فصل پنجم

۵-۱ متغیرهای تصادفی دو و چند بعدی

فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y را داشته باشیم می‌دانیم هر کدام از دو متغیر به هر عضو فضای نمونه S مقداری حقیقی و منحصر به فرد نسبت می‌دهند همینطور به ازای هر کدام از X و Y یک تابع چگالی احتمال $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ خواهیم داشت.

اگر بخواهیم احتمال وقوع همزمان مقادیر برد هر یک از متغیرهای X و y را بصورت یک تابع احتمال نشان دهیم، متغیر تصادفی $Z=(X,Y)$ را متغیر تصادفی دو بعدی با تابع احتمال $f_{X,Y}(x,y)$ معرفی می‌کنیم.

متغیر تصادفی دو بعدی تمامی خواص متغیرهای یک بعدی را دارا می‌باشد همینطور خواص زیر برای تابع چگالی احتمال آن برقرار است:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X=x \ , \ Y=y)$$

برای متغیر تصادفی دو بعدی گسسته:

$$۱- \quad ۰ \le f_{X,Y}(x,y) \le ۱ \quad \forall x,y$$

$$۲- \quad \sum_{\text{برد } Y} \sum_{\text{برد } X} f_{X,Y}(x,y) = ۱$$

برای متغیر تصادفی دو بعدی پیوسته:

$$۱- \quad f_{X,Y}(x,y) \ge ۰ \quad \forall x,y$$

$$۲- \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) = ۱$$

$$۳- \quad P(a \le x \le b \ , \ c \le y \le d) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy$$

برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱: یک عدد تاس را که بر روی سه وجه آن عدد ۱ و بر روی سه وجه دیگر عدد ۲ حک شده است را دو بار پرتاب می‌کنیم و متغیرهای X و y را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X = \text{مجموع دو عدد ظاهر شده} = \{۲,۳,۴\}$$

$$Y = \text{تفاضل دو عدد ظاهر شده} = \{-۱,۰,۱\}$$

بنابراین متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) را می‌توان به این ترتیب تعریف نمود:

زوج مرتب نمایش دهنده مجموع و تفاضل دو عدد ظاهر $(X,Y)=$ شده در دو بار پرتاب تاس.

چند عضو فضای نمونه S عبارتند از: $= \{(۲,-۱)\ ,\ (۲,۰)\ ,\ (۲,۱)\ ,(۲,-۱)\ ,\ (۱-,۲)\ ,\ \ldots\}$

به این ترتیب تابع احتمال دو بعدی $f_{X,Y}(x,y)$ بصورت زیر می‌باشد:

۵-۳

Y \ X	۲	۳	۴
-۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰

به عنوان مثال مقادیر احتمال بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$f_{X,Y}(x=۲ \ , \ y=-۱) = ۰$$

برای اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده برابر با عدد ۲ باشد باید بر روی تاس در پرتاب اول عدد ۱ و در پرتاب دوم عدد ۱ ظاهر شده باشد. بنابراین احتمال این حالت برابر صفر می‌باشد.

اما برای حالت $(۲,۰)$ این احتمال برابر است با:

$$\underset{X,Y}{f}(x=۲\ ,\ y=۰)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

برای آنکه مجموع ۲ باشد می‌بایستی در پرتاب اول عدد ۱ و در پرتاب دوم عدد ۱ ظاهر شده باشد بنابراین احتمال اینکه در پرتاب اول عدد ظاهر شود برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد و چون ظاهر شدن عدد ۱ در پرتاب دوم مستقل از پرتاب اول است بنابراین احتمال ظاهر شدن ۱ در هر پرتاب برابر است با:

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

از روی تابع چگالی احتمال دو بعدی در این مثال می‌توان مقدار تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X را مستقل از Y محاسبه کنیم که آنرا تابع احتمال حاشیه‌ای یا کناری X می‌نامیم. که جمع بستن روی مقادیر Y در هر سطر بدست می‌آید به عبارتی:

$$\underset{X}{f}(x)\sum_{y}f_{X,Y}(x,y)$$

Y \ X	۲	۳	۴	$f_Y(y)$
−۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
۱	۰	$\frac{۱}{۴}$	۰	$\frac{۱}{۴}$
$f_X(x)$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	

به همین ترتیب تابع چگالی احتمال Y نیز با جمع بستن روی مقادیر X در جدول بدست می‌آید که به آن تابع احتمال حاشیه‌ای برای Y گویند.

