کرده و ضرایب چند جمله های ایجاد شده در دو طرف را با هم مقایسه کنیم .

۱۴–برای محاسبه ضریب A_k در حالت (الف) از رابطه $A_k = \lim_{x\to a}(x-a)^k f(x)$ استفاده کنید .

۱۵–در مواجه شدن با حاصل ضرب چند جمله ای در نمایی و سینوس و کسینوس مثلثاتی و هیپربولیک و لگاریتم یا حاصل ضرب توابع نمایی در سینوس و وکسینوس از روش جزء به جزء استفاده کنید .

۱۶–برای محاسبه انتگرال هایی مانند $\int \ln x\,dx$ ، $\int \mathrm{Arcsin}\,x\,dx$ ، $\int (\mathrm{Arcsin}\,x)^{۲}\,dx$ و ... که انتگرال مورد نظر فقط شامل یک عبارت است ایده اصلی استفاده از روش جزء به جزء با گرفتن آن عبارت به عنوان u و قرار دادن $dx = dv$ است .

۱۷–انتگرال های توان های فرد $\sin ax$ و $\cos ax$ بر بازه هایی که طول آن برابر ضریبی از دوره تناوب است ، صفر می شود .

۱۸– انتگرال هر تابع فرد پیوسته بر بازه متقارن برابر صفر است .

۱۹– قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال :

$$\frac{d}{dx}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = u'(x)f(u(x)) - v'(x)f(v(x))$$

۲۰–برای محاسبه حد مجموع ریمان (وقتی تعداد جملات برابر n باشد) جمله عمومی عبارت داده شده را برابر $\frac{۱}{n}f(c_k)$ قرار داده و آن را در n ضرب کرده و در آن $\frac{k}{n}$ ایجاد می کنیم . پس از شناسایی c_k که معمولا برابر $\frac{k}{n}$ انتخاب می شود و تبدیل $c_k \to x$ تابع $f(x)$ حاصل می شود و پاسخ برابر $\int_{۰}^{۱} f(x)\,dx$ می باشد . دقت کنید که c_k می تواند هر عددی در بازه $\left[\frac{k-۱}{n}, \frac{k}{n}\right]$ انتخاب شود ولی معمولا برابر $\frac{k}{n}$ می شود .

۲۱–برای محاسبه انتگرال های معینی که حدود آن ها از صفر شروع می شوندو با استفاده از روش های تغییر متغیر و جزء به جزء حل نمی شوند یک ایده مناسب استفاده از تغییر متغیر u به شکل کران بالای انتگرال داده شده منهای x است ودر صورتی که بازه انتگرال گیری متقارن باشد معمولا تغییر متغیر $u = -x$ باعث ایجاد یک رابطه بازگشتی بر حسب انتگرال اولیه شده و در نهایت منجر به حل انتگرال معین داده شده می شود .

انتگرال ناسره :

۲۲– به انتگرال های معینی که حدود آن ها شامل بی نهایت باشد و یا در نقطه ای در بازه انتگرال داده شده ، مقدار تابع تحت انتگرال برابر بی نهایت شود ، انتگرال های ناسره می گوییم .

۲۳– در انتگرال هایی که بیش از یک ناسرگی دارند انتگرال را به دو بازه تقسیم کرده و همگرایی یا واگرایی انتگرال را به صورت جدا گانه در هر یک از آن ها بررسی می کنیم . همگرایی فقط زمانی رخ می دهد که انتگرال در همه ناسرگی ها همگرا باشد .

۲۴–انتگرال ناسره $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ (که در آن $a > ۰$ می باشد) برای $p > ۱$ همگرا و برای $p \le ۱$ واگراست .

۲۵- انتگرال ناسره $\int_{0}^{a} \frac{dx}{x^p}$ (که در آن $a > 0$ می باشد) برای $p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست .

۲۶-انتگرال ناسره $\int_{x_0}^{a} \frac{dx}{(x - x_0)^p}$ (که در آن $a > x_0$ می باشد) برای $p < 1$ همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست .

۲۷-(آزمون مقایسه) اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ فقط در x_0 ناسره بوده (x_0 بی نهایت نیز می تواند باشد) و آن نقطه بین دو تابع مشترک باشد و در همسایگی نقطه ناسرگی داشته باشیم $f(x) \geq g(x) \geq 0$ در این صورت :

الف) همگرایی $\int_a^b f(x)\,dx$ نتیجه می دهد که $\int_a^b g(x)\,dx$ همگراست .

ب) واگرایی $\int_a^b g(x)\,dx$ نتیجه می دهد که $\int_a^b f(x)\,dx$ واگراست .

۲۸-(آزمون هم ارزی) اگر $f(x)$ فقط در x_0 ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim g(x)$ آن گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ و $\int_a^b g(x)\,dx$ از لحاظ همگرایی یا واگرایی مثل هم هستند .

۲۹-اگر $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ فقط در بی نهایت ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \frac{1}{x^p}$ چنان چه $p > 1$ انتگرال همگرا و برای $p \leq 1$ واگراست .

۳۰-اگر $\int_a^b f(x)\,dx$ فقط در $x = x_0$ ناسره بوده و در این نقطه $f(x) \sim \frac{1}{(x - x_0)^p}$ چنان چه $p < 1$ انتگرال همگرا و برای $p \geq 1$ واگراست .

۳۱-اگر $\int_a^b |f(x)|\,dx$ همگرا باشد ، آن گاه $\int_a^b f(x)\,dx$ همگرا (همگرای مطلق) است .

۳۲-برای محاسبه انتگرال ناسره به جز در حالتی که نقطه ناسرگی داخل بازه است ، نیازی به توجه به ناسرگی نیست و آن را مانند انتگرال معین محاسبه می کنیم . ولی در جایگذاری ناسرگی در تابع اولیه در صورت نیاز باید حد آن را جایگزین مقدار نماییم .

۳۳-تابع گاما با رابطه $\Gamma(p+1) = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\,dt$ برای $p > 0$ تعریف شده و دارای رابطه بازگشتی $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ می باشد .

کاربرد انتگرال :

۳۴– مساحت ناحیه محدود توسط نمودار های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ در فاصله $a \le x \le b$ که در این فاصله خط موازی محور y ها از یکی از دو نمودار وارد و از دیگری خارج شود برابر $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ است . چنانچه نمودار به شکل $x = f(y)$ باشد ، کافی است نقش x و y را در انتگرال مذکور عوض کنیم .

۳۵ –به طور کلی برای محاسبه مساحت بین چند نمودار (و نه الزاما دو نمودار) اگر نمودارهای داده شده به شکل $y_i = f_i(x)$ باشند ، کافی است خطوط موازی محور y رسم کنیم . در فاصله ای که این خطوط همواره از یک نمودار وارد شده و از یک نمودار نیز خارج می شوند (در این جا فرض کنید این فاصله برابر $[a, b]$ باشد) ، مساحت بین این دو نمودار از رابطه $\int_a^b (y_{out} - y_{int})\,dx$ به دست می آید و دیگر نیازی به گذاشتن قدر مطلق نیست . (ورودی=int و خروجی=out) . مساحت بین این چند نمودار نیز برابر مجموع انتگرال های بین دو نمودار می باشد .

۳۶ – با مفروضات نکته ۳۵ چنانچه نمودار های داده شده به شکل $x_i = f_i(y)$ باشند ، کافی است خطوط موازی محور x ها رسم کنیم . در فاصله ای که این خطوط همواره از یک نمودار وارد شده و از یک نمودار نیز خارج می شوند (در این جا فرض کنید این فاصله برابر $[c, d]$ باشد) ، مساحت بین دو نمودار از رابطه $\int_c^d (x_{out} - x_{int})\,dy$ به دست می آید .مساحت بین این چند نمودار نیز برابر مجموع انتگرال های بین دو نمودارمی باشد .