$$\underset{Y}{f}(y)\sum_{x}f_{X,Y}(x,y)$$

۴–۵ برای نمونه $f_X(x)$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$f_X(۲)=f(۲,-۱)\ +f(۲,۰)+f(۲,۱)=۰+\frac{۱}{۴}+۰=\frac{۱}{۴}$$

$$f_X(۳)=f(۳,-۱)\ +f(۳,۰)+f(۳,۱)=\frac{۱}{۴}+۰+\frac{۱}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$f_X(۴)=f(۴,-۱)\ +f(۴,۰)+f(۴,۱)=۰+\frac{۱}{۴}+۰=\frac{۱}{۴}$$

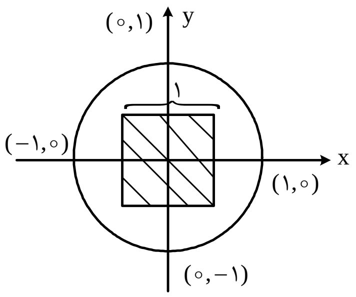
بنابراین:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۴} & x=۲\\ \frac{۱}{۲} & x=۳\\ \frac{۱}{۴} & x=۴\\ ۰ & \text{سایر مقادیر}\end{cases}$$

صحت مقادیر $f_X(x)$ را با استفاده از تعریف متغیر تصادفی X نیز می‌توان بررسی نمود مثلاً $f_X(۳)$ یعنی عدد ظاهر شده در پرتاب اول تاس ۱ و در پرتاب دوم ۲ بوده است یا عدد ظاهر شده در پرتاب اول ۲ و در پرتاب دوم ۱ بوده است که احتمال آن برابر است با:

$$f_X(۲)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\ +\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}$$

۵-۵ مثال ۲: از درون دایره واحد یک نقطه به تصادف انتخاب می‌کنیم متغیر تصادفی دو بعدی (X,Y) را طول و عرض نقطه انتخاب شده در نظر می‌گیریم مطلوبست محاسبه تابع چگالی احتمال دو بعدی $f_{X,Y}(x,y)$ و با استفاده از آن احتمال اینکه نقطه انتخاب شده درون مربع واحد قرار بگیرد را محاسبه کنید. همچنین تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای X و Y را محاسبه کنید.



حل: با توجه به شکل روبرو مقدار تابع چگالی را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c & x^{۲}+y^{۲}\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

حال مقدار مجهول C را محاسبه می‌کنیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy=۱$$

$$\Rightarrow \int_{۰}^{۱}\int_{۰}^{۲\pi} c\,r\,d\theta\,dr \quad \Rightarrow \quad c\pi=۱ \quad \rightarrow \quad c=\frac{۱}{\pi}$$

بنابراین تابع چگالی احتمال دو متغیر $f_{X,Y}(x,y)$ برابر است با:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} \frac{۱}{\pi} & x^{۲}+y^{۲}\le ۱ \\ ۰ & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

برای آنکه نقطه انتخابی درون مربع واحد باشد باید داشته باشیم:

$$-\frac{۱}{۲}\le +x \le \frac{۱}{۲} \quad , \quad -\frac{۱}{۲}\le y \le \frac{۱}{۲}$$

مقدار احتمال با انتگرال‌گیری روی $f_{X,Y}(x,y)$ در بازه فوق بدست می‌آید:

$$p(-\frac{۱}{۲}\le x\le \frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۲}\le y\le \frac{۱}{۲})=\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \frac{۱}{\pi}\,dx\,dy=\frac{۱}{\pi}$$

توجه کنید که مقدار $\frac{۱}{\pi}$ برابر با مساحت مربع تقسیم بر مساحت کل دایره می‌باشد که در فصل دوم نیز به این روش محاسبه می‌شد.

۶-۵ برای محاسبه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای متغیر X در حالت پیوسته به جای جمع بستن روی مقادیر Y از انتگرال‌گیری استفاده می‌کنیم به عبارتی:

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_{-\sqrt{۱-x^{۲}}}^{\sqrt{۱-x^{۲}}} \frac{۱}{\pi}(y)\ \Big|_{-\sqrt{۱-x^{۲}}}^{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

$$=\frac{۱}{\pi}\left(\sqrt{۱-x^{۲}}-(-\sqrt{۱-x^{۲}})\right)=\frac{۲\sqrt{۱-x^{۲}}}{\pi}$$

به همین ترتیب مقدار $f_Y(y)$ نیز بدست می‌آید:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}(x) \Big|_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sqrt{1-y^2} - (-\sqrt{1-y^2})\right) = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

۵-۷ ۱.۱.۴ تابع توزیع دو متغیره

تابع توزیع دو متغیره نیز کاملاً مشابه حالت یک متغیه بدست می‌آید به این ترتیب که:

$$F_{X,Y}(t_1, t_2) = p(x \le t_1,\ y \le t_2) \qquad \forall\ (t_1,t_2) \in R^2$$

حال اگر X و Y گسسته باشند تابع توزیع با جمع بستن روی X و Y تا (t_1,t_2) بدست می‌آید و اگر X و Y پیوسته باشند با انتگرال‌گیری تا (t_1,t_2).

حل: با توجه به تعریف داریم:

Y \ X	۲	۳	۴
-1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

با توجه به تابع توزیع می‌توان مقدار

احتمال اینکه مجموع دو عدد ظاهر شده کمتر از ۴ و تفاضل دو عدد ظاهر شده کمتر از ۰ باشد را بدست آورد که برابر است با $f_{X,Y}(4,0)$:

$$p(x \le 4,\ y \le 0) = F_{X,Y}(4,0) = \frac{3}{4}$$

۵-۸ ۲.۱.۴ امید ریاضی و گشتاورها برای توابع چگالی دو متغیره

همانند توابع چگالی یک متغیره امید ریاضی و توابع مولد گشتاورهای توام X و Y به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

برای متغیرهای گسسته X و Y:
$$E\left[g(X,Y)\right] = \sum_{\text{برد } Y} \sum_{\text{برد } X} g(X,Y)\, f_{X,Y}(x,y)$$

برای متغیرهای پیوسته X و Y:
$$E\left[g(X,Y)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(X,Y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

تابع مولد گشتاورهای متغیر تصادفی (X,Y):

$$m_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

توجه کنید که در این حالت نیز با گرفتن مشتق‌های پاره‌ای از تابع مولد گشتاور (X,Y) نسبت به t_1, t_2 و قرار دادن $(t_1,t_2) = (0,0)$ مقدار ijامین گشتاور توام (X,Y) بدست می‌آید. بصورت زیر:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} m_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{\partial}{\partial t_1} E\left[e^{t_1 X + t_2 Y}\right] = E\left[x e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

به همین ترتیب:

$$\frac{\partial}{\partial t_2} m_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[Y e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

با ادامه دادن روند فوق در نهایت داریم:

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial_{t_1}^{i}\ \partial_{t_2}^{j}} m_{X,Y}(t_1,t_2) = E\left[X^i\ Y^j\ e^{t_1 X + t_2 Y}\right]$$

با قرار دادن $(t_1,t_2)=(0,0)$ گشتاورهای (X,Y) بدست می‌آیند که عبارتند از:

$$m_{ij} = E\left[X^i\ Y^J\right] \qquad i,j = 0,1,2,\dots$$

(i و j هر دو با هم صفر نمی‌باشند)

توجه کنید که m_{0j} و m_{i0} همان گشتاورهای متغیرهای تصادفی X و Y به تنهایی می‌باشند یعنی:

$$m_{i0} = E[X^i]$$

$$m_{0j} = E[y^j]$$

همینطور:

$$m_{11} = E[X,Y]$$

$$m_{10} = E[X] \qquad m_{02} = E[Y^2]$$

$$m_{01} = E[Y] \qquad m_{21} = E[X^2 Y],\ \dots$$

۵-۹ مثال ۴: برای مثال ۲ مقدار مورد انتظار برای X ، Y و مجموع طول و عرض مشاهده شده را بدست بیاورید:

حل: طبق تعریف $E[X]$ بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x \frac{1}{\pi} dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} r^2 \cos\theta\ d\theta\, dr = \frac{r^3}{3}\Big|_0^1\ \sin\theta \int_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{3}(0-0) = 0$$

البته از آنجا که بازه انتگرال‌گیری متقارن بوده و تابع نیز فرد می‌باشد می‌توانستیم بدون محاسبه انتگرال نیز صفر بودن جواب را بدست بیاوریم.