۳۷–(**روش دیسک**) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار $y = f(x)$ و $y = g(x)$ (که یکی سقف و دیگری کف ناحیه است .) حول خط $y = \beta$) دوران کند ، حجم جسم حاصل از دوران از رابطه زیر به دست می آید :

$$V = \pi\int_a^b (R_۲^۲ - R_۱^۲)\,dx = \pi\int_a^b \left|(g(x) - \beta)^۲ - (f(x) - \beta)^۲\right|dx$$

که R همان شعاع دوران می باشد .

۳۸–(**روش پوسته استوانه ای**) اگر ناحیه محدود بین دو نمودار f و g در فاصله $[a, b]$ (که یکی از نمودارها سقف و دیگری کف ناحیه است .) حول خط $x = \alpha$ دوران کند از رابطه زیر به دست می آید :

$$v = \int_a^b ۲\pi\,(\text{شعاع دوران}) \times (\text{ارتفاع})\,dx = ۲\pi\int_a^b |x - \alpha||f(x) - g(x)|dx$$

۳۹–روش دیسک فقط تاکید بر این نکته دارد که المان انتخاب شده **عمود** بر محور دوران باشد و هیچ الزامی به این که محور دوران محور x ها باشد **ندارد** .

همچنین روش پوسته استوانه نیز فقط تاکید بر این مطلب دارد که المان انتخاب شده **موازی** محور دوران باشد و لزومی به دوران صرفا در جهت محور y ها **نیست**

۴۰–محور دوران نباید از داخل شکل عبور کند فقط در صورتی می تواند این اتفاق بیفتد که محور دوران محور تقارن ناحیه باشد . در این حالت نیمه بالایی یا پایینی جسم را دوران داده و **نباید** پاسخ نهایی را در ۲ ضرب کنیم .

۴۱–طول قوس تابع f در بازه $[a,b]$ برابر $\int_a^b ds$ است . اگر تابع f به صورت $y=f(x)$ باشد $ds=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ وچنان چه به صورت $x=f(y)$ باشد $ds=\sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$ است (توجه کنید که در این حالت حدود انتگرال باید بر حسب y باشد) و اگر f پارامتری باشد به صورت $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$ می باشد(در این حالت حدود انتگرال بر حسب t است) .

۴۲–تابع f دارای مشتق مرتبه اول پیوسته است . مساحت سطح جانبی ایجاد شده در اثر دوران قسمتی از آن در فاصله $a\le x\le b$ حول محور افقی یا قائمی که منحنی را قطع نمی کند برابر $2\pi\int_a^b R\,ds$ است که R همان شعاع دوران می باشد . چنانچه تابع داده شده به شکل $x=f(y)$ باشد ، کافی است حدود انتگرال را بر حسب y نوشته و از رابطه $ds=\sqrt{1+f'^2(y)}\,dy$ استفاده کنیم .

۴۳– اگر محور دوران (در دوران یک نمودار حول یک محور) محور تقارن نمودار باشد ، کافی است سطح جانبی حاصل از دوران نیمه ای از شکل که در یک طرف محور دوران واقع است را محاسبه کنیم و **نباید** پاسخ نهایی را در ۲ ضرب کنیم .

۴۴–مساحت محدود توسط منحنی پارامتری $y=y(t)$ و $x=x(t)$ و محور x ها در فاصله $a\le t\le b$ برابر $\int_{t=a}^{t=b}|y|\,dx=\int_a^b |y(t)||x'(t)|\,dt$ است .

۴۵–اگر منحنی پارامتری $y=y(t)$ و $x=x(t)$ برای $a\le t\le b$ بسته و در جهت مثلثاتی باشد ، مساحت محدود توسط آن برابر $\int_{t=a}^{t=b} x\,dy=-\int_{t=a}^{t=b} y\,dx=\frac{1}{2}\int_{t=a}^{t=b} x\,dy-y\,dx$ می باشد .