مقدار $E[X]$ نیز همانند $E[X]$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} y \frac{1}{\pi} dy\, dx = 0$$

باز هم به علت تقارن و فرد بودن تابع انتگرال فوق صفر می‌باشد.

۵-۱۰ حال مقدار $E[X+Y]$ را محاسبه می‌کنیم:

$$E[X+Y] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (X+Y)\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} [x\, f_{X,Y}(x,y) + y\, f_{X,Y}(x,y)]\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_{X,Y}\, dy = E[X] + E[Y] = 0 + 0 = 0$$

توجه کنید که از مثال فوق می‌توان به این نتیجه رسید که $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ و در حالت کلی اگر $G(X)$ و $H(Y)$ به ترتیب توابعی از X و Y باشند داریم:

$$E[G(X)+H(Y)] = E[G(X)]+E[H(Y)]$$

همچنین توجه کنید که برای محاسبه $E[G(X)]+H(Y)]$ نیازی به دانستن تابع چگالی توام متغیرهای تصادفی X و Y نمی‌باشد بلکه تنها با داشتنن توابع چگالی کناری $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ می‌توان آنرا محاسبه نمود.

۵-۱۱ ۲۰۴ کوواریانس یا همپراشی

برای مقایسه میزان وابستگی میان دو متغیر تصادفی X و Y از شاخصی به نام کوواریانس یا همپراشی X و Y استفاده می‌کنیم. که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{X,Y} = COV(X,Y) = E[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]$$

توجه کنید که مقدار $COV(X,Y)$ در صورتی مثبت خواهد بود که اگر X بزرگتر از میانگینش باشد آنگاه Y نیز چنین باشد به عبارتی اگر X و Y هر دو هم جهت با یکدیگر افزایش یا کاهش داشته باشند مقدار کوواریانس مثبت خواهد بود

$$X\uparrow\ ,\quad Y\uparrow \quad\Rightarrow\quad \text{Sign}\quad (\text{cov}(X,Y)) = +۱$$

$$X\downarrow\ ,\quad Y\downarrow \quad\Rightarrow\quad \text{Sign}\quad (\text{cov}(X,Y)) = +۱$$

به همین ترتیب اگر $(X-\mu_x)$ و $(Y-\mu_y)$ با احتمال زیاد دارای علامت مخالف باشند یا به عبارتی X و Y در خلاف جهت هم باشند یعنی با افزایش یکی دیگری کاهش پیدا کند یا بلعکس در این صورت کوواریانس X و Y منفی خواهد بود:

$$X\uparrow\ ,\quad Y\downarrow \quad\Rightarrow\quad \text{sign}\quad (\text{cov}(X,Y)) = -۱$$

$$X\downarrow\ ,\quad Y\uparrow \quad\Rightarrow\quad \text{sign}\quad (\text{cov}(X,Y)) = -۱$$

مقدار کوواریانس را از رابطه زیر که ساده‌تر می‌باشد نیز می‌توان بدست آورد:

$$\text{cov}(X,Y) = E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$\text{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y] = E[XY-\mu_X Y-\mu_X\mu_Y]$$

اثبات:

$$=E[XY]-\mu_X E[Y]-\mu_Y E[X]+\mu_X\mu_Y$$

$$=E[XY]-\mu_X\mu_Y-\mu_Y\mu_X=E[XY]-\mu_X\mu_Y$$

۵-۱۲ با استفاده از رابطه فوق خواص متعددی را می‌توان برای کوواریانس بدست آورد که عبارتند از:

$$۱-\quad \text{cov}(X,Y) = \text{var}(X)=\delta_X^۲$$

اثبات:

$$\text{cov}(X,Y) =E[X.X]-E[X]E[X] = E[X^۲]-E^۲[X] = \delta_X^۲$$

$$۲-\quad \text{cov}(X,Y) = \text{cov}(Y,X)$$

اثبات:

$$\text{cov}(X,Y) =E[XY]-E[X]E[Y] = E[YX]-E[Y]E[X] = \text{cov}(Y,X)$$

$$۳-\quad \text{cov}(X,Y) = ۰$$ (C مقدار ثابت)

اثبات:

$$\text{cov}(X,Y) =E[X.C]-E[X]E[C] = CE[X]-CE[X] = ۰$$

$$۴-\text{cov}(ax\pm b,cy\pm d) = ac\ \text{cov}(X,Y)$$ (a , b , c , d مقادیر اثبات)

$$\text{cov}(ax+b,cy+d) = E[(ax+b)(cy+d)]-E[ax+b]E[cy+d]$$

اثبات:

$$=E[ac\,xy+adx+bcy+bd]-(a E[X]+b)(c E[Y]+d)$$

$$= ac E[XY]+ad E[X]+bc E[Y]+bd-ac E[X]E[Y]-ad E[X]-bc E[Y]-bd$$

$$ac\,E[XY]-ac\,E[X]\,E[Y]=ac\,(E[XY]-E[X]\,E[Y])=ac\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

بنابراین تغیر مبدأ تاثیری روی مقدار کوواریانس ندارد اما تغیر مقیاس بر روی مقدار کوواریانس موثر می‌باشد.

$۵-\ \mathrm{cov}(X,Y\pm Z)=\mathrm{cov}(X,Y)\pm\mathrm{cov}(X,Y)$ (X , Y , Z متغیرهای تصادفی)

اثبات:

$$\mathrm{cov}(X,Y\pm Z)=E[X(Y\pm Z)]-E[X]\,E[Y\pm Z]$$
$$=E[XY\pm XZ)]-E[X]\left[E[Y]\pm E[Z]\right]$$
$$=E[XY]\pm E[XZ)]-E[X]\left[E[Y]\pm E[X]\,E[Z]\right]$$
$$=E[XY]-E[X]\,E[Y]\pm(E[XZ)\pm E[X]\,E[Z])$$
$$=\mathrm{cov}(X,Y)\pm\mathrm{cov}(X,Z)$$

۱۳-۵ ۱.۲.۴ ضریب همبستگی خطی بین X و Y

مقدار کوواریانس نیز همانند واریانس به مقیاس متغیرهای تصادفی X وy وابسته است این مطلب را در خواص کوواریانس نیز نشان دادیم. به عبارتی ممکن است برای یک قانون احتمال، مقدار کوواریانس بسیار بیشتر از دیگری باشد، اما نمی‌توان گفت تمایل تغیر کردن X و Y با یکدیگر در حالت اول بیشتر از حالت دوم می‌باشد مشابه ایم مطلب را در فصل اول نیز برای واریانس دو جامعه آماری داشتیم که برای حل آن از ضریب تغیرات استفاده نمودیم. در اینجا برای بدست آوردن معیاری دقیق برای مقایسه میزان تمایل تغیرات همزمان دو متغیر C و Y از ضریب همبستگی خطی استفاده می‌کنیم که بصورت زیر تعریف می‌شود و با $f_{X,Y}$ نمایش داده می‌شود:

$$f_{X,Y}=\mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X},\ \frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)=\frac{\delta_{XY}}{\delta_X\ \delta_Y}$$

همچنین با ساده نمودن رابطه فوق داریم:

$$\mathrm{cov}\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X},\ \frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)=E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)\right]-E\left[\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right]\ E\left[\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right]$$

با توجه به اینکه متغیر تصادفی $\frac{X-\mu_X}{\delta_X}$ برمال شده می‌باشد بنابراین امید ریاضی آن برابر صفر می‌باشد یعنی: $E\left[\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right]=E\left[\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right]=۰$

بنابراین داریم: $f_{X,Y}=E\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\delta_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\delta_Y}\right)\right]$

۱۴-۵ حال نشان می‌دهیم که مقدار $f_{X,Y}$ همواره بین ۱ و ۱- قرار دارد یعنی $\left|f_{X,Y}\right|\le ۱$.

اثبات: دو متغیر تصادفی w و z و مقدار متغیر a را در نظر بگیرید در این صورت متغیر تصادفی $T=(aw-z)^{۲}$ را تعریف می‌کنیم. به ازای هر a مقادیر متغیر تصادفی T همواره مثبت است بنابراین امید ریاضی آنها نیز مثبت می‌باشد یعنی داریم: $E[(aw-z)^{۲}]$.

$$\Rightarrow\quad E[a^{۲}w^{۲}-۲awz+z^{۲}]\ge ۰$$
$$\Rightarrow\quad a^{۲}E[w^{۲}]-۲aE[wz]+E[z^{۲}]\ge ۰\qquad ;\forall a$$

حال چون به ازای هر a نامساوی فوق برقرار می‌باشد می‌توان قرار داد $a=\frac{E[wz]}{E[w^{۲}]}$.

بنابراین:

$$\Rightarrow \frac{E^2[wz]}{E^2[w^2]} E[w^2] - 2\frac{E^2[wz]}{E[w^2]} + E[z^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{E^2[wz]}{E[w^2]} + E[z^2] \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{E^2[wz]}{E[w^2]\,E[z^2]} \leq 1$$

حال به جای متغیرهای تصادفی w و z قرار می‌دهیم: $Z = y - \mu_Y \;,\; w = X - \mu_X$.

داریم:

$$\frac{E^2\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right]}{E\left[(X-\mu_X)^2\right] E\left[(Y-\mu_Y)^2\right]} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta_{XY}^2}{\delta_X^2\,\delta_Y^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \rho_{XY}^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |\rho_{XY}| \leq 1$$

۵-۱۵ توجه کنید که در اثبات فوق اگر حالت تساوی در نامساوی $E[(aw-z)^2]$ رخ دهد داریم: $E[T] = E[(aw-z)^2] = 0$

اما متغیر تصادفی T همواره مثبت است بنابراین میانگین آن تنها زمانی صفر می‌باشد که تمام مقادیری که T قبول می‌کند برابر صفر باشند به عبارت دقیقتر متغیر تصادفی T با احتمال ۱ برابر صفر می‌باشد یعنی:

$$\begin{aligned} p(T=0) = 1 \quad &\Rightarrow \quad p((aw-z^2) = 0) = 1 \\ &\Rightarrow \quad p(aw - z = 0) = 1 \\ &\Rightarrow \quad p(aw = z) = 1 \\ &\Rightarrow \quad p(Y - \mu_Y = a(X - \mu_X)) = 1 \\ &\Rightarrow \quad p(Y = ax + \mu_Y - a\mu_X) = 1 \end{aligned}$$

۵-۱۶ بنابراین با احتمال صددرصد متغیر تصادفی Y برابر با $ax - \mu_Y - a\mu_X$ می‌باشد و این نشان می‌دهد که از مقادیر قابل استفاده به (X, Y) تنها مقادیری که روی یک خط راست به معادله $Y = ax - \mu_Y - a\mu_X$ قرار دارند می‌توانند احتمال مثبت داشته باشد. به همین دلیل است که می‌گوییم ضریب همبستگی خطی میزان وابستگی خطی بین دو متغیر X و Y را نشان می‌دهد.

هر چه مقدار $P_{X,Y}$ به عدد ۱ یا ۱- نزدیک‌تر باشد، متغیرهای X و Y تمایل بیشتری به متغیر مستقیم یا معکوس با یکدیگر خواهند داشت و اگر $P_{X,Y} = 0$ باشد، بدین معنی است که متغیرهای X و Y به صورت خطی به یکدیگر وابسته نمی‌باشند. مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است برای دو متغیر X و Y داشته باشیم $P_{X,Y} = 0$ اما در عین حال دو متغیر کاملاً به یکدیگر وابسته باشند.

۵-۱۷ مثال ۵: متغیر تصادفی X بصورت زیر تعریف شده است:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

متغیر تصادفی Y را برابر X^2 تعریف می‌کنیم در این صورت:

الف) $f_Y(y)$ را محاسبه کنید.

ب) ρ_{XY} را محاسبه کنید.

حل: با توجه به اینکه $Y=X^{۲}$ داریم:

$$F_Y(y) = p(Y\le y) = p(X^{۲}\le y) = p(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

حال می‌بایستی تابع توزیع متغیر تصادفی X را بدست بیاوریم:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-۲}^{x} \frac{۱}{۴}\,dx = \frac{۱}{۴}(x+۲)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} ۰ & x\le -۲ \\ \frac{۱}{۴}(x+۲) & -۲\le x\le ۲ \\ ۱ & x>۲ \end{cases}$$

بنابراین تابع توزیع Y برابر است با:

$$F_Y(y) = \frac{۱}{۴}(\sqrt{y}+۲) - \frac{۱}{۴}(-\sqrt{y}+۲) = \frac{۱}{۲}\sqrt{y}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} ۰ & y<۰ \\ \frac{\sqrt{y}}{۲} & ۰\le y\le ۴ \\ ۱ & ۴<y \end{cases}$$

با مشتق‌گیری از $F_Y(y)$ تابع چگالی Y را بدست می‌آوریم.

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{۱}{۴\sqrt{y}} & ۰\le y\le ۴ \\ ۰ & \text{سایر} \end{cases}$$

۱۸-۵ ب: برای محاسبه ρ_{XY} به مقادیر $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ نیاز داریم زیرا :

$$\rho_{XY} = \frac{\delta_{XY}}{\delta_X\,\delta_Y} = \frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\delta_X\,\delta_Y}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-۲}^{۲} \frac{۱}{۴}x\,dx = ۰$$

به دلیل فرد بودن تابع $\frac{۱}{۴}x$ در بازه $[-۲\,,\,۲]$ مقدار انتگرال صفر می‌باشد.

$$E[Y] = \int_{۰}^{۴} y\,\frac{۱}{۴}\,\frac{۱}{\sqrt{y}}\,dx = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۲}{۳}\,y^{\frac{۲}{۳}}\right)\Big|_{۰}^{۴} = \frac{۸}{۶}$$

$$E[XY] = E[XX^{۲}] = E[X^{۳}] = \int_{-۲}^{۲} x^{۳}\,\frac{۱}{۴}\,dx = ۰$$

به این ترتیب مقدار ρ_{XY} برابر است با:

$$\underbrace{\delta_{XY}}_{\text{کوواریانس}} = ۰ - \underbrace{\frac{۸}{۶}}_{\text{دوم}}\times ۰ = \underbrace{۰}_{\text{اول}} \Rightarrow \rho_{XY} = ۰$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید مقدار ρ_{XY} صفر می‌باشد و این به معنی عدم وابستگی دو متغیر X و Y نمی‌باشد بلکه به معنی عدم وابستگی خطی آندو است به وضوح X و Y بصورت توانی $(Y=X^{۲})$ به یکدیگز وابسته‌اند.

مثال ۶: نشان دهید ضریب همبستگی خطی با اعمال تغیر مبدأ و مقیاس روی متغیرهای تصادفی X و Y بدون تغیر باقی می‌ماند؟

حل: برای این منظور می‌بایستی ثابت کنیم:

$$\rho_{ax+b,\,cy+d} = \rho_{XY}$$

اثبات:

$$\rho_{ax+b,\,cy+d} = \frac{\operatorname{cov}(ax+b, cy+d)}{\sqrt{\operatorname{var}(ax+b)\operatorname{var}(cy+d)}} = \frac{ac\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{a^2\operatorname{var}(X)\,c^2\operatorname{var}(Y)}}$$

$$= \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(Y)}} = \rho_{X,Y}$$

۵-۲۰ مثال ۷: در مثال ۱ مقدار $\operatorname{var}(3x-2y+1)$ را محاسبه کنید:

در مثال ۱ جدول احتمالات دو متغیره بصورت زیر بدست آمد:

Y \ X	2	3	4	
−1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

می‌دانیم: $\operatorname{var}(X) = \operatorname{cov}(X,X)$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\operatorname{var}(3X-2Y+1) = \operatorname{var}(3X-2Y) = \operatorname{cov}(3X-2Y,\,3X-2Y)$$
$$= \operatorname{cov}(3X,3X) + \operatorname{cov}(2Y,2Y) - 12\operatorname{cov}(X,Y)$$
$$= 97\operatorname{var}(X) + 47\operatorname{var}(Y) - 12\operatorname{cov}(X,Y)$$

بنابراین می‌بایستی مقادیر δ_X^2 , δ_Y^2 , δ_{XY} را از روی جدول محاسبه کنیم:

$$E[X] = \frac{1}{4}\times 2 + \frac{1}{2}\times 3 + \frac{1}{4}\times 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 3$$

$$E[Y] = \frac{1}{4}(-1) + \frac{2}{4}\times 0 + \frac{1}{4}1 = 0$$

$$E[X^2] = \frac{1}{4}\times 4 + \frac{1}{2}\times 9 + \frac{1}{4}\times 16 = 1 + \frac{9}{2} + 4 = \frac{19}{2}$$

$$E[Y^2] = \frac{1}{4}\times 1 + \frac{2}{4}\times 0 \times \frac{1}{4}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{var}(X) = E[X^2] - E^2[X] = \frac{19}{2} - 9 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{var}(Y) = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$E[XY] = (3\times -1)\times\frac{1}{4} + (3\times 1)\times\frac{1}{4}\times(4\times 0)\times\frac{1}{4}\times(3\times 0)\times\frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{var}(3X-2Y+1) = 9\times\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} - 0 = \frac{13}{2} = 6/5$$